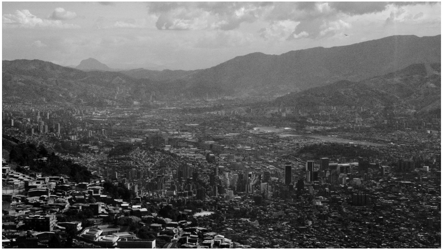


Entre ZFC y HoTT - sobre posibles crisis de fundamentos en la matemática

Andrés Villaveces - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*
Coloquio Escuela de Matemáticas - Universidad Nacional - Medellín, octubre de 2018

Temas

- ¿Fundamentos nuevos?
- La primera crisis: ¿por qué ZFC? ¿qué logra ZCF?
  - Problema del continuo - propiedades de los reales
  - La época de Cohen
  - El forcing de Cohen: ¿Expandir el universo?
  - Nombres (secciones) - control del genérico
  - El modelo de Cohen - control
- HoTT + UF (Homotopy Type Theory + Univalent Foundations)
  - Teorías de tipos
  - Univalencia - Sintética y Analítica
  - Conclusiones/Inicios

Aparente crisis... ¿de nuevo?

Al inicio del siglo XX la crisis con los fundamentos de la matemática puso a la comunidad matemática a discutir intensamente. La paradoja de Russell generó interés tanto en matemáticos como en filósofos.
Un siglo después la lógica matemática es otra rama de la matemática, sumamente sofisticada (cuatro subáreas grandes, problemas en interacción complicada con geometría no conmutativa, física matemática, etc.) y el tema de fundamentos ha pasado para los lógicos en general a un absoluto segundo plano.

Aparente crisis... ¿de nuevo?

Al inicio del siglo XX la crisis con los fundamentos de la matemática puso a la comunidad matemática a discutir intensamente. La paradoja de Russell generó interés tanto en matemáticos como en filósofos.

Un siglo después la lógica matemática es otra rama de la matemática, sumamente sofisticada (cuatro subáreas grandes, problemas en interacción complicada con geometría no conmutativa, física matemática, etc.) y el tema de fundamentos ha pasado para los lógicos en general a un absoluto segundo plano.

En 2006 una nueva crisis se anuncia con la llegada de Voevodsky.

Voevodsky - Una historia de vaivenes complicados

Voevodsky (1966-2017) recibió la medalla Fields en 2002 a sus 36 años, por sus nuevas teorías de cohomología para variedades algebraicas. Demostró conjeturas de Milnor y de Bloch-Kato, que conectaban los grupos K-teóricos de cuerpos y cohomología de Galois. En su obituario del IAS (Princeton) dicen: "He had a deep understanding of classical homotopy theory, where the objects considered are flexible, meaning **continuous deformations are neglected**, and was able to transpose..."

Voevodsky - Una historia de vaivenes complicados

- 1990: Voevodsky y Kapranov: "∞-Groupoids as a Model for a Homotopy Theory" - aplican las ideas para cohomología motívica
- ...
- ...

Voevodsky - Una historia de vaivenes complicados

- 1990: Voevodsky y Kapranov: "∞-Groupoids as a Model for a Homotopy Theory" - aplican las ideas para cohomología motívica
- 1992: "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers" - base de trabajos posteriores con Suslin, Friedlander, etc.
- ...
- ...

Voevodsky - Una historia de vaivenes complicados

- 1990: Voevodsky y Kapranov: "∞-Groupoids as a Model for a Homotopy Theory" - aplican las ideas para cohomología motívica
- 1992: "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers" - base de trabajos posteriores con Suslin, Friedlander, etc.
- ...
- 1999-2000: conferencias en el IAS - identifica un error en el lema clave de su artículo de 1992 - aparecen más situaciones problemáticas
- ...

Voevodsky - Una historia de vaivenes complicados

- 1990: Voevodsky y Kapranov: "∞-Groupoids as a Model for a Homotopy Theory" - aplican las ideas para cohomología motívica
- 1992: "Cohomological Theory of Presheaves with Transfers" - base de trabajos posteriores con Suslin, Friedlander, etc.
- ...
- 1999-2000: conferencias en el IAS - identifica un error en el lema clave de su artículo de 1992 - aparecen más situaciones problemáticas
- ...
- 2009: modelos univalentes... verificación computacional

Objetos patológicos / Demostraciones patológicas

La crisis anterior, hace un siglo, era sobre todo una crisis de **objetos** matemáticos:

- Números reales,
- Conjuntos - paradoja de Russell,
- Anclaje de los reales en los naturales,
- Naturaleza de los infinitos descubiertos por Cantor,
- Anclaje del resto de la matemática en la teoría de conjuntos

Objetos patológicos / Demostraciones patológicas

La crisis anterior, hace un siglo, era sobre todo una crisis de **objetos** matemáticos:

- Números reales,
- Conjuntos - paradoja de Russell,
- Anclaje de los reales en los naturales,
- Naturaleza de los infinitos descubiertos por Cantor,
- Anclaje del resto de la matemática en la teoría de conjuntos

La crisis señalada por Voevodsky es (inicialmente) una crisis de **demostraciones** matemáticas:

- ¿Cómo verificar que no haya un lema mal?
- ¿Cómo reducir a algo programable nuestra creación - y evitar errores?
- ¿Cómo dar cuenta de la parte de la matemática que interesaba a Voevodsky?

La teoría de conjuntos vista desde fuera

En 2016, en un evento en Bielefeld se busca comparar ZFC con Fundamentos Univalentes. Dzamonja resume cómo se ve la teoría de conjuntos desde fuera:

- Consiste de los axiomas de ZFC y posiblemente la existencia de grandes cardinales
- Se considera importante en los fundamentos de la matemática dado que muchas de las nociones clásicas se pueden axiomatizar en la teoría de conjuntos y tienen representación en el universo de von Neumann (jerarquía acumulativa).
- Hilbert consideraba que toda la matemática podía ser formulada en la teoría de conjuntos básica.

Y un poco desde adentro

- Por el teorema de incompletitud es mejor concentrarse en lo que se puede hacer en ZFC y estudiar lo que no se puede mediante pruebas de independencia (Shelah et al.)
- Buscar axiomas adicionales a ZFC, con la esperanza de resolver preguntas tipo Hipótesis del Continuo, etc. (Programa de Gödel, luego escuela californiana, Woodin.)
- V=L como axioma - muy restrictivo.
- Axiomas de forcing (Magidor et al.)

Cómo se desenvuelven las crisis - y de dónde salen

Miraremos (como matemáticos) qué tipo de preguntas dieron lugar a la crisis de hace un siglo y qué tipo de respuestas fueron apareciendo (y siguen apareciendo):

- En teoría de conjuntos, el rol de la pregunta sobre el continuo y algunas de las respuestas.
- En HoTT+UF, el rol de la pregunta de Grothendieck sobre deformaciones, deformaciones de deformaciones, etc.

Cantor - Hilbert - Gödel

Cantor 1878: ¿Existe $A \subset \mathbb{R}$ infinito, no contable, que no esté en biyección con $\mathbb{R}$?

$$2^{\aleph_0} \stackrel{?}{=} \aleph_1$$

Cantor - Hilbert - Gödel

Cantor 1878: ¿Existe $A \subset \mathbb{R}$ infinito, no contable, que no esté en biyección con $\mathbb{R}$?

$$2^{\aleph_0} \stackrel{?}{=} \aleph_1$$

Hilbert 1900: Primer problema: probar (o refutar) la Hipótesis del Continuo.

Cantor - Hilbert - Gödel

Cantor 1878: ¿Existe $A \subset \mathbb{R}$ infinito, no contable, que no esté en biyección con $\mathbb{R}$?

$$2^{\aleph_0} \stackrel{?}{=} \aleph_1$$

Hilbert 1900: Primer problema: probar (o refutar) la Hipótesis del Continuo.

Gödel 1940: No se puede refutar la Hipótesis del Continuo: en L, "modelo de ZFC", vale la Hipótesis del Continuo. Rigidez de L (condensación).

Capturar de verdad los reales

Única restricción al tamaño del continuo en ZFC:

König $\operatorname{cf} 2^{\aleph_0} \neq \omega$.

Capturar de verdad los reales

Única restricción al tamaño del continuo en ZFC:

König $\operatorname{cf} 2^{\aleph_0} \neq \omega$.

Suslin ¿cómo caracterizar la estructura $(\mathbb{R}, <)$?

Capturar de verdad los reales

Única restricción al tamaño del continuo en ZFC:

- König: $\mathrm{cf}\ 2^{\aleph_0} \neq \omega$.
- Suslin: ¿cómo caracterizar la estructura $(\mathbb{R}, <)$?

¿Qué propiedades de un orden abstracto $(X, <)$ implican que $(X, <) \approx (\mathbb{R}, <)$?

Capturar de verdad los reales

Única restricción al tamaño del continuo en ZFC:

König $\operatorname{cf} 2^{\aleph_0} \neq \omega$.

Suslin ¿cómo caracterizar la estructura $(\mathbb{R}, <)$?

¿Qué propiedades de un orden abstracto $(X, <)$ implican que $(X, <) \approx (\mathbb{R}, <)$?

$$\text{orden total denso sin extremos } + \text{ Dedekind-completo} \tag{1}$$

Capturar de verdad los reales

Única restricción al tamaño del continuo en ZFC:

König $\quad \mathrm{cf}\, 2^{\aleph_0} \neq \omega.$

Suslin $\quad$ ¿cómo caracterizar la estructura $(\mathbb{R}, <)$?

¿Qué propiedades de un orden abstracto $(X, <)$ implican que $(X, <) \approx (\mathbb{R}, <)$?

$$\text{orden total denso sin extremos} \;+\; \text{Dedekind-completo} \tag{1}$$

no basta: la ‘recta larga’ (pegar ω_1 copias del intervalo $[0, 1[$ con orden lineal) también satisface (1).

Capturar de verdad los reales

Única restricción al tamaño del continuo en ZFC:

König cf $2^{\aleph_0} \neq \omega$.

Suslin ¿cómo caracterizar la estructura $(\mathbb{R}, <)$?

¿Qué propiedades de un orden abstracto $(X, <)$ implican que $(X, <) \approx (\mathbb{R}, <)$?

$$\text{orden total denso sin extremos } + \text{ Dedekind-completo} \tag{1}$$

no basta: la 'recta larga' (pegar ω_1 copias del intervalo $[0, 1[$ con orden lineal) también satisface (1).

Teorema

(Cantor, 189x) *Si* $(X, <) \models$ *(1) y existe* $D \subset X$ *contable denso tq* $(D, <) \approx (\mathbb{Q}, <)$ *entonces* $(X, <) \approx (\mathbb{R}, <)$.

Zermelo-Fraenkel (+Skolem)



Los axiomas de Zermelo y Fraenkel (la teoría ZF), escrita en el lenguaje $\{\in\}$, son seis axiomas más dos esquemas:

Zermelo-Fraenkel (+Skolem)



Los axiomas de Zermelo y Fraenkel (la teoría ZF), escrita en el lenguaje $\{\in\}$, son seis axiomas más dos esquemas:

1. **Extensionalidad:** $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Zermelo-Fraenkel (+Skolem)

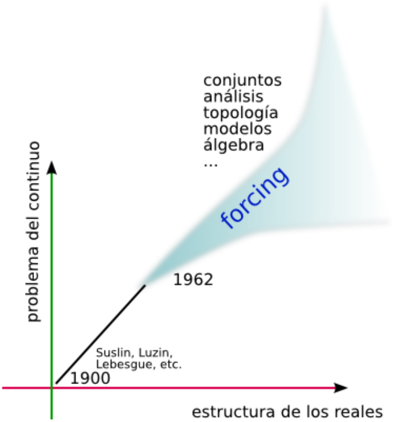
Los axiomas de Zermelo y Fraenkel (la teoría ZF), escrita en el lenguaje $\{\in\}$, son seis axiomas más dos esquemas:

1. **Extensionalidad:** $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
2. **Pares:** Dados a y b, existe c tal que $a \in c$ y $b \in c$
3. **Uniones:** Dado a, existe b que contiene $\bigcup a$
4. **Comprensión$_\phi$:** Dado a y una propiedad ϕ existe $\{x \in a \mid \phi(x, a, \dots)\}$
5. **Infinito:**: Existe... ω
6. **Partes:** Dado a, existe b que contiene $\mathcal{P}(a)$
7. **Reemplazo$_\phi$:** ... (para construir $\omega + \omega$, etc.)
8. **Fundamentación:** evitar $a \in a$, etc.

Los dos ejes: cardinal vs estructura

Suslin (1920) ¿es suficiente (1) + ccc?

Hipótesis de Suslin (SH): sí. Pero... ¡SH es independiente!

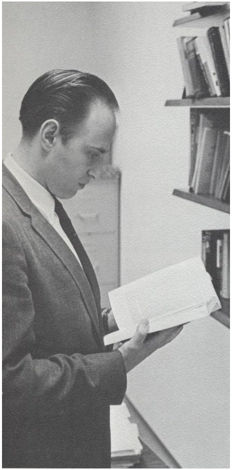


El Zeitgeist conjuntístico hacia 1960 - wild sixties

- Dana Scott: No hay cardinales medibles en L.
- Azriel Lévy: $L(\mathbb{R})$ - constructibilidad relativa.
- Alfred Tarski: teoría de modelos con énfasis muy estructural en Berkeley. La "escuela occidental".
- Michael Morley: categoricidad - teoría combinatoria de conjuntos en teoría de modelos (tesis con Mac Lane).
- Jerry Keisler: trabajos iniciales en modelos de teoría de conjuntos e invariantes de grandes cardinales.

¡No había técnicas de construcción de modelos de ZFC más allá de L y estratos de la jerarquía de von Neumann!

Paul Cohen (1934-2007)



THE INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS

BY PAUL J. COHEN*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STANFORD UNIVERSITY

Communicated by Kurt Gödel, September 30, 1963

This is the first of two notes in which we outline a proof of the fact that the Continuum Hypothesis cannot be derived from the other axioms of set theory, including the Axiom of Choice. Since Gödel[3] has shown that the Continuum Hypothesis is consistent with these axioms, the independence of the hypothesis is thus established. We shall work with the usual axioms for Zermelo-Fraenkel set theory,[2] and by Z-F we shall denote these axioms without the Axiom of Choice, (but with the Axiom of Regularity). By a model for Z-F we shall always mean a collection of actual sets with the usual ϵ-relation satisfying Z-F. We use the standard definitions[3] for the set of integers ω, ordinal, and cardinal numbers.

THEOREM 1. *There are models for Z-F in which the following occur:*

(1) *There is a set a, $a \subseteq \omega$ such that a is not constructible in the sense of reference 3, yet the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis both hold.*

(2) *The continuum (i.e., $\mathcal{P}(\omega)$ where $\mathcal{P}$ means power set) has no well-ordering.*

(3) *The Axiom of Choice holds, but $\aleph_1 \neq 2^{\aleph_0}$.*

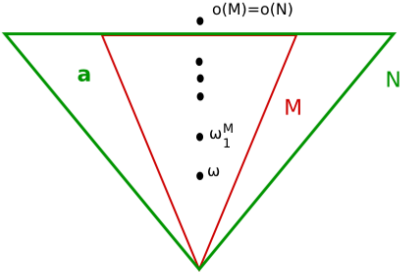
(4) *The Axiom of Choice for countable pairs of elements in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ fails.*

Only part 3 will be discussed in this paper. In parts 1 and 3 the universe is well-ordered by a single definable relation. Note that 4 implies that there is no simple

Angus MacIntyre: "(Cohen) had done work that should long outlast our times. For mathematical logic, and the broader culture that surrounds it, his name belongs with that of Gödel. Nothing more dramatic than their work has happened in the history of the subject."

Agregar reales - adjuntar raíces

¿Cómo lograr $N \models ZFC + \neg CH$?
Sea M modelo contable transitivo de ZFC. De pronto $M \models CH$ (pues de pronto $ZFC \vdash CH$... hasta ahora).



ω_1^M, ω_2^M, etc. son ordinales contables en V.

Agregar reales o raíces

En V:

- ♣ Fije $\vec{a} = \langle a_\xi | \xi < \omega_2^M \rangle$ una sucesión de ω_2^M reales distintos (o subconjuntos de ω, o elementos de ${}^\omega 2$, que no estén en M).
- ♣ Adjunte $\vec{a}$ a M... logre $N = M[\vec{a}]$.

$$N \models c \geq \omega_2$$

(gracias a $\vec{a}$).

Problema con lo anterior: agregar $\vec{a}$ a M y lograr un modelo de *ZFC*, con los mismos ordinales y cardinales. Necesitamos

$$\omega_2^N = \omega_2^M.$$

¿No se puede sencillamente decir $N = M \cup \{\vec{a}\}$? ¿Qué modela lo anterior?

¡No mucho! Pero se puede entonces agregar todo lo construible con $\vec{a}$. Por ejemplo, se debería tener que $\{\xi | (a_\xi)^2 > 8\} \in N$.

Agregar reales o raíces

Alegoría:

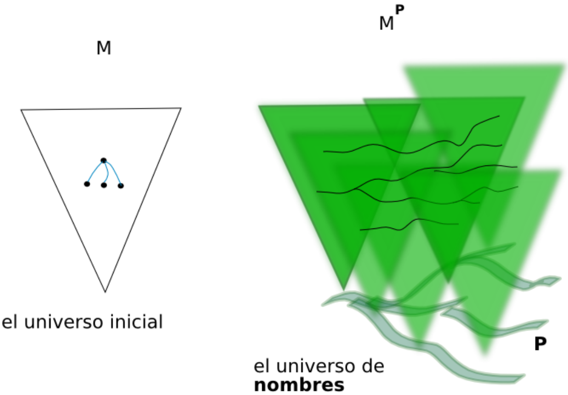
Escoja un cuerpo (por ejemplo $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_n$)	Extiéndalo a $\mathbb{Q}[\pi]$ o $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$	No se tiene $\mathbb{Q}[\pi] = \mathbb{Q} \cup \{\pi\}$	Ciérrelo.
Arranque con $M \models ZFC + CH$	Agregue $\aleph_2$ reales nuevos ($\vec{a}$)	Estamos lejos de un modelo de ZFC	¿qué quiere decir eso en nuestro caso?

Mismos ordinales: $M \cap On = N \cap On$.
Mismos cardinales: si $\alpha \in M \cap On$ y $(\alpha \text{ es cardinal})^M$ entonces $(\alpha \text{ es cardinal})^N$. En N: $\neg\exists\beta < \alpha(f : \beta \xrightarrow{sobre} \alpha)$.

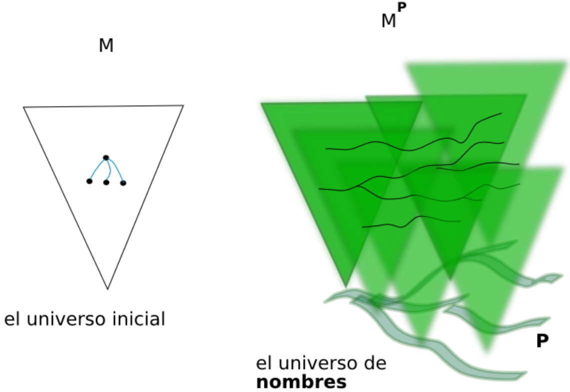
La extensión debe ser genérica

Cohen, sobre la genericidad: *thus* **a** *must have certain special properties…Rather than describe* **a** *directly, it is better to examine the various properties of* **a** *and determine which are desirable and which are not. The chief point is that we do not wish* **a** *to contain "special" information about M, which can only be seen from the outside…The* **a** *which we construct will be referred to as a "generic" set relative to M. The idea is that all the properties of* **a** *must be "forced" to hold merely on the basis that* **a** *behaves like a "generic" set in M. This concept of deciding when a statement about* **a** *is "forced" to hold is the key point of the construction.*

El universo de nombres $M^{\mathbb{P}}$



El universo de nombres $M^{\mathbb{P}}$



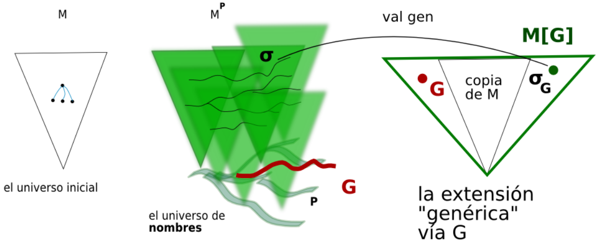
Definición ($\mathbb{P}$-nombres)

τ es un $\mathbb{P}$-nombre ssi τ es una relación tal que si $\langle \sigma, q \rangle \in \tau$, σ es $\mathbb{P}$-nombre y $q \in \mathbb{P}$. $V^{\mathbb{P}}$ es la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres.

El modelo genérico $M[G]$ - ¡dos pasos!

Definición (La extensión genérica)

Dado G filtro, τ un $\mathbb{P}$-nombre,
$\tau_G = val(\tau, G) = \{\sigma_G | \langle \sigma, q \rangle \in \tau \wedge q \in G\}$.
$M[G] = \{\tau_G | \tau \in M, \tau$ *es* $\mathbb{P}$*-nombre*$\}$.



Lemas de la verdad y de la definibilidad

¿Cómo controla uno lo que fuerza? Gran parte de la construcción técnica pasa por las herramientas para controlar en M lo que se fuerza en un $M[G]$. No es algo trivial: en los casos de interés $G \notin M$. El control se logra a través de una "lógica de forcing" muy próxima a haces sobre conjuntos ordenados - y a través de un "Teorema del Modelo Genérico": El Lema de la Definibilidad a grandes rasgos dice que $\Vdash$ es definible en M. ($p \Vdash \varphi$ como predicado de dos variables p y φ (en M) **no** puede ser definido en M, por la misma razón que $M \models \varphi$ no es definible en M (Tarski).) El Lema de la Verdad dice exactamente cómo funciona la verdad $\models$ es la extensión genérica $M[G]$.

Los teoremas del forcing - forcing iterado y MA

Pocos años después de los trabajos de Cohen, Solovay y Silver en Berkeley afinaron la teoría y la convirtieron en una herramienta de poder brutal para construir modelos de muchas cosas.
Adicionalmente, Martin capturó muchas preguntas de principios del siglo XX en términos de un único “axioma de forcing” (Axioma de Martin) que da propiedades estructurales interesantes cuando falla la Hipótesis del Continuo.
La técnica de Martin para probar la Consistencia de su principio usó Forcing Iterado - como lo anterior pero controlando las expansiones del universo después de iteraciones (transfinitas) de forcing. No es trivial: en los pasos límite pueden aparecer muchos objetos nuevos que no pueden aparecer en los pasos anteriores.

Algunas direcciones adicionales

- (Kennedy, Magidor, Väänänen - actualmente) Lógicas intermedias entre primer orden y segundo orden, con modelos internos de teoría de conjuntos.
- (Woodin, 1999) Ω-lógica (que implicaría que HC es falsa)
- (Woodin, 2010) Ultimate-L (si existe, CH es verdadera)
- (Dzamonja, Väänänen - actualmente) $\beth_\omega$-compacidad de la lógica $L^c_{\kappa,\kappa}$ para κ límite fuerte singular - que implica la hipótesis de cardinales singulares (Shelah) para esos cardinales.
- (Shelah, 1995) Una teoría que permite en ZFC dar respuesta robusta a la hipótesis del continuo - con un sabor cercano a localizaciones en teoría de números: la teoría **pcf**.
- (Shelah, Villaveces 1998) Hipótesis Generalizada del Continuo y densidad de amalgamación en clases no elementales.
- (Väänänen, Villaveces - actualmente) Lógicas intermedias asociadas a cardinales singulares - con interpolación.

Un problema de Grothendieck

Shulman motiva el tema mediante este problema de Grothendieck:

> *…the study of n-truncated homotopy types (of semisimplicial sets, or of topological spaces) [should be] essentially equivalent to the study of so-called n-groupoids. . . . This is expected to be achieved by associating to any space (say)* X *its "fundamental n-groupoid"* $\prod_n(X)$. *The obvious idea is that* 0*-objects of* $\prod_n(X)$ *should be the points of* X, 1*-objects should be "homotopies" or paths between points,* 2*-objects should be homotopies between* 1*-objects, etc.*

Grothendieck, 1983

Tipos vs conjuntos - Extensionalidad

Recuerde el axioma de extensionalidad en teoría de conjuntos:

Ext: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

El rol de la igualdad aquí está en cierto sentido sobre-definido. Mezclado con el Axioma de Elección y con el principio de Tercio Excluido (al trabajar en ZFC) resulta la teoría poderosísima que usamos en buena parte de la matemática ...

Tipos vs conjuntos - Extensionalidad

Recuerde el axioma de extensionalidad en teoría de conjuntos:

$$\textbf{Ext: } \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

El rol de la igualdad aquí está en cierto sentido sobre-definido. Mezclado con el Axioma de Elección y con el principio de Tercio Excluido (al trabajar en ZFC) resulta la teoría poderosísima que usamos en buena parte de la matemática ...pero perdemos la posibilidad de pensar en igualdad como equivalencia. Abandonamos entonces <u>principalmente</u> la idea de extensionalidad.

Teoría de tipos dependientes (Martin-Löf)

… y reemplazamos la lógica por una teoría de tipos. Los orígenes vienen de Russell, pero en los años 60 Per Martin-Löf diseñó (por razones que tienen que ver más con aleatoriedad y probabilidad) su teoría de **tipos dependientes**, esta también se puede ver (de Bruijn) como un lenguaje de computación:

Teoría de tipos dependientes (Martin-Löf)

... y reemplazamos la lógica por una teoría de tipos. Los orígenes vienen de Russell, pero en los años 60 Per Martin-Löf diseñó (por razones que tienen que ver más con aleatoriedad y probabilidad) su teoría de **tipos dependientes**, esta también se puede ver (de Bruijn) como un lenguaje de computación:

Las expresiones básicas (contextos) son de la forma

término : Tipo

por ejemplo $x : \mathbb{N}$ o $y : \mathbb{R}$...

Y de los contextos podemos pasar a las pruebas o juicios mediante ciertas reglas:

$$x : \mathbb{N}, y : \mathbb{R} \vdash (5x^2 + 2, x \times y) : \mathbb{N} \times \mathbb{R}$$

Categoría clasificante

Podemos meter todo esto en la categoría de contextos (llamada "clasificante") **Ctx** donde

- Los objetos son los contextos y
- Los morfismos son los juicios $\vdash$.

$$\Gamma \vdash a : A$$

Categoría clasificante

Podemos meter todo esto en la categoría de contextos (llamada "clasificante") **Ctx** donde

- Los objetos son los contextos y
- Los morfismos son los juicios $\vdash$.

$$\Gamma \vdash a : A$$

Pero esto se ve como una deducción ???

La dependencia

Al escribir

$$\Gamma \vdash a : A$$

pensamos en a como un morfismo de Γ en A.

La dependencia

Al escribir

$$\Gamma \vdash a : A$$

pensamos en a como un morfismo de Γ en A.
Y al escribir

$$\Gamma \vdash B \quad \textbf{type}$$

pensamos en B como una familia de contextos. En este sentido

- Los contextos con variables son **tipos** y
- aquellos sin variables (después de sustituirlas por constantes) son **morfismos**.

La teoría de tipos dependientes se enfoca en **cómo** manejar esas sustituciones.

Deducciones - Sistema de prueba

Hay varias otras reglas y <u>construcciones</u>:

Formato del tipo	Notación	(caso especial)
Habitante	$a : A$	
Tipo dependiente	$x : A \vdash B(x)$	
Sigma (suma)	$\sum_{(x:A)} B(x)$	$A \times B$
Producto	$\prod_{(x:A)B(x)}$	$A \to B$
Coproducto	$A + B$	
Identidad	$Id_A(a, b)$, $a = b$	
Universo	U	
Base	Nat, Bool, 1, 0	

y axiomas de extensionalidad en morfismos...

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \mathbf{type}; \Gamma; n : A \vdash B \quad \mathbf{type}}{\Gamma \vdash \prod_{(n:a)} B \vdash \mathbf{type}}$$

Conexión con lógica proposicional y conjuntos

Ese formato numerador (premisa) / denominador (conclusión) es muy cercano a lenguajes formales y se implementó para asistentes de demostración. El más famoso de ellos en este contexto es **Coq** (¡sin tercio excluso!).

Conexión con lógica proposicional y conjuntos

Ese formato numerador (premisa) / denominador (conclusión) es muy cercano a lenguajes formales y se implementó para asistentes de demostración. El más famoso de ellos en este contexto es **Coq** (¡sin tercio excluso!).

Nivel	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
Tipo	V/F	Conj	Morf	$\cdots$	n-tipos	$\cdots$

Conexión con lógica proposicional y conjuntos

Ese formato numerador (premisa) / denominador (conclusión) es muy cercano a lenguajes formales y se implementó para asistentes de demostración. El más famoso de ellos en este contexto es **Coq** (¡sin tercio excluso!).

Nivel	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
Tipo	V/F	Conj	Morf	$\cdots$	n-tipos	$\cdots$

En este sentido la teoría de tipos parece ser una generalización de la teoría de conjuntos, pero esto NO es así (la teoría de conjuntos no consiste solo de objetos sino de sus axiomas y la lógica de primer orden - Dzamonja).

Identidad - no identidad - ¿dos identidades?

En la teoría de Martin-Löf el tipo $Id_A(x, y)$ captura la idea **las proposiciones** x y y son equivalentes. Es decir que podemos <u>demostrar</u> su equivalencia en el sistema.

Identidad - no identidad - ¿dos identidades?

En la teoría de Martin-Löf el tipo $Id_A(x, y)$ captura la idea **las proposiciones** x y y son equivalentes. Es decir que podemos demostrar su equivalencia en el sistema.Todo esto da lugar a **dos tipos distintos** de identidad:

- Identidad **definicional** $A = B$ (tipos) y $x = y : A$ para objetos de un tipo, e
- Identidad **proposicional** $Id_A(x, y)$.

Claramente, la identidad definicional implica la proposicional pero no se tiene el recíproco en general.

Identidad vs deformación

- Martin-Löf: cierto enfoque del problema de las dos identidades; agrega juicios adicionales pero llega a ciertas paradojas tipo Russell (Girard)

Es más delicado armar cuidadosamente el Axioma de Equivalencia (una lectura frecuente es **el tipo de la univalencia está habitado**.

Identidad vs deformación

- Martin-Löf: cierto enfoque del problema de las dos identidades; agrega juicios adicionales pero llega a ciertas paradojas tipo Russell (Girard)
- entra Voevodsky con su axioma de univalencia: $Id = Eq$.

Es más delicado armar cuidadosamente el Axioma de Equivalencia (una lectura frecuente es **el tipo de la univalencia está habitado**.

En topología: los ∞-grupoides

Los ∞-grupoides de la teoría de homotopía terminan dando el primer "modelo estándar" de HoTT+UF. Voevodsky básicamente

- Interpreta la categoría **Ctx** como la categoría homotópica de complejos simpliciales (de Kan),

En topología: los ∞-grupoides

Los ∞-grupoides de la teoría de homotopía terminan dando el primer “modelo estándar” de HoTT+UF. Voevodsky básicamente

- Interpreta la categoría **Ctx** como la categoría homotópica de complejos simpliciales (de Kan),
- Los tipos son entonces espacios y morfismos,

En topología: los ∞-grupoides

Los ∞-grupoides de la teoría de homotopía terminan dando el primer "modelo estándar" de HoTT+UF. Voevodsky básicamente

- Interpreta la categoría **Ctx** como la categoría homotópica de complejos simpliciales (de Kan),
- Los tipos son entonces espacios y morfismos,
- La igualdad proposicional es **exactamente** la equivalencia homotópica y la estructura estratificada es un ∞-grupoide.

El teorema de Voevodsky

Theorem (Voevodsky - 2012)

Si suponemos la existencia de dos cardinales inaccesibles, es consistente que la categoría ***sSet****/W forma un modelo de la teoría de tipos de Martin-Löf con el Axioma de Univalencia.*

Notas:

- Dos cardinales inaccesibles es más fuerte que ZFC pero muy débil entre las axiomáticas de la teoría de conjuntos.
- En la demostración se usa Tercio Excluso a nivel de las proposiciones (1) y el Axioma de Elección a nivel de los conjuntos (2).

Algo del estado actual de la teoría de homotopía sintética

Han demostrado (y verificado) ya los siguientes hechos de topología algebraica:

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (Shulman, Licata)
- $\pi_k(S^n) = 0$ si $k < n$ (Brunerie, Licata)
- $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (Brunerie, Licata)
- La sucesión exacta larga de una fibración (Voevodsky)
- El teorema de van Kampen (Shulman)
- Teoría de espacios recubridores (Hou)
- ...

Una posición crítica muy interna: Lurie

Dos críticas a lo anterior:

- Desde fuera: casi todos los teoremas son de topología algebraica - menos ya de geometría algebraica, y realmente muy pocos fuera de esas disciplinas.
- Más interna: Jacob Lurie en varios posts muestra escepticismo - el escepticismo de uno de los mayores exponentes de la teoría de “categorías superiores” (Higher Topos Theory) - y hace preguntas difíciles a los especialistas de HoTT. Por ejemplo, calcular el grupo fundamental de $S^1 \times S^1$ les tomó años de trabajo.

El enfoque pluralista de Dzamonja se puede sintetizar así:

- Los Fundamentos Univalentes son realmente un fundamento para la parte constructiva de la matemática - lo clave fue notar la conexión entre la teoría de homotopía y la teoría de tipos. La lógica de primer order fue reemplazada por la teoría de tipos; cambió el sistema deductivo.
- El uso de asistentes de demostración (Coq, Agda) puede formalizar una parte importante de la matemática y verificar las demostraciones.
- (Voevodsky) HoTT+UF es consistente módulo la consistencia de ZFC.
- La teoría de conjuntos sigue siendo el estándar de consistencia más importante (Voevodsky, Logic Colloquium 2013)

Dzamonja propone un enfoque pluralista

- **Teoría de Conjuntos:**
  fundamentos para una parte importante de la matemática en un formato consistente con la práctica usual.

Dzamonja propone un enfoque pluralista

- **Teoría de Conjuntos:** fundamentos para una parte importante de la matemática en un formato consistente con la práctica usual.
- **Teoría de Categorías:** una manera de modelar partes de la matemática que dependen de clases propias - como la geometría algebraica.

Dzamonja propone un enfoque pluralista

- **Teoría de Conjuntos:** fundamentos para una parte importante de la matemática en un formato consistente con la práctica usual.
- **Teoría de Categorías:** una manera de modelar partes de la matemática que dependen de clases propias - como la geometría algebraica.
- **Fundamentos Univalentes:** nueva manera de discutir demostraciones - obviamente tema central y muy vigente.

Bourbaki - visión histórica del rol de ZFC

Bourbaki en el primer volumen de Théorie des ensembles dice:

> *Sabemos que, lógicamente hablando, es posible derivar toda la matemática actual de una fuente única, la teoría de conjuntos. Al hacer esto no pretendemos escribir en piedra una ley; tal vez algún día los matemáticos llevarán a cabo un razonamiento completamente distinto que no es formalizable en el lenguaje que adoptamos aquí y, según algunos, progreso reciente en homología sugiere que ese día no está lejano. En ese caso tendremos que ampliar la sintaxis, aún si no es necesario cambiar completamente el lenguaje. El futuro de la matemática dirá.*

Axiomas - ¿Constituciones?

- Grossberg describe a ZFC como "una buena constitución": puede durar pero no tiene por qué ser eterna.
- A la luz de los líos (¿demostraciones?) recientes (anuncio de Atiyah de demostración de la Hipótesis de Riemann, lunes pasado - anuncio de Scholze y Stix de falla de la prueba de Mochizuki (2014) de la conjetura **abc** hoy hace 10 días) la preocupación de Voevodsky coge particular relevancia.
- No es claro para la comunidad matemática **dónde** se formaliza la IUTT (Teoría de Teichmüller Interuniversal). La reducción de Scholze y Stix a geometría algebraica clásica no convence a algunos. Y menos claro aún es el rol de la "constante de estructura fina" del universo, α, en el anuncio de Atiyah.

¡Gracias!

Fondamente Nuove - Apollonio Domenichini - 1770