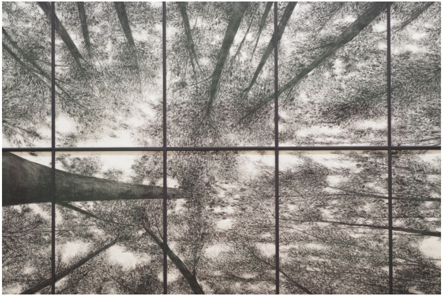


Mirar hacia fuera desde la lógica matemática

(un paseo por preguntas de la química matemática)

Andrés Villaveces - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*

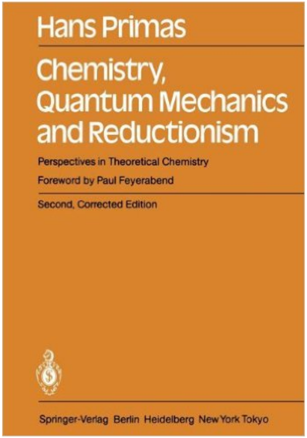
DíasMatem - Universidad Industrial de Santander -
Bucaramanga, octubre de 2018

Temas

- Preguntas químicas, de naturaleza lógica
- Algo de teoría de modelos clásica
  - Estructuras matemáticas : ¿por qué algunas "figuran" tanto?
  - El papel de los "tipos"
  - Resultados clásicos: Tarski-Chevalley, Ax-Kochen, Hrushovski
- Teoría de modelos de la física
  - El problema con los estados propios
  - Cuatro caminos
    - Oxford: Zilber - haz de Weyl, estructuras de aproximación
    - Helsinki: ultraproductos métricos
    - Toronto: Bays y Hart - representaciones.
    - Bogotá: Ochoa-V. Haces métricos y distribuciones.
- Teoría de modelos y química

Lateralidad - Leer a Hans Primas

En su libro de 1983 Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism el químico suizo Hans Primas manifiesta su seria inconformidad con varias preguntas fundamentales de la química teórica.



Preguntas "lógicas" en un libro de química teórica

Primas abre su libro con un primer capítulo en tono provocador llamado Open Problems of Present-Day Theoretical Chemistry.

Preguntas "lógicas" en un libro de química teórica

Primas abre su libro con un primer capítulo en tono provocador llamado Open Problems of Present-Day Theoretical Chemistry. Allí elabora una lista muy llamativa al ser leída en tono matemático, con subtemas como la "sobreproducción de verdad", "teorías químicas", el problema de "calcular todo", y algunas cuestiones difíciles de la mecánica cuántica molecular.

Observaciones cáusticas de Primas (I) - 1982

- Jauch: los observables clásicos (observables "esenciales") son el eslabón perdido entre la física y la química - 1970

Observaciones cáusticas de Primas (I) - 1982

- Jauch: los observables clásicos (observables "esenciales") son el eslabón perdido entre la física y la química - 1970
- Ernest Becker: Y aquí estamos, a finales del siglo XX, ahogándonos en la verdad.

Observaciones cáusticas de Primas (I) - 1982

- Jauch: los observables clásicos (observables “esenciales”) son el eslabón perdido entre la física y la química - 1970
- Ernest Becker: Y aquí estamos, a finales del siglo XX, ahogándonos en la verdad.
- Aún así, el monismo de la física newtoniana simplemente ha sido reemplazado por un nuevo monismo dirigido por la ecuación de Schrödinger

Observaciones cáusticas de Primas (I) - 1982

- Jauch: los observables clásicos (observables "esenciales") son el eslabón perdido entre la física y la química - 1970
- Ernest Becker: Y aquí estamos, a finales del siglo XX, ahogándonos en la verdad.
- Aún así, el monismo de la física newtoniana simplemente ha sido reemplazado por un nuevo monismo dirigido por la ecuación de Schrödinger
- ¡Podemos calcular la energía de enlace sin siquiera saber qué es un enlace!

Observaciones cáusticas de Primas (I) - 1982

- Jauch: los observables clásicos (observables “esenciales”) son el eslabón perdido entre la física y la química - 1970
- Ernest Becker: Y aquí estamos, a finales del siglo XX, ahogándonos en la verdad.
- Aún así, el monismo de la física newtoniana simplemente ha sido reemplazado por un nuevo monismo dirigido por la ecuación de Schrödinger
- ¡Podemos calcular la energía de enlace sin siquiera saber qué es un enlace!
- ... un peligro olvidar el ímpetu original de nuestra empresa: entender el comportamiento de la materia

Observaciones cáusticas de Primas (I) - 1982

- Jauch: los observables clásicos (observables “esenciales”) son el eslabón perdido entre la física y la química - 1970
- Ernest Becker: Y aquí estamos, a finales del siglo XX, ahogándonos en la verdad.
- Aún así, el monismo de la física newtoniana simplemente ha sido reemplazado por un nuevo monismo dirigido por la ecuación de Schrödinger
- ¡Podemos calcular la energía de enlace sin siquiera saber qué es un enlace!
- ... un peligro olvidar el ímpetu original de nuestra empresa: entender el comportamiento de la materia
- ... la mecánica cuántica numérica es una herramienta supremamente poderosa en la química pero no puede reemplazar el pensamiento...

Lo esencial de las preguntas de Primas

- ¿Aplica la mecánica cuántica a sistemas moleculares grandes?

Lo esencial de las preguntas de Primas

- ¿Aplica la mecánica cuántica a sistemas moleculares grandes?
- ¿Es universalmente válido el principio de superposición?
  Aunque esta pregunta es realmente clásica en física, Primas da una versión molecular de la misma:

Lo esencial de las preguntas de Primas

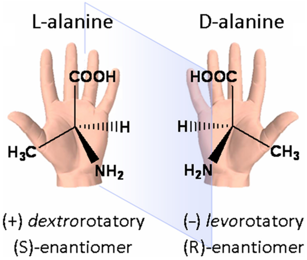
- ¿Aplica la mecánica cuántica a sistemas moleculares grandes?
- ¿Es universalmente válido el principio de superposición?
  Aunque esta pregunta es realmente clásica en física, Primas da una versión molecular de la misma:
- ¿Por qué tantos estados estacionarios no existen?

Lo esencial de las preguntas de Primas

- ¿Aplica la mecánica cuántica a sistemas moleculares grandes?
- ¿Es universalmente válido el principio de superposición? Aunque esta pregunta es realmente clásica en física, Primas da una versión molecular de la misma:
- ¿Por qué tantos estados estacionarios no existen?De hecho, dice Primas, ¡incluso sistemas moleculares relativamente pequeños no exhiben estados estacionarios permitidos por la química cuántica tradicional!

Un ejemplo extraño (de Primas) - Quiralidad

¿Por qué se puede comprar en la farmacia D-alanina (con vector estado $|\Psi_D\rangle$), L-alanina (con vector estado $|\Psi_L\rangle$) y la mezcla racémica (operador de densidad $|\Psi_D\rangle\langle\Psi_D| + |\Psi_L\rangle\langle\Psi_L|$), pero <u>no</u> las superposiciones coherentes $(|\Psi_D\rangle + |\Psi_L\rangle)$ y $(|\Psi_D\rangle - |\Psi_L\rangle)$? Esto es paradójico, pues según la visión tradicional, los dos últimos estados mencionados representan el estado base y un estado excitado, respectivamente. Este ejemplo señala una situación aparentemente frecuente en química, no reducible a la mera explicación física.



- ¿Por qué la mecánica cuántica falla al describir sistemas químicos? Esta pregunta es una variante molecular de la famosa pregunta más fundamental de Einstein ¿Por qué están localizados los cuerpos macroscópicos?

- ¿Por qué la mecánica cuántica falla al describir sistemas químicos? Esta pregunta es una variante molecular de la famosa pregunta más fundamental de Einstein ¿Por qué están localizados los cuerpos macroscópicos?
- ¿Es la temperatura un observable? Esta pregunta apunta a otro tipo de situación paradójica: aunque existen muchos sistemas en equilibrio que tienen una temperatura bien definida (se puede medir, usando un sistema simple que, dice Primas, se puede implementar con perturbaciones arbitrariamente pequeñas del estado termodinámico del sistema), la mecánica cuántica estadística tradicional no provee un observable (operador auto-adjunto que actúa sobre un espacio de Hilbert de estados) que represente la temperatura para un sistema simple.

Primas se acerca a preguntas de carácter lógico...

- ¿Realmente vale la mecánica cuántica en sistemas moleculares **grandes**?

Primas se acerca a preguntas de carácter lógico...

- ¿Realmente vale la mecánica cuántica en sistemas moleculares **grandes**?
- ¿Es universalmente válido el principio de superposición?

Primas se acerca a preguntas de carácter lógico...

- ¿Realmente vale la mecánica cuántica en sistemas moleculares **grandes**?
- ¿Es universalmente válido el principio de superposición?
- El principal obstáculo para el desarrollo de una teoría de sistemas moleculares grandes y complejos no es computacional sino conceptual...

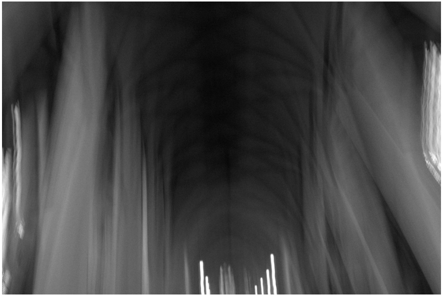
Primas se acerca a preguntas de carácter lógico...

- ¿Realmente vale la mecánica cuántica en sistemas moleculares **grandes**?
- ¿Es universalmente válido el principio de superposición?
- El principal obstáculo para el desarrollo de una teoría de sistemas moleculares grandes y complejos no es computacional sino conceptual...
- Una buena teoría debe ser CONSistente, CONFirmada e INTuible.

Más polémicas

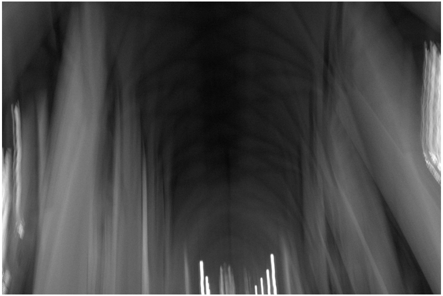
- estructura de las teorías científicas ("una buena teoría debería ser consistente, confirmada e intuible"),
- la mecánica cuántica "pionera" y su interpretación (énfasis fuerte en las correlaciones de Einstein-Podolsky-Rosen, que han generado buena parte de lo más interesante entre matemática y física),
- la mecánica cuántica más allá de la etapa pionera (una visión más algebraica de la mecánica cuántica, y también lógica cuántica, teoría de la probabilidad no booleana).
- introduce una lógica de propiedades químicas que extiende la lógica temporal ortonormal y su interpretación óntica - da la W^*-lógica de la química (basada en las W^*-álgebras de von Neumann).

Más recientemente, poco poco... en química teórica - según J. Math. Chem. 2017 - Max Planck Leipzig



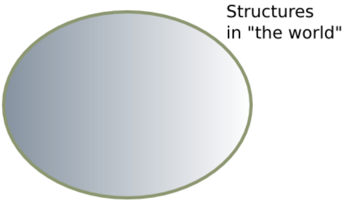
- Métodos numéricos computacionales,
- Big data, data mining,
- Teoría de grafos, dendrogramas,
- Redes,
- Teoría de nudos
- Información cuántica...

Más recientemente, poco poco... en química teórica - según J. Math. Chem. 2017 - Max Planck Leipzig



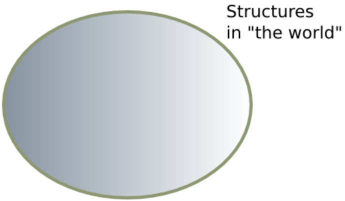
- Métodos numéricos computacionales,
- Big data, data mining,
- Teoría de grafos, dendrogramas,
- Redes,
- Teoría de nudos
- Información cuántica...
- ¡Pero las preguntas de Primas siguen en gran medida abiertas aún!

Un mundo ideal



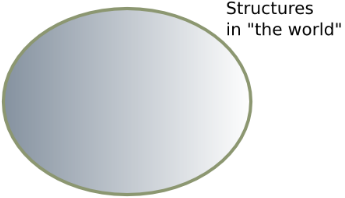
Observemos "desde lejos" los miles y miles de estructuras matemáticas que nosotros los humanos hemos inventado/descubierto a través de los siglos.

Un mundo ideal



Observemos “desde lejos” los miles y miles de estructuras matemáticas que nosotros los humanos hemos inventado/descubierto a través de los siglos.
Grupos, cuerpos, variedades algebraicas, espacios de Sobolev, dinámica topológica, espacios de funciones, etc ...
¿Es un mundo homogéneo?

Un mundo ideal



Observemos “desde lejos” los miles y miles de estructuras matemáticas que nosotros los humanos hemos inventado/descubierto a través de los siglos.
Grupos, cuerpos, variedades algebraicas, espacios de Sobolev, dinámica topológica, espacios de funciones, etc ...
¿Es un mundo homogéneo? La respuesta es un NO contundente, como todos aquí sabemos, ¡incluso antes de imaginar que existen tantas estructuras!

¿Hay estructuras inevitables?

Entre esos miles de estructuras, el paisaje está lejos de ser homogéneo - hay <u>outliers</u> muy altos - estructuras que son de alguna manera inevitables en cualquier cultura matemática:

- $\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - aritmética
- $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geometría algebraica
- $\langle \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geom. alg. real
- curvas elípticas
- espacios vectoriales (módulos, etc.)
- ciertos objetos de combinatoria
- espacios de Hilbert, ℓ_2, etc.
- ...

Teoría de modelos - teoría de invariantes

$\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - aritmética

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geometría algebraica

$\langle \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geom. alg. real

curvas elípticas

espacios vectoriales (módulos, etc.)

ciertos objetos de combinatoria

espacios de Hilbert, ℓ_2, etc.

...

Teoría de modelos - teoría de invariantes

$\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - aritmética

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geometría algebraica

$\langle \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geom. alg. real

curvas elípticas

espacios vectoriales (módulos, etc.)

ciertos objetos de combinatoria

espacios de Hilbert, ℓ_2, etc.

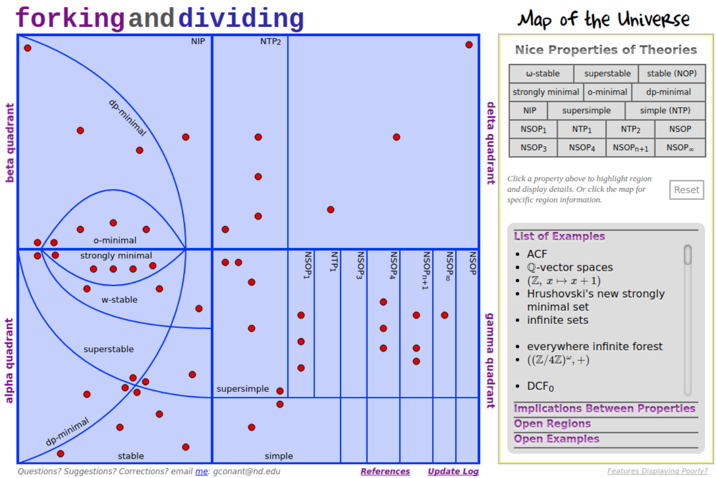
...

Palabras como “dimensión”, “rango”, “grado”, “carácter de densidad” aparecen <u>“amarradas”</u> a muchas de esas estructuras, las controlan y nos permiten capturarlas

Teoría de Modelos: perspectiva y grano fino

1. **Estructuras** arbitrarias.
2. Jerarquía de tipos de estructuras (o sus teorías): Teoría de Estabilidad.
3. En la parte "más suave" de la jerarquía: topologías de Zariski generalizadas - <u>Geometrías de Zariski</u> de Hrushovski y Zilber: variedades algebraicas - estructuras "arbitrarias" cuyo lugar en la jerarquía les da automáticamente similitud fuerte con curvas algebraicas.
4. Objetos uni-dimensionales en estructuras de Zariski corresponden exactamente a <u>cubiertas finitas</u> de curvas algebraicas - ¡estos corresponden a estructuras que capturan fenómenos no-conmutativos en Cuántica!
5. Más recientemente: estructuras "límite" en teoría de modelos. Métodos de <u>perturbación</u> en otras áreas de la matemática pueden ser vistos modelo-teóricamente.

La jerarquía de estabilidad - "Mapa del universo"



Teoría de modelos clásica: definabilidad. Fórmulas.

Inicialmente, la teoría de modelos permite dos cosas básicas:

Capturar clases de modelos

Teoría de modelos clásica: definabilidad. Fórmulas.

Inicialmente, la teoría de modelos permite dos cosas básicas:

Capturar clases de modelos

Aislar conjuntos definibles dentro de cada clase

Teoría de modelos clásica: definabilidad. Fórmulas.

Inicialmente, la teoría de modelos permite dos cosas básicas:

Capturar clases de modelos

Aislar conjuntos definibles dentro de cada clase

Ejemplos:

Clases: (modelos de) axiomas de Peano, axiomas de grupos, axiomas de cuerpos, campos algebraicamente cerrados, etc. (espacios de Hilbert, ...).

Conjuntos definibles: dos niveles: a través de una fórmula o a través de conjuntos infinitos de fórmulas que aún tienen “conjuntos solución” (lugares geométricos).

Conjuntos definibles

En teoría de modelos un conjunto D es definible en una estructura $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que $D = \varphi(\mathfrak{A}) = \{a \in A | \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$.
D es el **lugar geométrico** de la fórmula φ, en $\mathfrak{A}$.
Ejemplos clásicos de conjuntos definibles en un cuerpo incluyen variedades afines: la curva elíptica dada por

$$y^2 = x^3 + ax + bc + c$$

se puede entender como el conjunto definible D_C sobre $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, a, b, c \rangle$,

$$D_C = \varphi_C(\mathbb{C}, a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | \varphi_C(x, y, a, b, c)\},$$

donde $\varphi_C(x, y, a, b, c)$ es la fórmula $y^2 = x^3 + ax + bc + c$.

Conjuntos tipo-definibles (I)

Dados a y C, el tipo de a sobre C en M es el conjunto

$$\mathrm{tp}(a/C, M) := \{\varphi(x, \bar{c}) | \bar{c} \in C, M \models \varphi[a, \bar{c}]\}.$$

1. $\mathrm{tp}(2/\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{x = 1 + 1, \cdots\}$
2. $\mathrm{tp}(\sqrt{2}/\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{x \cdot x = 1 + 1, \cdots\}$
3. $\mathrm{tp}(\pi/\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{\neg(P(x) = 0) | P(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$

1 (tipo realizado): una fórmula, una solución
2 también determinado por una fórmula (tipo principal) pero tiene varias (finitas) soluciones: es <u>algebraico</u>
3 es un tipo no algebraico: no determinado por una fórmula - infinitas soluciones

Conjuntos tipo-definibles (II)

Podemos ahora ver un conjunto de fórmulas

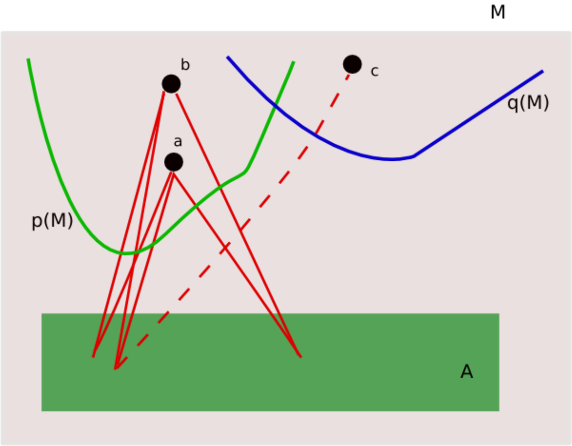
$$p = \{\varphi_i(x, \bar{b}) | i \in I\}$$

como un conjunto (tipo-)definible: busque el **lugar geométrico** de soluciones en un modelo M; esto arroja el tipo-definible

$$p(M) = \{a \in M | a \models p\}.$$

Naturalmente, se puede aplicar el mismo proceso para encontrar subconjuntos definibles y tipo-definibles de M^2, M^3, etc. incluso $M^{\mathbb{N}}$...

$\mathrm{tp}(a/A, M)$, ETC.



El papel de conjuntos definibles y tipo-definibles

Análogo al de ideales en geometría algebraica: por el Nullstellensatz de Hilbert, la información crucial en variedades queda capturada por los ideales radicales.
En $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$, “$a$ y b tienen mismo tipo sobre V” queda capturado por ideales (elim. cuant.)
En general, son las bloques básicos de clasificación, generación, conteo de estructuras y de inmersiones entre estas.

Variantes

Tipos en teoría de modelos pueden ser vistos como

1. Conjuntos de fórmulas
2. Cerrados en topologías de Zariski
3. Órbitas bajo automorfismos de modelos monstruos
4. Más recientemente, medidas/estados o distribuciones.

Estabilidad... ¿geométrica?

Ventajas fuertes: en dos décadas, la teoría de modelos pasó de ser descrita por Chang & Keisler (1972) como

$$\text{Teoría de Modelos} = \text{Álgebra Universal} + \text{Lógica}$$

Estabilidad... ¿geométrica?

Ventajas fuertes: en dos décadas, la teoría de modelos pasó de ser descrita por Chang & Keisler (1972) como

$$\text{Teoría de Modelos} = \text{Álgebra Universal} + \text{Lógica}$$

a ser entendida por Hodges (1993) como

$$\text{Teoría de Modelos} = \text{Geometría Algebraica} - \text{Cuerpos}$$

Estabilidad... ¿geométrica?

Ventajas fuertes: en dos décadas, la teoría de modelos pasó de ser descrita por Chang & Keisler (1972) como

$$\text{Teoría de Modelos} = \text{Álgebra Universal} + \text{Lógica}$$

a ser entendida por Hodges (1993) como

$$\text{Teoría de Modelos} = \text{Geometría Algebraica} - \text{Cuerpos}$$

Más recientemente Hrushovski la ha descrito como la geografía de la matemática "dócil".

Muy clásico: la decidibilidad de los complejos.

- Teorema de Steinitz: todos par de cuerpos no numerables algebraicamente cerrados de característica cero, de mismo cardinal, deben ser isomorfos.
- La teoría ACF_0 está incluida en $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ – esta es obviamente completa.
- La teoría ACF_0 es axiomatizable (axiomas de cuerpos, soluciones a todos los polinomios no constantes, caract. cero) de manera recursiva.
- La categoricidad (en cardinales no contables, Steinitz) implica que ACF_0 es completa y por lo tanto igual a $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.
- Para verificar si una sentencia σ es cierta o no en $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ simplemente corra (usando recursión) todas las consecuencias de los axiomas. Aparecerá σ o $\neg\sigma$, por la completitud.

Muy clásico: la decidibilidad de los complejos.

- Teorema de Steinitz: todos par de cuerpos no numerables algebraicamente cerrados de característica cero, de mismo cardinal, deben ser isomorfos.
- La teoría ACF_0 está incluida en $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ — esta es obviamente completa.
- La teoría ACF_0 es axiomatizable (axiomas de cuerpos, soluciones a todos los polinomios no constantes, caract. cero) de manera recursiva.
- La categoricidad (en cardinales no contables, Steinitz) implica que ACF_0 es completa y por lo tanto igual a $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$.
- Para verificar si una sentencia σ es cierta o no en $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ simplemente corra (usando recursión) todas las consecuencias de los axiomas. Aparecerá σ o $\neg\sigma$, por la completitud.

Fenómeno de subida y bajada, reforzado de maneras extremas después.

Clásico: Ax-Kochen

Para cada entero positivo d existe un conjunto finito Y_d de números primos tal que si p es un primo fuera de Y_d entonces todo polinomio homogéneo de grado d sobre los p-ádicos en al menos $d^2 + 1$ variables tiene un cero no trivial.

De nuevo, teoría de modelos:

Clásico: Ax-Kochen

Para cada entero positivo d existe un conjunto finito Y_d de números primos tal que si p es un primo fuera de Y_d entonces todo polinomio homogéneo de grado d sobre los p-ádicos en al menos $d^2 + 1$ variables tiene un cero no trivial.

De nuevo, teoría de modelos:

- Primero, el teorema de Lang (mismo resultado, para el cuerpo $F_p((t))$ de series formales de Laurent sobre cuerpos finitos) con Y_d vacío.
- Luego, si M y N son cuerpos valuados henselianos con anillos de valuación y cuerpos residuales equivalentes, y sus cuerpos de residuos tienen caract. 0, entonces $M \equiv N$.
- Construya entonces dos ultraproductos: $\prod_p F_p((t))$ y $\prod_p Q_p$ - ambos sobre todos los primos - el segundo de p-ádicos para cada p.
- La teoría de modelos garantiza que son elementalmente equivalentes.

Hrushovski & co.

Varios resultados de interacción entre Teoría de Números, Geometría Algebraica y Teoría de Modelos ejemplifican las afirmaciones anteriores. Tal vez el resultado más famoso hasta la fecha es la solución de Hrushovski a la Conjetura de Mordell-Lang (hacia 1996).

Teorema (Hrushovski)

Una solución a la conjetura de Mordell-Lang sobre puntos racionales, usando estabilidad geométrica.

Esto usa ideas mucho más sofisticadas: análisis de "conjuntos modulares" en contextos (generalizados) de Zariski, análisis de conjuntos unidimensionales... "teoría de modelos geométrica" en sus versiones más profundas.

Hrushovski & co.

Varios resultados de interacción entre Teoría de Números, Geometría Algebraica y Teoría de Modelos ejemplifican las afirmaciones anteriores. Tal vez el resultado más famoso hasta la fecha es la solución de Hrushovski a la Conjetura de Mordell-Lang (hacia 1996).

Teorema (Hrushovski)

Una solución a la conjetura de Mordell-Lang sobre puntos racionales, usando estabilidad geométrica.

Esto usa ideas mucho más sofisticadas: análisis de "conjuntos modulares" en contextos (generalizados) de Zariski, análisis de conjuntos unidimensionales... "teoría de modelos geométrica" en sus versiones más profundas.
Otros logros incluyen campos diferencialmente cerrados, teoría de Galois para ecuaciones en diferencias, etc. - invariantes desarrollados mediante la teoría de modelos (Pillay, Macintyre, van den Dries, Süer, …).

Más allá de la lógica de primer orden

Los resultados mencionados se acercan al corazón de áreas como Teoría de Galois en contextos muy generalizados. Sin embargo, hay muchas razones para tratar de extender el alcance de la Lógica (y la Teoría de Modelos) más allá de clases de estructuras axiomatizables en Primer Orden.

Tres (estilos distintos de) razones:

Más allá de la lógica de primer orden

Los resultados mencionados se acercan al corazón de áreas como Teoría de Galois en contextos muy generalizados. Sin embargo, hay muchas razones para tratar de extender el alcance de la Lógica (y la Teoría de Modelos) más allá de clases de estructuras axiomatizables en Primer Orden.

Tres (estilos distintos de) razones:

1. Muchas clases naturales de estructuras matemáticas de hecho no son axiomatizables en lógica PO. Muchas fenómenos matemáticos naturales no son de naturaleza PO.

Más allá de la lógica de primer orden

Los resultados mencionados se acercan al corazón de áreas como Teoría de Galois en contextos muy generalizados. Sin embargo, hay muchas razones para tratar de extender el alcance de la Lógica (y la Teoría de Modelos) más allá de clases de estructuras axiomatizables en Primer Orden.

Tres (estilos distintos de) razones:

1. Muchas clases naturales de estructuras matemáticas de hecho no son axiomatizables en lógica PO. Muchas fenómenos matemáticos naturales no son de naturaleza PO.
2. Incluso aquellas clases que se pueden “capturar” como clases PO pueden tener mejor comportamiento modelo-teórico cuando se estudian desde un punto de vista distinto (Zilber y la exponencial compleja, funciones modulares, etc.).

Más allá de la lógica de primer orden

Los resultados mencionados se acercan al corazón de áreas como Teoría de Galois en contextos muy generalizados. Sin embargo, hay muchas razones para tratar de extender el alcance de la Lógica (y la Teoría de Modelos) más allá de clases de estructuras axiomatizables en Primer Orden.

Tres (estilos distintos de) razones:

1. Muchas clases naturales de estructuras matemáticas de hecho no son axiomatizables en lógica PO. Muchas fenómenos matemáticos naturales no son de naturaleza PO.
2. Incluso aquellas clases que se pueden “capturar” como clases PO pueden tener mejor comportamiento modelo-teórico cuando se estudian desde un punto de vista distinto (Zilber y la exponencial compleja, funciones modulares, etc.).
3. A veces tener teoremas más generales da demostraciones más sencillas, *incluso* para lógica PO (Grossberg, Shelah, etc.).

Ejemplos

1 - No capturados en PO Construcciones noetherianas. Grupos localmente finitos. Grupos abelianos bajo $<_{pure}$ y variantes. Clases de modelos atómicos. Extensiones finales de modelos de PA o ZF.

1 - No de naturaleza PO Espacios de Banach. Espacios de Hilbert con operadores interesantes. Estructuras analíticas.

Ejemplos

1 - No capturados en PO Construcciones noetherianas. Grupos localmente finitos. Grupos abelianos bajo $<_{pure}$ y variantes. Clases de modelos atómicos. Extensiones finales de modelos de PA o ZF.

1 - No de naturaleza PO Espacios de Banach. Espacios de Hilbert con operadores interesantes. Estructuras analíticas.

2 - Comportamiento mejor si NO se ven como PO La estructura más fundamental del análisis complejo: $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, ex)$ - comportamiento gödeliano en PO ($\ker(ex)$ interpreta los enteros).

Ejemplos

1 - No capturados en PO Construcciones noetherianas. Grupos localmente finitos. Grupos abelianos bajo $<_{pure}$ y variantes. Clases de modelos atómicos. Extensiones finales de modelos de PA o ZF.

1 - No de naturaleza PO Espacios de Banach. Espacios de Hilbert con operadores interesantes. Estructuras analíticas.

2 - Comportamiento mejor si NO se ven como PO La estructura más fundamental del análisis complejo: $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, ex)$ - comportamiento gödeliano en PO ($\ker(ex)$ interpreta los enteros).

3 - A veces es buena la generalidad Amalgamas de dimensiones altas, bifurcación en abstracto, excelencia, docilidad [tameness], clases finitarias, superestabilidad y NIP vistas como variantes de nociones de continuidad en tipos/torres de Galois…

Teoría de modelos de la física

Teoría de modelos y física

La teoría de modelos interactúa con la física cuántica de manera intensa y peculiar desde hace unos pocos años.

Teoría de modelos y física

La teoría de modelos interactúa con la física cuántica de manera intensa y peculiar desde hace unos pocos años.

En realidad, hay interacciones con la lógica matemática de manera más general, a través de teoría de la teoría de topoi y la lógica categórica en trabajos de Isham y Doering, pero de esa vertiente no nos ocupamos aquí.

El problema con los estados propios

- Hasta ahora: partícula libre y en el caso del oscilador armónico cuántico y el cálculo de sus propagadores cuánticos... (¡mucho más sencillo que lo que interesa a los químicos!)

El problema con los estados propios

- Hasta ahora: partícula libre y en el caso del oscilador armónico cuántico y el cálculo de sus propagadores cuánticos... (¡mucho más sencillo que lo que interesa a los químicos!)
- Aunque estos modelos son clásicos para la mecánica cuántica, los cálculos concretos de los propagadores requieren calcular integrales de camino de Feynman.

El problema con los estados propios

- Hasta ahora: partícula libre y en el caso del oscilador armónico cuántico y el cálculo de sus propagadores cuánticos... (¡mucho más sencillo que lo que interesa a los químicos!)
- Aunque estos modelos son clásicos para la mecánica cuántica, los cálculos concretos de los propagadores requieren calcular integrales de camino de Feynman.
- Observables físicos: operadores auto-adjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo (típicamente de dimensión infinita).

El problema con los estados propios

- Hasta ahora: partícula libre y en el caso del oscilador armónico cuántico y el cálculo de sus propagadores cuánticos... (¡mucho más sencillo que lo que interesa a los químicos!)
- Aunque estos modelos son clásicos para la mecánica cuántica, los cálculos concretos de los propagadores requieren calcular integrales de camino de Feynman.
- Observables físicos: operadores auto-adjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo (típicamente de dimensión infinita).
- Estados del sistema: esfera unitaria. Resultados de las mediciones: valores propios de esos operadores.

El problema con los estados propios

Si un operador auto-adjunto tiene valores propios no degenerados, los vectores propios correspondientes serán ortogonales y tendrán valores propios reales.

El problema con los estados propios

Si un operador auto-adjunto tiene valores propios no degenerados, los vectores propios correspondientes serán ortogonales y tendrán valores propios reales.
Los físicos usualmente pasan aquí a lo que llaman “insertar un conjunto completo de estados”: lograr que los vectores propios de los operadores considerados generen todo el espacio.
Superposiciones = combinaciones lineales de los vectores propios - coeficientes de las combinaciones lineales: las probabilidades de colapso en el estado propio correspondiente “cuando se lleva a cabo la medición”.

Problemas

Hasta aquí todo muy bien.

Problemas

Hasta aquí todo muy bien.
Pero si enfocamos en el caso más simple posible, una partícula libre (por ejemplo en espacio unidimensional), la hipótesis de completitud del conjunto de estados entra en conflicto con trabajar en un espacio de Hilbert separable (con base enumerable). En ese caso, el operador de posición no tiene vectores propios.
Varias "soluciones" usadas por los físicos matemáticos (espacio de Hilbert “equipado”/rigged, o directamente estudiar regiones del espectro compatibles con la medición... o reemplazar el trabajar realmente con vectores propios por trabajar con funciones de onda que proveen una distribución de probabilidad para la posición de la partícula).

El operador de evolución temporal es en todo este contexto la solución a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K^t = \mathbf{H}K^t,$$

donde $\mathbf{H}$ es el hamiltoniano del sistema (el operador de energía), y K^t es el operador unitario de evolución temporal que provee el estado $K^t(\phi)$ si el estado en tiempo 0 es ϕ.

Propagador y evolución temporal.

Para dar esta evolución temporal, hay que calcular el propagador $K(x, y, t)$ (la amplitud de probabilidad de la partícula al viajar esta del punto x al punto y en tiempo t).

Propagador y evolución temporal.

Para dar esta evolución temporal, hay que calcular el propagador $K(x, y, t)$ (la amplitud de probabilidad de la partícula al viajar esta del punto x al punto y en tiempo t).
Si tuviéramos estados propios bona fide $|x\rangle$, $|y\rangle$ que correspondieran a las posiciones, esta amplitud de probabilidad estaría dada por el producto interno $\langle y|K^t|x\rangle$. Pero como en muchos casos no se tiene directamente el estado propio, el propagador termina siendo calculado como el núcleo de la representación integral del operador de evolución temporal, $(K^t\psi)(y) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y, t)\psi(x)dx$.

Propagador y evolución temporal.

Para dar esta evolución temporal, hay que calcular el propagador $K(x, y, t)$ (la amplitud de probabilidad de la partícula al viajar esta del punto x al punto y en tiempo t).
Si tuviéramos estados propios bona fide $|x\rangle$, $|y\rangle$ que correspondieran a las posiciones, esta amplitud de probabilidad estaría dada por el producto interno $\langle y|K^t|x\rangle$. Pero como en muchos casos no se tiene directamente el estado propio, el propagador termina siendo calculado como el núcleo de la representación integral del operador de evolución temporal, $(K^t\psi)(y) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y, t)\psi(x)dx$.
El paso crucial siguiente es lograr un valor entero para el propagador usando integrales de camino de Feynman.

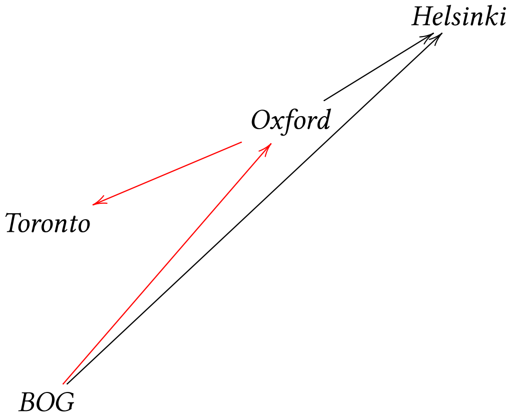
Cuatro caminos

Los problemas arrancan ahí, y los caminos de solución aportados por la teoría de modelos divergen en cuatro vías a partir de este punto.

Cuatro caminos

Los problemas arrancan ahí, y los caminos de solución aportados por la teoría de modelos divergen en cuatro vías a partir de este punto.

4 caminos hasta ahora



Oxford: Zilber - haz de Weyl, estructuras de aproximación

Zilber (desde 2011): “teoría de aproximación estructural” (modelo-teórica)

Oxford: Zilber - haz de Weyl, estructuras de aproximación

Zilber (desde 2011): "teoría de aproximación estructural" (modelo-teórica) busca dar un marco para los problemas mencionados arriba

- espacios de Hilbert de dimensión finita como aproximaciones al estado de Hilbert realmente deseado.

Oxford: Zilber - haz de Weyl, estructuras de aproximación

Zilber (desde 2011): “teoría de aproximación estructural” (modelo-teórica) busca dar un marco para los problemas mencionados arriba

- espacios de Hilbert de dimensión finita como aproximaciones al estado de Hilbert realmente deseado.
- Este último tiene un parámetro real asociado al par de operadores posición Q y cantidad de movimiento P (tales que $Qf(x) = xf(x)$ y $Pf(x) = -i\hbar(df/dx)(x)$ - los operadores tienen conmutador $[Q, P] = i\hbar$ - y también a los operadores unitarios asociados a estos, $U^t = e^{itQ}$ y $V^t = e^{itP}$ (aquí la ley de conmutación es la de Weyl, $V^w U^t = e^{i\hbar tw} U^t V^w$ para muchas instancias de t y w).

Zilber - blurring

En 2016, Zilber desarrolló en detalle su construcción mediante una combinación de lo siguiente:

- Un haz de estructuras, cada una asociada a una representación finito-dimensional (!) del álgebra de operadores, y atada a un par de números racionales (que “aproximan” el número real que controla la conmutación).
- Inmersiones entre estas estructuras.
- Un límite de estas estructuras que interpreta Zilber como un ultraproducto y luego una imagen homomorfa de este.

Blurring

Zilber da varias descripciones de su proceso. Una de estas me parece particularmente relevante a las preguntas más difíciles de la química: según Zilber el universo tendría un número de partículas finito, pero tan grande que cierta "desenfoque" (blurring) que ocurre por verlo desde la distancia coincide con la imagen que tienen varios físicos o químicos cuánticos. Las estructuras de aproximación requieren escoger con cuidado el homomorfismo del segundo paso - y los haces (y prehaces) permiten entender esto.

Helsinki: Hirvonen y Hyttinen - ultraproductos métricos

Otro enfoque: usar directamente teoría de modelos más "clásica": ultraproductos métricos de modelos estándar de la física sobre espacios de Hilbert de dimensión finita $M_N = (H_N, +, \langle | \rangle_N, \Psi)$, sumergidos dentro de ultraproductos clásicos:

$$\prod_N^d M_N/U^d \subset \prod_N M_N/U.$$

Helsinki: Hirvonen y Hyttinen - ultraproductos métricos

Otro enfoque: usar directamente teoría de modelos más "clásica": ultraproductos métricos de modelos estándar de la física sobre espacios de Hilbert de dimensión finita $M_N = (H_N, +, \langle | \rangle_N, \Psi)$, sumergidos dentro de ultraproductos clásicos:

$$\prod_N^d M_N/U^d \subset \prod_N M_N/U.$$

El problema de los vectores propios "no existentes" se ataca escogiendo cuidadosamente los ultrafiltros de manera que el límite resulte corresponder a un natural no estándar divisible por todos los naturales estándar.

Helsinki: Hirvonen y Hyttinen - ultraproductos métricos

Este enfoque comparte con el de Zilber el aproximar el espacio de Hilbert de dimensión infinita mediante subespacios de dimensión finita, pero a diferencia de Zilber, ellos hacen básicamente dos tipos de ultraproducto: uno clásico y otro métrico. El métrico no tiene infinitesimales ni infinitos (el clásico sí). Además, arman el ultrafiltro usando teoría de números para ir logrando en el límite un número N (que Zilber suele interpretar como un número finito pero gigantesco, asociado tal vez al número de partículas del universo físico) hiperfinito y muy divisible (básicamente, divisible por todos los números naturales). Al igual que Zilber, tienen que lidiar con renormalización.

Toronto: Bays y Hart - representaciones.

En 2016, construyendo sobre los trabajos de Zilber, Martin Bays y Bradd Hart enfocan dos temas: lograr la representación de Schrödinger del álgebra tridimensional de Heisenberg de distribuciones temperadas como ultralímite de representaciones finito-dimensionales de subgrupos del grupo de Heisenberg. Para ésto, utilizan el espacio de Schwarz y la teoría de distribuciones, y hacen un uso sofisticado de la teoría de la representación.

Bogotá: Ochoa-V. Haces métricos y distribuciones.

Con Maicol Ochoa (químico, actualmente en Filadelfia) hemos tomado un enfoque un poco distinto de los anteriores, pero con mucho puntos en común que quiero señalar.
Arrancamos (en [OcViLog]) generalizando las construcciones de Caicedo de haces de estructuras a haces métricos, y encontramos condiciones para la existencia de "límites" de estos haces (modelos genéricos) con buen comportamiento. Esto nos da un marco lógico general que tiene las siguientes propiedades:

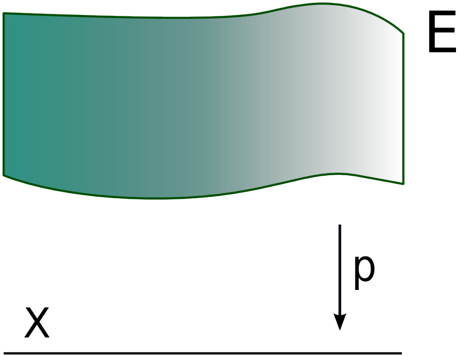
- Es una estructura natural de aproximación <u>topológica</u> (dada directamente por la estructura de haz.
- Las fibras de dicho haz son estructuras métricas en el sentido de Henson-Iovino. Los espacios de Hilbert, de Schwartz, etc. viven de manera natural sobre estas fibras.
- En los casos buenos, tenemos el modelo genérico y el teorema del modelo genérico nos permite transferir <u>algunas</u> propiedades.

Haces (gavillas, sheaf spaces) y modelos - Leray

Fije X un espacio topológico. El par (E, p) es un haz fibrado (gavilla) sobre X si E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local (sobreyectivo).

Haces (gavillas, sheaf spaces) y modelos - Leray

Fije X un espacio topológico. El par (E, p) es un haz fibrado (gavilla) sobre X si E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local (sobreyectivo).



Haces (gavillas, sheaf spaces) y modelos - Leray

Fije X un espacio topológico. El par (E, p) es un haz fibrado (gavilla) sobre X si E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local (sobreyectivo).

Esto implica:

Haces (gavillas, sheaf spaces) y modelos - Leray

Fije X un espacio topológico. El par (E, p) es un haz fibrado (gavilla) sobre X si E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local (sobreyectivo).
Esto implica:

- La topología inducida sobre las fibras $p^{-1}(a) \subset E$ es discreta, para cada $a \in X$.

Haces (gavillas, sheaf spaces) y modelos - Leray

Fije X un espacio topológico. El par (E, p) es un haz fibrado (gavilla) sobre X si E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local (sobreyectivo).
Esto implica:

- La topología inducida sobre las fibras $p^{-1}(a) \subset E$ es discreta, para cada $a \in X$.
- Las (imágenes de) las secciones σ forman una base para la topología de E (una sección es una inversa a derecha continua de p definida en un abierto $U \subset X$),

Haces (gavillas, sheaf spaces) y modelos - Leray

Fije X un espacio topológico. El par (E, p) es un haz fibrado (gavilla) sobre X si E es un espacio topológico y $p : E \to X$ es un homeomorfismo local (sobreyectivo).
Esto implica:

- La topología inducida sobre las fibras $p^{-1}(a) \subset E$ es discreta, para cada $a \in X$.
- Las (imágenes de) las secciones σ forman una base para la topología de E (una sección es una inversa a derecha continua de p definida en un abierto $U \subset X$),
- Si dos secciones σ, τ coinciden en un punto a, entonces existe un abierto $U \ni a$ tal que $\sigma \upharpoonright U = \tau \upharpoonright U$

Haces de estructuras

Un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ sobre X consta de:

1. Un haz fibrado (E, p) sobre X,
2. Sobre cada fibra $p^{-1}(a)$ $(a \in X)$, una estructura

$$\mathfrak{A}_a = (E_a, (R_i^a)_i, (f_j^a)_j, (c_k^a)_k,)$$

tal que $E_a = p^{-1}(a)$, y

- Para cada i, $R_i^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{x \in X} R_i^{\mathfrak{A}_x}$ es abierto
- Para cada j, $f_j^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{x \in X} f_j^{\mathfrak{A}_x}$ es continua
- Para cada k, $c_k^{\mathfrak{A}} : X \to E$ es tal que $x \mapsto c_k^{\mathfrak{A}_x}$ es sección global continua

Modelo genérico métrico

Para una noción apropiada de genericidad, construimos el modelo genérico métrico ("límite métrico" de modelos estándar de la física)

Modelo genérico métrico

Para una noción apropiada de genericidad, construimos el modelo genérico métrico ("límite métrico" de modelos estándar de la física)

Teorema (Modelo genérico métrico)

Dado F un filtro genérico sobre X un espacio topológico, $\mathfrak{A}$ un haz de estructuras métricas sobre X y secciones $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$. Entonces

1. $\mathfrak{A}[F] \models \varphi([\sigma_1]/\sim_F, \cdots, [\sigma_n]/\sim_F) < \varepsilon \iff \exists U \in F$ *such that* $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) < \varepsilon$
2. $\mathfrak{A}[F] \models \varphi([\sigma_1]/\sim_F, \cdots, [\sigma_n]/\sim_F) > \varepsilon \iff \exists U \in F$ *tal que* $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) > \varepsilon$

Distribuciones de Schwartz y gaussianas

En un segundo paso,

- Usamos distribuciones de Schwartz y gaussianas sobre las fibras - fibras que modelas lo suficiente para usar dualidad y cálculo de distribuciones.

Distribuciones de Schwartz y gaussianas

En un segundo paso,

- Usamos distribuciones de Schwartz y gaussianas sobre las fibras - fibras que modelas lo suficiente para usar dualidad y cálculo de distribuciones.
- Usamos propiedades algebraicas de las integrales involucradas en las funciones gaussianas, y sus productos con polinomios, en lugar de calcular integrales.

Distribuciones de Schwartz y gaussianas

En un segundo paso,

- Usamos distribuciones de Schwartz y gaussianas sobre las fibras - fibras que modelas lo suficiente para usar dualidad y cálculo de distribuciones.
- Usamos propiedades <u>algebraicas</u> de las integrales involucradas en las funciones gaussianas, y sus productos con polinomios, <u>en lugar de</u> calcular integrales.
- Luego logramos versiones "físicas" de los productos internos $\langle , \rangle_U$ y $\langle , \rangle_V$ asociados a los operadores y capturamos las propiedades de las integrales directamente ahí (y en sus transformadas de Fourier).

Distribuciones de Schwartz y gaussianas

En un segundo paso,

- Usamos distribuciones de Schwartz y gaussianas sobre las fibras - fibras que modelas lo suficiente para usar dualidad y cálculo de distribuciones.
- Usamos propiedades algebraicas de las integrales involucradas en las funciones gaussianas, y sus productos con polinomios, en lugar de calcular integrales.
- Luego logramos versiones "físicas" de los productos internos $\langle , \rangle_U$ y $\langle , \rangle_V$ asociados a los operadores y capturamos las propiedades de las integrales directamente ahí (y en sus transformadas de Fourier).
- Usamos transformada de Fourier en las fibras para representar el operador $e^{it\hat{p}^2}$ como un operador de multiplicación en el espacio de cantidad de movimiento.

De nuevo, la química

Sistemas moleculares complejos: probablemente no se pueden reducir a sistemas simples como los de los dos problemas de física hasta ahora tratados por los cuatro grupos.

De nuevo, la química

Sistemas moleculares complejos: probablemente no se pueden reducir a sistemas simples como los de los dos problemas de física hasta ahora tratados por los cuatro grupos.
¿Qué se puede transferir a las preguntas de Primas?
Por un lado, emerge en el trabajo de Zilber la métrica solamente al pasar al límite.

De nuevo, la química

Sistemas moleculares complejos: probablemente no se pueden reducir a sistemas simples como los de los dos problemas de física hasta ahora tratados por los cuatro grupos.

¿Qué se puede transferir a las preguntas de Primas?

Por un lado, emerge en el trabajo de Zilber la métrica solamente al pasar al límite.

No se toma un límite de espacios métricos (como en nuestro trabajo con Ochoa).

La manera como emerge esa métrica en el límite es aún un misterio - acaso no completamente distinto de la emergencia de propiedades en sistemas químicos. La pregunta de Primas ¿es la temperatura un observable? podría ser llevada a estructuras de aproximación, o a haces métricos adecuados.

De nuevo, la química

- El famoso modelo ab initio parece ser un candidato natural a ser entendido mediante métodos distintos. Se trata de un problema de aproximación, en la superficie mucho más complejo que los de partículas libres u osciladores armónicos cuánticos. Aún así, conjeturo que un análisis más contemporáneo matemáticamente hablando podría aportar luces interesantes. No estoy seguro de que sea un problema lógico o modelo-teórico.

De nuevo, la química

- El famoso modelo ab initio parece ser un candidato natural a ser entendido mediante métodos distintos. Se trata de un problema de aproximación, en la superficie mucho más complejo que los de partículas libres u osciladores armónicos cuánticos. Aún así, conjeturo que un análisis más contemporáneo matemáticamente hablando podría aportar luces interesantes. No estoy seguro de que sea un problema lógico o modelo-teórico.
- El primer problema de Primas (¿Aplica la mecánica cuántica a sistemas moleculares grandes?) es muy cercano a la visión de Zilber - aunque en el caso de Zilber la representación aún sirve para casos muy “simples” desde el punto de vista de la química: partícula libre, oscilador armónico cuántico.

De nuevo, la química

- El famoso modelo ab initio parece ser un candidato natural a ser entendido mediante métodos distintos. Se trata de un problema de aproximación, en la superficie mucho más complejo que los de partículas libres u osciladores armónicos cuánticos. Aún así, conjeturo que un análisis más contemporáneo matemáticamente hablando podría aportar luces interesantes. No estoy seguro de que sea un problema lógico o modelo-teórico.
- El primer problema de Primas (¿Aplica la mecánica cuántica a sistemas moleculares grandes?) es muy cercano a la visión de Zilber - aunque en el caso de Zilber la representación aún sirve para casos muy "simples" desde el punto de vista de la química: partícula libre, oscilador armónico cuántico.
- Sobre el principio de superposición y su conexión con el entrelazamiento cuántico, de nuevo hay trabajos debidos a Abramsky y Brandemburger.

REPRISE: ¿Por qué teoría de modelos?

- Generalización de ciertas partes de la geometría algebraica (¿diferencial también?)

REPRISE: ¿Por qué teoría de modelos?

- Generalización de ciertas partes de la geometría algebraica (¿diferencial también?)
- Aisla nociones apropiadas de genericidad, elementos imaginarios - en cierto sentido, se comporta como una teoría de Galois muy generalizada.

REPRISE: ¿Por qué teoría de modelos?

- Generalización de ciertas partes de la geometría algebraica (¿diferencial también?)
- Aisla nociones apropiadas de genericidad, elementos imaginarios - en cierto sentido, se comporta como una teoría de Galois muy generalizada.
- La teoría de modelos aísla la noción (extrema) de categoricidad (¿cuándo una axiomatización, una descripción de un fenómeno del mundo, es "perfecta"?) y luego da toda una

REPRISE: ¿Por qué teoría de modelos?

- Generalización de ciertas partes de la geometría algebraica (¿diferencial también?)
- Aisla nociones apropiadas de genericidad, elementos imaginarios - en cierto sentido, se comporta como una teoría de Galois muy generalizada.
- La teoría de modelos aísla la noción (extrema) de categoricidad (¿cuándo una axiomatización, una descripción de un fenómeno del mundo, es “perfecta”?) y luego da toda una
- filtración de la categoricidad a través de jerarquías (“estabilidad” modelo-teórica) de todas las teorías matemáticas posibles. Detecta invariantes nuevos entre estas.

Más recientemente...

Aunque la teoría de modelos nace como parte (y es) lógica matemática (Gödel, Tarski, etc.) su desarrollo ha estado en gran parte en diálogo con el resto de la matemática (Robinson, Ax-Kochen, luego Shelah, Hrushovski, Zilber, etc.) y se ha ido acercando a temas como

Más recientemente…

Aunque la teoría de modelos nace como parte (y es) lógica matemática (Gödel, Tarski, etc.) su desarrollo ha estado en gran parte en diálogo con el resto de la matemática (Robinson, Ax-Kochen, luego Shelah, Hrushovski, Zilber, etc.) y se ha ido acercando a temas como
geometría no-commutativa (el "cuerpo de un elemento" $\mathbb{F}_1$, haces de álgebras de Weyl), invariantes asociados a teoría de números y física (función modular j, etc.)… y como vimos antes

Más recientemente...

Aunque la teoría de modelos nace como parte (y es) lógica matemática (Gödel, Tarski, etc.) su desarrollo ha estado en gran parte en diálogo con el resto de la matemática (Robinson, Ax-Kochen, luego Shelah, Hrushovski, Zilber, etc.) y se ha ido acercando a temas como
geometría no-commutativa (el "cuerpo de un elemento" $\mathbb{F}_1$, haces de álgebras de Weyl), invariantes asociados a teoría de números y física (función modular j, etc.)... y como vimos antes

la teoría de modelos de la física - vía la geometría no conmutativa, invariantes modulares, teoría de modelos de álgebras de operadores (tesis doctoral de Argoty con Berenstein y V. en C^*-algebras, W^*-algebras), etc.

Final

¡Mil gracias por su atención!