

Una Lógica maximal / Preguntas X. Caicedo

Seminario
Lógica
Unidades

① Introd. - otros temas no hay
¿por qué presentar una lógica?
(L'_K)

Lindström - Maximalidad - Caract.
Prop. generales de una lógica.

① Alg. de historia de L'_K
Contextos / Representación

② L'_K - propiedades y "definición"

③ Preguntas a X. Caicedo / otros.

①. Introd.

tema otros temas

① gds cosas y
t. de modelos (*)

② temas de
reconstrucción (x)

③ [preguntas nuevas] (?)

Pensando en Semin. Lóg. como "foro de ideas"
me decanté por ③. ¡Advertencia! 

¿por qué presentar una nueva lógica?

Año 70: mucho trabajo en Soft Model Th.

Lindström

¿más caracterizaciones?

¿resultados importantes?

¿comparaciones no triviales?

Handbooks (Barwise-Fefervan). ¿Punto final?

Parecía que sí ... Pero tal vez no.

Väänänen
Caiado
Sketch

Interpolación: 1 satisface interpolación

τ_i

$\tau_1, \psi_1 \vdash \psi_2 \vdash \tau_2$

$\Rightarrow$ existe $\tau \in (\tau_1, \tau_2) \vdash \psi_1 \vdash \psi_2$

propiedad
de

"separación
topológica"

(cf. Caiado)

$L_{w,w}, L_{w,w}$ satisfacen interpolación
(Craig, López-Escobar)

Mañé, no. (Maitz)

Sin embargo, los pares $(L_{\infty,w}, L_{\infty,w})$
 $(L_{x^+,w}, L_{(x^+)^+,x^+})$

sí satisfacen interpolación.

¿Hay alguna lógica intermedia que sea la razón de la interpolación?

$\exists$ existe $\mathbb{L}$ con interpol. $\hookrightarrow$
 $L_{\leq \omega, \omega} \subset \mathbb{L} \subset L_{< \omega, < \omega}$?
 $L_{\kappa^+, \omega} \subset \mathbb{L} \subset L_{\kappa^+, \kappa}$?

Problemas clásicos

Una respuesta (Shelah, 2014):

la lógica L'_κ ($\kappa = \aleph_\kappa$) ↗ quantifier depth
for transparency

L'_κ es una lógica "nice" (cerr. bajo $\neg, \exists, \forall$, subst., ...)
 permite interp.

$\mathbb{L}_\kappa \subset \mathbb{L}_{\kappa, \omega} \subset L'_{\kappa, \omega} \subset L'_\kappa \subset L_{< \kappa}$
 $\bigcup_{\lambda < \kappa} \mathbb{L}_{\lambda^+, \omega} \quad \bigcup_{\lambda < \kappa} \mathbb{L}_{\lambda^+, \lambda^+}$

Vale LST $\forall$: dada $\varphi \in L'_\kappa(\tau)$, $\exists$ existe $M \models \varphi$, $|M| < \kappa$

4)

Compatibilidad débil: "buen orden" no
es expresable en $\mathcal{L}'_K$

[dada φ sent de $\mathcal{L}'_K$
dados α ordinal
ent. $\exists M \models \varphi$, $(P^\alpha, \leq^\alpha)$ buen orden de tipo $\geq \alpha$
ent. $\exists M' \models \varphi$ $\nmid$ $(P^{\alpha'}, \leq^{\alpha'})$ no es b.o.

[Compatibilidad con $\frac{+}{\text{binario}}$ de teorías]
no hay $\bar{T}$ -V!*

Orden natural
en lógicas:

$$\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$$



dado ε vocab. , $\varphi_1 \in \mathcal{L}_1(\varepsilon)$:
existe $\varphi_2 \in \mathcal{L}_2(\varepsilon)$ $\nmid$
 $\sim$ Mas ε -modelos,
 $M \models_{\mathcal{L}_1} \varphi_1 \Leftrightarrow M \models_{\mathcal{L}_2} \varphi_2$

① Algo de historia de $\mathcal{L}'_K$.

(Para mí) Caracterizar en clase elt.
abstracta $(K, \leq_K)$.

• fes pres. precis alt: $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$.

(Shohat, en proceso)

• Dada κ AEC, $\tau = \tau_\kappa$, $\kappa = \text{LS}\tau_\kappa$

$$\lambda = \mathbb{I}_2(\kappa + |\tau|)^+$$

existe $\psi \in L_{\kappa^+, \kappa^+}(\tau)$ y $\kappa = \text{Mod}(\psi)$.

[Interesante y no trivial pues ψ es del mismo vocablo de κ !]

• MA en proceso:

$$\left[\begin{array}{l} \psi_\kappa \in L'_{\kappa'}(\tau) \\ \kappa \approx \kappa_{\kappa'} \equiv \dots \end{array} \right]$$

ojo: interpolación

$\approx$
Amalgamación $\equiv$ Compacidad



6)

②

L_K . Definición. Algunas prop.

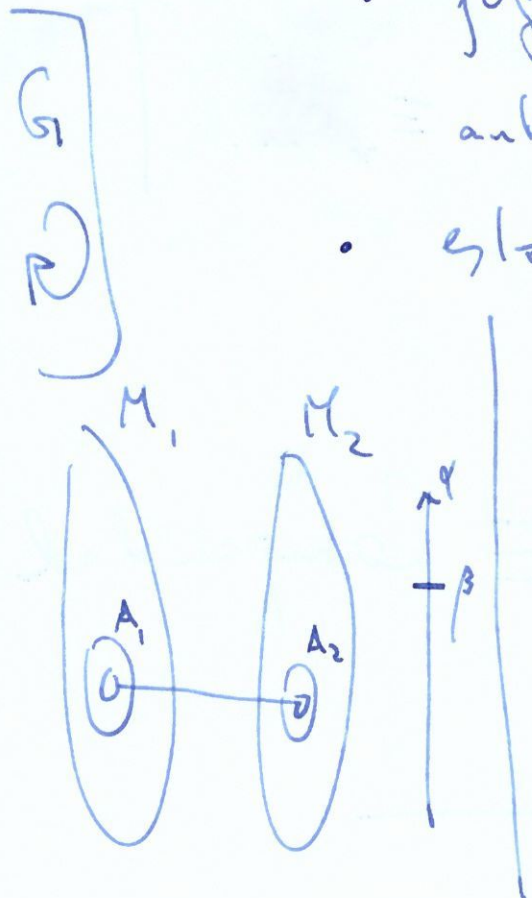
$\mathcal{H}_{j^2}$ $\left\{ \begin{array}{ll} \tau & \\ M_1, M_2 & \tau\text{-str.} \\ \Gamma & \tau\text{-flos en cudg. lógic} \\ & \hookrightarrow \text{finitos} \\ \mathcal{O} & \text{cardinal} \\ \alpha & \text{ordinal} \end{array} \right.$

Definimos $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\Gamma, \alpha, \alpha}(M_1, M_2)$.

• jugadas: $n < \omega$

antes de n -ésima jugada tener

• estado $s_n = (A_n^1, A_n^2, h_n^1, h_n^2, g_n, \beta_n, n)$



(a) $A^l \subset M_2$

(b) $\beta \leq \alpha$ ordinal

(c) $h: A^l \rightarrow \omega$ [hipoteca]

(d) $g: M_1 \xrightarrow{\text{par.}} M_2$ $\begin{cases} g^1 = g \\ g^2 = g^{\text{par.}} \end{cases}$

(e) $\text{dom}(g) \subset A^l$

(f) g preserva Γ -satisf. (y en τ)

$$(9) \quad a \in \text{dom}(g') \Rightarrow h^l(a) < n$$

↓
la única
parte que
depende del estado j -ésimo

$$\cdot \quad s_0 = (\phi, \phi, \phi, \phi, \phi, \alpha, \omega)$$

$\sim M_1 \not\equiv M_2$, s_0 no
es estado
de $\mathcal{P}$...

$$\cdot \quad t \geq s \sim$$

$$A_s^l \subset A_t^l, h_s^l \subset h_t^l, g_s \subset g_t, \beta_s > \beta_t$$

$n_s < n_t$

$$\sim n_t = n_s + 1, t \text{ es sucesor de } s$$

$\cdot$ en n -ésimo j -ésimo

ALS es como (β_{n+1}, c_n, A_n') con

(anti iso)



$i_n \in \{1, 2\}$ (avant
el
relaj)

$$\beta_{n+1} < \beta_n$$

$$A_n^{c_n} \subset A_n' \in [M_{c_n}]^{\leq \theta}$$

ISO

es como

s_{n+1} sucesor de s_n

$$A_{n+1}^{c_n} = A_n'$$

$$A_{n+1}^{3-c_n} = A_n^{3-c_n} \cup \text{dom}(g_{s_{n+1}}^{3-c_n})$$

8)

$$a \in A'_n \setminus A_n^c \Rightarrow h^n(a) \geq n+1$$

"²ⁿ⁺¹
extiende hipotera"

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}$$

$\zeta_h \rightarrow EF$

pero con tiempo de pago
(se quiere no capturar
buen orden)

Sea ahora

$$\Sigma_{\Gamma, \theta, \alpha}^{0, \tau} = \{ (M_1, M_2) \mid M_1, M_2 \text{ con } \tau\text{-modelos} \}$$

150 tiene ent. gan
en $\mathcal{D}_{\Gamma, \theta, \alpha}(M_1, M_2)$

$$\Sigma_{\Gamma, \theta, \alpha}^{1, \tau} = \text{trd}(\Sigma_{\Gamma, \theta, \alpha}^{0, \tau})$$

caso típico: $\Gamma = \int f(\tau)$ (atómico, ...)

Hecho: $\mathcal{D}_{\Gamma, \theta, \alpha}(M_1, M_2)$ es determ., sin memoria

$$M_1 \approx M_2 \Rightarrow \Sigma_{\Gamma, \theta, \alpha}^{0, \tau}(M_1, M_2)$$

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Sigma_{\Gamma, \theta, \alpha}^0} & M_2 \\ \uparrow \text{ss} & \Downarrow & \uparrow \text{ss} \\ M'_1 & \xrightarrow{\Sigma_{\Gamma, \theta, \alpha}^0} & M'_2 \end{array}$$

$E_{\Gamma, \dots}^{\circ}$ refl. in.

$E_{\Gamma, \theta, \alpha}$ tiene $\leq 2_{\alpha+1} (\Gamma+1)$ clases
monotónicas

$$\psi \in L'_{\leq \theta}(\tau)$$



$$\psi = \psi_{gf(\tau), \theta, \alpha} = \{ M \mid \tau\text{-str.} \}$$

$$\begin{array}{l} \tau, C \models \\ |\tau| \leq \theta \\ \alpha < \theta^+ \end{array}$$

para alguna suc.

$\langle M_\beta \mid \beta < \beta(\tau) \rangle$
de τ -mod. $\beta(\tau) \leq 2_{\alpha+1}$

En otras palabras,

$$M \models \psi$$



$$\neq M \models \psi'_{gf(\tau), \theta, \alpha} M_\beta$$

para algún $\beta < \alpha$

tiene las prop. básicas

12] Crucial Claim (closure by unions)

Si: $\varphi(\bar{z}) \in L_{\leq 0}^1(\bar{c})$ for

$M_n \prec_{\perp_{<0,0^+}} M_{n+1} \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_{0^+}$

$M_w = \bigcup_{n < \omega} M_n$

$\bar{a} \in {}^{f(\bar{c})}M_0$

$\bar{c} = \bar{c}(M_n) \quad n < \omega$

ex hence $M_n \equiv_{\perp_0} M_w \quad \forall n < \omega$

$M_n \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow M_w \models \varphi[\bar{a}]$

Lemma: $\perp_{\kappa}^1$ satisfies SUDWO $_{\kappa}^1$
(strong verif. of well order...)

Theorem: $\mathcal{I} \leq \perp_{\kappa}^1$ is

- $\kappa = \mathcal{I}_{\kappa}$ limit to finite no club
- $\mathcal{I}$ nice
- $oc(\mathcal{I}) \leq \kappa$
- $\perp_{\kappa}^{-1}(\mathcal{I}) \leq \mathcal{I}$
- $\mathcal{I}$ satisfies SUDWO $_{\kappa}^1$