Geometría de la música

Un camino por las superficies tonales

Andrés Villaveces

Departamento de Matemáticas - Universidad Nacional - Bogotá

23 Encuentro de geometría
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá - 22 de Junio de 2017

Contenido

Música, mente, cuerpo, matemática.

La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando.

Gottfried Leibniz

La ventaja principal de la música sobre la matemática es la conexión física de nuestro cuerpo con el sonido de una composición.

Marcus Du Sautoy

Música, mente, cuerpo, matemática.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Música} & \leftrightarrow & \text{Cuerpo} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Matemática} & \leftrightarrow & \text{Mente}
\end{array}
$$

¿Matemática para la música?

Pregunta (ingenua): Aunque la matemática está presente en

- Ondas sonoras
- Tecnología para grabar CDs o archivos digitales
- Tecnologías de compresión a mp3, &c. ...

¿existe una "ecuación" matemática que *describa* una pieza musical?
¿existe una "ecuación" matemática que *prediga* la continuación, el desenlace, de una pieza musical?

Claramente, ... **¡¡¡NO!!!**

¿Matemática para la música?

Pregunta (ingenua): Aunque la matemática está presente en

- Ondas sonoras
- Tecnología para grabar CDs o archivos digitales
- Tecnologías de compresión a mp3, &c. ...

¿existe una "ecuación" matemática que *describa* una pieza musical?
¿existe una "ecuación" matemática que *prediga* la continuación, el desenlace, de una pieza musical?

Claramente, ... ¡¡¡NO!!!

¿Matemática para la música?

Pregunta (ingenua): Aunque la matemática está presente en

- Ondas sonoras
- Tecnología para grabar CDs o archivos digitales
- Tecnologías de compresión a mp3, &c. ...

¿existe una "ecuación" matemática que *describa* una pieza musical?
¿existe una "ecuación" matemática que *prediga* la continuación, el desenlace, de una pieza musical?

Claramente, ... **¡¡¡NO!!!**

Estructura matemática

No nos interesa directamente extraer ecuaciones que "predigan" o describan piezan musicales.

Nos interesa la **estructura** musical. "Estructura" es un tema pesado. Vale la pena el texto del lógico matemático **Roman Kossak** sobre Estructura Matemática, si le interesan aspectos filosóficos (fenomenológicos) sobre el tema.

Aquí tendremos *ejemplos* de estructura matemática en música.

Estructura matemática

No nos interesa directamente extraer ecuaciones que "predigan" o describan piezan musicales.

Nos interesa la **estructura** musical. "Estructura" es un tema pesado. Vale la pena el texto del lógico matemático **Roman Kossak** sobre Estructura Matemática, si le interesan aspectos filosóficos (fenomenológicos) sobre el tema.

Aquí tendremos *ejemplos* de estructura matemática en música.

Estructura matemática

No nos interesa directamente extraer ecuaciones que “predigan” o describan piezan musicales.
Nos interesa la **estructura** musical. “Estructura” es un tema pesado.
Vale la pena el texto del lógico matemático **Roman Kossak** sobre Estructura Matemática, si le interesan aspectos filosóficos (fenomenológicos) sobre el tema.
Aquí tendremos *ejemplos* de estructura matemática en música.

Énfasis contemporáneo en esta charla

Aunque la historia de los lazos entre Música y Matemática es tan antigua como la historia de las culturas, hago énfasis en enfoques relativamente *contemporáneos* para preguntas *antiguas*.

Pregunta

- *¿Qué hace que suene bien la música?*
- *¿Cómo podemos visualizar la música - la evolución de las voces - matemáticamente?*

Contexto

Trabajos de autores recientes, basados en líneas abiertas por Riemann en el siglo XIX.

- ***Dmitri Tymoczko** (Princeton) - A Geometry of Music - Oxford University Press - 2011 + artículo en **Science** de 2007.*
- ***Thomas Fiore** (Michigan) - varios trabajos en topología y música.*
- ***David Lewin, Guerino Mazzola, &c.***

Énfasis contemporáneo en esta charla

Aunque la historia de los lazos entre Música y Matemática es tan antigua como la historia de las culturas, hago énfasis en enfoques relativamente *contemporáneos* para preguntas *antiguas*.

Pregunta

- *¿Qué hace que suene bien la música?*
- *¿Cómo podemos visualizar la música - la evolución de las voces - matemáticamente?*

Contexto

Trabajos de autores recientes, basados en líneas abiertas por Riemann en el siglo XIX.

- ***Dmitri Tymoczko*** *(Princeton) - A Geometry of Music - Oxford University Press - 2011 + artículo en* ***Science*** *de 2007.*
- ***Thomas Fiore*** *(Michigan) - varios trabajos en topología y música.*
- ***David Lewin, Guerino Mazzola, &c.***

Énfasis contemporáneo en esta charla

Aunque la historia de los lazos entre Música y Matemática es tan antigua como la historia de las culturas, hago énfasis en enfoques relativamente *contemporáneos* para preguntas *antiguas*.

Pregunta

- *¿Qué hace que suene bien la música?*
- *¿Cómo podemos visualizar la música - la evolución de las voces - matemáticamente?*

Contexto

Trabajos de autores recientes, basados en líneas abiertas por Riemann en el siglo XIX.

- ***Dmitri Tymoczko*** *(Princeton) - A Geometry of Music - Oxford University Press - 2011 + artículo en* ***Science*** *de 2007.*
- ***Thomas Fiore*** *(Michigan) - varios trabajos en topología y música.*
- ***David Lewin, Guerino Mazzola, &c.***

Objetos matemáticos y categorías conceptuales

La **teoría musical** busca dar buenas herramientas para escuchar la música y generar **comunicación** sobre lo que se escucha.

Contexto (Ramificación en matemática y música)

- ***Sistemas numéricos***
  $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ *- notas del piano, niveles ("pitches")*

- ***Combinatoria** - taxonomías, clasificaciones*
- ***Teoría de grupos** - Transformaciones entre clases de notas*

- ***Topología de superficies** - Representación de la dinámica musical.*

Objetos matemáticos y categorías conceptuales

La **teoría musical** busca dar buenas herramientas para escuchar la música y generar **comunicación** sobre lo que se escucha.

Contexto (Ramificación en matemática y música)

- ***Sistemas numéricos***
  $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ *- notas del piano, niveles ("pitches")*
- ***Combinatoria*** *- taxonomías, clasificaciones*
- ***Teoría de grupos*** *- Transformaciones entre clases de notas*
- ***Topología de superficies*** *- Representación de la dinámica musical.*

Objetos matemáticos y categorías conceptuales

La **teoría musical** busca dar buenas herramientas para escuchar la música y generar **comunicación** sobre lo que se escucha.

Contexto (Ramificación en matemática y música)

- ***Sistemas numéricos***
  $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ *- notas del piano, niveles ("pitches")*
- ***Combinatoria*** *- taxonomías, clasificaciones*
- ***Teoría de grupos*** *- Transformaciones entre clases de notas*
- ***Topología de superficies*** *- Representación de la dinámica musical.*

Objetos matemáticos y categorías conceptuales

La **teoría musical** busca dar buenas herramientas para escuchar la música y generar **comunicación** sobre lo que se escucha.

Contexto (Ramificación en matemática y música)

- ***Sistemas numéricos***
  $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ *- notas del piano, niveles ("pitches")*
- ***Combinatoria*** *- taxonomías, clasificaciones*
- ***Teoría de grupos*** *- Transformaciones entre clases de notas*
- ***Topología de superficies*** *- Representación de la dinámica musical.*

Hacia la geometría de acordes musicales (Tymoczko)

No euclídea: ¿cuál?

Acorde	$\leftrightarrow$	Punto en un orbifold
Progresión de acordes	$\leftrightarrow$	Geodésica en el orbifold
Conducción de voces	$\leftrightarrow$	Camino a trozos
?		Camino generalizado (homotopía)

Los caminos CORTOS (¿en qué sentido "cortos") corresponden a lo que han preferido compositores (eficiencia) en muchos estilos musicales.

Hacia la geometría de acordes musicales (Tymoczko)

No euclídea: ¿cuál?

Acorde	$\leftrightarrow$	Punto en un orbifold
Progresión de acordes	$\leftrightarrow$	Geodésica en el orbifold
Conducción de voces	$\leftrightarrow$	Camino a trozos
?		Camino generalizado (homotopía)

Los caminos CORTOS (¿en qué sentido “cortos”) corresponden a lo que han preferido compositores (eficiencia) en muchos estilos musicales.

Criterios métricos

¿Cuándo existen esos caminos cortos, esas “geodésicas musicales”?

Idea clave: SIMETRÍA de los acordes

bajo

- traslación (“transposición”)
- reflexión (“inversión”)
- permutación

Criterios métricos

¿Cuándo existen esos caminos cortos, esas “geodésicas musicales”?
Idea clave: SIMETRÍA de los acordes

bajo

- traslación (“transposición”)
- reflexión (“inversión”)
- permutación

Las dos columnas - y la tensión

CONSonancia y DISonancia corresponden a distintos tipos de cuasi-simetría.

La música en “occidente” está en la confluencia de dos nociones en tensión:

ARMONÍA	CONTRAPUNTO
harmotton	contra-punctus
acordes aceptables	conducción de voces
vertical	horizontal
sucesión de acordes	conectar lo horizontal (voces)
	de manera *eficaz, independiente, separable*

Las dos columnas - y la tensión

CONSonancia y DISonancia corresponden a distintos tipos de cuasi-simetría.
La música en “occidente” está en la confluencia de dos nociones en tensión:

ARMONÍA	CONTRAPUNTO
harmotton	contra-punctus
acordes aceptables	conducción de voces
vertical	horizontal
sucesión de acordes	conectar lo horizontal (voces)
	de manera *eficaz, independiente, separable*

SONATA

Hob XVI:24

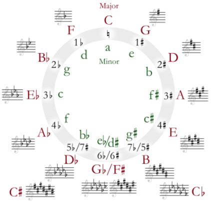
Joseph Haydn

Allegro.

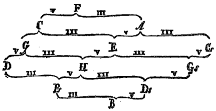
¿Cómo se articulan hARM y CONTRPct?

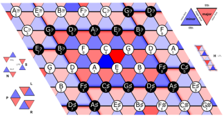
Algo de historia brevísima:

- Círculo de quintas (barroco): conducción de voces eficaz en 12 escalas mayores.



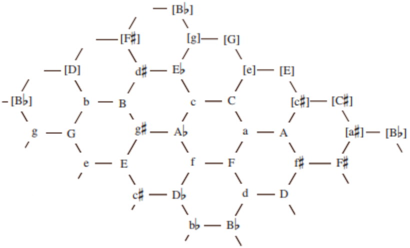
- Euler: Tonnetz (red tonal) - cond. de voces eficaz en 24 tríadas mayores y menores.





Otra visión del Tonnetz de Euler

(En realidad, dual geométrico)

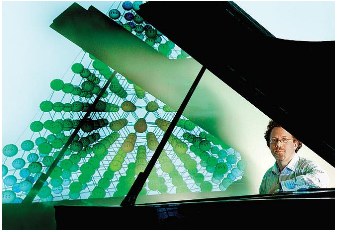


La hipótesis de Tymoczko - “meta-tonalidad”

Aún así, falta una teoría de CUÁNDO y POR QUÉ es posible la conducción eficaz de voces.

Los siguientes cinco rasgos están en la mayoría de géneros musicales, occidentales o no, pasados y presentes:

1. **Movimiento melódico conjunto**
2. **Consonancia acústica**
3. **Consistencia armónica**
4. **Macroarmonía limitada**
5. **Centricidad**



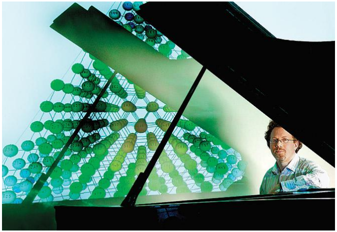
Dmitri Tymoczko - Profesor de composición y teoría musical en la Universidad de Princeton.

La hipótesis de Tymoczko - “meta-tonalidad”

Aún así, falta una teoría de CUÁNDO y POR QUÉ es posible la conducción eficaz de voces.

Los siguientes cinco rasgos están en la mayoría de géneros musicales, occidentales o no, pasados y presentes:

1. **Movimiento melódico conjunto**
2. **Consonancia acústica**
3. **Consistencia armónica**
4. **Macroarmonía limitada**
5. **Centricidad**

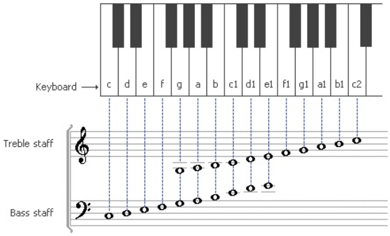


Dmitri Tymoczko - Profesor de composición y teoría musical en la Universidad de Princeton.

Tymoczko 5

1. **Movimiento melódico conjunto** - las melodías tienden a moverse distancias cortas de nota a nota
2. **Consonancia acústica** - se prefieren en general armonías consonantes a armonías disonantes, y suelen ser usadas en puntos estables
3. **Consistencia armónica** - las armonías en un pasaje musical, tienden a ser estructuralmente similares entre sí
4. **Macroarmonía limitada** - la música tonal suele usar macroarmonías relativamente pequeñas (5 a 8 notas)
5. **Centricidad** - en lapsos de tiempo moderados una nota suele ser prominente - y sirve como objetivo emocional musical

Sistemas numéricos y teclado



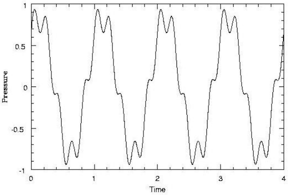
El teclado del piano (y la notación musical “usual” correspondiente) a DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO-... (C-D-E-F-G-A-B-C-...) se pueden modelar de manera natural sobre los enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

o incluso sobre los reales $\mathbb{R}$, llevando las cosas al extremo. El *orden natural* de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$ es crucial aquí.

Espacio tonal lineal

Sonido: pequeñas fluctuaciones en la presión del aire.



Si el período es t, la **frecuencia fundamental** es $1/t \in \mathbb{R}$. Si un músico no tiene oído absoluto, la melodía $(f, g, h, \dots)$ puede ser cantada en otro momento $(\alpha f, \alpha g, \alpha h, \dots)$ donde α es un real cercano a 1.

¡razones, no valores absolutos!

Conveniente: tomar logaritmos $(\log(xy) = \log(x) + \log(y))$ para "convertir productos en sumas".

Espacio tonal lineal (II)

Renombramos los tonos:

$$p = c_1 + c_2 \log_2(f/440).$$

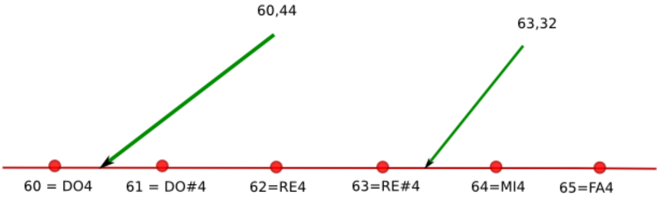
Lo importante es que ahora la **transposición** de las notas es de $(p, q, r, \dots)$ a $(p + x, q + x, r + x, \dots)$. La distancia entre tonos ahora es $|p - q|$ en lugar de f/g.

Contexto (El más usual)

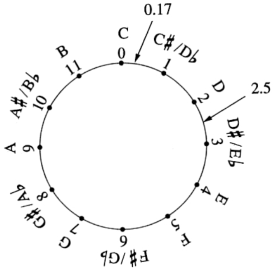
Si tomamos $c_1 = 69$ y $c_2 = 12$ obtenemos los tonos de las notas del teclado en los enteros: DO *central es* 60, LA *es* 69.

Espacio tonal lineal (III)

En este contexto, las notas usuales son números enteros, pero perfectamente podemos ubicar notas en cualquier número real intermedio: DO4 es 60, DO♯4 es 61 ... pero podemos pensar en la nota 60, 33 por ejemplo.



Aritmética modular



El espacio de tonos **circular** se construye “dividiendo” el espacio de tonos lineal por la relación de equivalencia “ser equivalente mod 12”

Transposición/traslación - Inversión/reflexión

Lo que los músicos llaman transposiciones se llama "traslación" en matemáticas. La **transposición por** 2 T_2 es una función

$$T_2 : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12$$

$$x \mapsto x + 2 (\mod 12).$$

Así, $T_2(0) = 2 \cdots T_2(6) = 8 \cdots T_2(10) = 0$, $T_2(11) = 1$.

Otra función importante es la **inversión** $I_0 : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12$ dada por $I_0(x) = -x (\mod 12)$. Así: $I_0(3) = 9$, $I_0(9) = 3$, $I_0(6) = 6$. Note que $I_0 \circ I_0 = T_0$.

Transposición/traslación - Inversión/reflexión

Lo que los músicos llaman transposiciones se llama "traslación" en matemáticas. La **transposición por** 2 T_2 es una función

$$T_2 : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12$$

$$x \mapsto x + 2 (\bmod 12).$$

Así, $T_2(0) = 2 \cdots T_2(6) = 8 \cdots T_2(10) = 0$, $T_2(11) = 1$.

Otra función importante es la **inversión** $I_0 : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12$ dada por $I_0(x) = -x (\bmod 12)$. Así: $I_0(3) = 9, I_0(9) = 3, I_0(6) = 6$. Note que $I_0 \circ I_0 = T_0$.

Transposición - Inversión

En general, la **transposición por** n (n un entero $\mod 12$) es la función

$$T_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto x + n \bmod 12$$

y la **inversión** n es

$$I_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto -x + n \bmod 12.$$

Así, por ejemplo
$I_7(3) = -3 + 7 = 4 \bmod 12, I_5(8) = -8 + 5 = -3 = 9 \bmod 12.$

I_n gráficamente es la reflexión de $\mathbb{R}$ alrededor de $\frac{n}{2}$.

Transposición - Inversión

En general, la **transposición por** n (n un entero $\mod 12$) es la función

$$T_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto x + n \bmod 12$$

y la **inversión** n es

$$I_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto -x + n \bmod 12.$$

Así, por ejemplo
$I_7(3) = -3 + 7 = 4 \bmod 12$, $I_5(8) = -8 + 5 = -3 = 9 \bmod 12$.

I_n gráficamente es la reflexión de $\mathbb{R}$ alrededor de $\frac{n}{2}$.

Transposición - Inversión

En general, la **transposición por** n (n un entero $\mod 12$) es la función

$$T_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto x + n \bmod 12$$

y la **inversión** n es

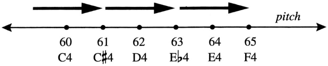
$$I_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto -x + n \bmod 12.$$

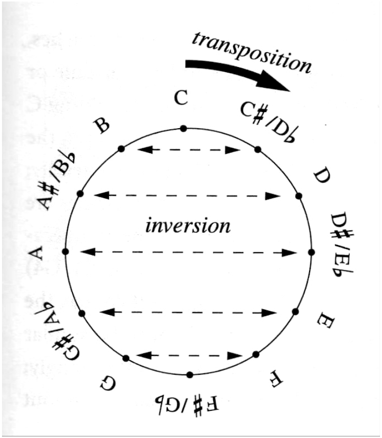
Así, por ejemplo
$I_7(3) = -3 + 7 = 4 \bmod 12$, $I_5(8) = -8 + 5 = -3 = 9 \bmod 12$.

I_n gráficamente es la reflexión de $\mathbb{R}$ alrededor de $\frac{n}{2}$.

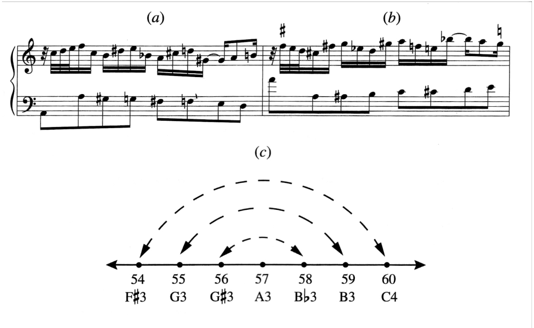
Transposiciones

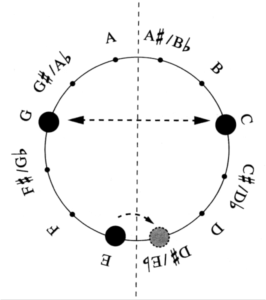
Transposiciones en espacio tonal lineal, en espacio tonal circular y en notación musical "clásica".





Inversiones





Inversiones en espacio tonal lineal, circular y en notación musical "clásica".

Transponer/Invertir acordes o melodías

Con esta notación, los acordes (llamados “pcsets” en teoría musical) o las melodías (“pcsegs” en t. mus.) se pueden transponer e invertir:
Con la convención DO $= 0$, DO$\sharp = 1, \ldots,$ SI $= 11$, el acorde de DO mayor (DO-MI-SOL) es $\{0, 4, 7\}$ y si aplicamos T_7 lo transponemos a SOL mayor (SOL-SI-RE):

$$T_7\{0, 4, 7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{0+7, 4+7, 7+7\} = \{7, 11, 2\}.$$

$$I_0\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle = \langle 0, 0, 8, 8, 5, 5, 8, 7, 7, 10, 10, 1, 1, 5\rangle$$

(Tema de la Sinfonía Sorpresa de Haydn. Ejemplos de Thomas Fiore.)

Transponer/Invertir acordes o melodías

Con esta notación, los acordes (llamados "pcsets" en teoría musical) o las melodías ("pcsegs" en t. mus.) se pueden transponer e invertir: Con la convención DO $= 0$, DO$\sharp = 1, \ldots,$ SI $= 11$, el acorde de DO mayor (DO-MI-SOL) es $\{0, 4, 7\}$ y si aplicamos T_7 lo transponemos a SOL mayor (SOL-SI-RE):

$$T_7\{0, 4, 7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{0+7, 4+7, 7+7\} = \{7, 11, 2\}.$$

$$I_0\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle = \langle 0, 0, 8, 8, 5, 5, 8, 7, 7, 10, 10, 1, 1, 5\rangle$$

(Tema de la Sinfonía Sorpresa de Haydn. Ejemplos de Thomas Fiore.)

Transponer/Invertir acordes o melodías

Con esta notación, los acordes (llamados “pcsets” en teoría musical) o las melodías (“pcsegs” en t. mus.) se pueden transponer e invertir: Con la convención DO $=0$, DO$\sharp = 1, \ldots,$ SI $= 11$, el acorde de DO mayor (DO-MI-SOL) es $\{0, 4, 7\}$ y si aplicamos T_7 lo transponemos a SOL mayor (SOL-SI-RE):

$$T_7\{0, 4, 7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{0+7, 4+7, 7+7\} = \{7, 11, 2\}.$$

$$I_0\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle = \langle 0, 0, 8, 8, 5, 5, 8, 7, 7, 10, 10, 1, 1, 5\rangle$$

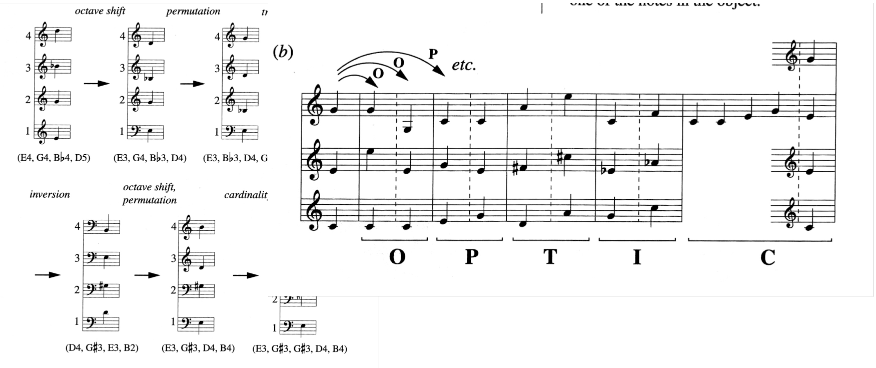
(Tema de la Sinfonía Sorpresa de Haydn. Ejemplos de Thomas Fiore.)

Más transformaciones: OPTIC

En teoría musical, dos objetos pertenecen a la misma *clase* (set class) si están relacionados por alguna de las cinco simetrías “OPTIC” (cambio de octava (O), permutación (P), transposición (T), inversión (I), cambio de cardinal (C)).

Operación	**Acción**
Octava	Mover cualquier nota a otra octava.
Permutación	Reordenar el objeto, cambio de voces.
Transposición	Transponer todo el objeto.
Inversión	Invertir el objeto completo.
Cardinal	Agregar una voz duplicante de una nota.

Transformaciones OPTIC



Grupos musicales

En teoría musical, los *grupos* son objetos matemáticos cruciales: los teóricos musicales usan los grupos como categorías conceptuales para hacer más tangible la estructura de la música.
¿Cómo interactúan las transposiciones y las inversiones?

Forman un *grupo*, llamado el "grupo T/I". Otro grupo, esencialmente inventado por Hugo Riemann en el siglo XIX, el grupo *PLR* o *neo-Riemanniano* ayuda a entender muchas obras musicales.

Grupos musicales

En teoría musical, los *grupos* son objetos matemáticos cruciales: los teóricos musicales usan los grupos como categorías conceptuales para hacer más tangible la estructura de la música.
¿Cómo interactúan las transposiciones y las inversiones?

Forman un *grupo*, llamado el “grupo T/I”. Otro grupo, esencialmente inventado por Hugo Riemann en el siglo XIX, el grupo *PLR* o *neo-Riemanniano* ayuda a entender muchas obras musicales.

El grupo T/I

Sea S el conjunto de todas las formas transpuestas e invertidas del acorde de DO mayor $\langle 0, 4, 7\rangle$ - formas primas y formas invertidas.

Formas primas	**Formas invertidas**
$C = \langle 0, 4, 7\rangle$	$\langle 0, 8, 5\rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8\rangle$	$\langle 1, 9, 6\rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9\rangle$	$\langle 2, 10, 7\rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10\rangle$	$\langle 3, 11, 8\rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11\rangle$	$\langle 4, 0, 9\rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0\rangle$	$\langle 5, 1, 10\rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1\rangle$	$\langle 6, 2, 11\rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2\rangle$	$\langle 7, 3, 0\rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3\rangle$	$\langle 8, 4, 1\rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4\rangle$	$\langle 9, 5, 2\rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5\rangle$	$\langle 10, 6, 3\rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6\rangle$	$\langle 11, 7, 4\rangle = e$

El grupo T/I

Lo anterior en música corresponde a los 24 acordes mayores y menores. Las transposiciones e inversiones inducen funciones $T_n : S \to S$ e $I_n : S \to S$ para $n = 0, \ldots, 11$, aplicando la función a cada entrada del pcseg correspondiente.

El grupo T/I consta de las 24 funciones $T_0, \ldots, T_{11}, I_0, \ldots, I_{11}$.

El grupo T/I

Lo anterior en música corresponde a los 24 acordes mayores y menores. Las transposiciones e inversiones inducen funciones $T_n : S \to S$ e $I_n : S \to S$ para $n = 0, \ldots, 11$, aplicando la función a cada entrada del pcseg correspondiente.

El grupo T/I consta de las 24 funciones $T_0, \ldots, T_{11}, I_0, \ldots, I_{11}$.

El grupo T/I

La composición $\circ$ en T/I obedece:

$$T_m \circ T_n = T_{m+n}$$

$$T_m \circ I_n = I_{m+n}$$

$$I_m \circ T_n = I_{m-n}$$

$$I_m \circ I_n = T_{m-n}$$

y corresponde (es isomorfo) a lo que en matemática se llama el grupo diedro de orden 24.

Otro grupo musical: el *PLR*

Éste (con menos detalles) es un grupo de funciones $S \to S$ como antes - “generado” por tres transformaciones musicales básicas P, L y R:

- $P\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 7, 3, 0\rangle$: intercambia primera y tercera nota, y cambio el tipo de acorde (de primo a invertido).
- L es como P, pero intercambiando segunda y tercera nota: $L\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 11, 7, 4\rangle$.
- R es como P, pero intercambiando primera y segunda nota: $R\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 4, 0, 9\rangle$.

Al componer estas funciones obtenemos objetos $L \circ R$, $R \circ R$, &c.

En música, P lleva un acorde a su paralelo mayor o menor; convierte DO mayor en do menor y viceversa. L intercambia dominante: convierte DO mayor en mi menor, por ejemplo. R convierte un acorde en su relativo mayor o menor; convierte DO mayor en la menor, o la menor en DO mayor, por ejemplo.

Otro grupo musical: el *PLR*

Éste (con menos detalles) es un grupo de funciones $S \to S$ como antes - "generado" por tres transformaciones musicales básicas P, L y R:

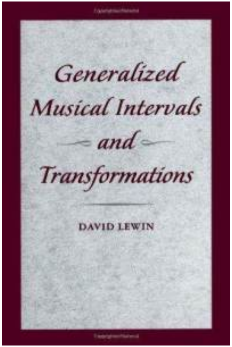
- $P\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 7, 3, 0\rangle$: intercambia primera y tercera nota, y cambio el tipo de acorde (de primo a invertido).
- L es como P, pero intercambiando segunda y tercera nota: $L\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 11, 7, 4\rangle$.
- R es como P, pero intercambiando primera y segunda nota: $R\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 4, 0, 9\rangle$.

Al componer estas funciones obtenemos objetos $L \circ R$, $R \circ R$, &c. En música, P lleva un acorde a su paralelo mayor o menor; convierte DO mayor en do menor y viceversa. L intercambia dominante: convierte DO mayor en mi menor, por ejemplo. R convierte un acorde en su relativo mayor o menor; convierte DO mayor en la menor, o la menor en DO mayor, por ejemplo.

PLR para matemáticos

El grupo *PLR* es *isomorfo* al grupo T/I, pero sus objetos representan transformaciones de acordes que han sido importantes en música durante siglos por razones *distintas*.
[Matemática: $PLR \approx T/I \approx D_{12}$ - el diedro de orden 24. Ésto es sorprendente. Dentro del grupo de todas las permutaciones de S (un grupo con 24! elementos), T/I es el centralizador de *PLR* y viceversa.]

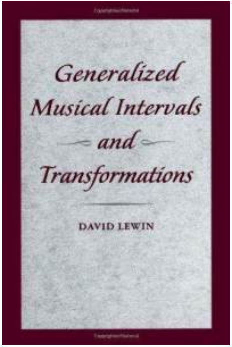
Más allá del tecnicismo, lo importante es que la matemática *revela* una dualidad profunda entre distintas transformaciones importantes en música - a priori, no era obvio que transponer e invertir acordes fuera un “hermano gemelo desconocido” de tomar relativas, paralelas y cambios de dominantes en música. David Lewin explota esta dualidad.



PLR para matemáticos

El grupo *PLR* es *isomorfo* al grupo T/I, pero sus objetos representan transformaciones de acordes que han sido importantes en música durante siglos por razones *distintas*.
[Matemática: $PLR \approx T/I \approx D_{12}$ - el diedro de orden 24. Ésto es sorprendente.
Dentro del grupo de todas las permutaciones de S (un grupo con 24! elementos), T/I es el centralizador de *PLR* y viceversa.]

Más allá del tecnicismo, lo importante es que la matemática *revela* una dualidad profunda entre distintas transformaciones importantes en música - a priori, no era obvio que transponer e invertir acordes fuera un "hermano gemelo desconocido" de tomar relativas, paralelas y cambios de dominantes en música. David Lewin explota esta dualidad.



Segundo mov. de la IX Sinfonía

Aparece la siguiente sucesión de acordes:

$$C, a, F, d, B\flat, g, E\flat, c, A\flat, f, D\flat, b\flat, G\flat, e\flat, B, g\sharp, E, c\sharp, A$$

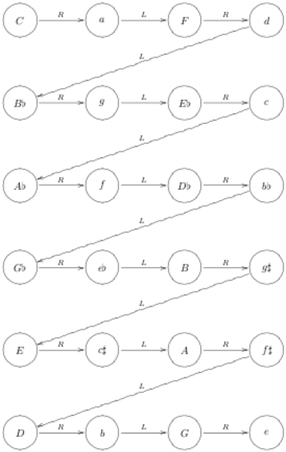
Toda la secuencia se puede obtener mediante aplicaciones de las transformaciones L y R del grupo PLR.

Segundo mov. de la IX Sinfonía

Aparece la siguiente sucesión de acordes:

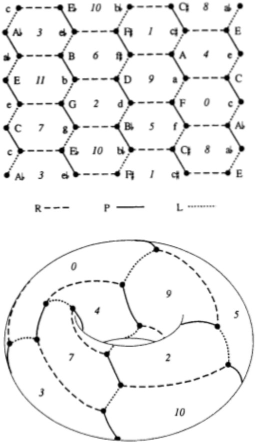
$$C, a, F, d, B\flat, g, E\flat, c, A\flat, f, D\flat, b\flat, G\flat, e\flat, B, g\sharp, E, c\sharp, A$$

Toda la secuencia se puede obtener mediante aplicaciones de las transformaciones L y R del grupo PLR.



Camino en un toro

Douthett y Steinbach encuentran patrones como este camino en un toro, dados por los acordes de la Novena Sinfonía de Beethoven (de hecho, Beethoven rompe la simetría dejando sólo 19 de los 24 acordes - la matemática nos permite examinar **rupturas** de simetría en distintos compositores):



Espacio tonal en dimensión 2

De manera análoga a como hacemos en matemática básica al "ubicar" pares de coordenadas en el plano cartesiano, podemos armar superficies al tratar de ubicar *pares* de notas... y estudiar el efecto de las transformaciones O, P, T, I, C sobre estas superficies. El resultado de llevar a cabo ésto de manera sistemática, en manos de Tymoczko y otros, ha llevado a

- Superficies tonales (análogas a cintas de Möbius)
- Análisis de **caminos** dados por el movimiento "vertical" (armonía) y "horizontal" (conducción de voces, contrapunto).
- Sistemas dinámicos asociados a obras musicales.

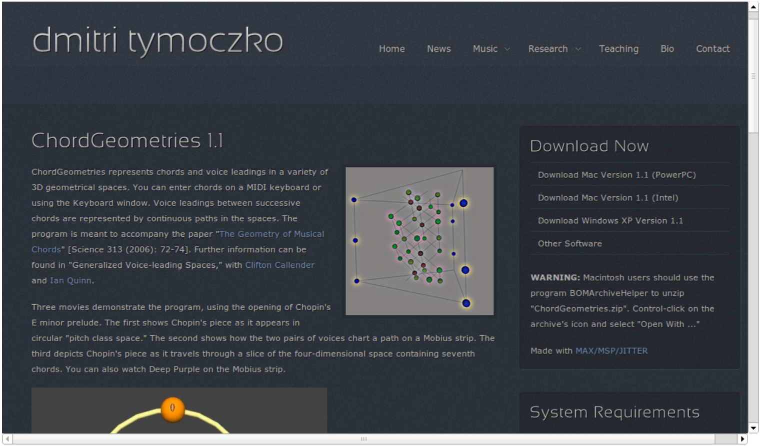
Espacio tonal en dimensión 2

De manera análoga a como hacemos en matemática básica al "ubicar" pares de coordenadas en el plano cartesiano, podemos armar superficies al tratar de ubicar *pares* de notas... y estudiar el efecto de las transformaciones O, P, T, I, C sobre estas superficies. El resultado de llevar a cabo ésto de manera sistemática, en manos de Tymoczko y otros, ha llevado a

- Superficies tonales (análogas a cintas de Möbius)
- Análisis de **caminos** dados por el movimiento "vertical" (armonía) y "horizontal" (conducción de voces, contrapunto).
- Sistemas dinámicos asociados a obras musicales.

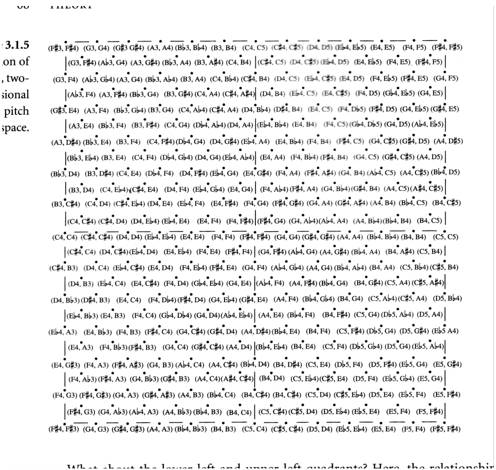
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Software de visualización (desactualizado :( )



http://dmitri.tymoczko.com/ChordGeometries.html

Espacios tonales



Espacio tonal - cinta de Moebius

Conducción de voces

Un par de ejemplos:

- Transposición (traslación): do mayor → fa mayor.
  {do,mi,sol} → {fa,la,do}

$$\{0, 4, 7\} \xrightarrow{+5 \text{ mód } 12} \{5, 9, 0\}.$$

- Inversión (reflexión): do mayor → do menor.
  {do,mi,sol} → {do,mi♭,sol}

$$\{0, 4, 7\} \xrightarrow{7-\cdot \text{ mód } 12} \{0, 3, 7\}.$$

Conducción de voces

En general: dados acordes $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$, una *conducción de voces* de X a Y es un conjunto de parejas ordenadas

$$\{\cdots, (x_i, y_j), \cdots\}$$

tal que todo elemento de X y de Y aparece en alguna pareja.
Escribimos $(x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_n)$.
Por ejemplo, $(do, do, fa, sol) \to (si, re, fa, sol)$

¿Dónde?

La idea es *medir* las conducciones de voces - la música en "occidente" intenta optimizar módulo simetría.

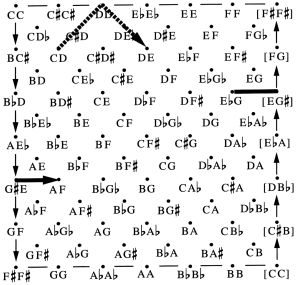
n-tupla de tonos	Punto en $\mathbb{R}^n$
Conducción de voces	Segmento en $\mathbb{R}^n$
n-tupla de clases tonales	Punto en $(\mathbb{R}/12\mathbb{Z})^n \approx \mathbb{T}^n$ (n-toro)
Sucesión NO ordenada de clases tonales	$(x_1, \cdots, x_n) \sim (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ con $\sigma \in S_n$.

Así, $\mathbb{T}^n/S_n$, el orbifold (cociente global) es el espacio natural para ubicar las sucesiones no ordenadas tonales.

Espacios tonales

Por ejemplo, en el caso de dos tonos, $\mathbb{T}^2/S_2$ tiene estructura de cinta de Moebius.

Figure 3.4.2 The horizontal boundaries act like mirrors, whereas the vertical boundaries are glued together with a "twist." Voice leadings thus disappear off the left edge to reappear on the right, and vice versa. Here, the voice leadings (E♭, G) → (F, A) and (C, D) → (E, D) are shown.



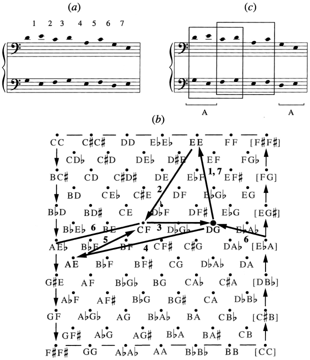
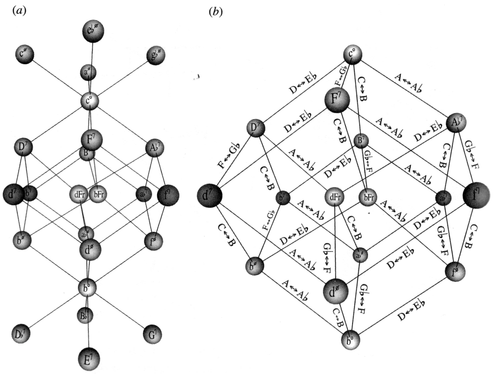


Figure 3.5.1 Plotting a phrase from the *Allelujia Justus et Palma* (*a*) on the Möbius strip (*b*) reveals interesting musical structure (*c*).

Conducciones de voces: ¡segmentos en el orbifold!

Más dimensiones

different ways of raising or lowering the notes of the diminished seventh chord.



sively raise or lower the notes of the tritone by semitone, while those in Figure 3.11.2a

En dimensiones más altas la idea es la misma (prismas con bordes identificados).

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.
- ¡Podemos clasificar acordes y progresiones según estos grupos!

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - “Progresiones” generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos “reflejados” en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.
- ¡Podemos clasificar acordes y progresiones según estos grupos!

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.
- ¡Podemos clasificar acordes y progresiones según estos grupos!

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.
- ¡Podemos clasificar acordes y progresiones según estos grupos!

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.
- ¡Podemos clasificar acordes y progresiones según estos grupos!

Simetría y cuasisimetría

Tymoczko explora en su artículo de Science en 2006 la simetría y cuasisimetría de acordes, y la conexión con los segmentos, las conducciones de voces.

Contexto (Tesis de Tymoczko - 2006)

En muchos estilos occidentales, se prefiere usar conducciones de voces entre acordes que están relacionados por transposición o por inversión.

Exploramos el inicio de las consecuencias geométricas/musicales de esta tesis.

T-simetría y consonancia acústica

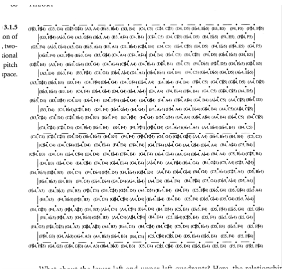
- "Centro" del orbifold: acordes que dividen la octava de manera "uniforme".
- Segmentos paralelos a la coordenada de altura: transposiciones.
- T-simetría es por lo tanto "división de octavas en partes iguales o uniones de subconjuntos de tamaños iguales que también subdividen la octava en partes iguales.
- La conducción vocal a transpuestas es eficaz (minimalidad).
- Problema: las conducciones de voces eficientes entre acordes perfectamente T-simétricos típicamente no son independientes. Por esto los compositores prefieren la cuasi-T-simetría a la T-simetría exacta.

T-simetría y consonancia acústica

- "Centro" del orbifold: acordes que dividen la octava de manera "uniforme".
- Segmentos paralelos a la coordenada de altura: transposiciones.
- T-simetría es por lo tanto "división de octavas en partes iguales o uniones de subconjuntos de tamaños iguales que también subdividen la octava en partes iguales.
- La conducción vocal a transpuestas es eficaz (minimalidad).
- Problema: las conducciones de voces eficientes entre acordes perfectamente T-simétricos típicamente no son independientes. Por esto los compositores prefieren la cuasi-T-simetría a la T-simetría exacta.

T-simetría y consonancia acústica

- "Centro" del orbifold: acordes que dividen la octava de manera "uniforme".
- Segmentos paralelos a la coordenada de altura: transposiciones.
- *T*-simetría es por lo tanto "división de octavas en partes iguales o uniones de subconjuntos de tamaños iguales que también subdividen la octava en partes iguales.
- La conducción vocal a transpuestas es eficaz (minimalidad).
- Problema: las conducciones de voces eficientes entre acordes perfectamente *T*-simétricos típicamente no son independientes. Por esto los compositores prefieren la cuasi-*T*-simetría a la *T*-simetría exacta.



P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.

P-simetría y "clusters" musicales

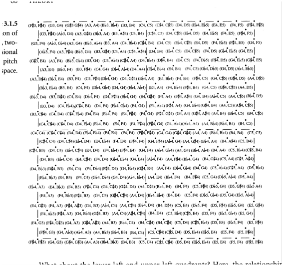
- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.



Un ejemplo básico de *I*-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\quad \rightarrow \quad$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\quad \rightarrow \quad$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:

  $\{6, 9, 0, 4\} \quad \xrightarrow{9-\cdot} \quad \{5, 9, 0, 3\}$
- de nuevo, la casi-*I*-simetría es la más eficaz:

  $$\{6, 9, 0, 4\} \quad \approx \quad \{5{,}5, 9{,}0, {,}3{,}5\} \quad \approx \quad \{5, 9, 0, 3\}$$

  (El “acorde” de la mitad es totalmente *I*-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)
- Schubert, Brahms, Wagner, Debussy usan muchísimo la cuasi *I*-simetría

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de *I*-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\rightarrow$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\rightarrow$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:

  $\{6, 9, 0, 4\} \xrightarrow{9-\cdot} \{5, 9, 0, 3\}$
- de nuevo, la casi-*I*-simetría es la más eficaz:

$$\{6, 9, 0, 4\} \quad \approx \quad \{5{,}5, 9{,}0, {,}3{,}5\} \quad \approx \quad \{5, 9, 0, 3\}$$

  (El "acorde" de la mitad es totalmente *I*-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)
- Schubert, Brahms, Wagner, Debussy usan muchísimo la cuasi *I*-simetría

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de *I*-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\quad\rightarrow\quad$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\quad\rightarrow\quad$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:

  $\{6, 9, 0, 4\} \quad \xrightarrow{9-\cdot} \quad \{5, 9, 0, 3\}$

- de nuevo, la casi-*I*-simetría es la más eficaz:

$$\{6, 9, 0, 4\} \quad \approx \quad \{5{,}5, 9{,}0, {,}3{,}5\} \quad \approx \quad \{5, 9, 0, 3\}$$

  (El “acorde” de la mitad es totalmente *I*-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)

- Schubert, Brahms, Wagner, Debussy usan muchísimo la cuasi *I*-simetría

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de *I*-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\quad\rightarrow\quad$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\quad\rightarrow\quad$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:

  $\{6, 9, 0, 4\} \quad \xrightarrow{9-\cdot} \quad \{5, 9, 0, 3\}$
- de nuevo, la casi-*I*-simetría es la más eficaz:

$$\{6, 9, 0, 4\} \quad \approx \quad \{5{,}5, 9{,}0, {,}3{,}5\} \quad \approx \quad \{5, 9, 0, 3\}$$

  (El “acorde” de la mitad es totalmente *I*-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)
- Schubert, Brahms, Wagner, Debussy usan muchísimo la cuasi *I*-simetría

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de I-simetría (inversión/reflexión):

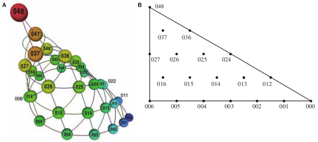
- fa♯ semidisminuida 7a $\quad\rightarrow\quad$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\quad\rightarrow\quad$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:
  $\{6, 9, 0, 4\} \quad \xrightarrow{9-\cdot} \quad \{5, 9, 0, 3\}$
- de nuevo, la casi-I-simetría es la más eficaz:

$$\{6, 9, 0, 4\} \quad \approx \quad \{5{,}5, 9{,}0, {,}3{,}5\} \quad \approx \quad \{5, 9, 0, 3\}$$

  (El "acorde" de la mitad es totalmente I-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)
- Schubert, Brahms, Wagner, Debussy usan muchísimo la cuasi I-simetría

Envoi: matemática musical / música matemática.

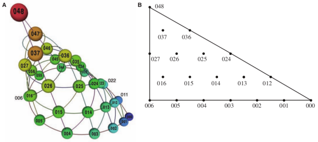
- Grupos - transformaciones musicales
- Superficies - dinámica musical
- Muchos temas que no exploramos: ¿otros cocientes? ¿grupos continuos? ¿composición sobre otros orbifolds? ¿gesto musical? ¿ritmo?



$\mathbb{T}^2/S_3$, $\mathbb{R}^2/(S_3 \times \mathbb{Z}_2)$ - Callender, Quinn, Tymoczko 2009

Envoi: matemática musical / música matemática.

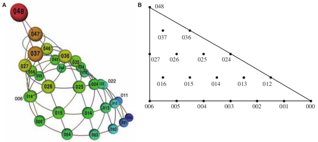
- Grupos - transformaciones musicales
- Superficies - dinámica musical
- Muchos temas que no exploramos: ¿otros cocientes? ¿grupos continuos? ¿composición sobre otros orbifolds? ¿gesto musical? ¿ritmo?



$\mathbb{T}^2/S_3$, $\mathbb{R}^2/(S_3 \times \mathbb{Z}_2)$ - Callender, Quinn, Tymoczko 2009

Envoi: matemática musical / música matemática.

- Grupos - transformaciones musicales
- Superficies - dinámica musical
- Muchos temas que no exploramos: ¿otros cocientes? ¿grupos continuos? ¿composición sobre otros orbifolds? ¿gesto musical? ¿ritmo?



$\mathbb{T}^2/S_3, \mathbb{R}^2/(S_3 \times \mathbb{Z}_2)$ - Callender, Quinn, Tymoczko 2009

Lecturas más allá...

- **C. Callender, I. Quinn, D. Tymoczko:** *Generalized Voice Leading Spaces.* Science. 320: 346-348 (2008).
- **J. Douthett, P. Steinbach:** Parsimonious Graphs... *JMT 41/1 (1997): 1-66.*
- **D. Lewin:** *Generalized Musical Intervals and Transformations.* Yale Univ. Press, 1987.
- **G. Mazzola:** *The Topos of Music: Geometric logic of concepts, theory and performance.*. Basilea. Birkhäuser Verlag.
- **G. Mazzola:** *Cool Math for Hot Music: A First Introduction to Mathematics for Music Theorists.*. (Computational Music Science). Springer, New York. 2016.
- **D. Tymoczko:** *A Geometry of Music.* Oxford Univ. Press, 2011.
- **D. Tymoczko:** *The Geometry of Musical Chords.* Science. 313: 72-74 (2006)

A los organizadores de este 23 Encuentro de Geometría
A Carmen Samper de Caicedo (por haberme invitado a hablar aquí)
A Patricia Perry (por sus correcciones a las Memorias)
A la Universidad Pedagógica Nacional (por abrir este espacio)
A todos ustedes (por haber escuchado con paciencia)
Y (last but not least) a Zarlino, Euler, Fourier, los dos Riemann (Hugo y Bernhard), Schenker, Forte, Lewin, Xenakis, Boulez, Tymoczko, Zalamea, Mazzola y muchos más (por todo este camino del placer de la mente humana — que lleva siglos y sigue sorprendiéndonos)

¡Gracias!

A los organizadores de este 23 Encuentro de Geometría
A Carmen Samper de Caicedo (por haberme invitado a hablar aquí)
A Patricia Perry (por sus correcciones a las Memorias)
A la Universidad Pedagógica Nacional (por abrir este espacio)
A todos ustedes (por haber escuchado con paciencia)

Y (last but not least) a Zarlino, Euler, Fourier, los dos Riemann (Hugo y Bernhard), Schenker, Forte, Lewin, Xenakis, Boulez, Tymoczko, Zalamea, Mazzola y muchos más (por todo este camino del placer de la mente humana — que lleva siglos y sigue sorprendiéndonos)

¡Gracias!

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA