Categoricità, dalla teoria dei modelli alla teoria degli insiemi?

Andrés Villaveces
Univ. Nacional - Bogotá e addesso visitando Helsinki

Seminario di Logica, Torino, Giugno 2015

Indice

Congettura di Categoricità di Shelah

- Un problema centrale nella teoria dei modelli delle Classi Elementari Astratte (AEC): provare versioni del Teorema di Morley (Congettura di Łoś) per AEC - <u>Trasferire la Categoricità.</u>
- "Versioni semantiche" di teoria dei modelli di $L_{\lambda^+,\omega}(Q)$.

Conjecture (Shelah - circa 1980)

Pero ogni λ, esiste μ_λ tale che $\mathcal{K}$ è una AEC con $LS(\mathcal{K}) = \lambda$, categorica in <u>qualche</u> cardinale $\geq \mu_\lambda$, allora $\mathcal{K}$ è categorica in <u>tutte le</u> cardinalità oltre μ_λ.

Quale è la roba?

Qualche migliaia di pagine di matematica sono già state scritte sulla Congettura di Categoricità. Perché tante?

Quale è la roba?

Qualche migliaia di pagine di matematica sono già state scritte sulla Congettura di Categoricità. Perché tante?

- Trasferire categoricità di un cardinale μ a qualche altro cardinale κ quasi sempre coinvolge la saturazione ("ogni modello di cardinalità μ è saturo implica che ogni modello di cardinalità κ è saturo"),

Quale è la roba?

Qualche migliaia di pagine di matematica sono già state scritte sulla Congettura di Categoricità. Perché tante?

- Trasferire categoricità di un cardinale μ a qualche altro cardinale κ quasi sempre coinvolge la saturazione ("ogni modello di cardinalità μ è saturo implica che ogni modello di cardinalità κ è saturo"),
- e questo usualmente esige qualche forma di omissione di tipi, (trasferirla)

Quale è la roba?

Qualche migliaia di pagine di matematica sono già state scritte sulla Congettura di Categoricità. Perché tante?

- Trasferire categoricità di un cardinale μ a qualche altro cardinale κ quasi sempre coinvolge la saturazione ("ogni modello di cardinalità μ è saturo implica che ogni modello di cardinalità κ è saturo"),
- e questo usualmente esige qualche forma di omissione di tipi, (trasferirla)
- e questo inoltre esige controllare indipendenza fra tipi, e come restrizioni di tipi possono "implicare" le loro estensioni (teoria della stabilità), quindi

Quale è la roba?

Qualche migliaia di pagine di matematica sono già state scritte sulla Congettura di Categoricità. Perché tante?

- Trasferire categoricità di un cardinale μ a qualche altro cardinale κ quasi sempre coinvolge la saturazione ("ogni modello di cardinalità μ è saturo implica che ogni modello di cardinalità κ è saturo"),
- e questo usualmente esige qualche forma di omissione di tipi, (trasferirla)
- e questo inoltre esige controllare indipendenza fra tipi, e come restrizioni di tipi possono "implicare" le loro estensioni (teoria della stabilità), quindi

Provare il trasferimento di categoricità non soltanto rivela una forma forte di "completezza semantica" della classe $\mathcal{K}$ ma inoltre coinvolge capire a fondo come sono "incassati" modelli della classe l'uno nell'altro e come i tipi vanno controllati da proiezioni "su domini piccoli" $p \restriction M$.

Cronologia della prova (appross., 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (la prima domanda, dalle 1970). Qui, la

Cronologia della prova (appross., 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (la prima domanda, dalle 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.

Cronologia della prova (appross., 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (la prima domanda, dalle 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.
- Makkai-Shelah (1985): vale la Congettura per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ fortemente compatto.

Cronologia della prova (appross., 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (la prima domanda, dalle 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.
- Makkai-Shelah (1985): vale la Congettura per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ fortemente compatto.
- Kolman-Shelah (c. 1990): categoricità "in giù" per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ misurabile.

Cronologia della prova (appross., 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (la prima domanda, dalle 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.
- Makkai-Shelah (1985): vale la Congettura per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ fortemente compatto.
- Kolman-Shelah (c. 1990): categoricità "in giù" per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ misurabile.
- Boney (2013:) consistenza della congettura piena, sotto una classe propria di cardinali fortemente compatti. Qualche risultati adizionali di Vasey (più recenti - forking per AEC).

Grossberg e VanDieren: la docilità viene isolata

Intorno all'anno 2000 Grossberg e VanDieren hanno dimostrato il seguente

Theorem

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con AP, JEP e senza modelli massimali (NMM). Allora

Grossberg e VanDieren: la docilità viene isolata

Intorno all'anno 2000 Grossberg e VanDieren hanno dimostrato il seguente

Theorem

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con AP, JEP e senza modelli massimali (NMM). Allora se $\mathcal{K}$ è χ-docile e λ^+-categorica per qualche $\lambda \geq LS(\mathcal{K})^+ + \chi$, anche $\mathcal{K}$ deve essere μ-categorica per tutti i $\mu \geq \lambda$.

Grossberg e VanDieren: la docilità viene isolata

Intorno all'anno 2000 Grossberg e VanDieren hanno dimostrato il seguente

Theorem

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con AP, JEP e senza modelli massimali (NMM). Allora se $\mathcal{K}$ è χ-docile e λ^+-categorica per qualche $\lambda \geq LS(\mathcal{K})^+ + \chi$, anche $\mathcal{K}$ deve essere μ-categorica per tutti i $\mu \geq \lambda$.

La loro dimostrazione è fondata su una dimostraziona precedente di trasferenza "in giù" di categoricità, da Shelah e hanno aggiunto un elemento cruciale: loro hanno isolato la nozione di docilità (in inglese tameness) ("sotterrata" nella dimostrazione di "in giù" da Shelah - estrarre la nozione permette a G e VD di dimostrare la categoricità "ascendente").

Localizzare la differenza

Idea: "localizzare" la condizione di...
estendere una funzione f che fissi un modello M in una AEC $\mathcal{K}$ ad una $\mathcal{K}$-immersione:

Localizzare la differenza

Idea: "localizzare" la condizione di...
estendere una funzione f che fissi un modello M in una AEC $\mathcal{K}$ ad una $\mathcal{K}$-immersione:

- se non esiste immersione f che fissa M e invia qualche N_0 sopra N_1 allora abbiamo che

$$\mathrm{gatp}(N_0/M) \neq \mathrm{gatp}(N_1/M)$$

Localizzare la differenza

Idea: "localizzare" la condizione di...
estendere una funzione f che fissi un modello M in una AEC $\mathcal{K}$ ad una $\mathcal{K}$-immersione:

- se non esiste immersione f che fissa M e invia qualche N_0 sopra N_1 allora abbiamo che

$$\text{gatp}(N_0/M) \neq \text{gatp}(N_1/M)$$

- vogliamo: localizzare questa domanda a controllare che esistono qualche $M_0 \in \mathcal{P}^*_\kappa(M)$ e $X_0 \in \mathcal{P}_\kappa(N_0)$ tali che

$$\text{gatp}(X_0/M_0) \neq \text{gatp}(f(X_0)/M_0).$$

Docilità e tipo-cortezza

Definition ((κ, λ)-docilità per μ, tipo-cortezza)

Sia $\kappa < \lambda$. Una AEC $\mathcal{K}$ con AP e $LS(\mathcal{K}) \leq \kappa$ è

- (κ, λ)-docile per sequenze di lunghezza μ se per ogni $M \in \mathcal{K}$ di taglia λ, se $p_1 \neq p_2$ sono tipi di Galois sopra M allora esiste $M_0 \prec_{\mathcal{K}} M$ con $|M_0| \leq \kappa$ tale che

$$p_1 \upharpoonright M_0 \neq p_2 \upharpoonright M_0$$

(con $p_i = \text{gatp}(X_i/M)$, X_i ordinato in lunghezza μ, $i = 1, 2$)

Docilità e tipo-cortezza

Definition ((κ, λ)-docilità per μ, tipo-cortezza)

Sia $\kappa < \lambda$. Una AEC $\mathcal{K}$ con AP e $LS(\mathcal{K}) \leq \kappa$ è

- (κ, λ)-docile per sequenze di lunghezza μ se per ogni $M \in \mathcal{K}$ di taglia λ, se $p_1 \neq p_2$ sono tipi di Galois sopra M allora esiste $M_0 \prec_{\mathcal{K}} M$ con $|M_0| \leq \kappa$ tale che

$$p_1 \upharpoonright M_0 \neq p_2 \upharpoonright M_0$$

(con $p_i = \mathrm{gatp}(X_i/M)$, X_i ordinato in lunghezza μ, $i = 1, 2$)

- (κ, λ)-tipo-corta sopra modelli di cardinalità μ se per ogni $M \in \mathcal{K}$ di taglia μ, se $p_1 \neq p_2$ sono tipi di Galois sopra M e $p_i = \mathrm{gatp}(X_i/M)$ dove $X_i = (x_{i,\alpha})_{\alpha<\lambda}$, allora esiste $I \subset \lambda$ di cardinalità $\leq \kappa$ tale che $p_1^I \neq p_2^I$:

$$gatp((x_{1,\alpha})_{\alpha\in I}/M) \neq gatp((x_{2,\alpha})_{\alpha\in I}/M).$$

Nozioni duali - stabilità

Le due nozioni sono chiaramente duali (parametri/realizzazioni):

- In docilità, un orbita stretta (fissare modelli più grandi) viene controllata da orbiti più "spesse" che l'approssimano (località di parametri),

Queste dualità possono essere equivalenze (sotto condizioni di stabilità). Usualmente non lo sono.

Nozioni duali - stabilità

Le due nozioni sono chiaramente duali (parametri/realizzazioni):

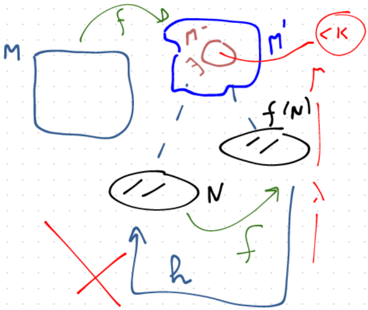
- In docilità, un orbita stretta (fissare modelli più grandi) viene controllata da orbiti più "spesse" che l'approssimano (località di parametri),
- In tipo-cortezza, l'orbita di una sequenza lunga viene controllata dalle orbite più strette delle sue sottosequenze (località di realizzazioni)...

Queste dualità possono essere equivalenze (sotto condizioni di stabilità). Usualmente non lo sono.

Dualità sotto categoricità - "Eredi e coeredi"

Theorem (Boney)

Se una classe $\mathcal{K}$ (con mostro) è categorica in μ ed è $(<\kappa, \mu)$-docile per tipi di lunghezza λ, allora $\mathcal{K}$ è $(<\kappa, \mu)$-tipo-corta per tipi sopra domini di taglia λ.



Sia M, M' di taglia μ, N di taglia λ tali che $\mathrm{gatp}(M/N) \neq \mathrm{gatp}(M'/N)$. Usando la μ-categoricità, sia $f \in Aut(\mathbb{C})$ tale che $f \restriction M : M \approx M'$.
Adesso, $\mathrm{gatp}(f(N)/M') \neq \mathrm{gatp}(N/M')$: se fossero uguali, ci sarebbe qualche $h \in Aut(\mathbb{C}/M')$ tale che $h \circ f(N) = N$ - quindi $h \circ f(M) = h(M') = M'$ e $\mathrm{gatp}(M/N) = \mathrm{gatp}(M'/N)$.
Usiamo adesso la $(<\kappa, \mu)$-docilità per ottenere $M^- \in \mathcal{P}^*_\kappa(M')$ tale che $\mathrm{gatp}(f(N)/M^-) \neq \mathrm{gatp}(N/M^-)$.
Ancora come prima, $\mathrm{gatp}(f^{-1}(M^-)/N) \neq \mathrm{gatp}(M^-/N)$. Ma $f^{-1}(M^-) \in \mathcal{P}^*_\kappa(M)$. $\square$

Variazioni: Dividing lines, "diagonalizzare" cofinalità diverse, ecc.

Altre "linee di demarcazione" appaiono con lo studio dell'esistenza e unicità dei "modelli limiti":

- Unicità di modelli "limiti" come forma di superstabilità (un mio articolo con Shelah, verso 1998, poi con Grossberg e VanDieren e più ricentemente con Zambrano),
- Hyttinen e Kesälä: trasferenza di categoricità per AEC "semplici e finitarie" - anche ne hanno studiato la superstabilità,
- La superstabilità può essere vista come la possibilità di diagonalizzare con rispetto a cofinalità diverse - e.g. modelli che sono allo stesso tempo ω_1-limiti e ω-limiti (catene di estensioni universali).

Ottenere la docilità da grandi cardinali

Nel 2013, W. Boney ha aperto una linea nuova per capire la congettura: perché non concentrarsi sull'impatto dei grandi cardinali sulla docilità o nozioni correlate?

Ottenere la docilità da grandi cardinali

Nel 2013, W. Boney ha aperto una linea nuova per capire la congettura: perché non concentrarsi sull'impatto dei grandi cardinali sulla docilità o nozioni correlate?

Theorem (Boney)

Se κ è fortemente compatto e $\mathcal{K}$ è essenzialmente sotto κ (i.e. $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ ovvero $\mathcal{K} = Mod(\psi)$ per qualche $L_{\kappa,\omega}$-enunziato ψ) allora $\mathcal{K}$ è $(< (\kappa + LS(K)^+, \lambda$-docile e $(< \kappa, \lambda)$-tipo-corta per ogni λ.

La dimostrazione è piuttosto diretta, data la forza dell'ipotesi. Boney e Unger hanno annunziato (Marzo 2015) che sotto l'inaccessibilità forte di κ, la $(< \kappa, \kappa)$-docilità di tutte le AEC implica la compattezza forte di κ. (?)

Un lemma importante, talvolta con un overkill nell'ipotesi?

Theorem (Boney: Teorema di Łoś per AEC sotto cardinali fortemente compatti)

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, κ un cardinale fortemente compatto. Supponiamo che esistono $N_0 \leq_{\mathcal{K}} N$ e $p \in ga - S^I(N_0)$ tali che $|N_0 < \kappa$, $|I| < \kappa$, e sia U un ultrafiltro κ-completoultrafilter U su I. Allora

$$[h]_U \in \prod N/U \models p \quad \textit{iff} \quad \{i \in I | h(i) \models p\} \in U.$$

The conjecture is consistent

Theorem (Boney)

Let κ be strongly compact and $\mathcal{K}$ an aec essentially below κ. If $\mathcal{K}$ is categorical in a successor $\lambda^+ > LS(\mathcal{K})^+$ then $\mathcal{K}$ is categorical in all $\mu \geq \min\{\lambda^+, \beth_{(2^{Hanf(LS(K))})^+}\}$.

Theorem (Boney)

In models with a proper class of strongly compact cardinals, the Shelah Conjecture (for successors) holds.

A little more...

Theorem

Let κ be a Π^2_1-indescribable cardinal. If $\mathcal{K}$ is an AEC with $LS(K) < \kappa$ and $\mathcal{K}_\kappa$ has a unique limit model, then for every $\lambda < \kappa$, there exists $\mu \in (\lambda, \kappa)$ such that $\mathcal{K}_\mu$ has a unique limit model.

(And similar results using versions of downward reflection, for categoricity transfer, amalgamation, tameness...)

Generalized compactness phenomena

The fact that tameness/type shortness hover around strong compactness/supercompactness is not so surprising after all: they are forms of "generalized compactness".

- κ has the tree property + inaccessibility $\equiv$ Weak Compactness of κ
- κ has the supertree property + inaccessibility $\equiv$ Supercompactness of κ
- Every aec $\mathcal{K}$ is $(< \kappa, \kappa)$-tame + inaccessibility $\equiv$ seems to be rather strong.

Challenges for Set Theory?

Under a proper class of strongly compact cardinals, Boney showed that

$$\text{Every AEC } \mathcal{K} \text{ with arbitrarily large models is tame.} \tag{1}$$

(He gives weaker versions of tameness, obtained from proper classes of measurables and weakly compact cardinals.)
All this seems rather reducible to weaker large cardinals, at least for a lot of model theory!

Lower bounds

Notice that

$$\text{Every AEC } \mathcal{K} \text{ with } LS(\mathcal{K}) < \kappa \text{ is } (<\kappa, \kappa)\text{-tame} \tag{2}$$

already implies $V \neq L$: Baldwin and Shelah constructed a counterexample to $(<\kappa, \kappa)$ starting from an almost free, non-free, non-Whitehead group of cardinality κ. In L this may happen at any κ regular, not strongly compact.

On the other hand, Hart-Shelah's example of an $L_{\omega_1,\omega}$-sentence categorical in $\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_k$ but NOT in $\aleph_{k+2}$ shows that pushing tameness FOR ALL aecs below $\aleph_\omega$ is impossible.

Collapsing and its limitations

Collapsing large cardinals while keeping some of their properties has a long history of interesting results. For instance,

- Mitchell: collapsed a weakly compact to $\aleph_2$ while keeping the tree property. This was later generalized (collapsing much more) in order to get the tree property at all the $\aleph_n$'s and/or in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)

Collapsing and its limitations

Collapsing large cardinals while keeping some of their properties has a long history of interesting results. For instance,

- Mitchell: collapsed a weakly compact to $\aleph_2$ while keeping the tree property. This was later generalized (collapsing much more) in order to get the tree property at all the $\aleph_n$'s and/or in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)
- For the "strong tree" and "supertree" properties the consistency strength seems to be around a strongly compact / supercompact respectively. (Weiss, Viale, Fontanella, Magidor).

Collapsing and its limitations

Collapsing large cardinals while keeping some of their properties has a long history of interesting results. For instance,

- Mitchell: collapsed a weakly compact to $\aleph_2$ while keeping the tree property. This was later generalized (collapsing much more) in order to get the tree property at all the $\aleph_n$'s and/or in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)
- For the "strong tree" and "supertree" properties the consistency strength seems to be around a strongly compact / supercompact respectively. (Weiss, Viale, Fontanella, Magidor).
- These are instances of general reflection/compactness properties. But so are tameness and type shortness.

Collapsing and its limitations

Collapsing large cardinals while keeping some of their properties has a long history of interesting results. For instance,

- Mitchell: collapsed a weakly compact to $\aleph_2$ while keeping the tree property. This was later generalized (collapsing much more) in order to get the tree property at all the $\aleph_n$'s and/or in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)
- For the "strong tree" and "supertree" properties the consistency strength seems to be around a strongly compact / supercompact respectively. (Weiss, Viale, Fontanella, Magidor).
- These are instances of general reflection/compactness properties. But so are tameness and type shortness.
- The direct collapse of (say) a strongly compact κ where you have $(< \kappa, \kappa)$-tameness to (say) $\aleph_2$ does not work:

Collapsing and its limitations

Collapsing large cardinals while keeping some of their properties has a long history of interesting results. For instance,

- Mitchell: collapsed a weakly compact to $\aleph_2$ while keeping the tree property. This was later generalized (collapsing much more) in order to get the tree property at all the $\aleph_n$'s and/or in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)
- For the "strong tree" and "supertree" properties the consistency strength seems to be around a strongly compact / supercompact respectively. (Weiss, Viale, Fontanella, Magidor).
- These are instances of general reflection/compactness properties. But so are tameness and type shortness.
- The direct collapse of (say) a strongly compact κ where you have $(< \kappa, \kappa)$-tameness to (say) $\aleph_2$ does not work:
- The resulting classes $j(\mathcal{K})$ and (if $\mathcal{K} = PC(L, T', \Gamma')$ the classes $\mathcal{K}^{V[G]} = PC^{V[G]}(L, T', j(\Gamma'))$ exhibit interesting (buy wide open) behavior.

A dichotomic behavior

- Under Weak Diamond:

Theorem (from Sh88)

(Under $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$). Every aec $\mathcal{K}$ with $LS(\mathcal{K}) \leq \kappa$, categorical in κ, failing AP for models of size κ has 2^{κ^+} many non-isomorphic models of cardinality κ^+.

A dichotomic behavior

- Under Weak Diamond:

Theorem (from Sh88)

(Under $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$). Every aec $\mathcal{K}$ with $LS(\mathcal{K}) \leq \kappa$, categorical in κ, failing AP for models of size κ has 2^{κ^+} many non-isomorphic models of cardinality κ^+.

- Example under MA:
  (MA_{ω_1}) There is a class (axiomatizable in $L_{\omega_1,\omega}(Q)$) that is $\aleph_0$-categorical, fails AP in $\aleph_0$ and <u>is also</u> categorical in $\aleph_1$. This can be lifted below continuum.

Forcing isomorphism/categoricity

Theorem (Asperó, V.)

The existence of a weak AEC, categorical in both $\aleph_1$ and $\aleph_2$, failing AP in $\aleph_1$, is consistent with ZFC+CH+$2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2}$.

The result is obtained by an ω_3-iteration over a model of GCH, where we

- Start with GCH in V.
- Build a countable support iteration of length ω_3, where
- at each stage α of the iteration you consider in $V^{\mathbb{P}_\alpha}$ two models $M_0, M_1 \in \mathcal{K}$, $|M_0| = |M_1| = \aleph_2$ (use a bookkeeping function) and
- fix $(M^0_i)_{i<\omega_2}$, $(M^1_i)_{i<\omega_2}$ resolutions of the two models with $M^\varepsilon_i = N_i \cap M_\varepsilon$ where $(N_i)_{i<\omega_2}$ is an $\in$-increasing and $\subset$-continuous of elementary substructures of some $H(\theta)$ of size $\aleph_1$ containing M_0 and M_1...

Forcing isomorphism/categoricity

- at this stage iterate with $\mathbb{Q}_\alpha$ the partial order consisting of countable partial isomorphisms p between M_0 and M_1 such that if $x \in \mathrm{dom}(p)$ and i is the minimum such that $x \in M_i^0$ then $p(x) \in M_i^1$.
- Each stage $\mathbb{Q}_\alpha$ of the iteration, and all the forcing $\mathbb{P}_{\omega_3}$ is σ-closed and $\mathbb{P}_{\omega_3}$ has the $(\aleph_2) - a.c.$ (need CH for the relevant (!) Δ-lemma).

Grazie tanto!