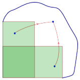
Haces, foliaciones e invariantes modulares

Andrés Villaveces

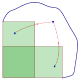
Universidad Nacional - Bogotá

Coloquio - Departamento de Matemáticas - Universidad Nacional - Bogotá

Contents



Contents



Contents

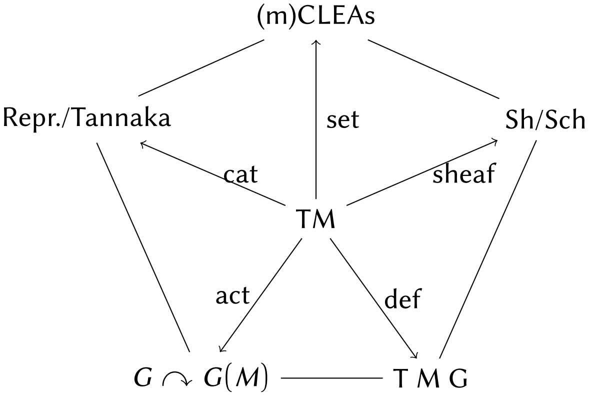
Analogías [Weil], geometría, matemática

> Aussi nous savons, nous, ce que cerchait à deviner Lagrange, quand il parlait de métaphysique à propos de ses travaux d'algèbre; c'est la théorie de Galois, qu'il touche presque du doigt, à travers un écran qu'il n'arrive pas à percer. Là où Lagrange voyait des analogies, nous voyons des théorèmes. Mais ceux-ci ne peuvent s'énoncer qu'au moyen de notions et de "structures" qui pour Lagrange n'étaient pas encore des objets mathématiques...

(André Weil en De la métaphysique à la mathématique (1960). Citado por Yves André en Ambiguity Theory, Old and New. Bollettino U.M.I. 2008)

Teoría de modelos, entre cinco lugares de la matemática:

Un "mapa" de la teoría de modelos, a mitad de camino entre distintas áreas (o disciplinas) de la matemática:

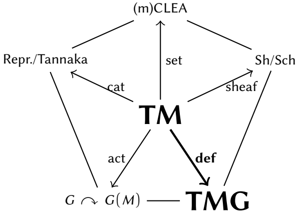


Las cinco direcciones

Las cinco direcciones capturas aspectos aparentemente muy distantes que en épocas recientes (o no) se conectan con la teoría de modelos: conjuntísticas (CLEAs, mCLEAs), de haces, de geometrías de definibilidad interna, acciones de grupos, generalizaciones de la teoría de la representación a formalismos categóricos (geométricos).

Las cinco direcciones son así un intento de construir un marco para ir más allá de la dicotomía clásica SET vs CAT (o la dicotomía entre enfoque conjuntístico y geométrico). La teoría de modelos se ha ido volviendo más geométrica (¡Macintyre!), pero de maneras que van más allá de su propia perspectiva y más allá de la dicotomía.

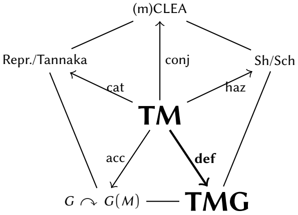
Teoremas de imagen directa (clásicos)



Teoremas de imagen directa: estos incluyen las siguientes construcciones clásicas y son el centro de la interacción entre la teoría de modelos (**TM**) y la Teoría de Modelos Geométrica (**TMG**):

1. Tarski-Chevalley: proyecciones de conjuntos constructibles en la teoría de los complejos son constructibles (Eliminación de Cuantificadores).
2. Tarski: lo mismo para la teoría de los reales.
3. EQ para p-ádicos estructuras analíticas, vectores de Witt, etc.
4. Campos valuados (Henselianos) y EQ.
5. Ax-Kochen-Ersov: Para todo entero positivo d, y para una cantidad cofinita de primos p, todo polinomio homogéneo p-ádico de grado d en por lo menos $d^2 + 1$ variables tiene un cero no trivial.

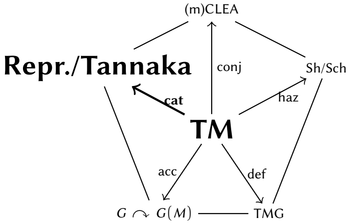
Conexiones más profundas



Conexiones más a fondo entre Teoría de Modelos (**TM**) y Teoría de Modelos Geométrica (**TMG**):

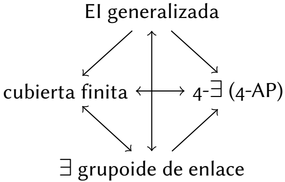
1. Mordell-Lang: demostración de Hrushovski en característica, $p > 0$, usando caracterizaciones de "linealidad modelo-teórica",
2. André-Oort: demostración de Scanlon y Medvedev - usan Geometrías de Zariski (Hrushovski-Zilber) + análisis de definibles modulares.

Homotopía/homología

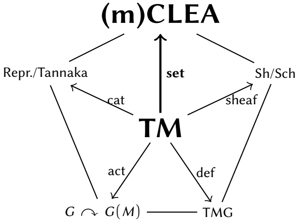


Hacia "teoría de la representación"

1. Kamensky: formalismo tannakiano en una teoría (lógica) de categorías para lograr demostrar de otra manera un teorema de Hrushovski sobre eliminación generalizada de imaginarios. Iosti, Škoda, García
2. "Homotopía modelo-teórica": Goodrick, Kim, Kolesnikov llevan el teorema de Hrushovski a homotopía de tipos (bajo condiciones fuertes - ω-estabilidad, NDOP, etc.)
3. Cubiertas finitas



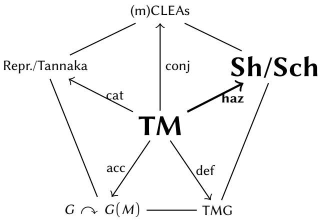
AEC



Teoría de modelos de clases elementales abstractas métricas: generalizar la Teoría de Modelos (**TM**) a clases no elementales, aún en contextos métricos (**(m)CLEAs**):

1. Shelah: caminos hacia la transferencia de categoricidad, principalmente iniciados por Shelah: marcos ampliados para teoría de la estabilidad.
2. Grossberg-Lessmann-VanDieren: transferencia de categoricidad bajo docilidad.
3. Grossberg-VanDieren-Villaveces: estudio de invariantes de superestabilidad para Clases Elementales Abstractas,
4. Villaveces-Zambrano: generalización de superestabilidad a ámbitos métricos no elementales.

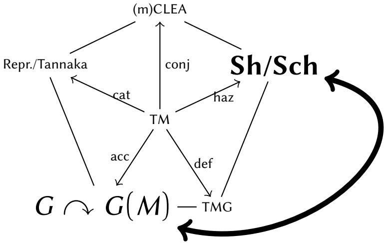
↬ haces



Conexiones entre Teoría de Modelos (**TM**), Haces y Geometría (**Sh/Sch**):

1. Macintyre: usa ideas de Comer (basadas en Feferman-Vaught y Grothendieck) para mostrar que *Th*(AnillosConm.) tiene modelo-compañera: primero hay principios de "transferencia al límite"... punto: "extend metamathematical results on fields to the corresponding result for certain regular rings" ... Macintyre (1973)
2. Ellerman: Ultrastalk Theorem (teorema del modelo genérico para espacios topológicos regulares - 1974)
3. Caicedo: el Teorema del Modelo Genérico - una generalización para espacios topológicos arbitrarios.

$\hookrightarrow$ haces *equivariantes*

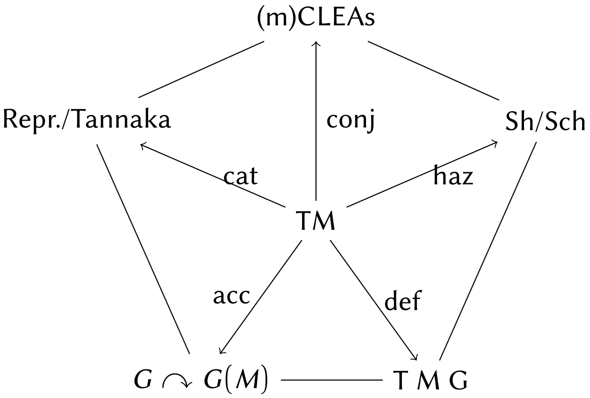


Haces, haces equivariantes que generalizan la teoría de modelos sobre haces a acciones de grupos y teoría de la estabilidad:

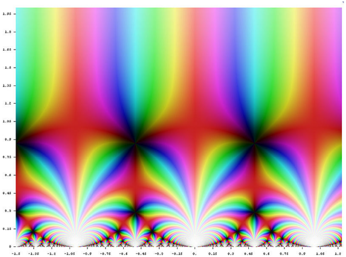
1. Ochoa, Villaveces: Generalizaciones de la teoría de modelos sobre haces a estructuras métricas. Versión métrica del teorema del modelo genérico.
2. Padilla, Villaveces: G-estructuras (con $G \curvearrowright G(M)$ una acción del grupo G sobre una estructura - equivarianza - llevada a acciones coherentes y exactas sobre G-haces (prehaces de G-estructuras que satisfacen condiciones de G-coherencia y G-exactitud. Generalización del Teorema del Modelo Genérico de Caicedo a este contexto)).
3. Padilla, Villaveces, Zambrano: teoría de la estabilidad de haces y G-haces.

De nuevo, Teoría de Modelos

La invariante modular j provee un muy buen ejemplo-test para estos cruces en Teoría de Modelos



Invariante j clásica



Invariante j en $\mathbb{C}$ (imagen de Wikipedia)

Klein define la función (que llamamos) "j clásica"

$$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

(donde $\mathbb{H}$ es el semiplano superior complejo) mediante la fórmula racional explícita

$$j(\tau) = 12^3 \cdot \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^3}$$

donde g_2 y g_3 son ciertas funciones racionales ("de Eisenstein").

Hechos básicos acerca de j clásica

La función j es una invariante modular de curvas elípticas (y toros clásicos).

- j es analítica, excepto en $i\infty$
-
$$j(\tau) = j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$
si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Hechos básicos acerca de *j* clásica

La función j es una invariante modular de curvas elípticas (y toros clásicos).

- j es analítica, excepto en $i\infty$
- $$j(\tau) = j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

  si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Más hechos básicos

Son equivalentes:

1. Existe $s \in SL_2(\mathbb{Z})$ tal que $s(\tau) = \tau'$,
2. $\mathbb{T}_\tau \approx \mathbb{T}_{\tau'}$ (curvas elípticas — toros clásicos — isomorfos como superficies de Riemann)
3. $j(\tau) = j(\tau')$...

con $\mathbb{T}_\tau := \mathbb{C}/\Lambda$, y $\Lambda \leq \mathbb{C}$ es una "red" (lattice).

Más hechos básicos

Son equivalentes:

1. Existe $s \in SL_2(\mathbb{Z})$ tal que $s(\tau) = \tau'$,
2. $\mathbb{T}_\tau \approx \mathbb{T}_{\tau'}$ (curvas elípticas — toros clásicos — isomorfos como superficies de Riemann)
3. $j(\tau) = j(\tau')$...

con $\mathbb{T}_\tau := \mathbb{C}/\Lambda$, y $\Lambda \leq \mathbb{C}$ es una "red" (lattice).

Más hechos básicos

Son equivalentes:

1. Existe $s \in SL_2(\mathbb{Z})$ tal que $s(\tau) = \tau'$,
2. $\mathbb{T}_\tau \approx \mathbb{T}_{\tau'}$ (curvas elípticas — toros clásicos — isomorfos como superficies de Riemann)
3. $j(\tau) = j(\tau')$...

con $\mathbb{T}_\tau := \mathbb{C}/\Lambda$, y $\Lambda \leq \mathbb{C}$ es una "red" (lattice).

Más aún...

La j clásica es por lo tanto una invariante de toros (=curvas elípticas) con las ventajas adicionales siguientes:

- Tiene una fórmula explícita
- Es una "función modular" de $SL_2(\mathbb{Z})$ - invariante bajo la acción de ese grupo (captura "isogenia")
- Está asociada al estudio del grupo de endomorfismos $End(\mathbb{E})$, para una curva elíptica $\mathbb{E}$.
- (Schneider, 1937): si τ es una irracionalidad cuadrática entonces $j(\tau)$ es algebraico de grado $h_{f,K}$.
- Si $e^{2\pi i\tau}$ es algebraico entonces $j(\tau), \frac{j'(\tau)}{\pi}, \frac{j''(\tau)}{\pi^2}$ son mutuamente trascendentes.

Más aún...

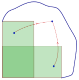
La j clásica es por lo tanto una invariante de toros (=curvas elípticas) con las ventajas adicionales siguientes:

- Tiene una fórmula explícita
- Es una "función modular" de $SL_2(\mathbb{Z})$ - invariante bajo la acción de ese grupo (captura "isogenia")
- Está asociada al estudio del grupo de endomorfismos $End(\mathbb{E})$, para una curva elíptica $\mathbb{E}$.
- (Schneider, 1937): si τ es una irracionalidad cuadrática entonces $j(\tau)$ es algebraico de grado $h_{f,K}$.
- Si $e^{2\pi i\tau}$ es algebraico entonces $j(\tau)$, $\frac{j'(\tau)}{\pi}$, $\frac{j''(\tau)}{\pi^2}$ son mutuamente trascendentes.

Más aún...

La j clásica es por lo tanto una invariante de toros (=curvas elípticas) con las ventajas adicionales siguientes:

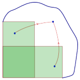
- Tiene una fórmula explícita
- Es una “función modular” de $SL_2(\mathbb{Z})$ - invariante bajo la acción de ese grupo (captura “isogenia”)
- Está asociada al estudio del grupo de endomorfismos $End(\mathbb{E})$, para una curva elíptica $\mathbb{E}$.
- (Schneider, 1937): si τ es una irracionalidad cuadrática entonces $j(\tau)$ es algebraico de grado $h_{f,K}$.
- Si $e^{2\pi i\tau}$ es algebraico entonces $j(\tau), \frac{j'(\tau)}{\pi}, \frac{j''(\tau)}{\pi^2}$ son mutuamente trascendentes.



Más aún...

La j clásica es por lo tanto una invariante de toros (=curvas elípticas) con las ventajas adicionales siguientes:

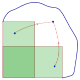
- Tiene una fórmula explícita
- Es una "función modular" de $SL_2(\mathbb{Z})$ - invariante bajo la acción de ese grupo (captura "isogenia")
- Está asociada al estudio del grupo de endomorfismos $End(\mathbb{E})$, para una curva elíptica $\mathbb{E}$.
- (Schneider, 1937): si τ es una irracionalidad cuadrática entonces $j(\tau)$ es algebraico de grado $h_{f,K}$.
- Si $e^{2\pi i\tau}$ es algebraico entonces $j(\tau)$, $\frac{j'(\tau)}{\pi}$, $\frac{j''(\tau)}{\pi^2}$ son mutuamente trascendentes.



Más aún...

La j clásica es por lo tanto una invariante de toros (=curvas elípticas) con las ventajas adicionales siguientes:

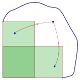
- Tiene una fórmula explícita
- Es una "función modular" de $SL_2(\mathbb{Z})$ - invariante bajo la acción de ese grupo (captura "isogenia")
- Está asociada al estudio del grupo de endomorfismos $End(\mathbb{E})$, para una curva elíptica $\mathbb{E}$.
- (Schneider, 1937): si τ es una irracionalidad cuadrática entonces $j(\tau)$ es algebraico de grado $h_{f,K}$.
- Si $e^{2\pi i\tau}$ es algebraico entonces $j(\tau), \frac{j'(\tau)}{\pi}, \frac{j''(\tau)}{\pi^2}$ son mutuamente trascendentes.



De $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

El Altertraum de Manin: encontrar el análogo de multiplicación compleja para $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ con $D > 0$ libre de cuadrados, reemplazando curvas elípticas por toros cuánticos.
[“Multiplicación compleja” se refiere (en el caso de una curva elíptica) a tener grupos de endomorfismos mayor que $\mathbb{Z}$. Se puede reducir a tener, para cada $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (ahora para $D < 0$ libre de cuadrados) que $j(\mu)$ sea un número algebraico y genere el campo de clase $H(\mu)$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.]

El caso de la multiplicación compleja tiene una demostración clásica que usa “teoría de campos de clase”. ¡El análogo para multiplicación real está aún abierto!



De $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

El Altertraum de Manin: encontrar el análogo de multiplicación compleja para $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ con $D >$ o libre de cuadrados, reemplazando curvas elípticas por toros cuánticos.
["Multiplicación compleja" se refiere (en el caso de una curva elíptica) a tener grupos de endomorfismos mayor que $\mathbb{Z}$. Se puede reducir a tener, para cada $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (ahora para $D <$ o libre de cuadrados) que $j(\mu)$ sea un número algebraico y genere el campo de clase $H(\mu)$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.]

El caso de la multiplicación compleja tiene una demostración clásica que usa "teoría de campos de clase". ¡El análogo para multiplicación real está aún abierto!

Hacia toros cuánticos: ir de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y sea Λ_θ la pseudo-red $\langle 1, \theta \rangle$. El cociente

$$\mathbb{R}/\Lambda_\theta$$

es nuestro "toro cuántico", asociado al número irracional θ. Es un subgrupo uniparamétrico del toro (clásico) $\mathbb{T}(i)$.

También se puede describir como el espacio de hojas de foliaciones "de Kronecker".

Entender versiones cuánticas de j

Gendron propone maneras de capturar invariantes j generalizados, enfocando problemas como

- Nuevo dominio de definición (de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
- Resultan problemas con la topología que surge del comportamiento mucho más caótico de $\mathbb{R}$ - se pierde la continuidad en las primeras aproximaciones.
- Buscar expresiones racionales (ahora, funciones multivaluadas - tal vez el promedio del conjunto (finito) de valores es el invariante robusto).

Entender versiones cuánticas de j

Gendron propone maneras de capturar invariantes j generalizados, enfocando problemas como

- Nuevo dominio de definición (de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
- Resultan problemas con la topología que surge del comportamiento mucho más caótico de $\mathbb{R}$ - se pierde la continuidad en las primeras aproximaciones.
- Buscar expresiones racionales (ahora, funciones multivaluadas - tal vez el promedio del conjunto (finito) de valores es el invariante robusto).

Entender versiones cuánticas de j

Gendron propone maneras de capturar invariantes j generalizados, enfocando problemas como

- Nuevo dominio de definición (de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
- Resultan problemas con la topología que surge del comportamiento mucho más caótico de $\mathbb{R}$ - se pierde la continuidad en las primeras aproximaciones.
- Buscar expresiones racionales (ahora, funciones multivaluadas - tal vez el promedio del conjunto (finito) de valores es el invariante robusto).

La definición de Castaño-Bernard y Gendron.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. El invariante modular cuántico $j^{qu}(\theta)$ resulta ser un análogo discontinuo, multivaluado del invariante modular clásico:

Sea $\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{N} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$, donde $\|\cdot\|$ mide la distancia al entero más cercano. Esta es la "red cuántica".

La función ε-zeta de θ está dada por

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) := \sum_{n \in \Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}.$$

(El valor $2\zeta_{\theta,\varepsilon}(2k)$ es el análogo de la serie clásica de Eisenstein de peso k.) El ε-invariante modular está dado por

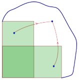
$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12^3}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \qquad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49}{40}\frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El conjunto de puntos límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ es

$$j^{qu}(\theta) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} j_\varepsilon(\theta)$$

función $GL_2(\mathbb{Z})$-invariante discontinua y multivaluada

$$j^{qu} : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$



La definición de Castaño-Bernard y Gendron.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. El invariante modular cuántico $j^{qu}(\theta)$ resulta ser un análogo discontinuo, multivaluado del invariante modular clásico:

Sea $\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{N} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$, donde $\|\cdot\|$ mide la distancia al entero más cercano. Esta es la "red cuántica".

La función ε-zeta de θ está dada por

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) := \sum_{n \in \Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}.$$

(El valor $2\zeta_{\theta,\varepsilon}(2k)$ es el análogo de la serie clásica de Eisenstein de peso k.) El ε-invariante modular está dado por

$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12^3}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \qquad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49}{40}\frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El conjunto de puntos límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ es

$$j^{qu}(\theta) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} j_\varepsilon(\theta)$$

función $GL_2(\mathbb{Z})$-invariante discontinua y multivaluada

$$j^{qu} : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

La definición de Castaño-Bernard y Gendron.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. El invariante modular cuántico $j^{qu}(\theta)$ resulta ser un análogo discontinuo, multivaluado del invariante modular clásico:
Sea $\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{N} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$, donde $\|\cdot\|$ mide la distancia al entero más cercano. Esta es la "red cuántica".
La función ε-zeta de θ está dada por

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) := \sum_{n \in \Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}.$$

(El valor $2\zeta_{\theta,\varepsilon}(2k)$ es el análogo de la serie clásica de Eisenstein de peso k.) El ε-invariante modular está dado por

$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12^3}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \qquad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49}{40}\frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El conjunto de puntos límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ es

$$j^{qu}(\theta) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} j_\varepsilon(\theta)$$

función $GL_2(\mathbb{Z})$-invariante discontinua y multivaluada

$$j^{qu} : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

La definición de Castaño-Bernard y Gendron.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. El invariante modular cuántico $j^{qu}(\theta)$ resulta ser un análogo discontinuo, multivaluado del invariante modular clásico:

Sea $\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{N} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$, donde $\|\cdot\|$ mide la distancia al entero más cercano. Esta es la "red cuántica".

La función ε-zeta de θ está dada por

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) := \sum_{n \in \Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}.$$

(El valor $2\zeta_{\theta,\varepsilon}(2k)$ es el análogo de la serie clásica de Eisenstein de peso k.) El ε-invariante modular está dado por

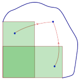
$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12^3}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \qquad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49}{40}\frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El conjunto de puntos límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ es

$$j^{qu}(\theta) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} j_\varepsilon(\theta)$$

función $GL_2(\mathbb{Z})$-invariante discontinua y multivaluada

$$j^{qu} : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$



La definición de Castaño-Bernard y Gendron.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. El invariante modular cuántico $j^{qu}(\theta)$ resulta ser un análogo discontinuo, multivaluado del invariante modular clásico:
Sea $\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{N} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$, donde $\|\cdot\|$ mide la distancia al entero más cercano. Esta es la "red cuántica".
La función ε-zeta de θ está dada por

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) := \sum_{n \in \Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}.$$

(El valor $2\zeta_{\theta,\varepsilon}(2k)$ es el análogo de la serie clásica de Eisenstein de peso k.) El ε-invariante modular está dado por

$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12^3}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \qquad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49}{40} \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El conjunto de puntos límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ es

$$j^{qu}(\theta) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} j_\varepsilon(\theta)$$

función $GL_2(\mathbb{Z})$-invariante discontinua y multivaluada

$$j^{qu} : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Espectros y geometría no conmutativa

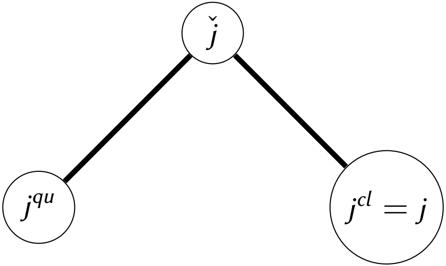
Uno puede ver

$$j^{qu} : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

como un espectro de algún operador que aún no conocemos.
Sin embargo, seguimos un camino distinto de los más usuales en geometría no conmutativa.

El invariante j universal

Gendron llegó con preguntas sobre un invariante universal - construcción detallada de un haz (y su cociente bajo una acción de grupo) que generaliza tanto a j clásica y a j^{qu} cuántica - el "invariante j universal" resulta ser una sección de ese haz.



Construcción del invariante j universal.

(Castaño-Bernard, Gendron)
Sea ${}^*\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{u}$ para algún ultrafiltro no principal $\mathfrak{u}$ sobre $\mathbb{N}$. Defina

$$H := \{[F_i] \subset {}^*\mathbb{Z}^2 \text{ hiperfinito }\}.$$

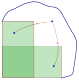
Este conjunto está parcialmente ordenado con respecto a inclusión, así que podemos definir el espacio de Stone

$$R := Ult(H).$$

Para cada $\mathfrak{p} \in R$ y $\mu \in \mathbb{H}$ definimos el invariante modular

$$j(\mu, \mathfrak{p})$$

así:



La construcción

Idea: el invariante j clásico es una expresión algebraica que involucra series de Eisenstein y es función de $\mu \in \mathbb{H}$. Podemos asociar a $[F_i] \subset {}^*\mathbb{Z}^2$ una suma hiperfinita siguiendo la fórmula del invariante j clásico, denotada

$$j(\mu)_{[F_i]} \in {}^*\mathbb{C}.$$

Obtenemos una red

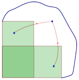
$$\{j(\mu)_{[F_i]}\}_{[F_i]\in H} \subset {}^*\mathbb{C}.$$

Considere el haz ${}^\diamond\check{\mathbb{C}} \longrightarrow R$ con fibra sobre $\mathfrak{p}$ dada por

$${}^\diamond\mathbb{C}_{\mathfrak{p}} := ({}^*\mathbb{C})^H/\mathfrak{p}.$$

Definimos ahora la sección:

$$\check{j} : \mathbb{H} \times R \hookrightarrow {}^\diamond\check{\mathbb{C}}, \quad \check{j}(\mu, \mathfrak{p}) := \{j(\mu)_{[F_i]}\}_{[F_i]\in H}/\mathfrak{p}.$$



Acciones de grupos - ángulos irracionales

Lo que realmente se juega en estas construcciones es la invarianza bajo diversas acciones de grupos.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$ existe un subconjunto especial $R_\theta \subset R$ de ultrafiltros que "detectan" θ:

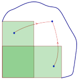
$$R_\theta = \{\mathfrak{p} |\ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{c}_\theta\}$$

donde $\mathfrak{c}_\theta$ es el filtro cónico generado por los conos

$$cone_\theta([F_i]) = \{[F_i]' \supset [F_i] |\ [F_i] \subset [F_i]' \subset {}^*\mathbb{Z}^2(\theta)\}.$$

Aquí,

$${}^*\mathbb{Z}^2(\theta) = \{({}^*n^\perp, {}^*n) |\ {}^*n\theta - {}^*n^\perp \simeq 0\}.$$



Restricción de $\check{j}$ a j cuántica y clásica

La invariante cuántica j es la restricción:

$$\check{j}^{qu}(\theta) := \check{j}|_{R_\theta}(i, \cdot).$$

Si denotamos

$$R_{cl} = \{\mathfrak{p} |\ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{c}\}$$

donde $\mathfrak{c}$ es el filtro generado por *todos* los conos sobre conjuntos hiperfinitos en ${}^*\mathbb{Z}^2$:

$$cone([F_i]) = \{[F_i]' \supset [F_i] |\ [F_i]' \subset {}^*\mathbb{Z}^2\}.$$

Entonces la restricción

$$\check{j}^{cl} := \check{j}|_{R_{cl}}$$

satisface

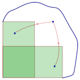
$$\check{j}^{cl}(\mu, \mathfrak{p}) \simeq j(\mu), \quad \forall \mu \in \mathbb{H},$$

donde j es la invariante j usual.

Dualidad I

Note la dualidad en la manera de recuperar las invariantes clásicas y cuánticas:

- la invariante clásica se recupera a lo largo de una fibra única $^{\diamond}\check{\mathbb{H}}_{\mathfrak{u}}$ (es decir, una hoja del cociente de haces $\widehat{Mod}$),
- la invariante cuántica se recupera fijando el parámetro de fibra $i \in \mathbb{H}$ y variando $\mathfrak{u} \in Cone(\theta)$: esto es, surge de una sección local definida por i (una transversal de $\widehat{Mod}$).



Conjeturas

El objetivo grande es ver que si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es cuadrático, entonces el campo de clase de Hilbert H_K de $K = \mathbb{Q}(\theta)$ (la máxima extensión no ramificada de K) es igual a

$$K(j(\theta)).$$

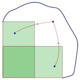
Lograr esto daría una solución al problema 12 de Hilbert para extensiones reales cuadráticas (caso no ramificado).
Esto pasa por demostrar el análogo de "multiplicación compleja" (paso crucial: la algebraicidad de $j(\mu)$, cuando $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, con $D <$ 0 libre de cuadrados - y el hecho de que $j(\mu)$ esenciamente genera el campo de clase de Hilbert H_K of $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$).
Conjeturamos (con Gendron) que para $\theta \in \mathbb{R}$ existe una relación de dualidad entre la invariante clásica $j(i\theta)$ y la invariante cuántica $j(\theta)$.

Dualidad II

De manera más precisa, asociamos a $j(i\theta)$ y a $j(\theta)$ dos redes

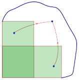
$$\{j(i\theta)_\alpha\} \qquad \text{y} \qquad \{j(\theta)_\alpha\}$$

tales que todos sus elementos son algebraicamente dependientes. Las dos redes convergen a un límite común. La red clásica $\{j(i\theta)_\alpha\}$ vive a lo largo de una hoja fija de ${}^\diamond\widehat{Mod}$, la red cuántica $\{j(\theta)_\alpha\}$ vive en una transversal fija de ${}^\diamond\widehat{Mod}$.



A través

(Foto: AV [proyecto **moving topoi**], sheaves 3)



Teoría de modelos para haces

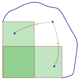
El teorema del modelo genérico de Caicedo es una "versión topológica" del teorema de ultraproductos de Łoś, adaptado a haces. Generaliza el teorema de forcing de la teoría de conjuntos.

Teorema (Caicedo)

Sea un vocabulario de primer orden τ. Sea X un espacio topológico, $\mathfrak{A}$ un haz de τ-estructuras sobre X, F un filtro de abiertos genérico para $\mathfrak{A}$, y $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ una τ-fórmula. Entonces, dadas secciones $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ del haz (definidas sobre un abierto en F), tenemos

$$\mathfrak{A}^X/F \models \varphi(\sigma_1/_{\sim_F}, \cdots, \sigma_n/_{\sim_F}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{para algún } U \in F, \quad \mathfrak{A} \Vdash_U \varphi^G(\sigma_1, \cdots, \sigma_n).$$

Una fórmula vale en un "límite" de haces de estructuras si y solo si es forzada por un abierto en el filtro genérico.



Verdad y forzamiento - límites geométricos

El Teorema del Modelo Genérico conecta entonces verdad en estructuras clásicas (límite geométrico de estructuras clásicas organizadas a lo largo de un haz) con forzamiento a lo largo de las aproximaciones. En formas más específicas, el Teorema del Modelo Genérico provee significado lógico específico a familias de aproximación organizadas a lo largo de distintas clases de objetos geométricos (haces, foliaciones, cocientes de haces bajo distintas acciones de grupo, etc.)

Extensiones para nuestro trabajo: métrica, equivarianza

En trabajo reciente, hemos extendido los resultados de Caicedo en dos direcciones:

- a haces métricos (con Maicol Ochoa) - sobre espacios topológicos regulares
- a haces equivariantes (con Gabriel Padilla) - un grupo G actúa sobre el haz, damos condiciones de construcción de G-haces (coherencia y exactitud no solamente al nivel del prehaz sino al de la acción).

Extensiones para nuestro trabajo: métrica, equivarianza

En trabajo reciente, hemos extendido los resultados de Caicedo en dos direcciones:

- a haces métricos (con Maicol Ochoa) - sobre espacios topológicos regulares
- a haces equivariantes (con Gabriel Padilla) - un grupo G actúa sobre el haz, damos condiciones de construcción de G-haces (coherencia y exactitud no solamente al nivel del prehaz sino al de la acción).

(Foto: Wanda Siedlecka [proyecto **moving topoi**],
respuesta a foto "sheaves 3" de AV)

Suertes para toros y j

Harris y Zilber proveen una visión de los invariantes j que contrasta con la nuestra - ellos se enfocan en la categoricidad y las generalizaciones de mapas j a dimensiones más altas (variedades de Shimura). El punto de arranque para ellos es ver las funciones j mediante axiomatizaciones en $L_{\omega_1,\omega}$:

Fibras estándar

En $L_{\omega_1,\omega}$, Harris y Zilber axiomatizan j clásica:

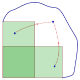
Sea L un lenguaje para estructuras con dos suertes de la forma

$$\mathfrak{A} = \langle \langle H; \{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle, \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle, j : H \longrightarrow F \rangle$$

donde $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ es un campo algebraicamente cerrado de característica 0, $\langle H; \{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle$ es un conjunto, junto con contables símbolos de función unarios, y $j : H \longrightarrow F$. Sea entonces

$$Th_{\omega_1,\omega}(j) := Th(\mathbb{C}_j) \cup \forall x \forall y (j(x) = j(y) \rightarrow \bigvee_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})} x = \gamma(y)$$

para $\mathbb{C}_j$ el "modelo estándar" $(\mathbb{H}, \langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle, j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C})$.
(Fibras estándar significa "las fibras son órbitas bajo la acción modular")



Fibras estándar

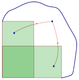
En $L_{\omega_1,\omega}$, Harris y Zilber axiomatizan j clásica:
Sea L un lenguaje para estructuras con dos suertes de la forma

$$\mathfrak{A} = \langle \langle H; \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle, j : H \longrightarrow F \rangle$$

donde $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ es un campo algebraicamente cerrado de característica 0, $\langle H; \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$ es un conjunto, junto con contables símbolos de función unarios, y $j : H \longrightarrow F$. Sea entonces

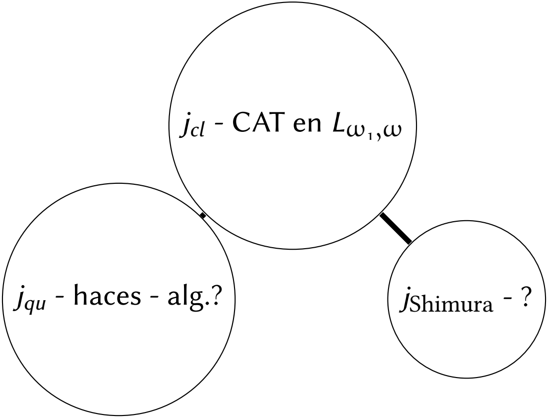
$$Th_{\omega_1,\omega}(j) := Th(\mathbb{C}_j) \cup \forall x \forall y (j(x) = j(y) \rightarrow \bigvee_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})} x = \gamma(y)$$

para $\mathbb{C}_j$ el “modelo estándar” $(\mathbb{H}, \langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle, j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C})$.
(Fibras estándar significa “las fibras son órbitas bajo la acción modular”)



Dos direcciones: ¿De verdad?

El actual análisis modelo-teórico de j va hacia dos posibles extensiones:



Dos cajas de herramientas distintas

Las dos direcciones de generalización (a toros cuánticos/multiplicación real por un lado, a variedades de dimensión más alta/Shimura por otro lado) de las funciones *j* apela a dos aspectos distintos de la teoría de modelos (con amalgama muy débil hasta ahora - probablemente categórica - trabajos de Hugo Mariano en proyecto nuevo con Pedro Zambrano, Zaniar Ghadernezhad y AV en etapa muy inicial):

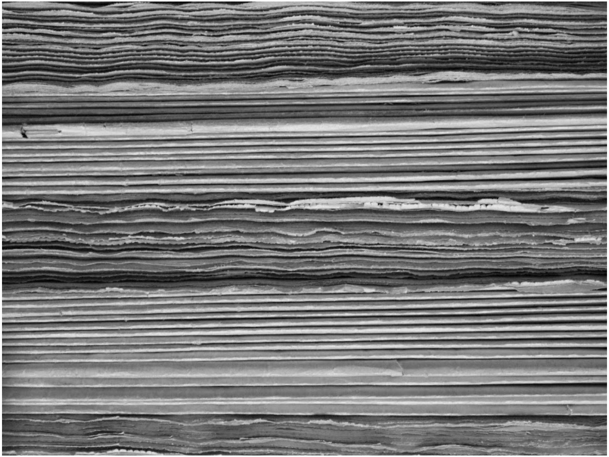
- La teoría de modelos de clases elementales abstractas (en particular, la teoría de la excelencia - ahora "vieja" (1980s) pero recientemente reformulada y aclarada por cinco autores (Bays, Hart, Hyttinen, Kesälä, Kirby - Quasiminimal Structures and Excellence). Una especie de análisis cohomológico de modelos (y tipos), conectado con categoricidad y amalgamación "suave".
- La teoría de modelos sobre haces (remotamente basada en trabajos de Macintyre, Ellerman, Makkai - y finalmente Grothendieck), desarrollada por Caicedo y extendida por Ochoa, Padilla, V. a haces métricos y equivariantes.

Dos cajas de herramientas distintas

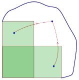
Las dos direcciones de generalización (a toros cuánticos/multiplicación real por un lado, a variedades de dimensión más alta/Shimura por otro lado) de las funciones j apela a dos aspectos distintos de la teoría de modelos (con amalgama muy débil hasta ahora - probablemente categórica - trabajos de Hugo Mariano en proyecto nuevo con Pedro Zambrano, Zaniar Ghadernezhad y AV en etapa muy inicial):

- La teoría de modelos de clases elementales abstractas (en particular, la teoría de la excelencia - ahora “vieja” (1980s) pero recientemente reformulada y aclarada por cinco autores (Bays, Hart, Hyttinen, Kesälä, Kirby - Quasiminimal Structures and Excellence). Una especie de análisis cohomológico de modelos (y tipos), conectado con categoricidad y amalgamación “suave”.

- La teoría de modelos sobre haces (remotamente basada en trabajos de Macintyre, Ellerman, Makkai - y finalmente Grothendieck), desarrollada por Caicedo y extendida por Ochoa, Padilla, V. a haces métricos y equivariantes.



(Foto: María Clara Cortés [proyecto **moving topoi**], parte de tes mnemês topos)



References

Castaño Bernard, C. & Gendron, T.M., Modular Invariant of Quantum Tori. To appear in Proc. Lond. Math.Soc. 2014.