Conexión de GALoiS

(Presentación "inicial" del grupo de investigación)

Andrés Villaveces (en nombre del grupo)
Universidad Nacional de Colombia - Bogotá

Contenido

Nuevo grupo: Conexión de GALoiS

- Respuesta a convocatoria de Colciencias, de la Universidad y de la Facultad.
- Ya existía el grupo pero no estaba "formalizado"
- Interacciones entre Geometría (en sentido amplio) y teoría de modelos
- Hay algunos grupos análogos, relativamente recientes, a nivel mundial
- Zilber/Hrushovski …Manin/Kontsevich

Dramatis Personae

Profesores:

- Andrés Villaveces (UN-Bogotá)
- John Alexander Cruz (UN-Bogotá)
- Leonardo Cano (UN-Bogotá)
- Boris Zilber (Oxford)
- David Blázquez-Sanz (UN-Medellín)

Estudiantes:

- Nicolás Medina (finalizando maestría)
- Juan Ignacio Agudelo (iniciando maestría)

Panorama / Lente

El Grupo **Conexión de GALoiS** tiene carácter interdisciplinar. Durante las primeras dos décadas del siglo XXI, dos ramas de la matemática se han ido entrelazando de manera sorprendente y significativa: la geometría (geometría algebraica, geometría no conmutativa, geometría riemanniana) y la teoría de modelos (una rama de la lógica matemática con métodos poderosos como categoricidad y estabilidad, con herramientas tanto de primer orden como más generales)…

Algo de historia. . .

Inicialmente (hacia 2015) se conformó un seminario de estudio de relaciones entre temas provenientes de la geometría algebraica y la teoría de modelos. Más recientemente el grupo ha consolidado un seminario de investigación (Lógica y Geometría - https://logicaygeometriabogota.wordpress.com/).

Internacionalización

La internacionalización del grupo es muy alta, sobre todo dado el corto tiempo de existencia del grupo. Hay trabajos comunes con Boris Zilber (Oxford), y el seminario ha contado con la participación de Thomas Scanlon (Berkeley) y de Hugo Mariano (Sao Paulo) e interacción con lógicos del grupo de Helsinki (Åsa Hirvonen, Tapani Hyttinen). Miembros del grupo han participado en eventos especializados en temas relevantes al grupo en varios lugares (Instituto Max Planck, Bonn, Alemania; en Kilpisjärvi (Finlandia, Univ. de Helsinki) en Moscú (HSE) y en Río de Janeiro (UFRJ)).

Plan

De la descripción oficial

El enfoque principal estratégico consiste en usar la fuerza y la finura de las técnicas provenientes de la teoría de modelos (una rama de la lógica matemática) para abordar problemas provenientes de la geometría algebraica (entendida de manera amplia: variedades algebraico-diferenciales asociadas a soluciones de ecuaciones de origen geométrico; entre estas la famosa función j, o teoría de Hodge, u otros ejemplos) y adicionalmente llevar estos temas a interacciones con la física cuántica.

La primera etapa del seminario lidió con la categoricidad del invariante modular $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Trabajos de Harris y Daw y un estudio detallado del teorema de Harris:
An $L_{\omega_1,\omega}$ axiomatization of j: Let L be a language for two-sorted structures of the form

$$\mathfrak{A} = \langle \langle H; \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle, j : H \to F \rangle$$

where $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ is an algebraically closed field of characteristic 0, $\langle H; \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$ is a set together with countably many unary function symbols, and $j : H \to F$. Really, \$j\$ is a **cover** from the action structure into the field $\mathbb{C}$.

Let then

$$\mathsf{Th}_{\omega_1,\omega}(\mathsf{j}) := \mathsf{Th}(\mathbb{C}_\mathsf{j}) \cup \forall x \forall y (\mathsf{j}(x) = \mathsf{j}(y) \rightarrow \bigvee_{i<\omega} x = \gamma_i(y))$$

for $\mathbb{C}_\mathsf{j}$ the "standard model" $(\mathbb{H}, \langle \mathbb{H}, +, \cdot, 0, 1 \rangle, \mathsf{j} : \mathbb{H} \to \mathbb{C})$.
This captures all the first order theory of j (not the analyticity!) plus the fact that fibers are "standard" ("fibers are orbits").

Theorem

(Harris, assuming Mumford-Tate Conj.)
The theory $\mathsf{Th}_{\omega_1,\omega}(\mathsf{j}) + \mathsf{trdeg}(\mathsf{F}) \geq \aleph_0$ *is categorical in all infinite cardinalities. I.e., given two models* $\mathsf{M}_1 = (\mathcal{H}_1, \mathsf{F}_1, \mathsf{j}_1 : \mathsf{H}_1 \to \mathsf{F}_1)$ *and* $\mathsf{M}_2 = (\mathcal{H}_2, \mathsf{F}_2, \mathsf{j}_2 : \mathsf{H}_2 \to \mathsf{F}_2)$ *of the same infinite cardinality* *(*$\mathcal{H}_i = (\mathsf{H}_i, \{g_j^i\}_{j\in\mathbb{N}})$ *and* $\mathcal{F}_i = (\mathsf{F}_i, +_i, \cdot_i, 0, 1)$*) there are isomorphisms* $\varphi_{\mathsf{H}}, \varphi_{\mathsf{F}}$ *such that*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{H}}"] \arrow[d, "j_1"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "j_2"] \\ \mathcal{F}_1 \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F}_2 \end{tikzcd}$$

commutes.

In his proof, A. Harris uses an instance of the adelic Mumford-Tate conjecture for products of elliptic curves to show this. The strategy to build an isomorphism between two models M and M' consists (as expected) in

- Identifying $\mathrm{dcl}^{\mathsf{M}}(\emptyset)$ with $\mathrm{dcl}^{\mathsf{M}'}(\emptyset)$ to start the back-and-forth argument.
- Assume we have $\langle \bar{\mathsf{x}} \rangle \approx \langle \bar{\mathsf{x}}' \rangle$ and take new $\mathsf{y} \in \mathsf{M}$ – we need to find $\mathsf{y}' \in \mathsf{M}'$ to extend the partial isomorphism (satisfying the same quantifier free type)
- realizing the field type of a finite subset of a Hecke orbit over any parameter set (algebraicity of modular curves),...
- then show that the information in the type is contained in a finite subset ("Mumford-Tate" open image theorem used here) ... every point $\tau \in \mathcal{H}$ corresponds to an elliptic curve E — the type of τ is determined by algebraic relations between torsion points of E.

Generalizing a bit the previous (but the picture is the same):
let S be modular curve: $\mathcal{H}/\Gamma$ where Γ is a "congruence subgroup" of $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$, X^+ a set with an action of $\mathsf{G}^{\mathsf{ad}}(\mathbb{Q})$, $\mathsf{p} : \mathsf{X}^+ \to \mathsf{S}(\mathbb{C})$ satisfies

- (SF) Standard fibers,
- (SP) Special points,
- (M) Modularity.

If any other map $\mathsf{q} : \mathsf{X}^+ \to \mathsf{S}(\mathbb{C})$ also satisfies SF, SP and M, then there exist a $\mathsf{G}^{\mathsf{ad}}(\mathbb{Q})^+$-equivariant bijection φ and $\sigma \in \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ fixing the field of definition of S such that

$$\begin{tikzcd} \mathsf{X}^+ \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\mathsf{p}"'] & \mathsf{X}^+ \arrow[d, "\mathsf{q}"] \\ \mathsf{S}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\sigma"'] & \mathsf{S}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Ideas, questions to the geometers.

1. Modularity Axioms ("Hrushovski predimension" style conditions) in $\mathsf{Th}(\mathsf{D},\mathsf{q},\mathsf{S})$):
   - $\mathsf{MOD}^1_{\bar{g}} := \forall x \in D(q(g_1x), \cdots, q(g_nx)) \in Z_{\bar{g}}$,
   - $\mathsf{MOD}^2_{\bar{g}} := \forall z \in Z_{\bar{g}} \exists x \in D(q(g_1x), \cdots, q(g_nx)) \in Z_{\bar{g}}$.
2. Other axioms control "special points" (unique fixed points by the action of some element) and "generic points" (fixed by no element of the group $G^{ad}(\mathbb{Q})$).
3. A theorem of Keisler on the number of types realized in models of size $\aleph_1$ of sentences in $L_{\omega_1,\omega}$ has the following consequence: <u>uncountable categoricity implies the geometric condition [Mumford-Tate]</u>.
4. Mumford-Tate: given A an abelian variety of dimension g defined over a field K, and $\rho : G_K \to \mathrm{Aut}(T(A))$ the image of $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ is open.

More

1. Original context: Galois representation on the Tate module of an abelian variety A (limit of torsion points). Conjecturally, the image of such a Galois representation, which is an ℓ-adic Lie group for a given prime number ℓ, is determined by the corresponding Mumford-Tate group G (knowledge of G determines the Lie algebra of the Galois image).
2. Unfolding categoricity through the geometry seems to be the main question at this point - one that the Zilber school (here present!) has pushed quite far.
3. Connection to properties of extendability of local sections to global sections (in sheaf cohomology).

Clarificaciones

- Jorge Plazas aclaró en ese momento para el seminario el rol de Mumford-Tate, la torre modular.
- Leonardo Cano aclaró el rol de la definibilidad (funciones simétricas, polinomio modular).
- AV se concentró en extraer el contenido del teorema de Keisler (si una sentencia de $\mathsf{L}_{\omega_1,\omega}$ es $\aleph_1$-categórica entonces el conjuntos de m-tipos realizables en modelos de ψ es contable) y su rol en la prueba de Daw-Harris.
- Jorge Plazas expresó preguntas sobre funciones análogas a j pero asociadas a otros fenómenos de teoría de números (moonshine, etc.).

Interacciones con física

En etapas posteriores del seminario, ha habido básicamente dos interacciones con física:

- Tesis de Nicolás Medina (exposición anterior): haces y fundamentos de la mecánica cuántica (y conexiones con teoría de la información cuántica)
- Trabajo con Maicol Ochoa - oscilador armónico cuántico y su formalización en semántica de haces (montados sobre lógica continua)

Interacciones con química

Inicialmente el trabajo con Ochoa iba en esa dirección.

- Presentación en Max-Planck (Leipzig) en el evento **Directions in Mathematics in Chemistry** en 2016 - Model theory and non-locality.
- En mayo de 2019, Adam Wasserman (Purdue) dará la charla ¿Cuál es la forma de átomos en moléculas? - Hacia una teoría cuántica de la reactividad química y John Alexander Cruz dará una conferencia sobre el átomo de helio, basado en trabajos de Atiyah.

Plan

Ecuaciones de origen geométrico

J. A. Cruz: ecuaciones **de origen geométrico** pueden dar lugar a un análisis análogo al de **j**. De hecho, es la línea que autores como Freitag, Nagloo, Scanlon han tomado, haciendo pleno uso de la teoría de modelos de DCF:

- Tricotomía de Zilber vale para DCF.
- Análisis detallado del caso no ortogonal a las constantes.
- Minimalidad fuerte de la solución de j.

Cruz propone revisar quíntica, etc.
Ciertos trabajos de Casale y Blázquez-Sanz van por esta línea.