Lógicas y Topologías

desde Stone hasta Lurie

Andrés Villaveces - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*

IV Simposio Carlos Ruiz - UN - Bogotá - Enero/Febrero 2020

Los temas

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Stone

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Makkai y Lurie

Dualidades

El tema grande: reconstrucción

Un tema común en muchos ámbitos matemáticos es la

El tema grande: reconstrucción

Un tema común en muchos ámbitos matemáticos es la

Reconstrucción

El tema grande: reconstrucción

Un tema común en muchos ámbitos matemáticos es la

Reconstrucción

Por ejemplo…

Ejemplos de Reconstrucción

- Reconstrucción de variedades a partir de sus grupos de homotopía
- Reconstrucción de teorías o clases de bi-interpretabilidad de modelos a partir de sus grupos de automorfismos.

En el segundo caso, la clave de la reconstrucción está en…

Ejemplos de Reconstrucción

- Reconstrucción de variedades a partir de sus grupos de homotopía
- Reconstrucción de teorías o clases de bi-interpretabilidad de modelos a partir de sus grupos de automorfismos.

En el segundo caso, la clave de la reconstrucción está en…¡capturar la topología del grupo de automorfismos a partir de la pura estructura algebraica!

Otros ejemplos de Reconstrucción

Recuperar la SINTaxis a partir de la SEMÁNTica

Otros ejemplos de Reconstrucción

Recuperar la SINTaxis a partir de la SEMÁNTica

Stone, Makkai y más recientemente Lurie hacen eso, en tres contextos distintos.

Pero antes, una reflexión sobre este Simposio...

- El Encuentro de Topología espera reunir a las personas con deseos de exponer y de escuchar. De exponer: resultados e inquietudes. Plantear problemas y ventilar progresos de su investigación. De escuchar: para crear una audiencia...
- Es sorprendente que, sin habernos puesto de acuerdo, por lo menos tres conferencias (la de Arnold Oostra, la de Xavier Caicedo y esta) tienen muchos puntos en común. ¿Coincidencia? ¡No!
- Simbiosis, polinización - las margaritas en el desierto

Pero antes, una reflexión sobre este Simposio...

- El Encuentro de Topología espera reunir a las personas con deseos de exponer y de escuchar. De exponer: resultados e inquietudes. Plantear problemas y ventilar progresos de su investigación. De escuchar: para crear una audiencia...
- Es sorprendente que, sin habernos puesto de acuerdo, por lo menos tres conferencias (la de Arnold Oostra, la de Xavier Caicedo y esta) tienen muchos puntos en común. ¿Coincidencia? ¡No!
- Simbiosis, polinización - las margaritas en el desierto

Un desierto convertido en selva

Sebastião Salgado / Lélia Wanick - Aimorés (Minas Gerais) 2000-2015

Lógica $\longleftrightarrow$ Topología

Los temas

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Stone

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Makkai y Lurie

- Ultrafiltros, ultrafuntores
- Propiedades de ultrafiltros y ultrafuntores - en categorías
- Makkai / Lurie

Dualidades

Algo de lenguaje…

Primero revisitamos un teorema muy clásico, pero con un lenguaje algo modernizado…

(Lawvere, Makkai, Reyes, Lurie…)
Usamos la versión de Lurie en su artículo reciente
Ultracategories

Dualidad de Stone

Un tema clásico, sumamente importante (como recordamos ayer):
El teorema de Stone da una **dualidad** entre

Dualidad de Stone

Un tema clásico, sumamente importante (como recordamos ayer):
El teorema de Stone da una **dualidad** entre

Un álgebra de Boole B y su espectro Spec(B).

Dualidad de Stone

Un tema clásico, sumamente importante (como recordamos ayer):
El teorema de Stone da una **dualidad** entre

$$\boxed{\text{Un álgebra de Boole } B \text{ y su espectro } \mathrm{Spec}(B).}$$

- Dada $B = (B, \wedge, \vee, (\cdot)^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, su espectro es $\mathrm{Hom}_{\mathrm{BAlg}}(B, \{0, 1\})$, el conjunto de homomorfismos $h : B \to \{0, 1\}$.
- BAlg es la categoría de álgebras de Boole cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras de Boole.

Dualidad de Stone

Un tema clásico, sumamente importante (como recordamos ayer):
El teorema de Stone da una **dualidad** entre

Un álgebra de Boole B y su espectro $\mathrm{Spec}(B)$.

- Dada $B = (B, \wedge, \vee, (\cdot)^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, su espectro es $\mathrm{Hom}_{\mathrm{BAlg}}(B, \{0, 1\})$, el conjunto de homomorfismos $h : B \to \{0, 1\}$.
- BAlg es la categoría de álgebras de Boole cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras de Boole.
- $\mathrm{Spec}(B)$ es un subconjunto de $\prod_{x \in B} \{0, 1\}$, el conjunto de todas las funciones de B en $\{0, 1\}$; así, $\mathrm{Spec}(B)$ tiene una topología naturalmente inducida por la topología producto. Esta depende funtorialmente del álgebra de Boole B.

Teorema de Dualidad de Stone

La construcción $\mathsf{B} \mapsto \mathsf{Spec}(\mathsf{B})$ determina una inmersión plenamente fiel

$$\mathsf{Spec} : \mathsf{BAlg}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Top}$$

de la categoría (opuesta) de las álgebras de Boole en la categoría de los espacios topológicos. La imagen esencial de ese funtor es la subcategoría plena $\mathsf{Stone} \subseteq \mathsf{Top}$ cuyos objetos son los espacios de Stone (es decir, espacios topológicos compactos de Hausdorff totalmente disconexos).

Teorema de Dualidad de Stone

La construcción $\mathsf{B} \mapsto \mathsf{Spec}(\mathsf{B})$ determina una inmersión plenamente fiel

$$\mathsf{Spec} : \mathsf{BAlg}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Top}$$

de la categoría (opuesta) de las álgebras de Boole en la categoría de los espacios topológicos. La imagen esencial de ese funtor es la subcategoría plena $\mathsf{Stone} \subseteq \mathsf{Top}$ cuyos objetos son los espacios de Stone (es decir, espacios topológicos compactos de Hausdorff totalmente disconexos).

El teorema de Stone da una equivalencia entre sintaxis y semántica en lógica proposicional.

El teorema de Stone como "teorema de Completitud"

El teorema de Stone da una equivalencia entre sintaxis y semántica en lógica proposicional y por lo tanto es una forma de teorema de Completitud lógico:

El teorema de Stone como "teorema de Completitud"

El teorema de Stone da una equivalencia entre sintaxis y semántica en lógica proposicional y por lo tanto es una forma de teorema de Completitud lógico:

Álgebra de Boole B	Espacio topológico Spec(B)
Teoría (proposicional) T_B	Modelos de T_B

El teorema de Stone como "teorema de Completitud"

El teorema de Stone da una equivalencia entre sintaxis y semántica en lógica proposicional y por lo tanto es una forma de teorema de Completitud lógico:

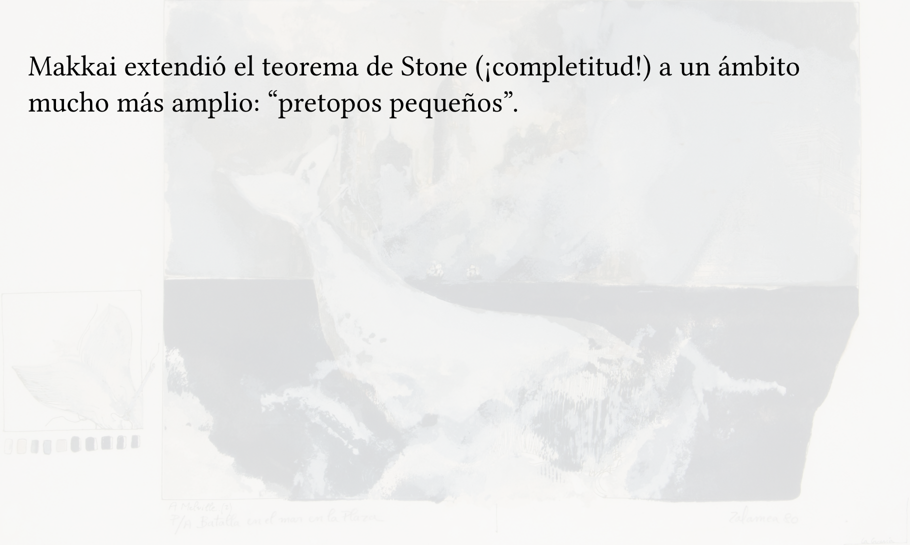
Álgebra de Boole B	Espacio topológico Spec(B)
Teoría (proposicional) T_B	Modelos de T_B

(Ayer Arnold Oostra nos dio una descripción detallada de lo anterior - y de la conexión entre las "abesas" y el conjunto de Cantor).

El teorema implica que toda álgebra de Boole se puede reconstruir a partir de dos datos: sus modelos Spec(B) y su topología.

Un enunciado complicado... pero la misma idea

Makkai extendió el teorema de Stone (¡completitud!) a un ámbito mucho más amplio: "pretopos pequeños".



Un enunciado complicado... pero la misma idea

Makkai extendió el teorema de Stone (¡completitud!) a un ámbito mucho más amplio: "pretopos pequeños".

Dado $\mathcal{C}$ un pretopos pequeño, tenemos la equivalencia

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathsf{Ult}}(\mathsf{Mod}(\mathcal{C}), \mathsf{Set})$$

entre $\mathcal{C}$ y la categoría de ultrafuntores que van de modelos de $\mathcal{C}$ en conjuntos.

Queremos entender (por lo menos) tres cosas:

Un enunciado complicado... pero la misma idea

Makkai extendió el teorema de Stone (¡completitud!) a un ámbito mucho más amplio: "pretopos pequeños".

Dado $\mathcal{C}$ un pretopos pequeño, tenemos la equivalencia

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathsf{Ult}}(\mathsf{Mod}(\mathcal{C}), \mathsf{Set})$$

entre $\mathcal{C}$ y la categoría de ultrafuntores que van de modelos de $\mathcal{C}$ en conjuntos.

Queremos entender (por lo menos) tres cosas:

- ¿Qué son todas estas definiciones?
- ¿Dónde están la topología y la reconstrucción?
- ¿En qué sentido es este teorema un "teorema de Completitud"?

Construcciones clásicas / notaciones convenientes

Para entender a Makkai y luego a Lurie, conviene recordar un poco más de construcciones clásicas: la compactificación de Stone-Čech y los ultraproductos. (La notación conveniente ayuda a pensar.)

Dado un conjunto S, su compactificación de Stone-Čech es el espacio topológico

$$\beta S = \mathrm{Spec}(\mathcal{P}(S)).$$

Construcciones clásicas / notaciones convenientes

Para entender a Makkai y luego a Lurie, conviene recordar un poco más de construcciones clásicas: la compactificación de Stone-Čech y los ultraproductos. (La notación conveniente ayuda a pensar.)

> Dado un conjunto S, su compactificación de Stone-Čech es el espacio topológico
> $$\beta S = \mathrm{Spec}(\mathcal{P}(S)).$$

Los puntos de βS se llaman ultrafiltros. Corresponden entonces a homomorfismos de álgebras de Boole

$$\mu : \mathcal{P}(S) \to \{0, 1\}.$$

Construcciones clásicas / notaciones convenientes

Para entender a Makkai y luego a Lurie, conviene recordar un poco más de construcciones clásicas: la compactificación de Stone-Čech y los ultraproductos. (La notación conveniente ayuda a pensar.)

Dado un conjunto S, su compactificación de Stone-Čech es el espacio topológico

$$\beta S = \mathrm{Spec}(\mathcal{P}(S)).$$

Los puntos de βS se llaman ultrafiltros. Corresponden entonces a homomorfismos de álgebras de Boole

$$\mu : \mathcal{P}(S) \to \{0, 1\}.$$

Dado $s \in S$, el ultrafiltro "delta de Dirac" en s es el homomorfismo

$$\delta_s : \mathcal{P}(S) \to \{0, 1\} \qquad \delta_s(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in I \\ 0 & \text{si } s \notin I. \end{cases}$$

Recorderis de Topología Básica

La "función de Dirac" $\delta : S \to \beta S$ dada por $s \mapsto \delta_s$ es inyectiva.
En Topología General uno aprende que βS es la compactificación "universal" de S:

> Dados X compacto de Hausdorff y $f : S \to X$ una función, existe una única función continua $\bar{f} : \beta S \to X$ tal que $\bar{f} \circ \delta = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \beta S \\
S \arrow[urr, "\delta"] \arrow[rr, "\forall f"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Recorderis de Topología Básica

La “función de Dirac” $\delta : S \to \beta S$ dada por $s \mapsto \delta_s$ es inyectiva.
En Topología General uno aprende que βS es la compactificación “universal” de S:

> Dados X compacto de Hausdorff y $f : S \to X$ una función, existe una única función continua $\bar{f} : \beta S \to X$ tal que $\bar{f} \circ \delta = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta S \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{f}"] \\
S \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\forall f"'] & X
\end{tikzcd}$$

La integral de una función $f : S \to X$ con respecto a un ultrafiltro

En la situación anterior

$f : S \to X$ $\qquad$ $\overline{f} : \beta S \to X$ es la única función continua tal que $\overline{f} \circ \delta = f$

…denotamos esa única función continua así:

La integral de una función $f : S \to X$ con respecto a un ultrafiltro

En la situación anterior

$f : S \to X$ $\quad\quad$ $\bar{f} : \beta S \to X$ es la única función continua tal que $\bar{f} \circ \delta = f$

…denotamos esa única función continua así:

$$\boxed{\bar{f}(\mu) = \int_S f(s) d\mu.}$$

Esto significa que toda función f de un conjunto S en un espacio compacto de Hausdorff X se puede "integrar" con respecto a un ultrafiltro $\mu \in \beta S$ para producir un punto $\int_S f(s) d\mu \in X$.

Integral sobre ultrafiltros y topología de βS

- La topología de X determina esta integral:
  - $\int_S f(s) d\delta_t = f(t)$
  - $\int_S f(s) d\mu$ depende continuamente de $\mu \in \beta S$

Integral sobre ultrafiltros y topología de βS

- La topología de X determina esta integral:
  - $\int_S f(s) d\delta_t = f(t)$
  - $\int_S f(s) d\mu$ depende continuamente de $\mu \in \beta S$
- Si $f : S \to X$ tiene imagen densa, la topología de X se puede recuperar a partir de

$$\mu \mapsto \int_S f(s) d\mu$$

(pues toda función sobre continua entre espacios de Hausdorff $\beta S \to X$ es un cociente)

Codificación

Así, de f y μ, a través de la construcción

$$\boxed{(f, \mu) \mapsto \int_S f(s)d\mu}$$

podemos recuperar la topología de X.

Los temas

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Stone

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Makkai y Lurie

- Ultrafiltros, ultrafuntores
- Propiedades de ultrafiltros y ultrafuntores - en categorías
- Makkai / Lurie

Dualidades

Makkai - Generalizar lo anterior

Podemos pasar a contextos más amplios (cálculo de predicados, lógica coherente, etc.) pero nos toca generalizar un poco lo anterior.

Makkai - Generalizar lo anterior

Podemos pasar a contextos más amplios (cálculo de predicados, lógica coherente, etc.) pero nos toca generalizar un poco lo anterior. Sean T una teoría (o incluso un pretopos pequeño $\mathcal{C}$) y $\{M_s\}_{s\in S}$ una colección de modelos de T (o de $\mathcal{C}$) con índices en un conjunto S. Construimos el ultraproducto de los M_s por un ultrafiltro μ:

Ultraproductos, en nuestro nuevo lenguaje

Dada la familia $\{M_s\}_{s\in S}$ de conjuntos no vacíos, un ultrafiltro μ sobre S da lugar a la relación de equivalencia en el producto $\prod_{s\in S} M_s$

$$(x_s)_{s\in S} \sim_\mu (y_s)_{s\in S} \Leftrightarrow \mu(\{s \in S \mid x_s = y_s\}) = 1.$$

El ultraproducto de $\{M_s\}_{s\in S}$ con respecto a μ es el cociente

$$\int_S M_s d\mu := (\prod_{s\in S} M_s)/ \sim_\mu$$

(Y análogamente para modelos de T …o de $\mathcal{C}$)

La construcción $\{M_s\}_{s\in S} \mapsto \int_S M_s d\mu$

Dado un ultrafiltro en βS, la construcción $\{M_s\}_{s\in S} \mapsto \int_S M_s d\mu$ da lugar a un funtor

$$\int_S (\bullet) d\mu : \mathrm{Mod}(T)^S \to \mathrm{Mod}(T).$$

La construcción $\{M_s\}_{s\in S} \mapsto \int_S M_s d\mu$

Dado un ultrafiltro en βS, la construcción $\{M_s\}_{s\in S} \mapsto \int_S M_s d\mu$ da lugar a un funtor

$$\int_S (\bullet) d\mu : \mathrm{Mod}(T)^S \to \mathrm{Mod}(T).$$

Estos funtores (junto con dos transformaciones naturales que los conectan) dan lugar a la ultraestructura de la categoría Mod(T) (Mod($\mathcal{C}$)).

UltraFun

Sea F un funtor entre dos categorías $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Una ultraestructura sobre F es una familia de isomorfismos

$$F(\int_S M_s d\mu) \approx \int_S F(M_s) d\mu$$

con índices en colecciones $\{M_s\}_{s\in S}$ y ultrafiltros $\mu \in \beta S$ (con ciertas propiedades de coherencia).

UltraFun

Sea F un funtor entre dos categorías $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Una ultraestructura sobre F es una familia de isomorfismos

$$\mathsf{F}(\int_S \mathsf{M}_s d\mu) \approx \int_S \mathsf{F}(\mathsf{M}_s) d\mu$$

con índices en colecciones $\{\mathsf{M}_s\}_{s \in S}$ y ultrafiltros $\mu \in \beta S$ (con ciertas propiedades de coherencia).
Un ultrafuntor es un funtor F con ultraestructura sobre él.

Antes de ir a los enunciados de Makkai (y el muy reciente de Lurie), miremos un poco más de propiedades de ultrafiltros y ultrafuntores, en categorías.

Primero, podemos construir objetos $\int_S M_s d\mu$ en una categoría $\mathcal{M}$ siempre y cuando admita productos y colímites filtrados (pequeños). En ese caso:

Antes de ir a los enunciados de Makkai (y el muy reciente de Lurie), miremos un poco más de propiedades de ultrafiltros y ultrafuntores, en categorías.
Primero, podemos construir objetos $\int_S M_s d\mu$ en una categoría $\mathcal{M}$ siempre y cuando admita productos y colímites filtrados (pequeños). En ese caso:

Dada una colección de objetos $\{M_s\}_{s\in S}$ de $\mathcal{M}$ y dado un ultrafiltro μ sobre S,

$$\int_S M_s d\mu = \varinjlim_{\mu(S_0)=1} \Big(\prod_{s\in S_0} M_s\Big).$$

Este es el ultraproducto categórico de $\{M_s\}_{s\in S}$ con respecto a μ.

Propiedades básicas de los ultraproductos

La construcción $\{M_s\}_{s\in S} \mapsto \int_S M_s d\mu$ satisface:

- Dada $\{M_s\}_{s\in S}$ colección de objetos en $\mathcal{M}$ y δ_{s_0} el ultrafiltro de Dirac asociado a un $s_0 \in S$, existe un iso canónico

$$\epsilon_{S,s_0} : \int_S M_s d\delta_{s_0} \approx M_{s_0}$$

Propiedades básicas de los ultraproductos

La construcción $\{M_s\}_{s\in S} \mapsto \int_S M_s d\mu$ satisface:

- Dada $\{M_s\}_{s\in S}$ colección de objetos en $\mathcal{M}$ y δ_{s_0} el ultrafiltro de Dirac asociado a un $s_0 \in S$, existe un iso canónico

$$\epsilon_{S,s_0} : \int_S M_s d\delta_{s_0} \approx M_{s_0}$$

- Si $\{N_t\}_{t\in T}$ es una colección de objetos con índices en T y $\nu_\bullet = \{\nu_s\}_{s\in S}$ es una colección de ultrafiltros con índices en S, existe una transformación canónica

$$\Delta_{\mu,\nu_\bullet} : \int_T N_t d(\int_S \nu_s d\mu) \to \int_S (\int_T N_t d\nu_s) d\mu;$$

(transformación de Fubini) - aquí $\int_S \nu_s d\mu$ es el ultrafiltro sobre T dado por $\int_S \nu_s d\mu(T_0) = \mu(\{s \in S \mid \nu_s(T_0) = 1\})$.

Hay mucho más...

Por ejemplo, el pushforward $f_*\mu$ de un ultrafiltro μ sobre S vía $f : S \to T$, dado por

$$f_*\mu(T_0) = \mu(f^{-1}(T_0))$$

satisface

$$f_*\mu = \int_S \delta_{f(s)} d\mu.$$

Hay mucho más…

Por ejemplo, el pushforward $f_*\mu$ de un ultrafiltro μ sobre S vía $f : S \to T$, dado por

$$f_*\mu(T_0) = \mu(f^{-1}(T_0))$$

satisface

$$f_*\mu = \int_S \delta_{f(s)} d\mu.$$

O bien, la transformación de Fubini categórica $\Delta_{\mu,\nu_\bullet}$ en realidad depende funtorialmente de $\{M_t\}_{t\in T}$: es una transformación natural de funtores de $\mathcal{M}^T$ en $\mathcal{M}$…

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}^S \arrow[dr, "\int_S(\bullet)d\mu"] & \\ \mathcal{M}^T \arrow[ur, "\left\{\int_T(\bullet)d\nu_s\right\}_{s\in S}"] \arrow[rr, "\int_T(\bullet)d(\int_S \nu_s d\mu)"'] & & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Hay mucho más...

Por ejemplo, el pushforward $f_*\mu$ de un ultrafiltro μ sobre S vía $f : S \to T$, dado por

$$f_*\mu(T_0) = \mu(f^{-1}(T_0))$$

satisface

$$f_*\mu = \int_S \delta_{f(s)} d\mu.$$

O bien, la transformación de Fubini categórica $\Delta_{\mu,\nu_\bullet}$ en realidad depende funtorialmente de $\{M_t\}_{t\in T}$: es una transformación natural de funtores de $\mathcal{M}^T$ en $\mathcal{M}$...

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^S \arrow[dr, "\int_S(\bullet)d\mu"] & \\
\mathcal{M}^T \arrow[ur, "\{\int_T(\bullet)d\nu_s\}_{s\in S}"] \arrow[rr, "\int_T(\bullet)d(\int_S \nu_s d\mu)"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Uparrow \Delta_{\mu,\nu_\bullet}"] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Makkai, ahora sí

<u>Teorema de Completitud Conceptual Fuerte de Makkai</u>

Sea $\mathcal{C}$ un pretopos pequeño. Entonces hay equivalencia de categorías

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathsf{Ult}}(\mathsf{Mod}(\mathcal{C}), \mathsf{Set})$$

entre la categoría $\mathcal{C}$ y la categoría de ultrafuntores de modelos de $\mathcal{C}$ en conjuntos.

Makkai, ahora sí

<u>Teorema de Completitud Conceptual Fuerte de Makkai</u>

Sea $\mathcal{C}$ un pretopos pequeño. Entonces hay equivalencia de categorías

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathsf{Ult}}(\mathsf{Mod}(\mathcal{C}), \mathsf{Set})$$

entre la categoría $\mathcal{C}$ y la categoría de ultrafuntores de modelos de $\mathcal{C}$ en conjuntos.

Hay varias demostraciones. Recientemente (2019) Lurie dio una generalización bastante fuerte.

Lurie, 2019

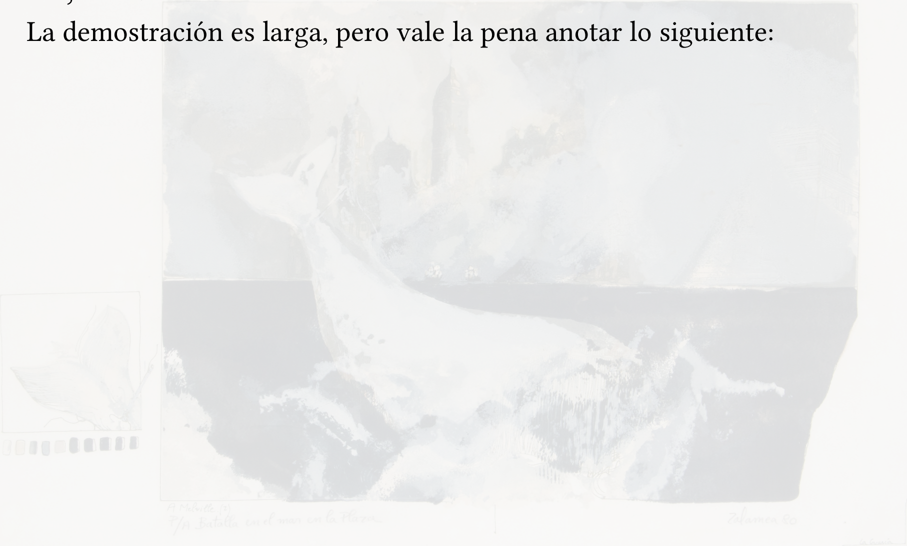
Teorema de Completitud (Conceptual) de Lurie

Dado $\mathcal{C}$ un pretopos pequeño, su topos coherente asociado $\mathsf{Shv}(\mathcal{C})$ es equivalente a la categoría de ultrafuntores a izquierda $\mathsf{Fun}^{\mathsf{LUlt}}(\mathsf{Mod}(\mathcal{C}), \mathsf{Set})$:

$$\mathsf{Shv}(\mathcal{C}) \longleftrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathsf{LUlt}}(\mathsf{Mod}(\mathcal{C}), \mathsf{Set})$$

Lurie, Completitud Conceptual

La demostración es larga, pero vale la pena anotar lo siguiente:



Lurie, Completitud Conceptual

La demostración es larga, pero vale la pena anotar lo siguiente:

- Entender el comportamiento de los ultrafuntores (y sus variantes más débiles, a izquierda y derecha) es fundamental. Toda esta parte es el lenguaje que iniciamos hoy, y generaliza de manera natural otros teoremas de representación.

Lurie, Completitud Conceptual

La demostración es larga, pero vale la pena anotar lo siguiente:

- Entender el comportamiento de los ultrafuntores (y sus variantes más débiles, a izquierda y derecha) es fundamental. Toda esta parte es el lenguaje que iniciamos hoy, y generaliza de manera natural otros teoremas de representación.
- Un paso clave consiste en pasar de haces a “haces continuos”. Esto está anclado en ideas de Grothendieck y Deligne, pero a la vez (dice Lurie) se inspira en construcciones de Bhatt y Scholze en haces pro-étale.

Lurie, Completitud Conceptual

La demostración es larga, pero vale la pena anotar lo siguiente:

- Entender el comportamiento de los ultrafuntores (y sus variantes más débiles, a izquierda y derecha) es fundamental. Toda esta parte es el lenguaje que iniciamos hoy, y generaliza de manera natural otros teoremas de representación.
- Un paso clave consiste en pasar de haces a “haces continuos”. Esto está anclado en ideas de Grothendieck y Deligne, pero a la vez (dice Lurie) se inspira en construcciones de Bhatt y Scholze en haces pro-étale.
- Muchas categorías NO tienen productos pero SÍ tienen ultraproductos (y ultrafuntores). Las construcciones dependen de “envolventes categóricas” que permiten ubicar los ultraproductos. Ejemplo importante: categorías de modelos de teorías.

Lurie, Completitud Conceptual

La demostración es larga, pero vale la pena anotar lo siguiente:

- Entender el comportamiento de los ultrafuntores (y sus variantes más débiles, a izquierda y derecha) es fundamental. Toda esta parte es el lenguaje que iniciamos hoy, y generaliza de manera natural otros teoremas de representación.
- Un paso clave consiste en pasar de haces a “haces continuos”. Esto está anclado en ideas de Grothendieck y Deligne, pero a la vez (dice Lurie) se inspira en construcciones de Bhatt y Scholze en haces pro-étale.
- Muchas categorías NO tienen productos pero SÍ tienen ultraproductos (y ultrafuntores). Las construcciones dependen de “envolventes categóricas” que permiten ubicar los ultraproductos. Ejemplo importante: categorías de modelos de teorías.
- Lurie (conversación personal) dice buscar la “lógica natural de las ∞-categorías” a través de esto.

Los temas

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Stone

Reconstruir Sintaxis a partir de la Semántica: Makkai y Lurie

- Ultrafiltros, ultrafuntores
- Propiedades de ultrafiltros y ultrafuntores - en categorías
- Makkai / Lurie

Dualidades

Preguntas / mirada / curso

Salimos a tomar aire un momento. . . y a contemplar un poco el panorama que se formó entre la lógica y la topología. . .

Topología y reconstrucción

En el libro de Carlos Ruiz, la Topología se asocia primordialmente a la Convergencia. Es algo muy natural e importante, y los ultrafiltros juegan un papel fundamental.
La topología también es una manera de estudiar muchos otros temas (conexidad, arco-conexidad, compacidad, un largo etc.)

Topología y reconstrucción

En el libro de Carlos Ruiz, la Topología se asocia primordialmente a la Convergencia. Es algo muy natural e importante, y los ultrafiltros juegan un papel fundamental.

La topología también es una manera de estudiar muchos otros temas (conexidad, arco-conexidad, compacidad, un largo etc.) Pero tal vez es menos frecuente ver la topología como una herramienta de reconstrucción.

Los teoremas de Stone, Makkai, (Deligne) y Lurie SON teoremas de reconstrucción (de sintaxis a partir de semántica) donde la topología juega un papel fundamental.

El teorema de Gödel es consecuencia de los de Makkai y Deligne.

Otras situaciones / preguntas

- Reconstrucción de estructuras M. No funciona casi nunca. Pero si uno conoce la topología de $\mathrm{Aut}(M)$ (y M no es rígido), puede recuperar…la “clase de bi-intepretabilidad” de M y (si está de buenas) incluso $\mathrm{Th}(M)$. (El mundo de la SIP.) Usando esto, con Ghadernezhad hemos logrado demostrar que (por ejemplo) la pseudoexponencial compleja de Zilber se puede reconstruir a partir de sus automorfismos.

Otras situaciones / preguntas

- Reconstrucción de estructuras M. No funciona casi nunca. Pero si uno conoce la topología de $\mathrm{Aut}(M)$ (y M no es rígido), puede recuperar…la “clase de bi-intepretabilidad” de M y (si está de buenas) incluso $\mathrm{Th}(M)$. (El mundo de la SIP.) Usando esto, con Ghadernezhad hemos logrado demostrar que (por ejemplo) la pseudoexponencial compleja de Zilber se puede reconstruir a partir de sus automorfismos.
- Con Shelah recientemente hemos logrado reconstruir combinatoriamente (en lógica infinitaria) la sintaxis de una clase “elemental abstracta” (una clase donde lo primordial son fenómenos de reflexión). No tenemos prueba topológica.

Otras situaciones / preguntas

- Reconstrucción de estructuras M. No funciona casi nunca. Pero si uno conoce la topología de $\mathrm{Aut}(M)$ (y M no es rígido), puede recuperar... la "clase de bi-intepretabilidad" de M y (si está de buenas) incluso $\mathrm{Th}(M)$. (El mundo de la SIP.) Usando esto, con Ghadernezhad hemos logrado demostrar que (por ejemplo) la pseudoexponencial compleja de Zilber se puede reconstruir a partir de sus automorfismos.
- Con Shelah recientemente hemos logrado reconstruir combinatoriamente (en lógica infinitaria) la sintaxis de una clase "elemental abstracta" (una clase donde lo primordial son fenómenos de reflexión). No tenemos prueba topológica.
- (Segunda pregunta de ayer a Xavier Caicedo): la dualidad de Gelfand y su generalización deben corresponder a completitud de cierta "lógica". ¿Cuál lógica es?

¡Gracias a la gran constelación que se formó en torno a Carlos Ruiz!