Conjuntos externamente definibles y pares dependientes

Fabián Agudelo

Noviembre de 2010

Resumen

Se estudia la noción de conjunto externamente definible en el contexto de las teorías NIP y también el concepto de definicion *honesta*, y con esto dar una demostración alterna del teorema de expansión de Shelah. También se utiliza esta noción acompañada con la de fórmula acotada para establecer una condición necesaria para que un par sea dependiente. Por último se mostraran algunos ejemplos trabajados independiente por varios autores como son los pares densos, pares dóciles, etc., donde la dependencia del par resulta ser corolario de las proposiciones expuestas. Esto es un trabajo realizado por Artem Chernikov y Pierre Simon.

1. Introducción.

La propiedad de independencia (IP) fue introducida por Shelah por primera vez en 1971 en el artículo [She71] y en los últimos años el estudio de las teorías que no tienen la propiedad de independencia, llamadas dependientes o simplemente NIP, se ha convertido en un gran tópico en teoría de modelos. Tal como Shelah lo expresa en [She09] en respuesta a la pregunta del porqué estudiar esta línea de división entre las teorías estables y las dependientes: *"...there are some results on it indicating it is not unreasonable to hope there is a rich theory on it to be discovered"*.

Entre los muchos estudios relativos en teorías dependientes, nos enfocaremos en uno en particular: los pares dependientes. Para esto, si estamos en un lenguaje base L, la idea será expandirlo al lenguaje $L_{\mathbf{P}}$, obtenido a partir de L añadiendole un nuevo predicado unario $\mathbf{P}(x)$. Si M es una L-estructura y $A \subseteq M$, entonces vamos a identificar el par (M, A) como la $L_{\mathbf{P}}$-extensión de M colocando $\mathbf{P}(a) \Leftrightarrow a \in A$ y denotaremos $T_{\mathbf{P}} := \mathrm{Th}(M, A)$. El objetivo es dar una condición para que la teoría $T_{\mathbf{P}}$ sea dependiente cuando T lo sea. El tal caso diremos que (M, A) es un par dependiente.

En los últimos años este problema ha sido trabajado por varia gente. Por ejemplo, Casanovas y Ziegler en [CZ01] estudian los pares en un contexto estable, y tienen una condición necesaria para que un par sea estable. Por otro lado, Baldwin y Benedick en [BB00] trabajaron la estrutura extendida nombrando una sucesión de indiscernibles; en particular, allí ellos conjeturan que si T es NIP entonces T_{P} también tiene que ser NIP. Cabe anotar que el resultado principal de Chernikov y Simon aca mostrado, responde en gran parte a esta conjetura la cual resulta ser cierta adicionando una condición general de acotación. Otros trabajos como [BDO08] de Alexander Berenstein, Alf Dolich, y Alf Onshuus, [GH09] de Ayhan Günaydin y Philipp Hieronymi, entre otros, establecen la dependencia de pares específicos. El resultado presentado aqui generaliza la dependencia de todos estos pares al suponer hipótesis más débiles que minimalidad y control de clausura algebraica.

Los resultados presentados aquí estan basados principalmente en el artículo de Chernikov y Simon [CS10], pero con demostraciones y explicaciones un poco más extensas para lograr una buena comprensión a nivel de una primera lectura. Este documento esta dividido en cuatro partes. La primera (segunda sección) repasa nociones básicas de teorías NIP. En la tercera sección junto con la noción de conjunto externamene definible se introduce el concepto de definición honesta la cual es central para el resultado principal. Se ilustrará con un ejemplo, y con una modificación de este, el comportamiento de tener o no definiciones honestas. Como aplicación de esta sección se dará una demostración alterna, y tambień más sencilla de las conocidas, del teorema de expansión de Shelah. En la cuarta sección se introducen los conceptos de fórmula acotada y de estructura inducida, los cuales son el eje vital del teorema principal. Y por último el sección quinta, se presentaran algunos ejemplos de pares que resultan ser casos particulares del criterio presentado aquí.

2. Teorías NIP.

Definición 2.1. Para una fórmula $\varphi(x,y)$, se define el número de alternación de $\varphi(x,y)$, notado $\mathrm{alt}\,\varphi$, como el número maximal n tal que existe un elemento c y una sucesión indiscernible $(a_i)_{i\leq n}$, donde se satisface $\varphi(a_i,c)$ $\Leftrightarrow$ i es par.

Esto se puede entender como el número de cambios en el valor de verdad de una fórmula. En el siguiente ejemplo se ilustra un poco mejor esta noción.

Ejemplo 1. Si tomamos la fórmula $\varphi(x,y) := x = y$ veamos que $\mathrm{alt}\,\varphi = 3$. Sin perdida de generalidad siempre podemos tomar un elemento c y una sucesión indiscernible a_1, a_2 y a_3 tal que $\nvDash (a_1 = c)$, $\vDash (a_2 = c)$ y $\nvDash (a_3 = c)$; sin embargo, no podemos extender esta sucesión a un cuarto elemento a_4, puesto que si lo hicieramos tendriamos $\vDash (a_4 = c)$, así $a_2 = a_4$ y como los $(a_i)_{i\leq 4}$ son indiscernibles entonces todos los cuatro elementos serian iguales, lo cual es una contradicción. De la misma manera podemos generalizar este hecho para $\varphi(x; y_1, \ldots, y_n) := (x = y_1) \vee \cdots \vee (x = y_n)$ y decir que $\mathrm{alt}\,\varphi = 2n + 1$.

Definición 2.2. Sea T una teoría y $\varphi(x,y)$ una fórmula. Se dice que $\varphi(x,y)$ tiene la propiedad de independencia (IP) si existe una sucesión de indiscernibles $(a_i)_{i\in I}$ en algún modelo M de T y $b \in M$ tal que $M \vDash \varphi(a_i,b) \Leftrightarrow i$ es par. Se dice entonces que $\varphi(x,y)$ es una fórmula *dependiente* (NIP) si $\varphi(x,y)$ no tiene la propiedad de independencia.

De este modo, podemos caracterizar que una fórmula $\varphi(x,y)$ es dependiente si y sólo si $\mathrm{alt}(\varphi)$ es finito. Así decimos que una teoría T es NIP si toda fórmula en ella es NIP.

Definición 2.3. Un tipo $p(x)$ se dice establemente sumergido si cualquier subconjunto definible de $p(x)$ es definible con parámetros de $p(\mathfrak{C})$

Una consecuencia inmediata es si $p(x)$ es un tipo estable entonces $p(x)$ es establemente sumergido. De la misma manera podemos tener una propiedad análoga cambiando estable por dependiente.

Definición 2.4. Una fórmula $\varphi(x,y)$ es NIP sobre el tipo parcial $p(x)$ si no existe una sucesión indiscernible $(a_i)_{i<\omega}$ de realizaciones de p ni una tupla c tal que $\varphi(a_i,c)$ se satisface si y sólo si i es par (es decir, $\mathrm{alt}(\varphi)$ es finito).

3. Conjuntos externamente definibles.

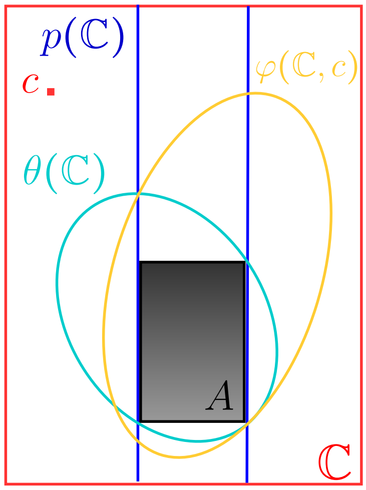
La siguiente lema es fundamental para el futuro desarrollo del tema. Para esto nos damos dos lenguajes $L \subseteq L'$, y trabajamos dentro de un modelo monstruo $\mathfrak{C}$ el cual es una L'–estructura. En particular, L' puede ser $L_{\mathbf{P}}$.

Lema 3.1. *Sea $p(x)$ un L'-tipo, $\varphi(x,y) \in L$ una fórmula* NIP *sobre $p(x)$, y $c \in \mathfrak{C}$. Entonces para cada $A \subseteq p(\mathfrak{C})$ existe una fórmula $\theta(x) \in L(p(\mathfrak{C}))$ tal que*

(1) $\theta(x) \cap A = \varphi(x,c) \cap A$

(2) $\theta(x) \to^{p(x)} \varphi(x,c)$

(3) $\varphi(x,c) \setminus \theta(x)$ *no contiene ningun L-tipo global A-invariante consistente con $p(x)$.*



Demostración. Sean $p(x)$ un L'-tipo, $\varphi(x, y) \in L$ una fórmula NIP sobre $p(x)$, $c \in \mathfrak{C}$ y $A \subseteq p(\mathfrak{C})$. Tomemos $q(x) \in S_L(\mathfrak{C})$ un tipo A-invariante y consistente con $\{\varphi(x, y)\} \cup p(x)$.
Supóngase que podemos escoger inductivamente $a_i, b_i \in p(\mathfrak{C})$ y $q_i \subseteq q$, para $i < \omega$ tal que:

(a) $q_i(x) = q(x) \mid_{Aa_{<i}b_{<i}}$

(b) $a_i \models q_i(x) \cup \{\varphi(x, c)\}$

(c) $b_i \models q_i(x) \cup \{\neg\varphi(x, c)\}$

Definamos la sucesión $(d_i)_{i<\omega}$ donde $d_i = a_i$ si i es par y $d_i = b_i$ en otro caso. Obsérvese que, por construcción, $(d_i)_{i<\omega}$ es una sucesión de Morley de q sobre A y además, como los d_i son realizaciones del L'-tipo $p(x)$, se tiene que $(d_i)_{i<\omega}$ un es L-indiscernible. Por otro lado,

$$\models \varphi(d_i, c) \text{ si y sólo si } i \text{ es par}$$

Lo cual contradice el hecho de que $\varphi(x, y) \in L$ sea una fórmula NIP sobre $p(x)$, entonces la construcción dada anteriormente debe parar (es decir, falla) en un paso finito i_0. Y además como el paso (a) dado anteriormente lo podemos garantizar por hipótesis, entonces necesariamente tenemos que $q_{i_0}(x) \to^{p(x)} \varphi(x, c)$, y por compacidad existe $\psi_q(x) \in q_{i_0}(x)$ (y en consecuencia $\psi_q(x) \in L(p(\mathfrak{C})))$ tal que $\psi_q(x) \to^{p(x)} \varphi(x, c)$. De esta manera, el conjunto $\{\psi_q(x)\}$ es un cubrimiento del espacio compacto de L-tipos globales invariantes sobre A y consistentes con $\{\varphi(x, y)\} \cup p(x)$; en particular, de todos los tipos realizados. Entonces sea $(\psi_j)_{j<n}$ un subcubrimiento finito, y tomando $\theta(x) = \bigvee_{j<n} \psi_j(x)$ finaliza la prueba. ✲

Corolario 3.2 (Inmersión estable débil)**.** *Sean* $\varphi(x, y)$ *una fórmula* NIP*, el par* (M, A) *y* $c \in M$*, entonces existe* $(M', A') \succcurlyeq (M, A)$ *y* $\theta(x) \in L(A')$ *tal que* $\varphi(A, c) = \theta(A)$ *y* $\theta(x) \to^{A'} \varphi(x, c)$.

Demostración. Nótese que $\varphi(x,y)$ sigue siendo NIP en cualquier expansión de la estructura, en particular en la L_P-estructura (M,A). Entonces aplicando el lema 3.1 con $L' = L_{\mathbf{P}}$ y $p(x) = \{\mathbf{P}(x)\}$ se tiene el resultado. ✲

Definición 3.1. Sea M un modelo, un conjunto *externamente definible de* M es un subconjunto X de M^k para algún k tal que existe una fórmula $\varphi(x,y)$ y $d \in \mathfrak{C}$ con $\varphi(M^k,d) = X$. Esta fórmula $\varphi(x,d)$ se denomina una definición de X.

Cabe notar que en el ambito estable, como todos los tipos son definibles, entonces cualquier conjunto externamente definible coincide con algún conjunto M-definible.

Definición 3.2. Sea $X \subseteq M^k$ un conjunto externamente definible. Entonces una *definición honesta* de X es una definición $\varphi(x,d)$ de X, con $d \in \mathfrak{C}$ tal que:

$$\text{para todo } \psi(x) \in L(M) \text{ con } X \subseteq \psi(M) \text{ tenemos } \mathfrak{C} \models (\forall x)(\varphi(x,d) \to \psi(x))$$

Para ilustrar esta noción vamos a considerar el siguiente ejemplo.

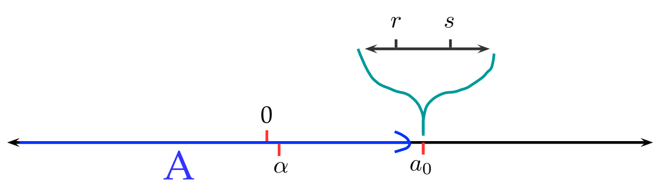
Ejemplo 2. Consideremos la estructura $M = (\mathbb{R},+,\times)$ y su extensión no estándar $\mathcal{R}$. Sea A un segmento inicial de $\mathcal{R}$, tal que exista un $\alpha > 0$ con $\alpha < b - a$ para todo $a \in A$ y $b \notin A$. Definamos el 1-tipo $p \in \mathrm{S}(\mathcal{R})$ por $(p \vdash x > a) \Leftrightarrow (a \in A)$. Sea $(a_i)_{i<\omega}$ una sucesión coheredera de p sobre $\mathcal{R}$; es decir, si $q \in \mathrm{S}(\mathfrak{C})$ es una extensión coheredera de p (finitamente satisfactible en $\mathcal{R}$) entonces $a_i \models q \restriction_{\mathcal{R}a_{<i}}$. Tomemos el conjunto $X = \{(x,y) \in M^2 \mid x \in A, y \notin A\}$, si $(m_1,m_2) \in M^2$ entonces

$$m_1 \in A \Leftrightarrow a_0 > m_1$$

$$m_2 \notin A \Leftrightarrow a_0 < m_2$$

así definiendo $\varphi(x,y;t) := (x < t \wedge y > t)$ se tiene que $\varphi(M,M;a_0) = X = \{(x,y) \in M^2 \mid x \in A, y \notin A\}$. De esta manera φ es una definición de X, pero veamos que no es una *definición honesta*. Para esto tomemos la fórmula $\psi(x,y) := (y - x > \alpha)$, entonces si tomamos $(m_1,m_2) \in X$ entonces $a_0 > m_1$ y $a_0 < m_2$, así $m_1 \in A$ y $m_2 \notin A$ entonces por el supuesto $\alpha < m_2 - m_1$ y de esta manera $X \subseteq \psi(M,M)$. Por otro lado, si tomamos elementos r,s en la mónada de a_0 con $r < a_0 < s$ tal que $s - r < \alpha$, claramente tenemos:

$$\mathcal{R} \models \varphi(r,s;a_o) \wedge \neg\psi(r,s)$$



y en consecuencia φ no es una definición honesta.

Por el contrario, si tomamos en la misma sucesión coheredera $(a_i)_{i<\omega}$ la fórmula $\phi(x,y;a_0,a_1) := x < a_0 \wedge y > a_1$, gracias a que en particular estos elementos a_0, a_1 son distintos entonces por medio de sus mónadas correspondientes siempre los podemos separar una distancia α, y así $\phi(M,M;a_0,a_1) = X = \{(x,y) \in M^2 \mid x \in A, y \notin A\}$ y $\mathcal{R} \models (\forall x,y)(\phi(x,y;a_0,a_1) \rightarrow \psi(x,y))$. Entonces ϕ es una definición honesta de X.

La siguiente proposición nos ilustra que en un contexto dependiente, la noción de *honestidad* no esta para nada alejada de la definiblilidad ordinaria.

Proposición 3.3. *Sea T NIP. Entonces todo conjunto externamente definible $X \subset M^k$ tiene una definición honesta.*

Demostración. Sean $M \prec N$ y $\varphi \in L(N)$ una definición de X, identificando a N como la $L_{\mathbf{P}}$-extensión de M (es decir, $\mathbf{P}(m) \Leftrightarrow m \in M$). Por el Corolario 3.2 existe un par $(N',M') \succcurlyeq (N,M)$ $|N|^+$-saturado en $L_{\mathbf{P}}$ y $\theta(x) \in L(M')$ tal que $\theta(x) \rightarrow^{M'} \varphi(x)$, es decir, $(N',M') \models (\forall x \in \mathbf{P})(\theta(x) \rightarrow \varphi(x))$. Ahora si $\psi(x) \in L(M)$ con $X = \varphi(M) \subseteq \psi(M)$ tenemos que $(N,M) \models (\forall x \in \mathbf{P})(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$, pero como $(N',M') \succcurlyeq (N,M)$ entonces $(N',M') \models (\forall x \in \mathbf{P})(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$. Combinando tenemos que $(N',M') \models (\forall x \in \mathbf{P})(\theta(x) \rightarrow \psi(x))$, y a raiz de que $M' \models T$ y $\theta(x), \psi(x) \in L(M')$ tenemos finalmente $M' \models (\forall x)(\theta(x) \rightarrow \psi(x))$. ✲

Proposición 3.4. *(T es NIP) Sea $X \subseteq M^k$ un conjunto externamente definible y f una función M-definible. Entonces $f(X)$ es un conjunto externamente definible.*

Demostración. Sea $X \subseteq M^k$ un conjunto definido externamente por $\varphi(x,d)$, por la proposición anterior, como T es NIP, esta definición debe ser honesta. El objetivo será mostrar que $\theta(y,d) := (\exists x)(\varphi(x,d) \wedge f(x) = y)$ es una definición de $f(X)$. En primer lugar como $\varphi(M^k,d) = X$ entonces $f(X) \subseteq \theta(M,d)$. Para demostrar la otra contenencia vamos a tomar un elemento $a \in M^k \setminus f(X)$ y vamos a definir la fórmula $\psi(x) := (f(x) \neq a)$, entonces de la manera como está definida la fórmula tenemos $X \subseteq \psi(M)$. Pero como la definición de X también es honesta:

$$\mathfrak{C} \models (\forall x)(\varphi(x,d) \rightarrow \psi(x))$$

o lo que es equivalente

$$\mathfrak{C} \models (\forall x)(\neg\varphi(x,d) \vee \psi(x))$$

entonces

$$\mathfrak{C} \models (\forall x)(\neg\varphi(x,d) \vee f(x) \neq a)$$

es decir

$$\mathfrak{C} \models \neg\theta(a,d)$$

y así $a \notin \theta(M,d)$. De esta manera se concluye que $\theta(M,d) \subseteq f(X)$. ✲

A continuación se realizara una aplicación de esta noción de conjuntos externamente definibles, para dar una demostración del importante teorema de expasión de Shelah. Este resultado fue publicado en principio por Shelah en [She04] (prueba no tan larga pero definitavente oscura). Después Anand Pillay en [Pil07] dió dos pruebas a este resultado; la primera usando herederos libres de cuantificadoes de tipos libres de cuantificadores, y la segunda usando coherederos libres de cuantificadores de tipos libres de cuantificadores.

Corolario 3.5 (Teorema de expansión de Shelah)**.** *Sea $M \models T$, T NIP y denotemos a M^{Sh} como la expansión de M donde añadimos un predicado para cada subconjunto externamente definible de M^k, para todo k. Entonces M^{Sh} tiene eliminación de cuantificadores en este lenguaje y es* NIP.

Demostración. Usando la proposición anterior, tomando f como una proyección, se concluye que M^{Sh} tiene eliminación de cuantificadores. Por otro lado, como T es NIP, entonces toda fórmula libre de cuantificadores es dependiente en la estructura M^{Sh}. Así M^{Sh} es dependiente. ☼

4. Pares dependientes.

De ahora en adelante se asumirá que T es NIP. Y vamos a considerar un par (M, A) con $M \models T$.

Definición 4.1. Decimos que A es un conjunto *pequeño* si existe un par (N, B) elementalmente equivalente a (M, A) tal que para todo subconjunto finito b de N se tiene que todo L-tipo sobre Bb es realizado en N.

Definición 4.2. Sea $\varphi(x, a)$ alguna fórmula de $L_{\mathbf{P}}(M)$, entonces una *definición honesta de $\varphi(x, a)$ sobre A* es una fórmula $\theta(x, c) \in L_{\mathbf{P}}$, con $c \in \mathbf{P}(\mathfrak{C})$, tal que $\theta(A, c) = \varphi(A, c)$ y $\models (\forall x \in \mathbf{P})(\theta(x, c) \to \varphi(x, a))$.

La siguiente es una observación que conecta la definición anterior de honestidad relativa a una fórmula en el par con el concepto dado en la sección anterior acerca de la definición honesta de un conjunto externamente definible.

Nota. Sea M es un modelo de T, y $\varphi(x, c) \in L(\mathbf{P}(\mathfrak{C}))$ es una fórmula dada con $X = \varphi(M, c)$. Si $\theta(x, c) \in L_{\mathbf{P}}$ $(c \in \mathbf{P}(\mathfrak{C}))$ es una definición honesta de $\varphi(x, c)$ sobre M en el par $(\mathfrak{C}, M)$ entonces $\theta(x, c)$ es efectivamente una definición honesta de X en el sentido de la definición 3.1. Para esto, como θ es definición de φ entonces $\theta(M, c) = \varphi(M, c) = X$. Ahora, si tomamos $\psi(x) \in L(M)$ con $X = \theta(M, c) \subseteq \psi(M)$ entonces como $M = \mathbf{P}(\mathfrak{C})$:

$$M \models \theta(x, c) \to \varphi(x, c)$$

pero también

$$M \models \varphi(x, c) \to \psi(x)$$

combinando
$$M \vDash \theta(x,c) \rightarrow \psi(x)$$
De esta manera como $M \vDash T$ y $M \prec \mathfrak{C}$ entonces
$$\mathfrak{C} \vDash \theta(x,c) \rightarrow \psi(x)$$

Reformulando la definición 2.4 acerca de la dependencia de una fórmula, decimos que una fórmula $\varphi(x,y) \in L_{\mathbf{P}}$ es NIP sobre $\mathbf{P}(x)$ si no existe una sucesión $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible $(ai)_{i<\omega}$ de puntos de $\mathbf{P}$ ni una tupla c tal que $\varphi(a_i,c) \Leftrightarrow i$ es par.

El siguiente hecho ya había sido expresado en la demostración de la proposición 3.4.

Lema 4.1. *Sea $\psi(xy,c) \in L_{\mathbf{P}}$ con una definición honesta $\gamma(xy,d) \in L_{\mathbf{P}}$ sobre A. Entonces $\theta(x,d) \coloneqq (\exists y \in \mathbf{P})\gamma(xy,d)$ es una definición honesta de $\varphi(x,c) \coloneqq (\exists y \in \mathbf{P})\psi(xy,c)$ sobre A.*

Demostración. En primer lugar veamos que es definición, para esto si $a \in \theta(A,d)$ entonces:
$$\begin{aligned} \vDash \theta(a,d) &\Leftrightarrow \vDash (\exists y \in \mathbf{P})\gamma(ay,d) \\ &\Leftrightarrow \vDash (\exists y \in \mathbf{P})\psi(ay,d) \\ &\Leftrightarrow \vDash \varphi(a,d) \end{aligned}$$
De esto se concluye $\theta(A,d) = \varphi(A,d)$. Por otro lado, por hipótesis:
$$\begin{aligned} &\vDash (\forall x \in \mathbf{P})(\forall y \in \mathbf{P})(\gamma(xy,d) \rightarrow \psi(xy,c)) \\ \Rightarrow &\vDash (\forall x \in \mathbf{P})((\exists y \in \mathbf{P})\gamma(xy,d) \rightarrow (\exists y \in \mathbf{P})\psi(xy,c)) \\ \Rightarrow &\vDash (\forall x \in \mathbf{P})(\theta(x,d) \rightarrow \varphi(x,c)) \end{aligned}$$
De esta manera $\theta(x,d)$ es una definición honesta de $\varphi(x,c)$ sobre A. ✲

Lema 4.2. *(1) Si $N \geq M$ son ambos saturados, con $|N| > |M|$, y $a,b \in M$ entonces $\mathrm{tp}_L(a) = \mathrm{tp}_L(b) \Leftrightarrow \mathrm{tp}_{L_{\mathbf{P}}}(a) = \mathrm{tp}_{L_{\mathbf{P}}}(b)$ en el sentido del par (N,M).*

(2) Sean $\varphi(x,y) \in L_{\mathbf{P}}$, (M,A) un par saturado, $(a_i)_{i<\omega} \in M^\omega$ una sucesión $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible, y $\theta(x,d_0)$ una definición honesta para $\varphi(x,a_0)$ sobre A (donde d_0 está en la parte $\mathbf{P}$ del modelo monstruo). Entonces se puede encontrar una sucesión $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible $(d_i)_{i<\omega} \in \mathbf{P}^\omega$ tal que $\theta(x,d_i)$ es una definición honesta para $\varphi(x,a_i)$ sobre A.

Demostración. (1) La implicación ($\Leftarrow$) es inmediata. Ahora, para la implicación ($\Rightarrow$) vamos a tomar el par (N,M) como una $L_{\mathbf{P}'}$-estructura, donde $\mathbf{P}'(x)$ es un nuevo predicado interpretado de la manera usual ($\mathbf{P}'(m) \Leftrightarrow m \in M$). Sea $\sigma \in \mathrm{Aut}_L(M)$ tal que $\sigma(a) = b$. Por la saturación de N este automorfismo se puede extender a $\sigma' \in \mathrm{Aut}_L(N)$, con $\sigma'(M) = M$. Pero esto quiere decir que $\sigma' \in \mathrm{Aut}_{L_{\mathbf{P}'}}(N)$, puesto que deja invariante a M (al predicado $\mathbf{P}$') y por hipótesis a las L-fórmulas.

(2) Sea $(N,B) \succeq (M,A)$ un par saturado. Consideremos la teoría del par de pares $\mathrm{Th}((N,B),(M,A))$ en el lenguaje $L_{\mathbf{P},\mathbf{P}'}$, con $\mathbf{P}(N) = B$, $\mathbf{P}(M) = A$ y $\mathbf{P}'(N) = M$. Sea $(a_i)_{i<\omega} \in M^\omega$ una sucesión $L_\mathbf{P}$-indiscernible, por el apartado (1) esta sucesión es $L_{\mathbf{P},\mathbf{P}'}$-indiscernible. Por otro lado, si $\theta(x,d_0)$ es una definición honesta de $\varphi(x,a_0)$ sobre A se puede expresar en la fórmula

$$(\exists d_0 \in \mathbf{P})(((\forall x \in \mathbf{P} \cap \mathbf{P}')\theta(x,d_0) \equiv \varphi(x,d_0)) \wedge ((\forall x \in \mathbf{P})\theta(x,d_0) \to \varphi(x,a_0)))$$

Por la saturación de (N,B) sobre (M,A) y la $L_{\mathbf{P},\mathbf{P}'}$-indiscernibilidad de $(a_i)_{i<\omega}$, podemos encontrar d_i tal que la anterior fórmula se cumpla para (a_i,d_i). Usando Ramsey, para cada conjunto finito $\Delta \subset L_\mathbf{P}$, podemos encontrar una subsucesión infinita $(a_i,d_i)_{i\in I}$, con $I \subseteq \omega$, que es Δ-indiscernible. Como por hipótesis los (a_i) son $L_\mathbf{P}$–indiscernibles entonces podemos escoger $I = \omega$. De esta manera, por compacidad toda la sucesión $(d_i)_{i<\omega}$ es $L_\mathbf{P}$-indiscernible y por construcción cumplen que cada $\theta(x,d_i)$ es una definición honesta para $\varphi(x,a_i)$ sobre A.

✲

A continuación vamos a introducir la noción de estrucura inducida, la cual será importante para el teorema principal. Para esto vamos a tomar una L-estrucuta M y A un subconjunto infinito de M, entonces la estructura *inducida* sobre A tiene un símbolo de relación para cada relación $\varnothing$-definible $\varphi(M) \cap A^n$ sobre A. Su lenguaje es:

$$L_{\text{ind}} = \{R_\varphi \mid \varphi = \varphi(x_1,\dots,x_n) \text{ una } L\text{-fórmula}\}$$

El conjunto A con su L_{ind}-estructura se nota A_{ind}. En particular, si $M = \mathfrak{C}$, A es subconjunto pequeño de $\mathfrak{C}$ y Ω un conjunto de fórmulas, se denota igualmente $A_{\text{ind}(\Omega)}$ como la estructura con dominio A y una relación adicional para cada conjunto de la forma $A^n \cap \varphi(\bar{x})$, donde $\varphi(\bar{x}) \in \Omega$.

Lema 4.3. *Sea $(M,A) \models T_\mathbf{P}$ un par saturado y supongamos que $A_{\text{ind}(L_\mathbf{P})}$ es* NIP. *Sean $(a_i)_{i<\omega} \in M^\omega$ una sucesión $L_\mathbf{P}$-indiscernible, $(b_{2i})_{i<\omega} \in A^\omega$ y $\Delta((x_i)_{i<n};(y_i)_{i<n}) \in L_\mathbf{P}$ tal que:*

- *$\Delta((x_i)_{i<n};(a_i)_{i<n}) \in L_\mathbf{P}$ tiene una definición honesta sobre A por una $L_\mathbf{P}$-fórmula.*
- *$\models \Delta(b_{2i_0},\dots,b_{2i_n};a_{2i_0},\dots,a_{2i_n})$ para todo $i_0,\dots,i_n < \omega$.*

Entonces existen $i_0,\dots,i_n \in \omega$ con $i_j \equiv j(\mod 2)$ y $(b_{i_j})_{j\equiv 1(\mod 2),<n} \in \mathbf{P}$ tal que

$$\models \Delta(b_{i_0},\dots,b_{i_n};a_{i_0},\dots,a_{i_n})$$

Demostración. Supongamos por simplicidad que n es par. Definamos la fórmula

$$\Delta'((x_{2i})_{2i<n};(y_i)_{i<n}) := \exists x_1,x_3,\dots,x_{n-1} \in \mathbf{P}\Delta((x_i)_{i<n};(y_i)_{i<n})$$

Como $\Delta((x_i)_{i<n};(a_i)_{i<n}) \in L_{\mathbf{P}}$ tiene una definición honesta sobre A por una $L_{\mathbf{P}}$-fórmula, entonces por el lema 4.1 la fórmula $\Delta'((x_{2i})_{2i<n};(a_i)_{i<n})$ también tiene una definición honesta sobre A por una $L_{\mathbf{P}}$-fórmula, llamemosla $\theta((x_{2i})_{2i<n},d)$ con $d \in \mathbf{P}(\mathfrak{C})$. Como $A_{\mathrm{ind}(L_{\mathbf{P}})}$ es NIP, entonces $\mathrm{alt}(\theta)$ es finito, digamos N.

Escojamos $i_0,i_2,\ldots,i_{n-2},i_n \in \omega$ (números pares) tal que $i_{j+2}-i_j > N$ y consideremos la sucesión $(\bar{a}_i)_{i<N}$ con $\bar{a}_i = a_{i_0}a_{i_0+i}a_{i_2}a_{i_2+i}\ldots a_{i_{n-2}}a_{i_{n-2}+i}a_n$. Esta sucesión es $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible. Por el lema 4.2(2) podemos encontrar una sucesión $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible $(d_i)_{i<N}$, con $d_i \in \mathbf{P}$, tal que $\theta((x_{2i})_{2i<n},d_i)$ es una definición honesta para $\Delta'((x_{2i})_{2i<n},\bar{a}_i)$. Por hipótesis para todo $i_0,\ldots,i_n < \omega$ tenemos

$$\vDash \Delta(b_{2i_0},\ldots,b_{2i_n};a_{2i_0},\ldots,a_{2i_n})$$

en particular para los $i_0,i_2,\ldots,i_{n-2},i_n \in \omega$ escogidos

$$\vDash \Delta(b_{2i_0},b_{2i_2}\ldots,b_{2i_{n-2}},b_{2i_n};a_{2i_0},a_{2i_2},\ldots,a_{2i_{n-2}},a_{2i_n})$$

pero como esos $i_0,i_2,\ldots,i_{n-2},i_n \in \omega$ escogidos también son pares entonces por hipótesis

$$\vDash \Delta(b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n};a_{i_0},a_{i_2},\ldots,a_{i_{n-2}},a_{i_n})$$

así por definición de Δ'

$$\vDash \Delta'(b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n};a_{i_0},a_{i_2},\ldots,a_{i_{n-2}},a_{i_n})$$

$$\vDash \Delta'(b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n};d_i) \qquad \text{para todo par } i<N$$

$$\vDash \theta(b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n};d_i) \qquad \text{para todo par } i<N$$

Pero como dentro del predicado $\mathbf{P}$ tenemos $\mathrm{alt}(\theta)=N$ y además los $b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n} \in \mathbf{P}^{\frac{n}{2}}$, entonces lo anterior debe tenerse para algún número impar $i'<N$, es decir:

$$\vDash \theta(b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n};d_{i'})$$

así por la honestidad de la definición de Δ' tenemos que:

$$\vDash \Delta'(b_{i_0},b_{i_2}\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_n};a_{i_0}a_{i_0+i'}a_{i_2}a_{i_2+i'}\ldots a_{i_{n-2}}a_{i_{n-2}+i'}a_n)$$

entonces de la manera como definimos Δ' existen $(b_{i_{2j}+i'})_{2j<n} \in \mathbf{P}^{\frac{n}{2}}$ tal que:

$$\vDash \Delta(b_{i_0},b_{i_0+i'},\ldots,b_{i_{n-2}},b_{i_{n-2}+i'},b_{i_{n-2}},b_{i_n+i'},b_{i_n};a_{i_0}a_{i_0+i'}\ldots a_{i_{n-2}}a_{i_{n-2}+i'}a_n)$$

tal como se quería. ☼

A continuación se introducira la noción de fórmula acotada, la cual será un concepto primordial para la formulación de teorema principal.

Definición 4.3. Decimos que una $L_{\mathbf{P}}$-fórmula es *acotada* si es de la forma

$$(Q_0 y_0 \in \mathbf{P}) \dots (Q_n y_n \in \mathbf{P}) \varphi(x, y_0, \dots, y_n)$$

donde $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y $\varphi(x, \bar{y})$ es una L-fórmula. Al conjunto de todas las fórmulas acotadas lo denotamos como $L_{\mathbf{P}}^{bdd}$. Y decimos que $T_{\mathbf{P}}$ es acotada si toda fórmula es (módulo equivalencia) una fórmula acotada.

En teorías estables existe un resultado que brinda una condición para que en un par $(M, A) \vDash T_{\mathbf{P}}$ toda fórmula sea acotada. Esta utiliza la propiedad del cubrimiento finito descrita a continuación. Para esto, si $M \vDash T$ entonces se dice que una fórmula $\varphi(x, y)$ tiene la *propiedad del cubrimiento finito* (f.c.p) en M si para todo número natural k existe un conjunto de $\{\varphi(x, m_i) \in i \in I\}$ la cual es k-consistente pero inconsistente en M. M se dice que tiene la f.p.c si alguna fórmula tiene la f.p.c en M.

Hecho 4.4. *Sea A un subconjunto pequeño de M. Si M es estable y no tiene la propiedad del cubrimiento finito sobre A entonces en el par (M, A) toda $L_{\mathbf{P}}$-fórmula es acotada; es decir, $T_{\mathbf{P}}$ es acotada.*

Ahora estamos preparados para presentar el teorema principal de este documento.

Teorema 4.5. *Sea T* NIP *y $T_{\mathbf{P}}$* NIP *sobre* $\mathbf{P}$. *Entonces toda fórmula acotada es* NIP.

Demostración. Como las fórmulas NIP se preservan bajo operaciones booleanas, la prueba se hará introduciendo cuantificadores existenciales acotados. Razonando por contradicción vamos a suponer que $\psi(xz, y) \in L_{\mathbf{P}}^{bdd}$ es NIP y que en cambio $\varphi(x, y) \coloneqq (\exists z \in \mathbf{P}) \psi(xz, y)$ tiene la IP. Entonces existe un par saturado $(M, A) \vDash T_{\mathbf{P}}$ que atestigua la IP para φ; es decir, existe una sucesión $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible $(a_i)_{i<\omega} \in M^\omega$ y $c \in M$ tal que $\vDash \varphi(a_i, c)$ si y sólo si $i \equiv 0 \pmod 2$. Así podemos garantizar la existencia de los elementos $b_{2i} \in A$ tal que la sucesión $(a_{2i} b_{2i})$ es $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible y se satisface $\vDash \psi(a_{2i} b_{2i}, c)$.

Como $T_{\mathbf{P}}$ es NIP sobre $\mathbf{P}$ entonces tenemos dos cosas: primero la estructura $A_{\mathrm{ind}(L_{\mathbf{P}})}$ es NIP; y segundo, por un resultado anterior toda $L_{\mathbf{P}}$-fórmula tiene una definición honesta sobre A. Ahora, para una fórmula $\delta(xy) \in L_{\mathbf{P}}$ se considera la $L_{\mathbf{P}}$-fórmula $\Delta_\delta((x_i)_{i<n}; (y_i)_{i<n})$ que exprese que la sucesión $(x_i y_i)_{i<n}$ sea δ-indiscernible (es decir, que todos los elementos de la sucesión $(x_i y_i)$ tengan el mismo δ-tipo). Resumiendo tenemos que:

- $(M, A) \vDash T_{\mathbf{P}}$.
- $A_{\mathrm{ind}(L_{\mathbf{P}})}$ es NIP.
- $\Delta_\delta((x_i)_{i<n}; (y_i)_{i<n}) \in L_{\mathbf{P}}$ tiene una definición honesta sobre A.
- Existe una sucesión $L_{\mathbf{P}}$-indiscernible $(a_i)_{i<\omega} \in M^\omega$ y elementos $b_{2i} \in A$ tal que $\vDash \Delta_\delta((a_{2i})_{2i<n}, (b_{2i})_{2i<n})$ para toda $\delta \in L_{\mathbf{P}}$.

Entonces por el lema 4.3 obtenemos $i_o, \ldots, i_n \in \omega$ con $i_j \equiv j (\mod 2)$ y $(b_{i_j})_{j\equiv 1(\mod 2), <n} \in \mathbf{P}$ tal que $\vDash \Delta_\delta((a_{i_k})_{k<n}, (b_{i_k})_{k<n})$ (es decir, $(a_{i_k} b_{i_k})_{k<n}$ son δ-indiscernibles).

Como para todo $i < \omega$

$$\vDash \neg(\exists z \in \mathbf{P})\psi(a_{2i+1}z, c)$$

Entonces

$$\vDash \psi(a_{i_k} b_{i_k}, c) \Leftrightarrow k \text{ es par}$$

De esta manera tomando n y δ arbitrariamente "grande" se contradice la dependencia de la fórmula $\psi(xz, y)$. ☼

Corolario 4.6. *Sean T NIP, $A_{\mathrm{ind}(L)}$ NIP y $T_\mathbf{P}$ acotada. Entonces $T_\mathbf{P}$ es NIP.*

Demostración. Como $A_{ind(L_\mathbf{P}^{bdd})}$ es interpretable en $A_{ind(L)}$ y $A_{ind(L)}$ es NIP entonces $A_{ind(L_\mathbf{P}^{bdd})}$ es NIP, entonces toda $L_\mathbf{P}^{bdd}$-fórmula es NIP sobre $\mathbf{P}$; pero como $T_\mathbf{P}$ es acotada entonces $T_\mathbf{P}$ es NIP sobre $\mathbf{P}$. Así aplicando el teorema anterior tenemos que $T_\mathbf{P}$ es NIP. ☼

Corolario 4.7. *Sean T NIP, (M, N) un par de modelos de T con $N \prec M$. Si $T_\mathbf{P}$ es acotada, entonces $T_\mathbf{P}$ es NIP.*

Demostración. Por el corolario 3.5 (Teorema de expansión de Shelah) entonces $N_{\mathrm{ind}(L)}$ es dependiente, así usando el anterior corolario $T_\mathbf{P}$ es NIP. ☼

5. Ejemplos.

En esta parte se nombraran ejemplos de algunos pares donde se puede aplicar el teorema de la sección anterior para que el par sea dependiente.

5.1. Pares densos generalizados.

Uno de los teoremas principales en [BDO08], el cual es usado después para demostrar que la teoría de pares adorables es dependiente, es el siguiente:

Hecho 5.1. *[BDO08, Teorema 2.7] Sea T una teoría dependiente en el lenguaje L y así acl satisface la propiedad de intercambio sobre los modelos de T. Sea $M \vDash T$ y supóngase que $A \subseteq M$ es inocuo y $\mathrm{acl}(A) = A$. Entonces la teoría del par (M, A) es dependiente.*

Este resultado es una generalización del corolario 4.6 ya que la hipótesis de que acl sea una pregeometría y A sea inocuo implica que todas las fórmulas son acotadas. Particularmente la noción de conjunto inocuo dice exactamente que el $L_\mathbf{P}$-tipo de una tupla a está determinado por su L-tipo incluyendo la información de que $\forall b \in \mathrm{acl}(a)$ se tenga $b \in \mathbf{P}$ ó $b \notin \mathbf{P}$, cosa que puede ser expresada por fórmulas acotadas.

5.2. Campo real con puntos racionales de una curva elíptica.

El desarrollo de esta teoría fue hecho por Ayhan Günaydin y Philipp Hieronymi en [GH09], y básicamente es el estudio de la expansión del campo real por el conjunto de una curva elíptica de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$, pero tomando sólo sus puntos racionales. Mas exactamente:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x^3 + ax + b, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Donde la condición del discriminante distinto de cero, $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, nos garantiza una curva sin picos y sin intersecciones. Entonces vamos a tomar el predicado $\mathbf{P}$ nombrando a $\mathcal{C}$. Ellos es este artículo demuestran particularmente los siguientes resultados:

Hecho 5.2. *(1)* $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ *es acotada (consecuencia de [GH09, Teorema 1.1]).*

(2) $A_{\mathrm{ind}(L_{\mathbf{P}})}$ *es* NIP *(consecuencia de [GH09, Proposición 3.10]).*

De esta manera por el colorario 4.6 se concluye que el par $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ es dependiente.

5.3. Pares dóciles.

Para ilustrar estos pares vamos a establecer una teoría T o-minimal que extiende la teoría de los campos real cerrados. Decimos que el par de modelos de T (N, M) es *dócil* si $M \prec N$ y $\forall a \in N$, el cual pertenece a la envolvente convexa de M (es decir el mínimo convexo que contiene a M), existe $st(a) \in M$ tal que $|a - st(a)| < b$, $\forall b \in M^{>0}$. En el artículo [vdDL95] se muestra que $\mathrm{Th}(N, M)$ es acotada así por el corolario 4.7 tenemos que $\mathrm{Th}(N, M)$ es dependiente.

5.4. Nombrando una sucesión indiscernible.

En [BB00] se prueba lo siguiente.

Hecho 5.3. *Asumamos* T NIP. *Sea* $I \subset M$*, con* $M \models T$*, una sucesión indiscernible indexada por un orden linal completo y denso, pequeño en* M *(es decir, todo tipo* $p \in \mathrm{S}(I)$ *es realizado en* M*). Entonces*

(1) $\mathrm{Th}(M, I)$ *es acotada.*

(2) $(M, I) \equiv (H, J)$ *si y sólo si* $\mathrm{EM}(I) = \mathrm{EM}(J)$*.*

(3) La estrucura $L_{\mathbf{P}}$*-inducida sobre* $\mathbf{P}$ *es solamente el orden lineal.*

El siguiente hecho, el cual es consecuencia directa del corolario 4.6, responde entonces a la conjetura 9.1 hecha en [BB00].

Corolario 5.4. *Sea* (M, I) *un par como el descrito arriba, obtenido a partir de nombrar una sucesión indiscernible completa, densa y pequeña. Entonces* $T_{\mathbf{P}}$ *es* NIP.

Referencias.

[BB00] John Baldwin y Michael Benedikt. *Stability theory, permutations o indiscerrnibles, and embedded finite models.* Transactions of the American Mathematical Society, 352(11):4937-4969, 2000.

[BDO08] Alexander Berenstein, Alf Dolich y Alf Onshuus. *The independence property in generalized dense pairs of structures.* Preprint, 2008.

[CS10] Artim Chernikov y Pierre Simon. *Externally definable sets and dependent pairs.* Preprint, 2010.

[CZ01] Enrique Casanovas and Martin Ziegler. *Stable theories with a new preicate*. Journal of symbolic logic, 66(3):1127Ű1140, 09 2001.

[GH09] Ayhan Günaydin y Philipp Hieronyni. *The real field with the rationals points of an elliptic curve.* arXiv:0906.0528v5, 2009.

[Pil07] Anand Pillay. *On externally definable sets and a theorem of Shelah*. Felgner Festchrift,Studies in Logic, College Publications, 2007.

[She71] Saharon Shelah. *Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory*. Ann. Math. Logic, 3(3):271Ű362, 1971.

[She04] Saharon Shelah. *Dependent first order theories, continued.* arXiv:math/0406440v1, 2004.

[She09] Saharon Shelah. *Dependent theories and the generic pair conjecture*, Communications in Contemporary Mathematics, submitted. math.LO/0702292.

[vdDL95] Lou van den Dries y Adam H. Luwenberg. *T-convexity and tame pairs.* Journal of Symbolic Logic, 1995.