# Lanzamiento de un club a un cardinal desdoblable

Franqui Cárdenas[1]
Director: Andrés Villaveces

Universidad Nacional de Colombia

July 5, 2002

[1]Apoyado parcialmente por la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia

# Contenido

# Capítulo 1

# Introducción

Debido a la incompletitud de la teoría de conjuntos ZFC es necesario buscar nuevos axiomas adicionales a ZFC que permitan decidir los problemas más importantes en matemáticas. Por ejemplo la hipótesis del continuo (CH) es indecidible en ZFC; hay modelos tanto de CH($L$) y de la negación de CH. Un primer intento sin éxito (como los ordenes parciales que fuerzan CH o su negación son pequeños, por la proposición 10.15 en [11] forzar con estos ordenes parciales no afectan a los cardinales grandes, en el presente trabajo probamos la versión de tal proposición para cardinales desdoblables) para poder decidir CH fue suponer la existencia de cardinales grandes (este camino fue propuesto por Gödel en 1946), conjuntos infinitos con propiedades de regularidad (como existencia de medidas totales, árboles de König, propiedades combinatorias etc.). Los cardinales desdoblables [1], introducidos por Andrés Villaveces en su tesis de doctorado, están en esta categoría. El interés de tales cardinales radica en su relación estrecha con la existencia de cadenas en una estructura modelo-teórica. Más precisamente, si $\kappa$ es desdoblable entonces la estructura $(\mathcal{E}_{(V_\kappa,\in,A)}, \prec)$, con $A \subseteq \kappa$, de todas las extensiones elementales no triviales de $(V_\kappa, \in, A)$ ordenado por la relación $\prec$, tiene $\prec$-cadenas de cualquier altura (de aquí derivan su nombre estos cardinales). Para cardinales débilmente compactos por un teorema de Keisler (en [12]) $\mathcal{E}_{(V_\kappa,\in,A)} \neq \emptyset$. En este sentido los cardinales desdoblables generalizan los cardinales débilmente compactos; de hecho todo desdoblable es débilmente compacto. También los cardinales desdoblables relativizan a $L$, es decir todavía no son cardinales muy grandes en este sentido (a partir de $0^\sharp$ no relativizan por ejemplo los Ramsey y los

[1]en inglés *unfoldable cardinals* como aparece en [17].

medibles no pueden existir en $L$). Todo cardinal de Ramsey es ya un cardinal desdoblable. Si $V = L$ y $\kappa$ es un cardinal desdoblable, entonces para todo $n$ y $m$, $\kappa$ es $\Pi^n_m$ indescriptible [17]. A nivel de consistencia es suficiente un cardinal sutil para obtener un modelo de ZFC con un cardinal desdoblable. Acerca de GCH en cardinales desdoblables Villaveces y Hamkins han obtenido varios resultados de consistencia relativa. Por ejemplo, es suficiente tener un modelo de un cardinal inefable para conseguir otro modelo con un cardinal desdoblable que satisfaga GCH [17]. Para que falle GCH en cardinales desdoblables basta con un cardinal sutil [17]. En [6] Hamkins consigue este mismo resultado módulo la existencia misma de un cardinal desdoblable (el problema era interesante, pues por ejemplo para violar GCH en cardinales medibles se requiere una hipótesis más fuerte que la de medible ver [1]).

Los cardinales fuertemente desdoblables y desdoblables largos[2], introducidos también en [17] son versiones ligeramente más fuertes en propiedades que los cardinales desdoblables. Los cardinales fuertemente desdoblables tienen extensiones elementales anchas, lo cual permite un cálculo correcto de la verdad hasta niveles realtivamente altos. Si $V = L$ los cardinales desdoblables coinciden con los cardinales fuertemente desdoblables. Así las dos nociones son equiconsistentes son equiconsistentes. Los desdoblables largos permiten de una vez $\prec$-cadenas de tipo $ON$, estos son consistentes módulo un cardinal inefable. Según Welch en [18] los desdoblables largos están al principio de la jerarquía de modelos internos y relacionados con los axiomas de determinación.

En el presente trabajo mostramos que hay diferencias a nivel de propiedades posibles entre las versiones de cardinales desdoblables no fuertemente desdoblables y fuertemente desdoblables, además de algunos resultados inmediatos acerca de reflexión y un principio combinatorio (la versión del principio de Jensen $\diamondsuit$ para cardinales fuertemente desdoblables). Más específicamente, el resultado principal es el siguiente: dado $\kappa$ cardinal desdoblable, es posible agregar $C$ un club en $\kappa$ completamente contenido en el conjunto de cardinales **no** débilmente compactos sin destruir la desdoblabilidad de $\kappa$ (por ejemplo si $\kappa$ es el primer desdoblable en $L$ entonces no se preserva la desdoblabilidad al agregar GCH en los cardinales desdoblables).

El plan que seguimos fue el siguiente: primero revisamos cuidadosamente la bibliografía que existía hasta ese momento acerca de los cardinales desdoblables. Luego precisé qué resultados podrían aplicarse a los cardinales

[2]en inglés *strongly unfoldable* y *long unfoldable* como aparece en [17] respectivamente.

desdoblables (preguntas clásicas), por ejemplo si se sabe que todo cardinal $\kappa$ desdoblable también es un cardinal débilmente compacto, sería el $\kappa$-ésimo débilmente compacto?. La respuesta es afirmativa para cardinales fuertemente desdoblables. Aún más, hay un conjunto estacionario de débilmente compactos debajo de un cardinal fuertemente desdoblable. Por otro lado, dado que la definición de los cardinales desdoblables está en términos de inmersiones elementales (típico de los cardinales grandes a partir de los cardinales medibles), era natural esperar que algunos resultados para cardinales grandes podrían "verificarse" en el caso de los cardinales desdoblables (o fuertemente desdoblables).

Foreman [3], Hamkins [6], Leshem y Villaveces [16] obtuvieron resultados con respecto a la falla de GCH en cardinales desdoblables, pero el que más me llamó la atención fue un resultado de Hamkins. Villaveces había mostrado que si un cardinal desdoblable $\kappa$ se preservaba mediante $Add(\kappa, 1)$ (forcing que agrega un subconjunto a $\kappa$), entonces se preservaba mediante $Add(\kappa, \theta)$ para $\theta \geq \kappa$. El resultado de Hamkins consiste en mostrar la indestructibilidad de desdoblabilidad bajo el forcing $Add(\kappa, 1)$. Para lograr la indestructibilidad usa una preparación previa [5]. Esta preparación resulta ser un caso particular de una preparación más general (la *preparación lotería*) para obtener resultados de indestructibilidad bajo ciertos forcings para cardinales grandes como fuertemente compactos y supercompactos (Laver [15] consigue uno de los primeros resultados en esta dirección para cardinales supercompactos). El mérito de Hamkins es haber sistematizado en [5] un procedimiento que se había usado varias veces en resultados de Laver y Silver de los años 60. Esto me condujo a su vez a estudiar tal método. En [5] el resultado que más me llamo la atención fue el siguiente:

**Teorema 1.1 (Hamkins)** *Sea $\kappa$ cardinal fuertemente compacto, entonces existe una extensión mediante forcing en donde se satisface la existencia de un club $C$ en $\kappa$ completamente contenido en $S$, donde*

$$S = \{\alpha < \kappa : \alpha \ \ \textit{no es medible} \ \}.$$

Es decir el conjunto de medibles bajo un fuertemente compacto es pequeño (no estacionario) en algún modelo. ¿Por qué me llamó tanto la atención? Primero porque ya tenía el resultado análogo contrario para cardinales fuertemente desdoblables (cambiando fuertemente compactos por desdoblable fuertes y medibles por débilmente compactos obtenemos que el conjunto de débilmente compactos debajo un cardinal fuertemente desdoblable es grande (estacionario)). ¿Qué tal si cambiábamos compacidad fuerte por desdoblabilidad no fuerte y medibilidad por compacidad débil?

Otra razón que nos indujo a pensar en la posibilidad del resultado de la tesis es la siguiente: las primeras definiciones en términos de inmersiones elementales conducen a cardinales por lo menos medibles (fuertes, fuertemente compactos, huge, supercompactos por mencionar algunos), es más todos tienen una definición en términos de ultrafiltros sobre determinados conjuntos; sin embargo, ninguno de ellos relativiza a $L$. En los ultimos años han aparecido versiones de grandes cardinales que se asemejan a estos grandes cardinales pero que sí relativizan a $L$, y en este sentido no son muy grandes. Entre ellos estan los indescriptibles introducidos por Hauser en [8], los desdoblables, los desdoblables fuertes y los débilmente compactos que ya existían antes (por ejemplo los débilmente compactos vendrían a ser débiles de medibles, los indescriptibles y desdoblables versiones débiles de hipermedibles o fuertes). Entonces es natural pensar en versiones de resultados para estos últimos cardinales no tan grandes entre los grandes cardinales. Uno de ellos es éste.

En 1.1 es fundamental el hecho de que el concepto de $\theta$-supercompacidad se pueda caracterizar en términos de medidas sobre un cierto conjunto $P_\kappa(\theta)$. Esto facilita el trabajo para preservar esta noción vía forcing. Para la $\theta$-desdoblabilidad no se tiene algo por el estilo aún. Esto hace que este trabajo sea un aporte original con respecto a [5], pues las técnicas difieren esencialmente en este punto.

| | |
|---|---|
| $\kappa$ medible | $\kappa$ débil. compacto |
| $\kappa$ fuerte. desdoblable | $\kappa$ fuerte |
| $\kappa$ desdoblable | $\kappa$ hipermedible |

Los resultados secundarios son aplicaciones inmediatas de la propiedad de los cardinales desdoblables a conjuntos que son grandes, como conjuntos no acotados, estacionarios, clubs etc, bajo un cardinal desdoblable. El resultado combinatorio es $\diamondsuit_\kappa$ para $\kappa$ cardinal fuertemente desdoblable. Esta es la generalización del principio combinatorio $\diamondsuit$ (diamante o principio de Jensen). Es un resultado que se ha verificado en este caso por su importancia en la teoría de conjuntos. $\diamondsuit$ por sí solo es relevante por varias razones: en primer lugar implica la existencia de árboles de Suslin, además tiene muchas aplicaciones a la topología, álgebra y es una forma más fuerte de CH. Aún no se ha podido verificar (o refutar) $\diamondsuit_\kappa$ para $\kappa$ cardinal débilmente compacto, pero sí para medibles. En este sentido tener $\diamondsuit_\kappa$ para cardinales fuertemente desdoblables es un pequeño aporte en la dirección del gran problema abierto sobre $\diamondsuit_\kappa$ en débilmente compactos.

| | |
|---|---|
| $\kappa$ medible | $\diamondsuit_\kappa$ |
| $\kappa$ fuerte. desdoblable | $\diamondsuit_\kappa$ |
| $\kappa$ débil. compacto | ? |

Para cerrar, mostramos una versión del teorema de Silver de preservación de cardinales desdoblables bajo forcings pequeños. Este resultado junto con el lema de Gap forcing nos garantiza que en el modelo final no se ha agregado ningún débilmente compacto.

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1 Definiciones Básicas

En este capítulo consideramos las definiciones básicas que usamos a lo largo de todo este trabajo y algunos resultados básicos. Algunos de estos resultados básicos son del folklore matemático (resultados relativamente sencillos usados por otros autores sin probar) demostrados aqui por claridad del trabajo. Específicamente los resultados sobresalientes son los lemas 2.50 y 2.51. Mediante $ZF^-$ denotamos "suficiente teoría de conjuntos" (axiomas de ZF), la que necesitemos para probar todas los resultados de esta teoría.

**Definición 2.1** *Sea $\kappa$ un cardinal, y sea $C \subseteq \kappa$. $C$ es un* ***club*** *en $\kappa$ si es cerrado (para toda sucesión creciente contenida en $C$ no cofinal en $\kappa$ el supremo sigue estando en $C$) y no acotado en $\kappa$.*

**Definición 2.2** *Sea $\kappa$ un cardinal y $S \subseteq \kappa$, $S$ es* ***estacionario*** *en $\kappa$ si para todo club $C$ de $\kappa$, $S \cap C \neq \emptyset$.*

### 2.1.1 El principio de Jensen

El siguiente es un principio combinatorio debido a Jensen, más conocido como diamante ($\diamondsuit$).

**Definición 2.3** *($\diamondsuit$) Hay una sucesión de conjuntos $S_\alpha \subseteq \alpha$, $\alpha < \omega_1$ tales que para cualquier $X \subseteq \omega_1$ el conjunto*

$$\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

*es estacionario en $\omega_1$.*

En general para cada $\kappa$ cardinal regular, tenemos versiones del mismo principio:

**Definición 2.4** *($\diamondsuit_\kappa$) Hay una sucesión de conjuntos $S_\alpha \subseteq \alpha$, $\alpha < \kappa$ tales que para cualquier $X \subseteq \kappa$ el conjunto*

$$\{\alpha < \kappa : X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

*es estacionario en $\kappa$.*

**Definición 2.5** *SCH, la hipótesis de cardinales singulares es la afirmación*

$$\forall \kappa \text{ singular } (\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^+ + 2^{cf(\kappa)}).$$

*La hipótesis generalizada del continuo (GCH) es la afirmación*

$$\forall \kappa (2^\kappa = \kappa^+).$$

No es difícil ver que GCH implica SCH.

**Definición 2.6** *Sea $\mathcal{B}$ submodelo de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$* ***es subestructura elemental de*** *$\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$) si y sólo si para toda toda formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y todo $a_1 \ldots, a_n \in B$*

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

El siguiente criterio para subestructuras elementales en un momento dado nos será de mucha utilidad pues tan solo exige conocer la verdad en el modelo grande:

**Teorema 2.7 (Test de Tarski-Vaught)** *$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si y sólo si $A \subseteq B$ y para toda fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y $a_1, \ldots a_n \in A$ si existe $b \in B$ tal que*

$$\mathcal{B} \models \varphi[b, a_1, \ldots a_n]$$

*entonces existe $a \in A$ tal que*

$$\mathcal{B} \models \varphi[a, a_1, \ldots a_n].$$

Adicionalmente contamos con el siguiente teorema que nos garantiza, dada una estructura, la existencia de muchas subestructuras elementales pequeñas de dicha estructura:

**Teorema 2.8** *[Löwenheim-Skolem-Tarski Descendente] Sea $\mathcal{B}$ un modelo, sea $H \subseteq B$. Entonces existe $\mathcal{A}$ tal que*

- $H \subseteq A$
- $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$
- $|A| = |H| + \omega$.

El siguiente es un concepto modelo-teórico que es fundamental en todo el trabajo debido a que los cardinales desdoblables se definen en términos de inmersiones elementales. Vale la pena anotar que esto es muy típico los cardinales grandes.

**Definición 2.9** *Sean $\langle M, \ldots\rangle$ y $\langle N, \ldots\rangle$ estructuras para un vocabulario $\mathcal{L}$. Una función inyectiva $j : M \to N$ es una **inmersión elemental de** $M$ **en** $N$ si y sólo si satisface el esquema elemental : para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y $a_1, \ldots, a_n \in M$*

$$M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y sólo si } N \models \varphi[j(a_1), \ldots, j(a_n)].$$

*$o(M)$ es el mínimo ordinal $\alpha$ que no esta en $M$ si $M$ es un conjunto transitivo. Si $j$ es no trivial el primer $\alpha \in o(M)$ tal que $j(\alpha) \neq \alpha$ se denota como $cp(j)$ (punto crítico de $j$).*

En nuestro caso el vocabulario $\mathcal{L}$ casi siempre se reduce al símbolo de pertenencia $\in$ o a lenguajes de tipo $\{\in, P^1, P^2, \ldots\}$, $P^i$ predicados monádicos.

## 2.2 Pequeños grandes cardinales

Empecemos por los baby:

**Definición 2.10** *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular, $\kappa$ es **inaccesible** si $\forall\lambda < \kappa\, (2^\lambda < \kappa)$.*

**Definición 2.11** *Un cardinal $\kappa$ es **débilmente compacto** si y sólo si tiene la propiedad de extensión de Keisler : para todo $R \subseteq V_\kappa$ hay un conjunto transitivo $M \neq V_\kappa$ y un $S \subseteq M$ tal que $(V_\kappa, \in, R) \prec (M, \in, S)$.*

**Definición 2.12** *Sea $\kappa$ un cardinal inaccesible, $\kappa$ es $\theta$-**desdoblable** si para todo $A \subseteq \kappa$ existe $M$ y $A' \subseteq M$ tales que $(V_\kappa, \in, A) \prec (M, \in, A')$ y $o(M) \geq \theta$. Es $\theta$-**fuertemente desdoblable** si además $V_\theta \cup \{\theta\} \subseteq M$ y $\kappa$ es **desdoblable** si para todo $\theta \in On$, $\kappa$ es $\theta$-desdoblable. Análogamente para la versión fuerte, $\kappa$ es **fuertemente desdoblable** si para todo $\theta \in On$, $\kappa$ es $\theta$-fuertemente desdoblable.*

Observemos que si $|A| < \kappa$ entonces $A \in V_\kappa$ de donde $A = A'$.

El siguiente es un resultado de Villaveces que permite expresar desdoblabilidad en términos de inmersiones elementales (ver Teorema 4.1 en [17])

**Teorema 2.13** *Sea $\kappa$ inaccesible, $\theta \geq \kappa$. Entonces $\kappa$ es $\theta$-desdoblable si y sólo si*

$$\forall M (M \textit{transitivo},\ M \models ZF^-, |M| = \kappa \in M \Longrightarrow \exists j, N[N \textit{transitivo}, \theta \in N,$$

$$j : M \to N, cp(j) = \kappa, |j(\kappa)| = \theta]).$$

De aquí la siguiente definición

**Definición 2.14** *Sea $\kappa$ cardinal desdoblable, $\theta \in On$ fijo, $M$ conjunto transitivo de tamaño $\kappa$ tal que $M \models ZF^-$, $\kappa \in M$, $j : M \to N$ es una **inmersión** $(\kappa, \theta)-$**desdoblable** si $j : M \to N$ es una inmersión elemental con $cp(j) = \kappa$ y $j(\kappa) \geq \theta$.*

Por la caracterización de Keisler de compacidad débil concluimos que todo cardinal desdoblable es un cardinal débilmente compacto. Por encima de los cardinales desdoblables se encuentran los cardinales de Ramsey.

**Definición 2.15** *$\kappa$ es un cardinal de Ramsey si y sólo si para toda función $f : [\kappa]^{<\omega} \to 2$ hay un $H \in [\kappa]^\kappa$ homogéneo para $f$: $|f''[H]^n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($[x]^{<\omega} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x]^n$). Esto lo abreviamos como*

$$\kappa \to (\kappa)_2^{<\omega}.$$

Sin embargo los cardinales de Ramsey no relativizan a $L$.

**Teorema 2.16 (Villaveces)** *Todo cardinal de Ramsey es cardinal desdoblable.*

**Definición 2.17** *Sea $\kappa$ cardinal desdoblable, $M$ es un modelo **bueno** si y sólo si $M$ es un modelo transitivo de ZF$^-$ de tamaño $\kappa$ con $\kappa \in M$ y $M^{<\kappa} \subseteq M$.*

Usando el teorema 2.8 mostramos enseguida que para cada $M'$ modelo transitivo de ZF$^-$ de tamaño $\kappa$ con $\kappa \in M'$ es posible encontrar un $M$ bueno tal que $M' \prec M$. Esto nos permite trabajar solo con modelos buenos $M$ ya que si $j : M \to N$ es una inmersión desdoblable entonces $j \restriction M' : M' \to j(M')$ es también inmersión elemental. Comprobemos entonces que para cada $M'$ modelo transitivo de ZF$^-$ de tamaño $\kappa$ con $\kappa \in M'$ es posible encontrar un $M$ bueno de forma que $M' \prec M$ Para asegurar la clausura bajo sucesiones de longitud menor que $\kappa$ de la extensión elemental hacemos lo siguiente, definimos la siguiente $\omega$-sucesión de extensiones elementales por inducción:

$$\begin{aligned} M_0 &= M' \\ M_{n+1} &= \text{una extensión elemental de } M_n \cup M_n^{<\kappa} \text{de cardinal } \kappa \text{ (teo. 2.8)} \\ M &= \bigcup_{n\in\omega} M_n, \end{aligned}$$

entonces $M' \prec M$ y además $M^{<\kappa} \subseteq M$ ya que si $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda} \subseteq M$ para algún $\omega_1 < \lambda < \kappa$, para algún $n \in \omega$ la mayoría de la sucesión $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ está contenida en $M_n$ (pues la sucesión es grande), de donde $(x_\alpha)_{\alpha<\lambda} \in M_{n+1} \subseteq M$. Observamos igualmente que para todo $\lambda < \kappa$, $\kappa^\lambda = \kappa$ ya que $\kappa$ es inaccesible (si $\kappa^\lambda > \kappa$ para algún $\lambda < \kappa$, sea $\alpha = \sup\{\beta < \kappa : \beta^\lambda \leq \kappa\}$, entonces $\alpha < \kappa$ y $(\alpha^+)^\lambda > \kappa$, pero $\lambda^\lambda = 2^\lambda < \kappa$ por ser $\kappa$ inaccesible, esto implica que $\lambda \leq \alpha < \alpha^+ < \kappa$, de donde $(\alpha^+)^\lambda < (\alpha^+)^{\alpha^+} = 2^{(\alpha^+)} < \kappa$ por ser $\kappa$ inaccesible. Contradiciendo la elección de $\alpha$).

**Definición 2.18** *Un cardinal $\kappa$ inaccesible es **medible** si existe una clase transitiva $M$ y una inmersión elemental no trivial $j : V \to M$ con $cp(j) = \kappa$.*

## 2.3 Ultraproductos y semillas

En esta parte se propone revisar algunas resultados acerca de ultraproductos. Más concretamente la construcción de la inmersión natural asociada a un ultrafiltro.

Sea $\kappa$ un cardinal. Sea $M$ un modelo interno de $\mathrm{ZF}^-$ con $\kappa \in M$ y $\langle M, \in, U\rangle \models$ "$U$ es un ultrafiltro" y $U$ es $\omega_1$-completo. Definimos la siguiente relación de equivalencia sobre funciones ${}^{\kappa}M \cap M$

$$f \sim_U g \text{ si y sólo si } \{x \in \kappa : f(x) = g(x)\} \in U,$$

y sea

$$[f] = \{g : \kappa \to M \ : \ f \sim_U g \text{ y } \ g \text{ de rango de von Neumann mínimo } \}$$

Considere ahora $M/ \sim_U$, definimos

$$[f] E_U [g] \text{ si y sólo si } \{x \in \kappa : f(x) \in g(x)\} \in U.$$

La **ultrapotencia** es

$$Ult(M, U) = \langle M/ \sim_U, E_U\rangle.$$

El resultado fundamental de Łoš relaciona el ultraproducto con el ultrafiltro a nivel de semántica

**Teorema 2.19** *Para cualquier fórmula $\varphi(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ de $\mathcal{L}_\epsilon$ y $f_1, \ldots, f_n$ funciones*

$$Ult(M, U) \models \varphi[[f_1], \ldots, [f_n]] \text{ si y sólo si } \{x \in \kappa : \varphi[f_1(x), \ldots, f_n(x)]\} \in U$$

Si $U$ es $\omega_1$-completo entonces hay un conjunto transitivo $M_U$ y un isomorfismo

$$\pi_U : Ult(M, U) \to \langle M_U, \in\rangle.$$

Finalmente para cualquier $x \in M$, $f_x : \kappa \to \{x\}$, la función que toma siempre el valor $x$. Definiendo $j_U(x) = [f_x]_U$ entonces el teorema 2.19 se resume como

$$j_U : M \to M_U \cong Ult(M, U).$$

**Definición 2.20** *Sea $\mu$ un ultrafiltro $\sigma$-completo no principal. Si $j : M \to N$ es una inmersión elemental y $a \in j(D)$ para algun conjunto $D \in M$, $a$ es una* ***semilla*** *vía $j$ para $\mu$ cuando $A \in \mu$ si y sólo si $A \subseteq D$ y $a \in j(A)$. En este caso decimos que la semilla* ***germina*** *$\mu$ vía $j$. Un elemento $a$* ***genera*** *$b$ via $j$ ($a \rightsquigarrow_j b$) si y sólo si $b = j(f)(a)$ para alguna función $f \in M$. La semilla $a$* ***genera*** *todo $N$ cuando $a \rightsquigarrow b$ para todo $b \in N$.*

**Teorema 2.21 (Hamkins [7])** *Sea $j : M \to N$ una inmersión elemental de modelos transitivos $M$ y $N$ de $ZF$. Entonces $j$ es una $M$-ultrapotencia si y sólo si alguna semilla $a$ genera todo $N$. Es decir*

$$N = \{j(f)(a) : f \in M\}.$$

**Definición 2.22 (Seed hull en [7])** *Sea $j : M \to N$ inmersión elemental y $S \subseteq N$, definimos el **casco de semillas** de $S$ via $j$ como*

$$X_S = \{j(f)(s) : f \in M \text{ y } s \in [S]^{<\omega}\}.$$

**Lema 2.23** *[Lema del casco de semilla] $X_S \prec N$.*

Demostración: (basta verificar el test de Tarski-Vaught, ver [7]).

**Lema 2.24 (Lema de la semilla vieja)** *Si un conjunto de semillas $S$ genera toda una inmersión $j$, entonces también genera todo cualquier levantamiento de $j$ a una extensión forcing $j : M[G] \to N[j(G)]$.*

Y algo aún más refinado pero a su vez más útil debido a Hamkins (ver [17])

**Lema 2.25 (Hamkins)** *Si $\kappa$ es $\theta + 1$-desdoblable entonces para todo $M$ modelo bueno existe una inmersión $j : M \to N$, con $j(\kappa) > \theta$ y $N = \{j(g)(s) : g \in M \text{ y } s \in (\theta+1)^{<\omega}\}$, a tales inmersiones las llamamos **inmersiones $(\kappa, \theta + 1)$-desdoblables canónicas**.*

## 2.4 Nociones de forcing

Expondremos aquí las definiciones básicas de forcing y los principales resultados relacionados con preservación de cofinalidades y cardinales incluyendo el caso del forcing iterado.

**Definición 2.26** *Un **forcing** es una tripla $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$, $\leq_{\mathbb{P}}$ (o simplemente $\leq$) es una relación sobre $\mathbb{P}$ que es transitiva y reflexiva. $p \leq q$ se lee "$p$ extiende a $q$". Los elementos de $\mathbb{P}$ se llaman condiciones. $1_{\mathbb{P}}$ es el elemento máximo.*

**Definición 2.27** *Sea $\mathbb{P}$ orden parcial y $D \subseteq \mathbb{P}$, $D$ es **abierto** en $\mathbb{P}$ si $\forall q \in D \forall r \leq q (r \in D)$. $D$ es **denso** en $\mathbb{P}$ si $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D (q \leq p)$. $\mathbb{P} \restriction p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$*

**Definición 2.28** *Sea* $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle$ *un orden parcial.* $G \subseteq \mathbb{P}$ *es un* ***filtro*** *en* $\mathbb{P}$ *si y sólo si* $\forall p, q \in G\, \exists r \in G (r \leq p$ *y* $r \leq q)$ *y* $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P}(p \leq q \to q \in G)$

**Definición 2.29** *Dado un modelo básico* $M$ *de* $ZF^-$ *y un orden parcial* $\mathbb{P} \in M$, $G \subseteq \mathbb{P}$ *es un* ***M-genérico*** *si para todo denso* $D \subseteq \mathbb{P}$ *de* $M$, $D \cap G \neq \emptyset$.

**Definición 2.30** *Dado un cardinal* $\kappa$ *y orden parcial* $\mathbb{P}$, *decimos que* $\mathbb{P}$ *tiene la* $\kappa$-***condición de cadena*** *(abreviado* $\kappa$*-c.c.) si toda anticadena de* $\mathbb{P}$ *tiene cardinal menor que* $\kappa$.

**Definición 2.31** *Dado un cardinal* $\lambda$ *y orden parcial* $\mathbb{P}$, *decimos que* $\mathbb{P}$ *es* $\lambda$-***cerrado*** *si para todo* $\gamma < \lambda$ *y* $\{p_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq \mathbb{P}$ *con* $p_\beta \leq p_\alpha$ *para* $\alpha < \beta < \gamma$, *hay un* $p \in \mathbb{P}$ *tal que* $p \leq p_\alpha$ *para todo* $\alpha < \gamma$.

**Lema 2.32** *Sea* $\mathbb{P}$ *forcing* $\leq \theta$*-cerrado. Entonces la intersección de* $\theta$ *densos abiertos en* $\mathbb{P}$ *es denso.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(D_i)_{i<\theta}$ una familia de densos abiertos de $\mathbb{P}$, $D = \bigcap_{i<\theta} D_i$ y sea $p \in \mathbb{P}$, como $D_1$ es denso en $\mathbb{P}$ existe $p_1 \in D_1$ tal que $p_1 \leq p$. Pero $D_2$ es denso en $\mathbb{P}$ entonces existe un $p_2 \in D_2$ tal que $p_2 \leq p_1$ y además $p_2 \in D_1$ ya que $D_1$ es denso en $\mathbb{P}$. De esta manera podemos construir una sucesión $(p_i)_{i<\theta}$ tal que $\forall i \leq j (p_i \leq p_j)$ (en los paso límites $\alpha < \theta$ usamos que $\mathbb{P}$ es $\leq \theta$-cerrado y que $D_\alpha$ es denso en $\mathbb{P}$). Como $\mathbb{P}$ es $\leq \theta$-cerrado existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que para todo $i < \theta$ $p \leq p_i$. Finalmente $\forall i < \theta (p \in D_i)$, pues cada $D_i$ es abierto.

□

**Definición 2.33** *Sea* $\mathbb{P}$ *un forcing y* $\{p_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq \mathbb{P}$ *con* $p_\beta \leq p_\alpha$ *para* $\alpha < \beta < \gamma$, *el* ***filtro generado*** *por* $(p_i)_{i<\gamma}$ *es*

$$\{q \in \mathbb{P} : \exists i < \gamma (p_i \leq q)\}.$$

Los siguientes lemas son cruciales en la mayoría de aplicaciones de forcing y se encuentran demostrados en [13]:

**Lema 2.34** *Suponga que* $\mathbb{P} \in M$, $\theta$ *es un cardinal de* $M$, *y* ($\mathbb{P}$ *tiene la* $\theta$*-c.c.*$)^M$. *Entonces* $\mathbb{P}$ *preserva cofinalidades* $\geq \theta$. *De aqui si* ($\theta$ *es regular*$)^M$, $\mathbb{P}$ *preserva cardinales* $\geq \theta$.

**Lema 2.35** *Suponga que* $\mathbb{P} \in M$, *(*$\lambda$ *es un cardinal)*$^M$, *y (*$\mathbb{P}$ *es* $\lambda$*-cerrado)*$^M$. *Entonces* $\mathbb{P}$ *preserva cofinalidades* $\leq \lambda$ *(y de aquí cardinales) y no agrega subconjuntos a* $\lambda$.

**Definición 2.36** *Sea* $M$ *un modelo transitivo de* $ZF^-$, $\mathbb{P}$ *orden parcial y* $G \subseteq \mathbb{P}$ $M$*-genérico definimos*

$$M[G] = \{a_G : a \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

*donde* $M^{\mathbb{P}}$ *es el conjunto de* $\mathbb{P}$*-nombres sobre* $M$.

**Definición 2.37** *Sea* $\kappa$ *cardinal regular,* $Add(\kappa, 1)$ *es el orden parcial cuyas condiciones satisfacen* $p \in Add(\kappa, 1)$ *si y sólo si* $p\colon \kappa \to 2$ *es función y* $|p| < \kappa$. *El orden de las condiciones esta dado por* $p \leq q$ *si y sólo si* $p \supseteq q$.

**Definición 2.38** *Supongamos que forzamos con un orden parcial* $\mathbb{P}$*; si* $G_0$ *es un* $\mathbb{P}$*-genérico tiene sentido considerar de nuevo un orden parcial* $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{Q}^{G_0}$ *en el sentido de* $V[G_0]$. *Si* $G_1$ *es* $\mathbb{Q}$*-genérico de* $V[G_0]$ *definimos*

$$\mathbb{P} * \mathbb{Q} = \{\langle p, q\rangle : p \in \mathbb{P} \quad y \quad \Vdash_{\mathbb{P}} q \in \mathbb{Q}\}$$

*ordenado por*

$$\langle p_0, q_0\rangle \leq \langle p_1, q_1\rangle \text{ si y sólo si } p_0 \leq_{\mathbb{P}} p_1 \quad y \quad p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} q_0 \leq_{\mathbb{Q}} q_1.$$

### 2.4.1 Forcing iterado

**Definición 2.39** *Sea* $\alpha \geq 1$. *Un orden parcial* $\mathbb{P}_\alpha$ *es una* $\alpha$*-iteración si y sólo si* $\mathbb{P}_\alpha$ *es un conjunto de* $\alpha$*-sucesiones que satisfacen las siguientes condiciones:*

- *Si* $\alpha = 1$ *entonces hay un orden parcial* $\mathbb{Q}_0$ *de manera que* $p \in \mathbb{P}_1$ *si y sólo si* $p(0) \in \mathbb{Q}_0$ *y* $p \leq q$ *si y sólo si* $p(0) \leq q(0)$. *Asi que* $\mathbb{P}_1 \cong \mathbb{Q}_0$.

- *Si* $\alpha = \beta + 1$, $\beta \geq 1$, *entonces* $\mathbb{P}_\beta = \{p \restriction \beta : p \in \mathbb{P}_\alpha$ *es una* $\beta$*-iteración y hay un* $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ *tal que* $p \Vdash \dot{\mathbb{Q}}_\beta$ *es un orden parcial y* $p \in \mathbb{P}_\alpha$ *si y sólo si* $p \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$ *y* $\Vdash_\beta p(\beta) \in \dot{\mathbb{Q}}_\beta$. *Más aún,* $p \leq q$ *si y sólo si* $p \restriction \beta \leq q \restriction \beta$ *y* $p \restriction \beta \Vdash_\beta p(\beta) \leq q(\beta)$.

- *Si* $\alpha$ *es un ordinal límite entonces* $\forall \beta < \alpha\, \mathbb{P}_\beta = \{p \restriction \beta : p \in \mathbb{P}_\alpha\}$ *es una* $\beta$*-iteración, y*

1. *$\bar{1} \in \mathbb{P}_\alpha$, donde $\bar{1}(\gamma) = 1$ para todo $\gamma < \alpha$.*
2. *Si $\beta < \alpha$, $p \in \mathbb{P}_\alpha$, $q \in \mathbb{P}_\beta$ y $q \leq p \upharpoonright \beta$, entonces $r \in \mathbb{P}_\alpha$, donde $r \upharpoonright \beta = q$ y $r(\gamma) = p(\gamma)$ para todo $\beta \leq \gamma < \alpha$.*
3. *Para todo $p, q \in \mathbb{P}_\alpha$, $p \leq q$ si y sólo si $\forall \beta < \alpha\, (p \upharpoonright \beta \leq q \upharpoonright \beta)$.*

Decimos que $\mathbb{P}_\alpha$ es el **límite directo** de $\langle \mathbb{P}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ si $p \in \mathbb{P}_\alpha$ si y sólo si $\exists\, \beta < \alpha\, (p \upharpoonright \beta \in \mathbb{P}_\beta)$ y $\forall \gamma\, \beta \leq \gamma < \alpha$ entonces $p(\gamma) = 1$. Decimos que $\mathbb{P}_\alpha$ es el **límite inverso** de $\langle \mathbb{P}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ si $p \in \mathbb{P}_\alpha$ si y sólo si $\forall\, \beta < \alpha\, (p \upharpoonright \beta \in \mathbb{P}_\beta)$.

**Definición 2.40** *Si $p \in \mathbb{P}_\alpha$, entonces el **soporte** de $p$ es el conjunto $\{\beta < \alpha : p(\beta) \neq \dot{1}\}$.*

Por inducción podemos probar que si se toman límites directos en los $\beta \leq \alpha$ tales que $\mathrm{cof}(\beta) > \omega$ (y cualquier clase de límite en otras partes) entonces el soporte de cada $p \in \mathbb{P}_\alpha$ es contable o finito.

### Forcing reverso de Easton

Consiste en tomar límites directos en los cardinales inaccesibles y en el resto límites inversos.

### Condiciones de cadena y clausura

Al hacer forcing iterado es importante el caso en que se preservan de los factores tanto su mismo nivel de clausura como condición de cadena (para garantizar por ejemplo la preservación de cardinales en la extensión). Se tienen los siguientes teoremas propios del Forcing reverso de Easton. Veamos el caso de dos factores:

**Teorema 2.41** *Si $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa$-c.c. y $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{Q}$ tiene la $\kappa$-c.c., entonces $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ tiene también la $\kappa$-c.c.*

Y el caso general

**Teorema 2.42** *Suponga que (a) $\mathbb{P}_\alpha$ es el límite directo de $\langle \mathbb{P}_\beta : \beta < \alpha \rangle$.*

*(b) si $\beta < \alpha$ entonces $\mathbb{P}_\beta$ tiene la $\kappa$-c.c.*

*(c) si cf$(\alpha) = \kappa$ entonces $\{\beta < \alpha : \mathbb{P}_\beta$ es el límite directo de $\langle \mathbb{P}_\gamma : \gamma < \beta \rangle\}$ es estacionario en $\alpha$.*

*Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ tiene la $\kappa$-c.c.*

**Teorema 2.43 (Ver [1])** *Si $\kappa$ es un cardinal débilmente compacto, $|\mathbb{P}_\beta| < \kappa$ para todo $\beta < \kappa$, y $\mathbb{P}_\beta$ es el límite directo de $\langle \mathbb{P}_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ siempre que $\beta \leq \kappa$ y $\beta$ sea inaccesible, entonces $\mathbb{P}_\kappa$ tiene la $\kappa$-c.c.*

**Teorema 2.44** *Suponga que para todo $\beta < \alpha$, $\Vdash \mathbb{Q}_\beta$ es $\kappa$-cerrado. Suponga que todos los límites son directos o inversos y que si $\beta \leq \alpha$, $\beta$ es ordinal límite y cf $(\beta) < \kappa$, entonces $\mathbb{P}_\beta$ es el límite inverso de $\langle \mathbb{P}_\gamma : \gamma < \beta \rangle$. Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ es $\kappa$-cerrado.*

### 2.4.2 La preparación lotería

Para hacer más equitativo el proceso de iteración sin perder el control, preservando ciertas propiedades en cada nivel (clausura y condiciones de cadena) Hamkins formalizó de manera muy sistemática una idea que había sido usada muchas veces en el forcing iterado, y es la de escoger un forcing aleatoriamente en cada nivel, siempre y cuando tal forcing tuviera unos requisitos mínimos. Esto dió producto a su preparación lotería, un orden parcial de órdenes parciales.

La **suma-lotería** de una colección de órdenes parciales $A$ es el orden parcial $\bigoplus A = \{\langle \mathbb{Q}, p \rangle : \mathbb{Q} \in A \text{ y } p \in \mathbb{Q}\} \cup \{1\}$, con 1 como elemento máximo y $\langle \mathbb{Q}, p \rangle \leq \langle \mathbb{Q}', q \rangle$ cuando $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ y $p \leq_{\mathbb{Q}} q$.

Primero decimos que un orden parcial $\mathbb{Q}$ es **permitido en el nivel** $\gamma$ cuando para todo $\delta < \gamma$ el orden parcial es $\delta$-cerrado. Definimos la **preparación lotería** $\mathbb{P}_{lot}$ de $\kappa$ respecto a una función parcial dada $f\colon \kappa \to \kappa$ como la $\kappa$-iteración reversa de Easton con el orden parcial trivial en el nivel $\gamma$ excepto cuando $\gamma \in \text{dom}(f)$ y $f''\gamma \subseteq \gamma$. En tales niveles el forcing $\mathbb{Q}_\gamma$ es la suma-lotería en $V^{\mathbb{P}_\gamma}$ de todos los órdenes parciales en $H(f(\gamma)^+)$ que son permitidos en el nivel $\gamma$. Para asegurarnos de la existencia de tales funciones usamos forcing también.

**Lema 2.45** *Si $\kappa$ es inaccesible límite de inaccesibles y $\theta$ es el primer inaccesible entonces $\mathbb{P}_{lot}$ es $\theta$-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicación directa del teorema 2.44.

□

Observemos que si $\mathbb{Q} \in H(f(\gamma)^+)$ entonces $|tc(\mathbb{Q})| < f(\gamma)^+$ y de aquí que $|\mathbb{Q}| \leq |f(\gamma)| < \gamma_1$ ($\gamma_1$ es el siguiente elemento del dominio de $f$ despues de

$\gamma$) de donde $\mathbb{Q}$ tiene $\gamma_1$-c.c. (se preservan todos las cofinalidades y cardinales $\geq \gamma_1$). Pero también como para todo $\delta < \gamma$ $\mathbb{Q}$ es $\delta$-cerrado (si $\gamma$ es regular entonces es $\gamma$-cerrado) entonces $\mathbb{Q}$ preserva cofinalidades (y cardinales) menores que $\gamma$.

**Definición 2.46** *La preparación lotería* ***modificada*** $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ *con respecto a una función parcial dada* $f\colon\kappa \to \kappa$ *como la* $\kappa$*-iteración reversa de Easton con el orden parcial trivial en el nivel* $\gamma$ *excepto cuando* $\gamma \in dom(f)$ *y* $f''\gamma \subseteq \gamma$*. En tales niveles* $\gamma$ *el forcing* $\mathbb{Q}_\gamma$ *es la suma-lotería en* $V^{\mathbb{P}_\gamma}$ *de todos los órdenes parciales* $\mathbb{Q}$ *en* $H(f(\gamma)^+)$ *que son permitidos en el nivel* $\gamma$ *y que además sean* $\kappa$*-cerrados.*

En cualquier caso el forcing podría ser trivial si no existe una tal función parcial $f$ o si existe podría suceder que ningún $\mathbb{Q}$ excepto el trivial satisfaga las condiciones de $\mathbb{P}_{lot}$ o de $\mathbb{P}^{-}_{lot}$. En la siguiente sección garantizamos que esto no sucederá.

### 2.4.3 El forcing de la función rápida

Las funciones rápidas permiten obtener versiones del teorema de Laver de indestructibilidad para otros tipos de cardinales distintos a los cardinales supercompactos. Dada una inmersión $j : M \to N$ este forcing agrega una función parcial (la función rápida) $f\colon\kappa \to \kappa$ (por una función **parcial** $g$ con $dom(g) \subseteq \kappa$ queremos decir que $dom(g)$ no es todo $\kappa$ y lo denotamos con $g\colon\kappa \to rang(g)$), de manera que $j(f)(\kappa)$ sea casi cualquier valor prefijado. Esta flexibilidad permite asegurar la suficiente clausura de la iteración reversa de Easton para poder terminar de construir ciertos genéricos, usando precisamente que la función tiene un crecimiento rápido. La idea formalizada por Hamkins [5] había sido usada de una manera más tenue por Silver y Apter, e incluso por Woodin ([9]) en ambiente de grandes cardinales.

Sea $\kappa$ un cardinal, el **forcing de la función rápida** $\mathbb{F}_\kappa$ (o simplemente $\mathbb{F}$) para el cardinal $\kappa$ tiene como condiciones las funciones parciales $p\colon\kappa \to \kappa$ tales que $\mathrm{dom}(p) \subseteq \Im$ y si $\gamma \in \mathrm{dom}(p)$ entonces $p''\gamma \subseteq \gamma$ y $|p \restriction \gamma| < \gamma$; para $\kappa$ inaccesible se requiere además que $|p| < \kappa$. Las condiciones están ordenadas por inclusión y la función vacía es siempre el elemento máximo de $\mathbb{F}$. La unión del genérico de este forcing es la **función rápida** (parcial) $f$. Observemos que si $\kappa$ es inaccesible entonces $|\mathbb{F}| \leq \kappa$. Si $\kappa$ es un cardinal inaccesible no límite de cardinales inaccesibles entonces $\mathbb{F}$ se trivializa ya que hay elementos minimales: si $\lambda$ acota a los cardinales inaccesibles debajo de $\kappa$ y $\alpha$ es el primer inaccesible entonces $p = \{(\alpha, \lambda)\}$ no tiene extensiones propias.

Observemos que si $\gamma_1 \in$dom$f$ y $\gamma_2$ es el siguiente elemento del dominio de $f$ entonces se debe satisfacer que $f''\gamma_2 \subseteq \gamma_2$ entonces $f(\gamma_1) < \gamma_2$, de donde cada elemento debe superar siempre a la imagen del anterior elemento del dominio de $f$. Es en este sentido que la funcón es "rápida.

La función $f$ además tiene las siguientes propiedades

$dom(f)$ y $ran(f)$ son no acotados en $\kappa$. Sea $\beta < \kappa$ fijo, los siguientes conjuntos son densos en $\mathbb{F}$:

$$D_\beta = \{q \in \mathbb{F} : \text{ existe } \alpha > \beta \ (\alpha \in dom(q))\}$$

y

$$D'_\beta = \{q \in \mathbb{F} : \text{ existe } \gamma > \beta(\gamma \in rang(q))\}.$$

Sea $p \in \mathbb{F}$, como $|p| < \kappa$ y $\kappa$ es límite de inaccesibles existe un $\alpha < \kappa$ tal que $\beta < \alpha$, $|p| < \alpha < \kappa$ y $p \subseteq \alpha \times \alpha$, sea $q = p \cup \{(\alpha, \gamma)\}$ para algun $\beta < \gamma < \kappa$. Entonces $q \leq p$, $q \in D_\beta$ y también $q \in D'_\beta$.

**Lema 2.47** *Sea $\kappa$ inaccesible, $\mathbb{F}$ es $\kappa$-cerrado.*

Demostración: Sea $\lambda < \kappa$ y $(p_i)_{i<\lambda} \subseteq \mathbb{F}$ descendente (es decir si $i < j < \lambda$ entonces $p_j \leq p_i$), sea $p = \bigcup_{i<\lambda} p_i$ entonces para cada $i < \lambda$ $p \leq p_i$ y además $p \in \mathbb{F}$ pues si $\gamma \in dom(p)$ para algún $i < \lambda$, $\gamma \in dom(p_i)$ por lo tanto $p \restriction \gamma = p_i \restriction \gamma$, como $p \in \mathbb{F}$ se satisface que $|p \restriction \gamma| < \gamma$ y también que $p_i''\gamma = p''\gamma \subseteq \gamma$, igualmente como $\lambda < \kappa$ y para cada $i < \lambda$, $|p_i| < \kappa$ entonces $|p| < \kappa$ ($\kappa$ es cardinal inaccesible).

□

Los siguientes dos resultados se encuentran en [5].

**Lema 2.48** *Si $p = \{\langle \beta, \alpha \rangle\}$, $\mathbb{F} \restriction p$ se factoriza como $\mathbb{F}_\beta \times \mathbb{F}_{\gamma,\kappa}$ donde $\mathbb{F}_\beta$ consiste de las condiciones que tienen tamaño menor que $\beta$ y con dominio contenido en $\beta$ y $\mathbb{F}_{\gamma,\kappa}$ consiste de las condiciones con dominio en $(\gamma, \kappa)$, donde $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Además $\mathbb{F}_{\gamma,\kappa}$ es $\leq \gamma$-cerrado.*

**Teorema 2.49** *El forcing de la función rápida preserva todos los cardinales inaccesibles. Si SCH vale, entonces el forcing de la función rápida preserva todos los cardinales y cofinalidades y no perturba la función del continuo.*

Sea $\kappa$ cardinal desdoblable y $f\colon \kappa \to \kappa$ función parcial rápida. Justificamos porque $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ no es trivial y de paso que preserva cardinales y cofinalidades.

**Lema 2.50** *Sea $\kappa$ cardinal desdoblable y $f\colon \kappa \to \kappa$ función rápida. Entonces $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ con respecto a $f$ preserva todas las cofinalidades y cardinales.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es aplicación directa de los teoremas 2.43 y 2.44. Por el teorema 2.43 $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ tiene la $\kappa$-c.c., asi que se preservan cofinalidades y cardinales $\geq \kappa$. Probado que $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ es $\kappa$-cerrado entonces se preservan cardinales y cofinalidades $\leq \kappa$. Sea $\gamma \in dom(f)$.

Caso 1. $f(\gamma) \leq \gamma$. Sea $\mathbb{Q} \in H(f(\gamma)^{+})$ $\gamma$-permitido. Entonces $|tc(\mathbb{Q})| \leq |f(\gamma)| \leq \gamma$. Pero si $|tc(\mathbb{Q})| \leq \gamma$, las sucesiones descendentes en $\mathbb{Q}$ son a lo más de longitud $\gamma$. Por otra parte ser $\gamma$-permitido coincide en este caso con ser $\gamma$-cerrado por ser $\gamma$ cardinal inaccesible. Así que $\mathbb{Q}$ es $\kappa$-cerrado. Por el teorema 2.44 $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ es $\kappa$-cerrado.

Caso 2. $\gamma < f(\gamma)$, un ejemplo de tal forcing es $\mathbb{Q} = Add(\gamma, 1)$, ya que $|\mathbb{Q}| = \gamma$ (por ser $\gamma$ inaccesible), es $\leq \gamma$-cerrado y está en $H(f(\gamma)^{+})$ (pues $|\mathbb{Q}| = \gamma < f(\gamma)$). De esto concluimos que $\mathbb{Q}$ es $\kappa$-cerrado pues cualquier sucesión descendente en $\mathbb{Q}$ es de longitud a lo más $\gamma$. Por el teorema 2.44 $\mathbb{P}^{-}_{lot}$ es $\kappa$-cerrado.

□

Dado $\mathbb{P}$ orden parcial y $\kappa$ desdoblable en $V$, observamos que si queremos verificar desdoblabilidad en $V[G]$, es suficiente probar que toda inmersión desdoblable $j$ del modelo básico $V$ se extiende a una inmersión desdoblable $j$ en $V[G]$.

El siguiente resultado pertenece al folklore matemático, en el sentido siguiente: si $\kappa$ es un gran cardinal que se puede definir en términos de inmersiones elementales, para comprobar que es del mismo tipo de gran cardinal en una extensión forcing es suficiente con extender a la extensión las inmersiones elementales del modelo básico (por ejemplo en [8] se usa este hecho para probar preservación de cardinales indescribibles bajo cierto forcing). En [6] se menciona y usa este resultado pero la prueba es confusa y esta mal escrita allá; optamos por demostrarlo aqui para mayor claridad.

**Lema 2.51** *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $\kappa$ es desdoblable entonces si toda inmersión desdoblable del modelo básico es extendible a $V[G]$ a una inmersión desdoblable, $V[G] \models \kappa$ es desdoblable.*

DEMOSTRACIÓN: Para esto utilizamos la definición de desdoblabilidad en términos de inmersiones elementales. Sea $\theta$ fijo y $\kappa$ desdoblable en $V$. En $V[G]$ sea $M$ modelo bueno, como $M \in V[G]$, $M = \dot{M}'_G$ donde $\dot{M}'$ es un $\mathbb{P}$-nombre para $M$ de cardinal $\kappa$ (debido a que al hacer forcing los objetos nuevos tienen el mismo cardinal de los nombres). Lo que hacemos es considerar un modelo bueno $M_1$ de manera que $M_1$ contenga como elementos a todos los $\mathbb{P}$-densos que "hablan" de la verdad en $M_1$ (solo hay $\kappa$ pues $|M| = \kappa$ y el conjunto de sentencias con parametros en $M$ tiene cardinal $\kappa$, con esto conseguimos definir la verdad de $M$ en $M_1[G]$) y $\dot{M}' \in M_1$ (esto por el teorema 2.8).

$\Rightarrow$) Supongamos que $(M \models \varphi[\tau_G])^{V[G]}$, la verdad en $M$ es definible en $M_1$ porque $M_1$ tiene a todos los densos respectivos, es decir

$$(M \models \varphi[\tau_G])^{V[G]} \Rightarrow (M \models \varphi[\tau_G])^{M_1[G]},$$

de aquí que existe un $p \in M_1$ y $p \in G$ de tal forma que

$$p \Vdash_{\mathbb{P}}^{M_1} (\dot{M}' \models \varphi[\tau]).$$

pero por el teorema de la definibilidad del forcing (teo. 3.5 Capítulo VII en [13]) esto se puede expresar en $M_1$ mediante una fórmula $Fuerza_\varphi(\dot{M}', p, \mathbb{P}, \tau)$. Como $j : M_1[G] \to N[j(G)]$ extiende la inmersión desdoblable $j : M_1 \to N$ en el modelo básico, entonces en $N$ se satisface la fórmula

$$Fuerza_\varphi(j(\dot{M}'), j(p), j(\mathbb{P}), j(\tau)),$$

con la cual estamos diciendo simplemente que

$$j(p) \Vdash_{j(\mathbb{P})}^{N} (j(\dot{M}') \models \varphi[j(\tau)]),$$

es decir, como $j(\dot{M}')_{j(G)} = j(M)$, en $N[j(G)]$ vale

$$j(M) \models \varphi[j(\tau)_G].$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $(j(M) \models \varphi[j(\tau_G)])^{V[G]}$, como $M_1$ tiene como elementos a los densos de $\mathbb{P}$ que hablan de la verdad en $M$, entonces por la elementariedad entre $M_1$ y $N$, $N$ tiene como elementos a los densos que hablan de la verdad en $j(M)$ (si $M = \dot{M}'_G$ es modelo de ZF$^-$ entonces $j(M) = j(\dot{M}')_{j(G)}$ también lo es). Por hipótesis $j : M \to N$ es una inmersión $\theta$-desdoblable que se extiende a la inmersión $j : M[G] \to N[j(G)]$ (en realidad lo que interesa aquí es que es inmersión). Entonces tenemos que

$$(j(M) \models \varphi[j(\tau_G)])^{V[G]} \Rightarrow (j(M) \models \varphi[j(\tau_G)])^{N[j(G)]},$$

o de otra manera, existe $j(p) \in j(\mathbb{P})$ tal que

$$j(p) \Vdash^N_{j(\mathbb{P})} (j(\dot{M}') \models \varphi[j(\tau)])$$

que equivale a que se satisface en $N$ la fórmula

$$Fuerza_\varphi(j(\dot{M}'), j(p), j(\mathbb{P}), j(\tau)),$$

pero $j : M_1 \to N$ es una inmersión entonces en $M_1$ vale la fórmula

$$Fuerza_\varphi(\dot{M}', p, \mathbb{P}, \tau)$$

que equivale a que

$$p \Vdash^{M_1}_{\mathbb{P}} (\dot{M}' \models \varphi[\tau])$$

o lo que es lo mismo

$$(M \models \varphi[\tau_G])^{M_1[G]},$$

pero

$$(M \models \varphi[\tau_G])^{M_1[G]} \Rightarrow (M \models \varphi[\tau_G])^{V[G]},$$

ya que $M_1[G] \in V[G]$.

$\square$

El siguiente resultado se encuentra en [6]:

**Teorema 2.52** *Cualquier cardinal $\kappa$ desdoblable es preservado por el forcing de la función rápida. Más específicamente, toda inmersión $(\kappa, \theta + 1)$-desdoblable canónica $j : M \to N$ en el modelo básico se levanta a una inmersión $(\kappa, \theta + 1)$-desdoblable $j : M[f] \to N[j(f)]$ en la extensión $V[f]$. Además, si $\alpha$ es cualquier ordinal bajo $j(\kappa)$, entonces el levantamiento lo podemos escoger de manera que $j(f)(\kappa) = \alpha$.*

La siguiente proposición es fundamental en el trabajo:

**Teorema 2.53 (Hamkins [6])** *Sea $j : M \to N$ una inmersión $(\kappa, \theta)$ desdoblable, $\mathbb{F}$ el forcing de la función rápida $f$ asociada a $\kappa$, sea $j : M[f] \to N[j(f)]$ la extensión por el forcing $\mathbb{F}$ de $j$ que satisface $j(f)(\kappa) \geq \theta$. Si $\mathbb{P}_{lot}$ es la preparación lotería respecto a $f$ entonces $j(\mathbb{P}_{lot}) = \mathbb{P}_{lot} * \mathbb{P}_{cola}$ donde $\mathbb{P}_{cola}$ es $\leq \theta$-cerrado.*

Puesto que las condiciones de la preparación lotería $\mathbb{P}_{lot}$ se pueden considerar como funciones definidas sobre $\kappa$ en algún conjunto de órdenes parciales (más precisamente de nombres de órdenes parciales que deben estar definidos por inducción) cuyos pasos activos estan dados por el dominio de una función $f\colon\kappa \to \kappa$ (la función rápida), entonces si queremos levantar una inmersión $j : M \to N$ y $\mathbb{Q}$ es un forcing permitido en el nivel $\kappa$ de la lotería $j(\mathbb{P}_{lot})$ restringiéndonos a la condición $\langle\kappa, (\mathbb{Q}, p)\rangle$ que elige a $\mathbb{Q}$ en el nivel $\kappa$, y como $cp(j) = \kappa$, $j(\mathbb{P}_{lot}) \restriction \kappa = \mathbb{P}_{lot}$, por lo tanto $j(\mathbb{P}_{lot}) \restriction \langle\kappa, (\mathbb{Q}, p)\rangle \cong \mathbb{P}_{lot} * \mathbb{Q} * \mathbb{P}_{cola}$, donde $\mathbb{P}_{cola}$ es trivial hasta el siguiente elemento de $dom(j(f))$ después de $\kappa$, es decir hasta $j(f)(\kappa) \geq \theta$, en particular $\mathbb{P}_{cola}$ es $\theta$-cerrado. Esto es exactamente lo que se requiere en lugar de la función de Laver para obtener la indestructibilidad requerida, la función rápida nos dota de suficiente clausura para poder continuar el levantamiento, es decir para construir el genérico para $\mathbb{P}_{cola}$ como se vera más adelante.

### 2.4.4 Levantamiento de inmersiones

El resultado fundamental es el siguiente debido a Silver que aparece en [2]:

**Teorema 2.54** *Sea $j : M \to N$, sea $\mathbb{P} \in M$ un forcing (orden parcial). Suponga que $G$ es $\mathbb{P}$-genérico sobre $M$, $H$ es $j(\mathbb{P})$-genérico sobre $N$ y que $j''G \subseteq H$. Entonces existe una única $j^* : M[G] \to N[H]$ tal que $j^* \restriction M = j$ y $j^*(G) = H$.*

Enumeramos algunas formas de obtener $j''G \subseteq H$. Fijemos $j : M \to N$ y $\mathbb{P} \in M$.

- Si $\mathbb{P} \subseteq j(\mathbb{P})$, $j \restriction \mathbb{P} = id_{\mathbb{P}}$, y $G = H \cap \mathbb{P}$ entonces claramente $j''G \subseteq H$.
- Supongamos que $M \models$ "$\mathbb{P}$ es $\lambda$- cerrado" y $N = \{j(F)(a_F) : F \in \mathcal{F}\}$ donde $\mathcal{F} \subseteq M$ es una familia de funciones tales que $\forall F \in \mathcal{F}\, M \models |dom(F)| < \lambda$. Aseguramos que $j''G$ genera un filtro $H$ el cual es $j(\mathbb{P})$-genérico sobre $N$. Para verificar esto sea $D \in N$ denso abierto en $j(\mathbb{P})$, entonces $D = j(F)(a_F)$ donde sin pérdida de generalidad $F(x)$ es denso abierto en $\mathbb{P}$ para cada $x \in dom(F)$ (Por lo siguiente: sea $b \in \mathbb{P}$, como $j(b) = j(l)(a_F) \in j(\mathbb{P})$ y $D$ es denso en $j(\mathbb{P})$ existe un $d \in D$ tal que $d \leq j(b) = j(l)(a_F)$, es decir existe un $d \in j(F)(a_F)$ (según $N$) tal que $d \leq j(l)(a_F)$, de donde existe un $z \in F(x)$ tal que $z \leq l(r) = b$. Es decir $F(x)$ es denso en $\mathbb{P}$ ($z = j^{-1}(d)$). Si $D$ es abierto y $r \leq q \in F(x)$

entonces $j(r) \leq j(q) \in j(F)(a_F) = D$ pero $D$ es abierto luego $j(r) \in D$ por elementariedad $r \in F(x)$). Por el lema 2.32 $D^* = \bigcap_{x \in dom(F)} F(x)$ es denso en $\mathbb{P}$ y por supuesto $D^* \in M$, asi que sea $p \in G \cap D^*$; entonces por elementariedad $j(p) \in j(F)(a_F) = D$ y asi $j''G \cap D \neq \emptyset$.

- Si $q \in j(\mathbb{P})$ y $\forall p \in G\, q \leq j(p)$ entonces cualquier filtro $j(\mathbb{P})$-genérico $H$ tal que $q \in H$ tendrá también la propiedad de $j''G \subseteq H$. Silver denominó a tal $q$ una **condición maestra**.

Si $G \subseteq \mathbb{P}$ $M$-genérico y $j : M \to N$ es una inmersión, es suficiente con definir $j(G)$ para extender la inmersión pues si $a \in M[G]$, $a = \dot{a}'_G$ para algún $\dot{a}'$ $\mathbb{P}$-nombre, $j(\dot{a}')$ es un $j(\mathbb{P})$-nombre. Definimos $j(a) := (j(\dot{a}'))_{j(G)}$.

### 2.4.5 Gap forcing

Sea $\kappa$ cardinal regular y $\delta < \kappa$ y $\mathbb{P}'$ un orden parcial. $\mathbb{P}'$ admite un **gap** en $\delta$ si $\mathbb{P}'$ se puede factorizar como $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{P}$ es no trivial, $|\mathbb{P}| < \delta$ y $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{Q}}$ es $\leq \delta$-cerrado. Decimos que $\mathbb{P}'$ es un gap forcing si admite un gap para algún $\delta < \kappa$.

**Teorema 2.55 (Hamkins [4])** *Gap forcing no crea nuevos débilmente compactos. Si $\kappa$ es débilmente compacto después de forzar con un forcing que admite un gap debajo de $\kappa$, entonces $\kappa$ era ya un débilmente compacto en el modelo básico.*

# Capítulo 3

# Combinatoria desdoblable

En este capítulo pruebo varios resultados laterales relacionados con el principio combinatorio $\diamondsuit_\kappa$ para $\kappa$ desdoblable y algunos resultados relacionados con la propiedad de reflexión de cardinales desdoblables. El principal resultado aparece en el siguiente capítulo.

Podemos interpretar $\diamondsuit$ como un sucesión que adivina con la precisión que se quiera a cualquier subconjunto de $\omega_1$, en este sentido es más fuerte que CH. Sabemos que $\diamondsuit$ implica CH (es suficiente observar que si $X \subseteq \omega$ entonces $X = S_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$, asi que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, de donde ZF $\nvdash \diamondsuit$ ) y la existencia de árboles de Suslin (razón inicial por la cual fue introducido este principio). Si $V = L$ entonces vale $\diamondsuit$, sin embargo también es posible forzar $\diamondsuit$ (ver [10]). Es muy importante $\diamondsuit$ por diversas razones. Como en general $\diamondsuit$ es en general más fuerte que CH, se puede usar en construcciones que requieren más que ZFC+CH y evitar de esta manera forcing. Una de tales construcciones es la debida a Shelah para obtener un grupo de Whitehead. Hay muchas más aplicaciones de $\diamondsuit$ al algebra y a la topología (Ver [14]). Además es usado a menudo en forcing iterado, como un tipo de principio de reflexión sin mencionar modelos. También se aplica a otras construcciones de forcing como en la teoría de cardinales invariantes del continuo.

En su forma general $\diamondsuit_\kappa$ ha sido mostrado para $\kappa$ cardinal medible. Sin embargo no se sabe aún para el caso $\kappa$ débilmente compacto. Si $\kappa > \omega$ es regular y $V = L$ entonces vale $\diamondsuit_\kappa$ (en [13] Ejercicio 12 capítulo VI). Aquí mostramos este principio para cardinales fuertemente desdoblables.

La prueba retoma una sugerencia de Martin Zeman, pero antes necesitamos los siguientes lemas:

**Lema 3.1** *Sea $\kappa$ cardinal desdoblable. Si $M'$ es un modelo bueno y $A \subseteq V_\kappa$ tal que $|A| = \kappa$ entonces existe un $M$ modelo bueno que satisface $M', A \subseteq M$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\eta >> \kappa$ de manera que $V_\eta \models ZF^-$, entonces por el teorema 2.8 existe un $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \prec V_\eta$ y $A, M' \subseteq \mathcal{B}$ y además $|\mathcal{B}| = \max\{|M|, |A|\} + \omega$. Sea $M$ igual al colapso transitivo de $\mathcal{B}$.

□

**Lema 3.2** *Sea $\kappa$ cardinal. Ser "club" en $\kappa$ es una noción absoluta para modelos transitivos.*

DEMOSTRACIÓN: La fórmula $\varphi$ que define ser club es una fórmula acotada:

$$\forall \alpha \in \kappa \exists \beta \in C (\alpha < \beta) \text{ y } \forall \delta \in \kappa (C \cap \delta \text{ no acotado en } \delta \to \delta \in C).$$

□

Esto quiere decir que para $M$ modelo transitivo con $C, \kappa \in M$, $V \models C \subseteq \kappa$ club si y sólo si $M \models C \subseteq \kappa$ club.

**Teorema 3.3** *Si $\kappa$ es $\kappa + 2$-fuertemente desdoblable, entonces vale $\diamondsuit_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\kappa$ es inaccesible $|V_\kappa| = \kappa$. Entonces el conjunto

$$A = \{\langle S, C\rangle : S, C \subseteq \kappa,\ C \text{ cerrado y acotado y } S \subseteq \sup C\}$$

es de tamaño $\kappa$ (es equipotente con $P_{<\kappa}(\kappa)$, partes de $\kappa$ de tamaño menor que $\kappa$).

Sea $M'$ un modelo canónico, es decir $M' \models ZF^-$ transitivo, $|M'| = \kappa$, $\kappa \in M'$. Por el teorema 2.8 (Löwenheim-Skolem descendente) podemos conseguir un modelo $M$ también de tamaño $\kappa$ tal que $A \subseteq M$. Entonces como $\kappa$ es $\kappa + 2$-fuertemente desdoblable existe una inmersión $j : M \to N$ con $V_{\kappa+2} \cup \{\kappa + 2\} \subseteq N$.

Sea $B$ el siguiente subconjunto de $A$

$$\{\langle S_\xi, C_\xi\rangle : \xi < \kappa\},$$

definido en forma inductiva. $S_0 = C_0 = \emptyset$, si $\xi = \beta + 1$ entonces $S_\xi = C_\xi = \xi$, para $\xi$ límite si $C_\xi \subseteq \xi$ es cerrado y cofinal en $\xi$ tal que $\forall \gamma \in C_\xi\ (S_\xi \cap \gamma \neq S_\gamma)$,

$\xi$ mínimo para la enumeración de $A$. En caso contrario $S_\xi = C_\xi = \xi$, tal sucesión es de tamaño $\kappa$.

La prueba se hace por contradicción. Supongamos que $\diamondsuit_\kappa$ no vale entonces existen $X, C \subseteq \kappa$, $C$ club en $\kappa$ con $X, C \in M$ (de nuevo sin pérdida de generalidad por 3.1) tales que $\forall\gamma \in C(X \cap \gamma \neq S_\gamma)$.

Considere ahora $j(A)$ en $N$. Como $j$ es una inmersión elemental de $M$ en $N$, entonces

$$j(\{\langle S, C\rangle : S, C \subseteq \kappa,\ C \text{ cerrado y acotado y } S \subseteq \sup C\}) =$$
$$\{\langle \mathcal{S}, \mathcal{C}\rangle : \mathcal{S}, \mathcal{C} \subseteq j(\kappa), \mathcal{C} \text{ cerrado y acotado y } \mathcal{S} \subseteq \sup \mathcal{C}\}, \tag{3.1}$$

con la diferencia que $j(A)$ es de tamaño $j(\kappa)$. En $N$ definimos $D = \langle\langle \mathcal{S}_\xi, \mathcal{C}_\xi\rangle : \xi < j(\kappa)\rangle$ de manera similar que en $M$ a partir de 3.1. $D$ tiene también cardinal $j(\kappa)$. Claramente $\langle X, C\rangle$ está en $D$; tomamos una enumeración de $D$ tal que $\langle \mathcal{S}_\kappa, \mathcal{C}_\kappa\rangle = \langle X, C\rangle$.

Pero $C \subseteq j(C)$ y como $C$ es no acotado en $\kappa$ entonces $\kappa \in j(C)$ ya que $N \models j(C)$ es club. Por otro lado como $V \models \forall\gamma \in C(X \cap \gamma \neq S_\gamma)$ entonces $M \models \forall\gamma \in C(X \cap \gamma \neq S_\gamma)$. Por la inmersión $N \models \forall\gamma \in j(C)(j(X) \cap \gamma \neq \mathcal{S}_\gamma)$, en particular para $\kappa$, $N \models j(X) \cap \kappa \neq \mathcal{S}_\kappa)$ pero $j(X) \cap \kappa = X$, $V_{\kappa+1} \subseteq N \models X \neq \mathcal{S}_\kappa$ de donde $V_{\kappa+1} \models X \neq \mathcal{S}_\kappa$ y de aquí $V \models X \neq S_\kappa$. Esto contradice la elección de $\mathcal{S}_\kappa, \mathcal{C}_\kappa$ como $\langle X, C\rangle$.

□

Observemos además que si $\kappa$ es medible, como el conjunto de cardinales de Ramsey debajo de $\kappa$ tiene medida uno (Ejercicio 7.19 en [11]) y todo cardinal de Ramsey es un cardinal desdoblable entonces el conjunto de cardinales desdoblables debajo de un cardinal medible tiene medida uno.

**Lema 3.4** *Si $\kappa$ es $\kappa + 5$-fuertemente desdoblable entonces el conjunto*

$$\{\alpha < \kappa : \alpha \textit{ débilmente compacto }\}$$

*es estacionario en $\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subseteq \kappa$ club. Como $\kappa$ es $\kappa+5$-fuertemente desdoblable existen $M$ y $C$ tales que $(V_\kappa, \in, C) \prec (M, \in, C')$ y $V_{\kappa+5} \cup \{\kappa + 5\} \subseteq M$. Como $C$ es club en $\kappa$ y $C \subseteq C'$ entonces $\kappa \in C'$ pero $M \models \kappa$ es débilmente compacto (ya que $V_{\kappa+5} \subseteq M$ y $V_{\kappa+5} \models \kappa$ es débilmente compacto), de aquí $(M, \in, C') \models \exists\alpha \in C'\alpha$ débilmente compacto. Pero $(V_\kappa, \in, C) \prec (M, \in, C')$, de donde $(V_\kappa, \in, C) \models \exists\alpha \in C\alpha$ débilmente compacto.

□

Así que si $\kappa$ es fuertemente desdoblable entonces es el $\kappa$-ésimo cardinal débilmente compacto. También si vale GCH en un fuertemente desdoblable no puede ser el primero donde vale por el siguiente resultado:

**Lema 3.5** *Si $\kappa$ es fuertemente desdoblable y $2^\kappa = \kappa^+$ entonces el conjunto de cardinales tales que $2^\alpha = \alpha^+$ es estacionario en $\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subseteq \kappa$ club. Como $\kappa$ es $\kappa+2$-fuertemente desdoblable existen $M$ y $C$ tales que $(V_\kappa, \in, C) \prec (M, \in, C')$ y $V_{\kappa+2} \cup \{\kappa + 2\} \subseteq M$. De manera análoga que en 3.4 encontramos que el conjunto

$$\{\alpha < \kappa : 2^\alpha = \alpha^+\}$$

es estacionario en $\kappa$.

□

Si $V = L$ entonces por medio del teorema 3.9 del capítulo VI en [13], usando 2.8 y tomando el colapso transitivo, el $M$ de las dos pruebas anteriores es un $L_\beta$ para algún $\beta$ ordinal límite. De esta manera, como los conjuntos estacionarios en $\kappa$ son conjuntos no acotados en $V_\kappa$, entonces tampoco son acotados en $L_\beta$ (que es $M$). Pero $L_\beta$ calcula correctamente la compacidad débil (o GCH). De esta manera los conjuntos estacionarios en $\kappa$ de los lemas 3.4 y 3.5 resultan ser no acotados en el universo puesto que podemos conseguir extensiones elementales de $V_\kappa$ tan altos como se quiera de la forma $L_\beta$ (si $V = L$).

Por otro lado,

**Lema 3.6** *Sea $\kappa$ un cardinal desdoblable y*

$$S = \{\alpha < \kappa \,:\, \alpha \textit{ no es débilmente compacto}\},$$

*$S$ es estacionario.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\kappa$ es regular el conjunto de cardinales debajo de $\kappa$ CARD es club en $\kappa$. Sabemos que

$$S^\kappa_\omega = \{\alpha < \kappa \,:\, cof(\alpha) = \omega\}$$

es estacionario en $\kappa$. Entonces si $C \subseteq \kappa$ es club, $C \cap$CARD también es club y de aquí que el conjunto de cardinales de cofinalidad $\omega$ es estacionario debido a que es igual a

$$\mathrm{CARD} \cap S^{\kappa}_{\omega}.$$

de donde $C \cap (CARD \cap S^{\kappa}_{\omega}) = (C \cap CARD) \cap S^{\kappa}_{\omega} \neq \emptyset$ ya que $C \cap CARD$ es club.

□

Todo club debajo de un fuertemente desdoblable tiene a un débilmente compacto y a un no débilmente compacto.

# Capítulo 4

# Resultado principal

En este capítulo obtenemos una consecuencia que establece una diferencia entre cardinales desdoblables y cardinales fuertemente desdoblables. En los lemas 3.4 y 3.5 mostramos que si un cardinal es fuertemente desdoblable entonces tanto el conjunto de débilmente compactos como el de no débilmente compactos son estacionarios para un cardinal $\kappa$ fuertemente desdoblable, es decir todo club debajo de $\kappa$ contiene tanto débilmente compactos como no débilmente compactos. En este caso forzamos un modelo de un cardinal desdoblable (que en la extensión no puede ser fuertemente desdoblable) para el cual hay un club completamente contenido en el conjunto de cardinales no débilmente compactos. No puede ser cardinal fuertemente desdoblable ya que el conjunto de débilmente compactos debajo de cardinales fuertemente desdoblables es estacionario siempre.

La prueba consiste en "lanzar" mediante el forcing natural el club requerido. Pero para asegurar que se preserva la desdoblabilidad luego del lanzamiento del club es necesario hacer previamente un forcing (el forcing reverso de Easton). Sin embargo este forcing iterado por sí solo no siempre preserva la desdoblabilidad (ver Teorema 4.4 en [17]). Aquí es donde entran a jugar un papel importante las funciones rápidas, la función rápida la usamos para determinar los niveles activos de la preparación lotería y en última para obtener suficiente clausura.

En todo lo que resta del trabajo $\kappa$ es un cardinal desdoblable, $S$ es el conjunto de cardinales no débilmente compactos debajo de $\kappa$ e $\Im$ es el conjunto de cardinales inaccesibles debajo de $\kappa$.

**Teorema 4.1** *Si $j : M \to N$ es una inmersión $(\kappa, \theta)$-desdoblable y $\theta \geq \kappa^+$,* *entonces $N$ no es una $M$-ultrapotencia.*

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición 2.21, si $j$ fuese una $M$-ultrapotencia, entonces

$$N = \{j(f)(a) \,:\, f \in M\}$$

para alguna semilla $a$. De donde $|N| = \kappa$, pero esto no puede ser ya que $\theta \in N$ y $N$ es transitivo entonces $|N| \geq |\theta|$.

□

Lo que sigue ahora es encontrar una inmersion $(\kappa, \theta)$-desdoblable $j$ de manera que $\kappa \in j(S)$, el primer paso es encontrar un $M$-ultrafiltro $W$ relativo tal que $S \in W$, luego tomamos la ultrapotencia de $M$ con $W$ de manera que $\kappa \in j(S)$, lo que restaría ver es que $j(\kappa) \geq \theta$.

Los siguientes resultados valen para cardinales $\kappa$ que admiten inmersiones elementales conjuntistas, es decir funciones $j : M \to N$ las cuales son inmersiones elementales con $M \models ZF^-$, $|M| = \kappa$ y $M, N$ conjuntos y punto crítico de $j$ es $\kappa$. En particular si $\kappa$ es un cardinal débilmente compacto o desdoblable.

**Lema 4.2** *Si $j : M \to N$ es una inmersión con punto crítico $\kappa$ y $X \in U_j$ si y sólo si*

$$X \in M \cap P(\kappa) \quad y \quad \kappa \in j(X)$$

*entonces $U_j$ es un $M$-ultrafiltro normal.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\kappa < j(\kappa)$ y $j(\kappa)$ es un ordinal entonces $\kappa \in U_j$. Si $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa} \subseteq M$ es un subconjunto de $U_j$, veamos que $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in U_j$, es claro que $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in M$ por comprensión. Por definición

$$\Delta_{\gamma<\kappa} X_\gamma = \{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{\gamma<\alpha} X_\gamma\} = \{\alpha < \gamma : \forall \gamma < \alpha(\alpha \in X_\gamma\},$$

entonces hay que probar que $\kappa \in j(\Delta_{\gamma<\kappa} X_\gamma)$, pero

$$x \in j(\Delta_{\gamma<\kappa} X_\gamma)$$

si y sólo si

$$x < j(\kappa) \text{ y } \forall \gamma < x(x \in j(X_\gamma))$$

pero $\kappa \in j(X_\gamma)$ por hipótesis. Faltaría ver que es un ultrafiltro, sea $X \in M$ y $X \subseteq \kappa$, si $X \notin U_j$ entonces por definición $\kappa \notin j(X)$ y por otra parte $\kappa \setminus X \in M$ por comprensión y como $\kappa \in j(\kappa) = j(\kappa \setminus X) \cup j(X)$ entonces $\kappa \in j(\kappa \setminus X)$.

$\square$

**Lema 4.3** *Existe un $M$-ultrafiltro normal $W$ sobre $\kappa$ tal que $S \in W$.*

Demostración: Sea $S$ el conjunto de los cardinales no débilmente compacto debajo de $\kappa$, si $S \in U_j$ tomamos simplemente $W = U_j$ si no la prueba se hace por inducción, supongamos que $S \notin U_j$ y que para cada $\alpha < \kappa$ débilmente compacto se tiene que existe un $M_\alpha$-ultrafiltro normal $U_\alpha$ sobre $\alpha$ tal que $S \cap \alpha \in U_\alpha$, sea $W$ el siguiente conjunto

$$X \in W \text{ si y sólo sí } \{\alpha \in \kappa \setminus S : X \cap \alpha \in U_\alpha\} \in U_j,$$

$W$ es un $M$-ultrafiltro con $S \in W$ como probamos en el lema siguiente (también es clásico pero no esta hecho en ninguna parte):

$\square$

**Lema 4.4** *$W$ es un $M$-ultrafiltro normal.*

Demostración: a) Por definición $\kappa \in M$ y como $S \notin U_j$ entonces $\kappa \setminus S \in U_j$ por ser $U_j$ ultrafiltro; probar que $\kappa \in W$, equivale a verificar que

$$\{\alpha \in \kappa \setminus S \,:\, \kappa \cap \alpha \in U_\alpha\} \in U_j$$

pero $\kappa \cap \alpha = \alpha \in U_\alpha$ por hipótesis entonces

$$\{\alpha \in \kappa \setminus S \,:\, \kappa \cap \alpha \in U_\alpha\} = \{\alpha \in \kappa \setminus S \,:\, \alpha \in U_\alpha\} \in U_j.$$

b) Normalidad. Sea $(X_\beta)_{\beta<\kappa} \subseteq W$ una familia de subconjuntos de $\kappa$ en $M$, veamos que $\Delta_{\beta<\kappa} X_\beta \in W$.Por definición

$$\Delta_{\beta<\kappa} X_\beta = \{\xi < \kappa : \xi \in \bigcap_{\beta<\xi} X_\beta\}$$

debemos probar que

$$\{\alpha \in \kappa \setminus S : (\Delta_{\beta<\kappa} X_\beta) \cap \alpha \in U_\alpha\} \in U_j$$

observemos primero que $(\Delta_{\beta<\kappa} X_\beta) \cap \alpha = (\Delta_{\beta<\alpha} X_\beta) \cap \alpha = \Delta_{\beta<\alpha}(X_\beta \cap \alpha)$ pero por hipótesis $\Delta_{\beta<\alpha}(X_\beta \cap \alpha) \in U_\alpha$ ($U_\alpha$ es normal sobre $\alpha$).

c)Ultrafiltro. Si $X \notin W$ entonces es porque

$$\{\alpha \in \kappa \setminus S : X \cap \alpha \in U_\alpha\} \notin U_j,$$

Pero $U_j$ es ultrafiltro entonces

$$\kappa \setminus \{\alpha \in \kappa \setminus S : X \cap \alpha \in U_\alpha\} \in U_j,$$

pero $\beta \in \kappa \setminus \{\alpha \in \kappa \setminus S : X \cap \alpha \in U_\alpha\} \in U_j$ si y sólo si

$$\beta \in \kappa \text{ y } \beta \notin \{\alpha \in \kappa \setminus S : X \cap \alpha \in U_\alpha\}$$

lo que equivale a $\beta \in S$ ó si $\beta \in \kappa \setminus S$ entonces $X \cap \beta \notin U_\beta$. Pero $X \cap \beta \notin U_\beta$ implica que $\beta \setminus (X \cap \beta) \in U_\beta$, es decir que $\beta \setminus X \in U_\beta$. Entonces $\beta \in S$ ó $\beta \setminus X = (\kappa \setminus X) \cap \beta \in U_\beta$. De donde

$$\kappa \setminus \{\alpha \in \kappa \setminus S : X \cap \alpha \in U_\alpha\} = S \cup \{\alpha \in \kappa \setminus S : (\kappa \setminus X) \cap \alpha \in U_\alpha\}$$

pero por hipótesis $S \notin U_j$ entonces $\{\alpha \in \kappa \setminus S : (\kappa \setminus X) \cap \alpha \in U_\alpha\} \in U_j$ de donde $\kappa \setminus X \in W$.

□

**Lema 4.5** *$Ult(M,W)$ es bien fundamentado.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que no lo fuera, entonces en $Ult(M,W)$ habria una sucesión $([f_i]_W)_{i<\omega}$ $E_W$-descendente infinita ($E_W$ es la relación binaria inducida por $\in$ en $Ult(M,W)$):

$$\cdots E_W [f_{i+1}]_W E_W [f_i]_W E_W \cdots$$

Caso 1. Si $W = U_j$, como $Ult(M,U_j)$ está inmerso naturalmente en $N$ por la función $k([f]_{U_j}) = j(f)(\kappa)$, entonces tendríamos en $N$ la sucesión $(j(f_i)(\kappa))_{i<\omega}$ y $\cdots \in j(f_{i+1})(\kappa) \in j(f_i)(\kappa) \in \cdots$, pero esto es imposible ya que $N$ es bien fundamentado.

Caso 2. Si $W \neq U_j$ lo que tenemos es que para cada $i \in \omega$

$$X_i = \{\alpha < \kappa : f_{i+1}(\alpha) \in f_i(\alpha)\} \in W,$$

esto equivale a que

$$\{\beta \in \kappa \setminus S : X_i \cap \beta \in U_\beta\} \in U_j,$$

es decir para cada $i < \omega$ y para muchos $\beta < \kappa$

$$X_i \cap \beta = \{\alpha < \beta : f_{i+1}(\alpha) \in f_i(\alpha)\} \in U_\beta.$$

Sea $\omega < \beta$ fijo, entonces $(X_i)_{i<\omega} \subseteq U_\beta$, pero $U_\beta$ es $M_\beta - \beta$-completo, entonces

$$X = \bigcap_{i<\omega} X_i \in U_\beta,$$

en particular $X \neq \emptyset$, sea $\gamma \in X$, entonces tenemos que

$$\cdots \in f_{i+1}(\gamma) \in f_i(\gamma) \in \cdots.$$

Contradicción ya que $M$ es bien fundamentado.

□

Observemos que si $j : M \to M_W$ es la inmersión natural de $M$ en $M_W$, como $S \in W$ entonces $\kappa \in j(S)$ y viceversa.

**Teorema 4.6** *Sea $\kappa$ cardinal $\theta+1$-desdoblable y $M$ un modelo bueno. Entonces existe una inmersión $(\kappa, \theta+1)$-desdoblable canónica $j_0 : M \to N_0$ tal que $\kappa \in j_0(S)$, donde*

$$S = \{\alpha < \kappa : \alpha \textit{ no débilmente compacto }\}.$$

Demostración: Sea $M$ modelo bueno, sea $j : M \to N$ una inmersión $(\kappa, \theta+1)$-desdoblable, $W$ el $M$-ultrafiltro del lema 4.3 y $\widetilde{M}$ modelo transistivo de ZF$^-$ tal que $M, j, W \in \widetilde{M}$, $M \prec \widetilde{M}$ y $\widetilde{M} \models j : M \to N$ es inmersión $\theta+1$-desdoblable. Vamos a exigirle además que $\widetilde{M} \models j : M \to N$ inmersión $(\kappa, \theta+1)$- desdoblable si y sólo si $V \models j : M \to N$ inmersión $(\kappa, \theta+1)$-desdoblable (es posible?). La existencia de $\widetilde{M}$ la probamos de la siguiente manera, primero por el teorema 2.8 hay un modelo $K$ con $M, j, W \in K$ y $\theta+1 \subseteq K$, tomando el colapso transitivo de Mostowski $K \cong K'$ de donde $K'$

es transitivo, $|K'| \geq |\theta|$ pues $\theta + 1 \subseteq K$. Tomamos $\widetilde{M} = K'$. Sea $Ult(\widetilde{M}, W)$ el ultraproducto de $\widetilde{M}$ por $W$ (tiene sentido?), $h : \widetilde{M} \to Ult(\widetilde{M}, W)$ la inmersión natural asociada al ultraproducto y sea $\pi : Ult(\widetilde{M}, W) \to \widetilde{M}_W$ su colapso transitivo. La inmersión $h \circ \pi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}_W$ es elemental. Por esto $\theta + 1 \leq \pi(h(\theta + 1)$ en $\widetilde{M}_W$ (Proposición 5.1 en [11]). Entonces $\widetilde{M}_W \models \pi \circ h(j) : \pi(h(M)) \to \pi(h(N))$ inmersión $(\pi(h(\kappa)), \pi(h(\theta + 1)))$-desdoblable. Escribiremos a partir de este momento $r$ en lugar de $h(j)$ por claridad.

Ahora como $cp(h) = \kappa$ entonces $h \restriction \widetilde{M}_\kappa = I_\kappa$, entonces $\widetilde{M}_\kappa \subseteq Ult(\widetilde{M}, W)$, en particular $\kappa \subseteq Ult(\widetilde{M}, W)$, por lo tanto $\pi(\kappa) = \kappa$.?

Observemos que $cp(\pi \circ h) = \kappa$ (es decir el primer ordinal movido es $\kappa$ y $\pi(h(\kappa)) > \kappa$, no puede ser que $\pi(h(\kappa)) = \kappa$ por ser $\pi$ un isomorfismo ya que $\pi(\kappa) = \kappa$ y $h(\kappa) > \kappa$) y que $\pi(h(\theta + 1)) \geq \theta + 1$ por ser $\pi \circ h$ inmersión elemental y $\widetilde{M}, \widetilde{M}_W$ transitivos (Proposición 5.1 en [11]) y lo más importante que $\kappa \in h(S)$ (esto por lo siguiente $\kappa \in h(S)$ según $Ult(\widetilde{M}, W)$, luego $\pi(\kappa) = \kappa \in \pi(h(S))$ en $\widetilde{M}_W$ que es lo mismo que en $V$ por ser $\widetilde{M}_W$ transitivo). También tenemos que a) $cp(r) = h(\kappa)$, b) $r(\kappa) \geq h(\theta + 1) \geq \theta + 1 > \kappa$ c) $\kappa \in h(S)$ y $[h(S) \subseteq r(h(S))]^{Ult(\widetilde{M}, W)}$ (pues $cp(r) = h(\kappa)$). Para poder continuar necesitamos demostrar lo siguiente: Si $\widetilde{M}_W \models h(j) : h(M) \to h(N)$ inmersión $(h(\kappa), h(\theta + 1))$-desdoblable entonces $V \models h(j) : h(M) \to h(N)$ inmersión $(h(\kappa), h(\theta + 1))$-desdoblable. Si $\pi \circ h : \widetilde{M} \to \widetilde{M}_W$ es una inmersión elemental luego $\pi \circ h \restriction M : M \to h(M)$ es también una inmersión elemental. Demostrado este resultado entonces $l : M \to \pi(h(N))$ es una inmersión $(\kappa, \theta + 1)$-desdoblable donde $l = \pi \circ r \circ h$ con $\kappa \in l(S)$.

Sea

$$X = \{j_1(g)(s) : g \in M \text{ y } s \in (\theta + 1)^{<\omega}\},$$

$X \prec N_1$ por el lema 2.23, además podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I_\kappa \in M$ ($I_\kappa$ es la identidad sobre $\kappa$). Entonces $I_{j_1(\kappa)} \in N_1$ y por lo tanto tenemos que $\theta + 1 \subseteq X$ (recordemos que $j_1(\kappa) \geq \theta + 1$). Si $\pi : X \to N_0$ es el colapso transitivo de $X$ ($X$ es bien fundamentado por serlo $N_1$), $\pi \restriction \theta + 1 = I_{\theta+1}$ pues $\theta + 1 \subseteq X$. Sea

$$N_0 = \{j_0(g)(s) : g \in M \text{ y } s \in (\theta + 1)^{<\omega}\},$$

donde $j_0 = \pi \circ j_1$, entonces $j_0 : M \to N_0$ es una inmersión $\theta + 1$-desdoblable canónica por ser $\pi$ un isomorfismo. Lo único que hay que comprobar es que $j_0(\kappa) \geq \theta + 1$, pero $\pi \restriction \theta + 1 = I_{\theta+1}$ y $j_1(\kappa) \geq \theta + 1$ y por ser $\pi$ un isomorfismo $\pi(j_1(\kappa)) = j_0(\kappa) \geq \theta + 1$. Por último como $\kappa \in j_1(S)$ entonces

$\pi(\kappa) = \kappa \in \pi(j_1(S)) = j_0(S)$ en $N_0$, pero por ser $N_0$ transitivo es cierto en el universo.

$\square$

***

Sea $M$ bueno y $j : M \to N$ inmersión $\theta + 1$-desdoblable.
1. Construir $\widetilde{M}$ modelo de $\mathrm{ZF}^-$ transitivo tal que $j, W \in \widetilde{M}$ ($W$ es el $M$-ultrafiltro del lema 4.3) y que $\widetilde{M} \models j : M \to N$ es inmersión $\theta+1$-desdoblable (no es necesario que se de cuenta que $\kappa$ es $\theta + 1$-desdoblable!). Usar lema 2.8.
2. Extender el $M$-ultrafiltro $W$ a un $\widetilde{M}$-ultrafiltro $\widetilde{W}$. $X \in \widetilde{W}$ si y sólo si $X \in \widetilde{M}$ y $\kappa \in j(X)$. En este caso como $W \in \widetilde{M}$, $W = \widetilde{W}$.
3. Considerar $Ult(\widetilde{M}, \widetilde{W})$ y la inmersión elemental asociada $h : \widetilde{M} \to Ult(\widetilde{M}, \widetilde{W})$.
4. Considerar luego $\pi : Ult(\widetilde{M}, W) \to \widetilde{M}_W$ el colapso transitivo de $Ult(\widetilde{M}, W)$. Recordar que $\pi$ es un isomorfismo.
5. $\pi \circ h : \widetilde{M} \to \widetilde{M}_W$ es una inmersión elemental.
6. $\widetilde{M}_W \models \pi(h(j)) : \pi(h(M)) \to \pi(h(N))$ es una inmersión $\pi(h(\theta + 1))$-desdoblable.
7. $V \models \pi(h(j)) : \pi(h(M)) \to \pi(h(N))$ es una inmersión $\pi(h(\theta + 1))$-desdoblable.
Aqui hay que tener cuidado con varios puntos. Sea $\varphi$ una fórmula y $a \in \pi(h(M))$. Afirmo que $\pi(h(M)) = \pi([f])$ y $a = \pi([g])$. (1?)

a) Supongamos que $\pi(h(M)) \models \varphi[a]$. $\widetilde{M} \models \pi(h(M)) \models \varphi[a]$ (2?). Como $V \models \pi : Ult(\widetilde{M}, W) \to \widetilde{M}_W$ es un isomorfismo entonces $Ult(\widetilde{M}, W) \models [f] \models \varphi[[g]]$.

b)$Ult(\widetilde{M}, W) \models h(j)$ es una $h(\theta + 1)$ inmersión (desdoblable). Entonces $Ult(\widetilde{M}, W) \models h(j)([f]) \models \varphi[h(j)([g])]$.

c) Por la segunda frase de a) $\widetilde{M}_W \models \pi(h(j)([f])) \models \varphi[\pi(h(j)([g]))]$, es decir $\widetilde{M}_W \models \pi(h(j)(h(M))) \models \varphi[\pi(h(j)(a))]$.

c) $V \models \pi(h(j)(h(M))) \models \varphi[\pi(h(j)(a))]$ (3?).

8. La función $\delta : M \to \pi(h(N))$ definida por $\delta(x) = \pi(h(j))(\pi(h(x))$ es una inmersión $(\kappa, \theta + 1)$-desdoblable con $\kappa \in \delta(S)$. Una forma de expresar más clara la función $\delta$ es la siguiente $\delta = \pi(h(j)) \circ \pi \circ h$.

a) $cp(\delta) = \kappa$ pues $cp(h) = \kappa$ que es la primera función que aparece en la aplicación de $\delta$.

b) $\kappa \in \delta(S)$. 1) $\pi(\kappa) = \kappa$ pues $\kappa \subseteq M_\kappa$ y $M_\kappa \subseteq h(M)$ por ser $cp(h) = \kappa$, entonces $\kappa \subseteq h(M)$, por lo tanto el colapso transitivo de $\kappa$ es el mismo, es decir $\pi(\kappa) = \kappa$. 2) $\kappa \in h(S)$ pues $S \in W$. Por 1) $\pi(\kappa) = \kappa \in \pi(h(S))$ en $\widetilde{M}_W$ o lo que es lo mismo en $V$ por ser $\widetilde{M}_W$ transitivo. 3) $cp(\pi(h(j)) = \pi(h(\kappa)$ y además $\pi(h(\kappa)) > \kappa$ pues $\pi$ es un isomorfismo y tenemos ya que $\pi(\kappa) = \kappa$ y que $h(\kappa) > \kappa$. 4) Como $cp(\pi(h(j))) > \kappa$ y $\kappa \in \pi(h(S))$ entonces $\kappa \in \pi(h(j))(\pi(h(S)) = \delta(S)$.

c) $\widetilde{M}_W \models \pi(h(j))$ es una $\pi(h(j(\theta+1)))$ inmersión. Es decir $\pi(h(j))(\kappa) \geq \pi(h(j(\theta+1)))$ en $\widetilde{M}_W$, pero $\pi(h(j(\theta+1))) \geq j(\theta+1) \geq \theta+1$ en $\widetilde{M}_W$ por ser $\pi \circ h$ inmersión elemental. Pero por ser $\widetilde{M}_W$ transitivo también vale en $V$ que $\delta(\kappa) = \pi(h(j))(\kappa) \geq \theta + 1$.

La transitividad de $\widetilde{M}_W$ es necesaria para que valga también en $V$ que $\delta(\kappa) \geq \theta+1$ (esto es cierto en $\widetilde{M}_W$ pero si $\widetilde{M}_W$ es transitivo es cierto también en $V$, como $\theta + 1 \in \widetilde{M}_W$ y si $\widetilde{M}_W$ es transitivo entonces $|\widetilde{M}_W| \geq |\theta+1|)$ . Entonces $\widetilde{M}_W$ tiene un cardinal por lo menos igual a $|\theta+1|$ y también $\widetilde{M}$ pues por un lema de Hamkins $\widetilde{M}$ y $\widetilde{M}_W$ tienen el mismo cardinal. La mayoría de los pasos estan comprobados, el paso 1 no lo tengo del todo claro, pues el modelos $\widetilde{M}$ no es de tamaño $\kappa$, a pesar de que se extiende el $M$-ultrafiltro $W$ a un $\widetilde{M}$-ultrafiltro a $\widetilde{W}$ aparentemente, queda igual que $W$ (paso 2).

***

**Definición 4.7** *Dado $\kappa$ cardinal y $S \subseteq \kappa$ el* ***forcing club***

$$\mathbb{Q}_S = \{c \subseteq \kappa : c \text{ es cerrado y acotado y } c \cap \Im \subseteq S\}$$

*lanza un club $C \subseteq \kappa$ tal que $C \cap \Im \subseteq S$. Las condiciones del forcing club están ordenadas por la contenencia inversa, es decir $c' \leq c$ si y sólo si $c \subseteq c'$.*

Antes de la prueba de la proposición principal, se necesita el siguiente resultado.

**Lema 4.8** *$\mathbb{Q}_S$ es permitido en el nivel $\kappa$.*

Demostración: Sea $\beta < \kappa$, basta verificar que el conjunto $A_\beta$ de los $c$ de $\mathbb{Q}_S$ que tienen un elemento encima de $\beta$ es $\leq \beta$-cerrado abierto denso. Es denso: sea $c \in \mathbb{Q}_S$, por ser acotado existe $\alpha < \kappa$ tal que $c \subseteq \alpha$, sea $\gamma = max\{\alpha, \beta\}$, entonces $c' \in A_\beta$ donde $c' = \gamma + 5$. Sea $\xi \leq \beta$ y $(c_\delta)_{\delta<\xi}$ una sucesión descendente contenida en $A_\beta$. Si tomamos la unión de la sucesión y agregamos el supremo de tal unión entonces tal condición (la unión junto con el $sup$) está en $A_\beta$ debajo de la sucesión y además el supremo no es inaccesible (ya que está por encima de $\beta$ pero fue alcanzado por una $\beta$-sucesión) y no hay más posibles cardinales inaccesibles que pudiesen aparecer en la unión.

□

El forcing club preserva todos los cardinales y cofinalidades.

**Teorema 4.9** *Sea $\kappa$ un cardinal desdoblable. Entonces existe una extensión de forcing que hace que la desdoblabilidad de $\kappa$ sea indestructible bajo el forcing club $\mathbb{Q}_S$ donde $S$ es el conjunto de cardinales no débilmente compactos debajo de $\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Esta prueba sigue el esquema de las pruebas de los teorema 3 y 4 en [6]. Sea $\theta \in On$ fijo y sea $j : M \to N$ inmersión $(\kappa, \theta + 1)$ desdoblable canónica que satisface $\kappa \in j(S)$ (Teorema 4.6).

Añadimos primero la función rápida $f \vdots \kappa \to \kappa$ mediante el forcing de la función rápida $\mathbb{F}$. Luego extendemos la inmersión $j$ a una inmersión $j$ en $V[f]$ (Teorema 2.52). Entonces $j$ se extiende a una función $j : M[f] \to N[j(f)]$ en $V[f]$ (que se denota con la misma expresión $j$) con $j(f)(\kappa) > \theta$. Observemos que $j(f) \vdots j(\kappa) \to j(\kappa)$ y como $j(f)$ está definido en $\kappa$, es más $j(f)(\kappa) > \theta$, $\kappa \in$dom$j(f)$. De aquí el próximo elemento de dom$(j(f))$ después de $\kappa$ es mayor que $\theta$ (por la rapidez de $f$). Definimos entonces en $V[f]$ la preparación lotería $\mathbb{P}_{lot}$ respecto a la función rápida $f$. Supongamos que $G \subseteq \mathbb{P}_{lot}$ es $V[f]$-genérico. El paso siguiente es extender la inmersión $j$ a $V[f][G]$, entonces es suficiente con definir $j(G)$(ver nota luego del teorema 2.54).

Notemos que $j(\mathbb{P}_{lot})$ es también un forcing iterado, es más consiste de $j(\kappa)$ niveles (ya que $\mathbb{P}_{lot}$ es una $\kappa$-iteración). $\mathbb{Q}_S$ es permitido en el nivel $\kappa$ de $j(\mathbb{P}_{lot})$ por el lema 4.8. Sea $\langle \kappa, (\mathbb{Q}_S, p) \rangle$ la condición que escoge a $\mathbb{Q}_S$ en el nivel $\kappa$, como $j(\mathbb{P}_{lot}) \restriction \langle \kappa, (\mathbb{Q}_S, p) \rangle \cong j(\mathbb{P}_{lot})$ asi bajo $\langle \kappa, (\mathbb{Q}_S, p) \rangle$ el forcing $j(\mathbb{P}_{lot})$ se puede factorizar como $\mathbb{P}_{lot} * \mathbb{Q}_S * \mathbb{P}_{cola}$ (ver aclaración despues del teorema 2.53). Sea $C \subseteq \mathbb{Q}_S$ $V[f][G]$-genérico. Podemos usar $G * C$ como el genérico hasta la etapa $\kappa$. El forcing restante $\mathbb{P}_{cola}$ es $\leq \theta$-cerrado sobre $N[j(f)][G][C]$ ya que $j(f)(\kappa) > \theta$ implica que el próximo elemento de dom$j(f)$ esta más alla de $\theta$. Sea $X = \{j(g)(\kappa, \theta) : g \in M[f]\}$, por el lema del casco de semilla (lema 2.23) $X \prec N[j(f)]$ y sea $\pi : X \cong N_0[j_0(f)]$ su colapso transitivo, donde $j_0 = \pi \circ j$ y $h = \pi^{-1}$.
Observemos que $N_0[j_0(f)]^{<\kappa} \subseteq N_0[j_0(f)]$. Como todo conjunto en $N_0[j_0(f)]$ puede ser enumerado, una sucesión de conjuntos es una sucesión de ordinales (por elección). Así que es suficiente mostrar que $(\xi^{<\kappa})^{V[f]} \subseteq N_0[j_0(f)]$, donde $\xi = ORD^{N_0} = ORD^{N_0[j_0(f)]}$. En efecto, mostramos que $(\xi^{<\kappa})^{V[f]} \subseteq N_0[f]$. Supongamos que $s = \langle \gamma_\alpha : \alpha < \beta \rangle \in (\xi^{<\kappa})^{V[f]}$. Puesto que $\beta < \kappa$, $s \in V[f \restriction \beta]$ ya que el resto del forcing que agrega $f \restriction [\beta, \kappa)$ es $\leq \beta$-cerrado y no puede

agregar sucesiones pequeñas. Es decir, $s$ tiene un $\mathbb{F}_\beta$-nombre $\dot{s}$ en $V$. Este nombre da resultado a la siguiente sucesión $\langle \dot{s_\alpha} : \alpha < \beta \rangle$ de $\mathbb{F}_\beta$-nombres, donde $s_\alpha$ es un $\mathbb{F}_\beta$-nombre bueno para el $\alpha$-ésimo ordinal en la sucesión de $\dot{s}$. Como el forcing $\mathbb{F}_\beta$ tiene cardinal menor que $\kappa$, un $\mathbb{F}_\beta$-nombre bueno para una $\beta$-sucesión de ordinales puede ser codificado como una sucesión de ordinales de longitud menor que $\kappa$. Puesto que $N_0^{<\kappa} \subseteq N_0$ en $V$, cada nombre $\dot{s_\alpha}$ esta en $N_0$. Así que la sucesión $\langle \dot{s_\alpha} : \alpha < \beta \rangle$ de nombres esta igualmente en $N_0$. Interpretando estos nombres por el genérico $f$ concluimos que $s = \langle (\dot{s_\alpha})_f : \alpha < \beta \rangle$ esta en $N_0[f]$. Así que $N_0[j_0(f)]^{<\kappa} \subseteq N_0[j_0(f)]$ en $V[f]$.
De manera similar probamos que $N_0[j_0(f)][G]^{<\kappa} \subseteq N_0[j_0(f)][G]$ en $V[f][G]$ y $N_0[j_0(f)]\ [G][C]^{<\kappa} \subseteq N_0[j_0(f)]\ [G][C]$ en $V[f][G][C]$. Es suficiente considerar solamente $\xi^{<\kappa}$ en el modelo apropiado, y aquí también, una $\beta$ sucesión de ordinales en $V[f][G][C]$ está solo en $V[f \restriction \beta][G \restriction \beta]$, de nuevo el argumento anterior establece que un nombre para una sucesión de ordinales se convierte en una sucesión de nombres para ordinales en $N_0$. Evaluamos nuevamente estos nombres mediante el genérico correspondiente para obtener la sucesión original en el modelo deseado.

Ahora podemos factorizar $j_0(\mathbb{P}_{lot})$ como $\mathbb{P}_{lot} * \mathbb{Q}_S * \mathbb{P}^0_{cola}$. Usando $G*C$ como el genérico hasta el nivel $\kappa$, resta por construir una cola genérica $G_0 \subseteq \mathbb{P}^0_{cola}$. Observemos primero que $N_0$ es de tamaño $\kappa$ y de igual manera para cada una de las extensiones $N_0[j_0(f)]$, $N_0[j_0(f)][G]$ y $N_0[j_0(f)][G][C]$. Así que en $N_0[j_0(f)][G][C]$ podemos listar todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}^0_{cola}$ en $N_0$ $[j_0(f)]\ [G][C]$ en una $\kappa$-sucesión. Construimos de manera recursiva una $\kappa$-sucesión descendente de condiciones que intersecten los densos uno a uno. En los pasos límites $\beta < \kappa$, el hecho de que $N_0[j_0(f)][G][C]^{<\kappa} \subseteq N_0[j_0(f)][G][C]$ nos asegura que hasta $\beta$ es posible se puede hacer la construcción de la sucesión, y como $\mathbb{P}^0_{cola}$ es $\kappa$-cerrado en este modelo, hay una condición debajo de el y la construcción se sigue hasta $\kappa$. El filtro $G^0_{cola}$ generado por la sucesión descendente de condiciones existe en $V[f][G][C]$, pero como intersecta los densos relevantes, es $N_0[j_0(f)][G][C]$-genérico para $\mathbb{P}^0_{cola}$.

La inmersión $j_0$ se extiende ha $j_0 : M[f][G] \to N_0[j_0(f)][j_0(G)]$ con $j_0(G) = G * C * G^0_{cola}$. Como $cp(h) > \kappa$, la inmersión $h$ se levanta trivialmente a $h : N_0[j_0(f)][G][C] \to N[j(f)][G][C]$. Para extender la inmersión $h$ al resto del forcing $j_0(\mathbb{P})$ mostramos que el filtro $G_{cola}$ generado por $h''G^0_{cola}$ es $N[j(f)][G][C]$-genérico para $\mathbb{P}_{cola}$.

Cada elemento de $N[j(f)][G][C]$ tiene la forma $j(g)(s)$ para alguna función $g$ en $M[j(f)][G][C]$ y algún $s$ en $(\theta+1)^{<\omega}$. Ahora como $j(g) = h(j_0(g))$, todo elemento de $N[j(f)][G][C]$ tiene la forma $h(r)(s)$ para alguna función $r$ en $N_0[j_0(f)][G][C]$. Además podemos suponer que $r : \theta_0^{|s|} \to N[j(f)][G][C]$, para asegurar que $s$ esta en $\mathrm{dom}(h(r))$. De esta manera, si $D$ es un subconjunto denso abierto de $\mathbb{P}_{cola}$ en $N[j(f)][G][C]$, entonces $D$ debe tener la forma $h(r)(s)$ para alguna $r$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r(\sigma)$ es un subconjunto denso abierto de $\mathbb{P}^0_{cola}$ para cada $\sigma$ en $\theta_0^{|s|}$ (ver aclaración despues del teorema de 2.54) . Pero $\mathbb{P}^0_{cola}$ es $\leq \theta_0$-cerrado en $N_0[j_0(f)][G][C]$, asi que si intersectamos todos estos $r(\sigma)$ obtenemos un conjunto denso $D^*$ en $N_0[j_0(f)][G][C]$ el cual esta contenido en $r(\sigma)$ para cada $\sigma$. Se sigue que $h(D^*)$ está contenido en $D$. Ahora como $D^*$ intersecta $G^0_{cola}$ por genericidad, tenemos también que $h(D^*)$ intersecta a $h''G^0_{cola}$. Asi que $D$ intersecta a $h''G^0_{cola}$.

Concluimos entonces que $G * C * G_{cola}$ es $N[j(f)]$-genérico para $j(\mathbb{P}_{lot})$. Asi que podemos de esta manera levantar $j$ a $j : M[f][G] \to N[j(f)][j(G)]$ con $j(G) = G * C * G_{cola}$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M[f][G] \arrow[d, "j_0"'] \arrow[dr, "j"] & \\
N_0[j_0(f)][j_0(G)] \arrow[r, "h"] & N[j(f)][j(G)]
\end{tikzcd}$$

Como $C$ fue agregado por $j(G)$ en la etapa $\kappa$, entonces $C \in N[j(f)][j(G)]$, y puesto que $\kappa \in j(S)$ el conjunto $\overline{C} = C \cup \{\kappa\}$ es una condición en $j(\mathbb{Q}_S)$. Sea $j(C)$ el $M[f][G][C][G_{cola}]$-genérico por debajo de $\overline{C}$, el cual existe ya que $\mathbb{Q}_S$ es $\kappa$-cerrado entonces $j(\mathbb{Q}_S)$ es $< \theta$-cerrado ($j(\kappa) > \theta$), asi que podemos usar el mismo argumento de factorización para diagonalizar y producir un $N_0[j_0(f)][j_0(G)]$-genérico $C_0 \subseteq j_0(\kappa)$ bajo la condición $\overline{C}$. De nuevo , $h''C_0$ generará un filtro $j(C)$ $N[j(f)][j(G)]$-genérico para $j(\mathbb{Q}_S)$. Así que también podremos levantar la inmersión a $j : M[f][G][C] \to N[j(f)][j(G)][j(C)]$ como se queria. Hemos completado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M[f][G][C] \arrow[d, "j_0"'] \arrow[dr, "j"] & \\
N_0[j_0(f)][j_0(G)][j_0(C)] \arrow[r, "h"] & N[j(f)][j(G)][j(C)]
\end{tikzcd}$$

□

Lo que resta es comprobar que no se crearon débilmente compactos en ninguna instancia. Para esto antes necesitamos el siguiente resultado:

**Teorema 4.10** *Si $\kappa$ es un cardinal desdoblable y $|\mathbb{P}| < \kappa$ orden parcial, entonces $V[G] \models \kappa$ es desdoblable.*

Demostración: Supongamos que $|\mathbb{P}| < \kappa$ orden parcial y $V \models \kappa$ es desdoblable, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{P} \in V_\kappa$, sea $(A \subseteq \kappa)^{V[\mathbb{P}]}$, $A = \dot{A}'_G$ donde $\dot{A}'$ es un nombre para $A$, e igual $\dot{G}'$ es un nombre para $G$, entonces $G', A' \subseteq \kappa$, es más $\dot{G}' \in V_\kappa$ (recordemos que $G \subseteq \mathbb{P}$ y tiene el mismo cardinal del nombre $\dot{G}'$), supongamos que

$$(V_\kappa[G], A) \models \varphi[\tau_G]$$

con $\tau_G \in V_\kappa[G]$. Pero por el teorema de definibilidad del forcing (teorema 3.5, Capítulo VII en [13]) esto solo quiere decir que en $(V_\kappa, \dot{A}')$ vale la fórmula $Fuerza_\varphi[\tau, p, \dot{G}', \mathbb{P}]$, pero $\tau, p, \mathbb{P}, \dot{G}' \in V_\kappa$, entonces por ser $\kappa$ desdoblable en $V$, existen $M$ y $B \subseteq M$ tales que $(V_\kappa, \dot{A}', p, \mathbb{P}, \dot{G}', \tau) \prec (M, B, p, \mathbb{P}, \dot{G}', \tau)$ y $o(M) \geq \theta$ ($p, \mathbb{P}, \dot{G}'$ quedan iguales pues estan como elementos en $V_\kappa$). Entonces en $M$ vale la fórmula

$$Fuerza_\varphi[\tau, p, \dot{G}', \mathbb{P}].$$

Es decir

$$M[G] \models \varphi[\tau_G].$$

De manera similar en la otra dirección, si $M[G] \models \varphi[\tau_G]$ entonces en $M$ vale la fórmula

$$Fuerza_\varphi[\tau, p, \dot{G}', \mathbb{P}],$$

pero $(V_\kappa, \dot{A}', p, \mathbb{P}, \dot{G}', \tau) \prec (M, B, p, \mathbb{P}, \dot{G}', \tau)$ y $\tau, p, \dot{G}', \mathbb{P} \in V_\kappa$ entonces en $V_\kappa$ vale también la fórmula

$$Fuerza_\varphi[\tau, p, \dot{G}', \mathbb{P}],$$

es decir $(V_\kappa[G], A) \models \varphi[\tau_G]$.

$\square$

**Teorema 4.11** *Supongamos que vale SCH. Entonces, dado un cardinal $\kappa$ desdoblable es posible lanzar un club $C \subseteq \kappa$ sin cardinales débilmente compactos usando forcing sin destruir la desdoblabilidad de $\kappa$. Es más, esto se puede hacer preservando todos los cardinales y cofinalidades y sin agregar nuevos cardinales débilmente compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Primero agregamos una función rápida $f$ mediante $\mathbb{F}$. Como suponemos SCH por el teorema 2.49 se preservan todos los cardinales y cofinalidades. Tampóco se crea ningún débilmente compacto, el argumento es el siguiente, consideremos el primer cardinal inaccesible $\theta$ y antes de añadir $f$ agreguemos un subconjunto a $\theta$ mediante $Add(\theta, 1)$, si $\gamma < \kappa$ es débilmente compacto ($\gamma$ es el $\gamma$-ésimo inaccesibles) el forcing total $Add(\theta, 1) * \mathbb{F}$ admite un gap en $\theta^+$ (recordemos que $\mathbb{F}$ es $\kappa$-cerrado y $|Add(\theta, 1)| = \theta$) por lo tanto no se crean nuevos débilmente compactos (teorema 2.55). Por el lema 2.50 $\mathbb{P}^-_{lot}$ (la lotería *modificada*) preservamos cardinales y cofinalidades. Igualmente podemos modificar que $\mathbb{P}_{lot}$ admite un gap y no crear ningún cardinal débilmente compacto. Ninguno de los dos forcings modificados anteriores afecta la desdoblabilidad porque $Add(\theta, 1)$ es pequeño (lema 4.10). Observamos que si $j : M \to N$ es una inmersión desdoblable tal que $\kappa \in j(S)$ entonces en cualquier extensión de $j$, $\kappa \in j(S)$. Por el teorema 4.9 $\kappa$ es desdoblable en $V[f][G][C]$, donde $C \subseteq \kappa$ es un club agregado por $\mathbb{Q}_S$ sobre $V[f][G]$. Como el forcing $\mathbb{Q}_S$ es $\kappa$-cerrado se preservan cofinalidades y cardinales debajo de $\kappa$. También se preservan por encima de $\kappa$ cardinales y cofinalidades pues el cardinal de $\mathbb{Q}_S$ es $\kappa$, de donde $\mathbb{Q}_S$ tiene la $\kappa^+$-c.c. Por lo tanto $\mathbb{Q}_S$ es permitido en el nivel $\kappa$ de $j(\mathbb{P}^-_{lot})$ (pues como $|\mathbb{Q}_S| = \kappa$ y $\kappa < j(\kappa)$ podemos concluir que $\mathbb{Q}_S$ tiene la $j(\kappa)$-c.c. y es $j(\kappa)$-cerrado). Por el mismo argumento de gap forcing $\mathbb{Q}_S$ no agrega ningún débilmente compacto. Como $C \cap \Im \subseteq S$, $C$ no contiene débilmente compactos de $V$. En total el conjunto $C$ no contiene ningún débilmente compacto según $V[f][G][C]$ o $V[f][G]$, pues no fue creado ningún cardinal débilmente compacto en ninguna instancia, si algún cardinal

$\gamma < \kappa$ es débilmente compacto lo era ya en $V$, pero $C$ no contiene ningún débilmente compacto de $V$.

$\square$

# Bibliography


[1] A. Baumgartner. Iterated forcing, 1983.

[2] J. Cummings. Large cardinal properties of small cardinals. *Set theory*, 62(2):300–400, 1998.

[3] J. Foreman. Unfoldable cardinals. Notas no publicadas.

[4] J. D. Hamkins. Gap forcing. submitted to the Journal of Mathematical Logic, January, 1999.

[5] J. D. Hamkins. The lottery preparation. por aparecer en Annals of pure and applied logic.

[6] J. D. Hamkins. Unfoldable cardinals and the GCH. to appear in Journal of Symbolic Logic.

[7] J. D. Hamkins. Canonical seeds and Prikry trees. *Journal of Symbolic Logic*, 62(2):373–396, 1997.

[8] K. Hauser. Indescribable cardinals and elementary embeddings. *Journal of Symbolic Logic*, 56(2):439–457, 1991.

[9] W. Woodin J. Cummings. Generalised Prikry forcings. manuscrito no publicado.

[10] T. Jech. *Set theory.* Springer Verlag, 1994.

[11] A. Kanamori. *The Higher Infinity.* Springer Verlag, Berlin, 1994.

[12] H. J. Keisler. Some applications of the theory of models of set theory, 1962.

[13] K. Kunen. *Set theory.* North Holland, Amsterdam, 1983.

[14] K. Kunen and J. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology.* North-Holland, Amsterdam, 1984.

[15] R. Laver. Making the supercompactness of $\kappa$ indestructible under $\kappa$-directed closed forcing. *Israel Journal of Mathematics*, 29:385–388, 1978.

[16] A. Leshem and A. Villaveces. The failure of GCH at unfoldable cardinals . Sometido al Journal of symbolic logic.

[17] A. Villaveces. Chains of end elementary extensions of models of set theory. *Journal of Symbolic Logic*, 63(3):1116–1136, 1998.

[18] P. D. Welch. On unfoldable cardinals and the beginning of the inner model hierarchy. *Journal of Symbolic Logic*, 2000.