UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Internalidad: Un camino de la Teoría de Modelos hacia la Teoría de Galois

Johan Felipe García Vargas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

Internalidad: Un camino de la Teoría de Modelos hacia la Teoría de Galois

Johan Felipe García Vargas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director:
Ph.D. Andrés Villaveces Niño

Línea de Investigación:
Métodos de estabilidad en clases no estables

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

A las personas que confían en mi,
a pesar de conocerme.

Resumen

En teoría de modelos, el concepto de internalidad es usado para demostrar que los grupos de enlace son definibles. Un grupo de enlace es un grupo de automorfismos de un modelo que fijan a un reducto del mismo. El propósito de este documento es esclarecer los principios de teoría de Galois subyacentes a dicho concepto.

El trabajo se desarrolla desde una perspectiva categórica, por lo cual el primer paso es traducir los conceptos modelo teóricos al lenguaje de las categorías. Después, se describen dos procedimientos para construir el grupo de enlace y se establece una correspondencia galoisiana. Por último, mostramos la forma de deducir a partir de esta correspondencia, tanto la presentación que hace Grothendieck de la teoría de Galois, como la parte principal del formalismo tannakiano, es decir, la reconstrucción de un grupo a partir de su categoría de representaciones.

Palabras clave: Teoría de Modelos, Teoría de Galois, Teoría de Categorías, Internalidad, Formalismo Tannakiano

Abstract

In model theory, the notion of internality has been used in order to prove that binding groups are definable. A binding group is a group of automorphisms of a model over a reduct. This document describes the Galois theoretical principles inherent to this notion.

We work from a categorical perspective, so the first step is to translate concepts from model theory into categorical language. Afterwards, we develop two procedures for the construction of the binding group and establish a Galois correspondence. Finally, we show that the Grothendieck's presentation of Galois theory and the main part of tannakian formalism (i.e. the recovery of a group from its category of representations) can be derived from this correspondence.

Keywords: Model Theory, Galois Theory, Category Theory, Internality, Tannakian Formalism.

Tabla de Contenido

Prefacio

Introducción y antecedentes

En los inicios del siglo XIX el joven Evariste Galois, mientras trataba de determinar cuándo una ecuación polinomial se puede resolver mediante radicales, descubrió una correspondencia entre la introducción de nuevos elementos y la reducción en el número de permutaciones de las raíces (del polinomio en cuestión) que mantienen válidas todas las ecuaciones polinómicas planteadas con estos (donde las raíces son las variables y los elementos nuevos los coeficientes). Este descubrimiento fue la semilla de lo que hoy conocemos como teoría de Galois que en términos actuales podríamos resumir como el estudio de la adjunción entre subgrupos de automorfismos y estructuras intermedias, obtenida al considerar los estabilizadores y los puntos fijos.

Con el pasar de los años la teoría de Galois se ha ido ampliando y reformulando constantemente, por ejemplo Émile Picard y Ernest Vessiot usaron sus principios para determinar cuándo una ecuación diferencial lineal es soluble por cuadraturas, dando inicio así a la teoría de Galois diferencial, la cual alcanza una exposición moderna en los trabajos de Ellis Kolchin. [13]

A partir de estos trabajos se llegó a observar que la teoría de modelos podía hacer aportes significativos, pues si bien la estructura definible de un cuerpo puede llegar a ser muy complicada, en el caso de un cuerpo algebraicamente cerrado esta se simplifica enormemente (y todo cuerpo puede sumergirse en uno algebraicamente cerrado); lo mismo pasa en el caso diferencial, todo cuerpo diferencial puede sumergirse en uno diferencialmente cerrado y las herramientas de la teoría de modelos se adaptan perfectamente para el estudio de estos últimos. Son muchos los estudios que en los últimos cuarenta años se han hecho en esta dirección, por ejemplo los de Anand Pillay [19] o David Marker [18], por mencionar algunos.

Es en este contexto donde Bruno Poizat [20] se da cuenta de que la teoría de Galois no es una característica particular de los cuerpos sino un principio modelo-teórico general, sólo que algunas veces los nuevos elementos que se deben introducir son imaginarios en el sentido de Saharon Shelah, es decir, clases de equivalencia de relaciones definibles.

También dentro de la teoría de modelos nace la noción de internalidad, introducida por

Boris Zilber para estudiar teorías categóricas en cardinales no contables [26], cuya idea es que un conjunto cubra a otro mediante funciones definibles (sobre un conjunto fijo de parametros). Esta noción es útil pues en su presencia es posible definir (o cuando menos tener un control definible sobre) el grupo de Galois (llamado también de enlace, binding, liaison), aunque inicialmente se requerían fuertes hipótesis sobre la teoría (trascendencia total, estabilidad, minimalidad, etc) en recientes artículos de Ehud Hrushovski (ver [7], [6]) la definición puede hacerse sin restricción alguna sobre la teoría.

Por otro lado, la escuela francesa de geometría algebraica [5, 23, 3](encabezada por Alexander Grothendieck) tiene su propia versión (formulada en términos categóricos) de la teoría de Galois: Una categoría junto con un funtor (llamado funtor fibra) de la misma en los conjuntos finitos, satisfaciendo ciertos axiomas sobre existencia y preservación de límites, resulta equivalente a la categoría de acciones de un grupo sobre conjuntos finitos, dicho grupo es obtenido como límite proyectivo en la categoría. Más aún, cuando tal funtor tiene por codominio a los espacios vectoriales de dimensión finita y existe un producto tensorial apropiado, la categoría resulta equivalente a la categoría de representaciones lineales de un grupo (más exactamente, un esquema afín de grupos); esta última perspectiva se conoce como formalismo tannakiano.

El punto de referencia para este proyecto esta formado por los artículos [10, 9] de Moshe Kamensky en los cuales se ponen en contacto la noción de internalidad y el formalismo tannakiano; en uno de ellos da una demostración parcial del teorema fundamental del formalismo tannakiano, definiendo una teoría de primer orden cuyos modelos estarían dados por un funtor fibra, mostrando que esta es un cubrimiento interno de la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados, por lo cual tenemos un control definible del grupo de enlace y se puede usar la teoría de Galois imaginaria (al estilo Poizat) para concluir la equivalencia de categorías.

En el segundo artículo Kamensky sigue la dirección contraria; usa los métodos categóricos típicos de la escuela francesa para mostrar que, en el caso de un cubrimiento interno, el grupo de enlace se puede obtener como límite proyectivo en la categoría de definibles, para esto es necesario desarrollar análogos categóricos de las nociones modelo-teóricas que intervienen.

Nuestro propósito en este proyecto es generar una exposición detallada y lo más autocontenida posible de estas conexiones, adoptando desde el comienzo una perspectiva categórica sobre la teoría de modelos (en el espíritu de Makkai - Reyes [16]), mostrando cómo se construye (define) el grupo de enlace, luego desarrollando la teoría de Galois en este contexto, para que al finalizar el formalismo Tannakiano se desenvuelva como un caso particular.

Marco teórico y contenido

Los pre-requisitos para la lectura de este trabajo son conocimientos básicos de teoría de modelos, teoría de categorías, topología y cierta madurez en el estudio de álgebra abstracta (teoría de cuerpos y álgebra lineal); ocasionalmente se mencionarán resultados o se harán analogías con geometría algebraica, teoría de representaciones, topología algebraica, álgebra diferencial y álgebra homológica, pero su conocimiento no es indispensable para la comprensión del mismo.

El trabajo se divide en tres capítulos, en el primero intentaremos esclarecer la noción de internalidad bajo la luz de la lógica categórica. La teoría de modelos estudia la clase elemental de una teoría, mientras la lógica categórica estudia la categoría de definibles. Esta última es una amalgamación de las álgebras de Lindembaum-Tarski.

Al principio damos una caracterización de las categorías de definibles y estudiamos los límites proyectivos e inductivos en ellas; luego estudiamos las interpretaciones; éstas son funtores definidos entre las categorías de definibles de una y otra teoría. Entre ellas destacamos las expansiones por constantes (las cuales juegan un rol fundamental en las consideraciones sobre estabilidad y en la construcción de modelos) y las expansiones por imaginarios (las cuales capturan cualquier inmersión con grupo de enlace trivial) para así reformular categóricamente las nociones de inmersión estable y de eliminación de imaginarios.

Finalizamos este capítulo mostrando que la noción de internalidad (un conjunto A es interno a otro B que se encuentra inmerso establemente en él, si existen unos parámetros c de tal manera que A se encuentre contenido en la clausura definible de B sobre c) en este contexto encarna como cubrimiento interno, es decir, una interpretación que posee inversa a izquierda; esto generaliza la situación clásica del álgebra lineal, donde a partir de una base es posible definir las coordenadas de cada vector.

El segundo capítulo, esta dedicado a la definición del grupo de enlace inherente a un cubrimiento interno entre teorías: iniciamos por mostrar la construcción de Hrushovski del grupoide de enlace; en ella se usan las distintas inversas izquierdas (cada tupla de parámetros de internalidad define una) para definir los automorfismos, manteniendo la analogía con espacios vectoriales donde los automorfismos se definen a partir de los cambios de base.

A continuación, contrastamos esa construcción con la que propone Kamensky; esta es puramente categórica y parte del hecho de que los funtores de homomorfismos son representables mediante límites inductivos de conjuntos definibles (en este punto es fundamental la eliminación de imaginarios). De esta manera disponemos de una visión analítica y una sintética del grupo de Galois.

Una vez hemos desentrañado la naturaleza del grupo, en el último capítulo hacemos explicitas las conexiones de Galois presentes, es decir, detectamos cuáles son las propiedades de los subgrupos que surgen como estabilizadores y cuáles son las estructuras que se obtienen como puntos fijos.

Para finalizar, mostramos que toda esta maquinaria teórica no ha sido construida en vano, empezamos por mostrar que las condiciones axiomáticas para categorías galoisianas expuestas por Grothendieck en [5, Exposé V. 4.] permiten a partir de cada categoría definir una teoría de primer orden cuyo único modelo esta dado por el funtor fibra, esta teoría resulta un cubrimiento interno de la teoría de un conjunto con dos puntos. De esta manera podemos derivar el teorema fundamental a partir de el principio modelo teórico. Idéntica situación se presenta con las categorías tannakianas y posiblemente con varias otras clases de categorías (en [10] se muestra el caso de las categorías tannakianas diferenciales).

1 Presentación Categórica de Internalidad

El propósito de este capítulo es enmarcar el concepto de internalidad dentro del contexto de la lógica categórica, haciendo una introducción elemental y auto-contenida de la misma.

Para esto, lo primero será explicar la correspondencia entre teorías y categorías, modelos y funtores. Dicha correspondencia fue establecida primero por Lawvere [14] para teorías algebraicas y luego extendida por varios autores en múltiples sentidos. La referencia clásica en lógica de primer orden es [16]. En este trabajo, no asumiremos ninguna familiaridad con dichos escritos, partiremos de un conocimiento mínimo de lógica y teoría de categorías. Los primeros capítulos de [21] y [15] son los referentes usados por el autor. La mentada correspondencia es enunciada como teorema 1.1, todo lo escrito antes de ella tiene un papel en su demostración.

La sección 1.1 termina con dos preliminares, el primero sobre límites inductivos y proyectivos en categorías arbitrarias, y el segundo sobre el espacio de tipos que es el espacio de Stone dual a las álgebras de Lindembaum-Tarski.

En la sección 1.2, estudiamos las interpretaciones, éstas son funtores entre las categorías de definibles de una y otra teoría que preservan las mismas propiedades que preservan los modelos. Entre ellas destacamos las expansiones por constantes, las expansiones por imaginarios y los cubrimientos internos.

Los resultados más importantes de esta sección, son la equivalencia entre expansiones por constantes y estructuras definiblemente cerradas (lema 1.2.12), el criterio de definibilidad de Beth (teorema 1.2), la completitud conceptual de las teorías que eliminan imaginarios (corolario 1.3) y el final del capítulo (teorema 1.4) donde se muestra que un cubrimiento interno es una interpretación que, salvo una expansión por constantes, posee inversa a izquierda.

Este capítulo surge como un intento de presentar sucinta y completamente los preliminares necesarios para una presentación coherente de los resultados de los capítulos siguientes.

1.1. Categoría de definibles de una teoría

Sea T una teoría de primer orden (no necesariamente completa) escrita en un vocabulario L (posiblemente con varias suertes [1]). El principal objeto de estudio en este trabajo es la ***categoría de definibles*** en T, denotada $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$. La analogía fundamental de esta sección es: las categorías de definibles en la lógica de primer orden, cumplen el mismo rol que las álgebras de Lindembaum-Tarski en la lógica proposicional.

Procedamos a definir los objetos, los morfismos y la composición en la categoría $\mathcal{T}$:

Un objeto en $\mathcal{T}$, al cual llamaremos ***definible en*** T, es una clase de equivalencia entre L-fórmulas módulo T. Explícitamente, un definible en T es una clase respecto a la relación $\varphi(x) \sim \psi(x)$ si y solo si $T \models \forall_x[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$.

Note que dos fórmulas pueden ser equivalentes únicamente cuando están escritas en la misma variable, es decir, cuando definen un subconjunto de la misma suerte. Por ejemplo, $x = 0$ vista como fórmula en la variable x define un 'punto', en cambio vista como abreviación de la fórmula $\rho_1(x, y) = 0$ define una 'línea'. En adelante asumiremos que la sintaxis hace explícita la variable de cada fórmula.

Notación. Escribiremos $A :: \varphi(x)$ cuando el definible A está representado por la fórmula $\varphi(x)$, en particular cada suerte de L es un definible $X :: x = x$ siendo x la variable asociada a la suerte X.

Fijemos dos definibles $A :: \varphi(x)$ y $B :: \psi(y)$. A cada ***morfismo definible*** $f : A \to B$, le corresponde un definible $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x, y)$, llamado ***grafo*** de f, para el cual:

$$\begin{aligned} T &\models \forall_x\forall_y[\theta(x, y) \to \varphi(x) \wedge \psi(y)] \\ T &\models \forall_x[\varphi(x) \to \exists!_y\theta(x, y)]. \end{aligned} \tag{1-1}$$

Por ejemplo, la igualdad define el grafo del morfismo identidad. Más aún, la igualdad también se usa para definir las inclusiones: Cuando $T \models \forall_x[\varphi(x) \to \psi(x)]$ el grafo del morfismo ***inclusión***, notado $A \hookrightarrow B$, es representado por la fórmula $\varphi(x_1) \wedge \psi(x_2) \wedge x_1 = x_2$. En particular, siempre $A \hookrightarrow X$ siendo X la suerte de referencia para la variable x.

El ejemplo canónico de morfismo definible, es el morfismo $t : X \to Y$ dado por un término $t(x) : Y$ para el cual $\mathrm{gr}(t) :: y = t(x)$. En el ejemplo 1.2.3 (ii) se muestra que todo morfismo definible puede pensarse como proveniente de un término en un vocabulario aumentado.

Dados dos morfismos definibles $f : A \to B$ y $g : B \to C$ cuyo grafo es $\mathrm{gr}(g) :: \vartheta(y, z)$ la composición $gf : A \to C$ está definida por $\mathrm{gr}(gf) :: \exists_y[\vartheta(y, z) \wedge \theta(x, y)]$. Verificar que la composición es asociativa y unitaria ($f\,\mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B\, f$) es un ejercicio completamente tautológico.

[1] En el apéndice hay una introducción a los vocabularios con varias suertes.

Modelos vistos como funtores

En lógica proposicional, cada valuación se extiende a un homomorfismo de álgebras con co-dominio los valores de verdad $\{\perp, \top\}$. Habiendo explicado que la sintaxis de primer orden da lugar a categorías, ahora entenderemos como la semántica da lugar a funtores.

Sea T una teoría de primer orden escrita en el vocabulario L. Una L-estructura $\mathfrak{M}$ asigna a cada fórmula $\varphi(x)$ su ***conjunto solución***

$$\varphi(\mathfrak{M}) = \{a \in M_x \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a)\}.$$

Cuando $\mathfrak{M}$ es modelo de T podemos considerarlo como un funtor $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ entre $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ y la categoría de conjuntos $\mathcal{C}\mathrm{onj}$:

A cada definible $A :: \varphi(x)$ el modelo le asocia el conjunto $\mathfrak{M}(A) := \varphi(\mathfrak{M})$. Si en lugar de $\varphi(x)$ usáramos otra fórmula equivalente obtendríamos el mismo conjunto solución. Para cada morfismo definible $f : A \to B$ con grafo $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x, y)$, el conjunto solución $\theta(\mathfrak{M})$ es el grafo de una función $f^{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{M}(B)$. Trivialmente se verifica que $\mathfrak{M}$ respeta composiciones e identidades.

La imagen de un definible dentro de un modelo, esto es un conjunto de la forma $\mathfrak{M}(A)$, es llamado ***conjunto 0-definible.*** Similarmente, la imagen de un morfismo definible, o sea una función de la forma $f^{\mathfrak{M}}$, es llamada ***función 0-definible.***[2]

Ejemplo 1.1.1. La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados (ACF) escrita usando el vocabulario de anillos $L_{\text{rings}} = \{K, \cdot, +, -, 0, 1\}$ tiene eliminación de cuantificadores, esto significa que cada definible en K^n viene dado por una combinación booleana de ecuaciones $p(x) = 0$ donde $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Para $\mathbb{K} \models ACF$, las suertes $\mathbb{K}(K^n)$ son los espacios afines; los conjuntos 0-definibles son construibles sobre $\mathbb{Z}$; las funciones racionales $f \in \mathbb{Z}(x)$ y en característica p el automorfismo de Fröbenius inverso ($x^p \mapsto x$) son funciones 0-definibles, en [17] se muestra que esencialmente esas son todas las funciones definibles.

Propiedades sintácticas de una categoría de definibles

A continuación, vamos a enunciar algunas propiedades categóricas de $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$, las cuales son consecuencia directa de las características sintácticas de la lógica clásica de primer orden. La idea de establecer una analogía entre características de los lenguajes y propiedades de las categorías es fundamental en la lógica categórica.

- **Objeto final:** En $\mathcal{T}$ la suerte $\mathbf{1}$ es el objeto final. Desde el punto de vista sintáctico $\mathbf{1} :: \top$, siendo $\top$ el símbolo que representa la tautología, o sea una sentencia incondi-

[2] El 0 quiere decir definible sin parámetros. Véase la definición 1.2.13

cionalmente verdadera. Para cualquier estructura $\mathfrak{M}(\mathbf{1})$ es un conjunto con un único elemento, así para cualquier definible X el único morfismo $X \to \mathbf{1}$ define la función constante $\mathfrak{M}(X) \to \mathfrak{M}(\mathbf{1})$.

Los morfismos definibles $a : \mathbf{1} \to X$ son llamados ***elementos*** en X, pues cuando $a :: \phi(x)$ por ser morfismo $T \models \top \to \exists !_x \phi(x)$, es decir, para cualquier modelo de T tenemos que $a^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}(X)$.

Nota 1.1.2. El ***funtor de elementos*** $\Gamma : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ dado por $\Gamma(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}, X)$ es conocido en teoría de modelos como la clausura definible del vacío. Para una teoría completa, $\Gamma = \mathrm{dcl}_T(\emptyset)$ es una estructura común a todos sus modelos.

- **Objeto inicial estricto:** En $\mathcal{T}$ la suerte $\mathbf{0}$ es el objeto inicial. Sintácticamente, $\mathbf{0} :: \perp$, siendo $\perp$ el símbolo que representa la contradicción. Para cualquier estructura $\mathfrak{M}(\mathbf{0})$ es el conjunto vacío, así el morfismo trivial $\mathbf{0} \to X$ define la función vacía $\emptyset \to \mathfrak{M}(X)$. Por la misma razón, si existiera un morfismo $X \to \mathbf{0}$ tendríamos $T \models \forall_x [\varphi(x) \leftrightarrow \perp]$, o sea X sería isomorfo a $\mathbf{0}$.
  Nota 1.1.3. Si T es inconsistente todo objeto en $\mathrm{Def}_L(T)$ es isomorfo a $\mathbf{0}$.
- **Productos:** Dados dos definibles $A \hookrightarrow X$ y $B \hookrightarrow Y$ con $A :: \varphi(x)$ y $B :: \psi(y)$ donde X y Y son suertes, definimos $A \times B \hookrightarrow X \times Y$ mediante $A \times B :: \varphi(x_1) \wedge \psi(y_2)$ pues (x_1, y_2) es la variable asociada al producto de suertes $X \times Y$. El grafo de la proyección $\rho_A : A \times B \to A$ es representado por $\varphi(x_1) \wedge \psi(y_2) \wedge x_3 = \rho_1(x_1, y_2)$, del mismo modo definimos ρ_B.
- **Igualadores:** Dados dos morfismos definibles $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ el igualador de f y g es la inclusión $A \hookrightarrow X$ del definible $A :: \exists_y [\vartheta(x,y) \wedge \phi(x,y)]$ dado que $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x,y)$ y $\mathrm{gr}\, g :: \vartheta(x,y)$. Note que para morfismos provenientes de términos, $\mathrm{gr}(f) :: y = t(x)$ y $\mathrm{gr}(g) :: y = t'(x)$, la igualdad define el igualador $A :: t(x) = t'(x)$.

Proposición 1.1.4. *La categoría $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ es **finitamente completa**, es decir, $\mathcal{T}$ tiene todos los límites finitos.*

Demostración. Acabamos de demostrar que $\mathcal{T}$ cuenta con: objeto final, productos para cada par de objetos e igualadores para cada par de morfismos. Es bien conocido (véase [15, V. 2.]) que la existencia de estos límites garantiza la de todos los demás. $\square$

- **Productos fibrados:** Para una pareja de morfismos definibles $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ con $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x,z)$ y $\mathrm{gr}(g) :: \vartheta(y,z)$, el producto fibrado de f y g es el definible $X \times_Z Y \hookrightarrow X \times Y$ representado por la fórmula $\exists_z [\theta(x_1, z) \wedge \vartheta(y_2, z)]$ junto con los morfismos ρ_1 y ρ_2 obtenidos al componer la inclusión en el producto con la respectiva proyección. Gráficamente

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Nota 1.1.5. En adelante, diremos que una propiedad de morfismos es ***estable bajo productos fibrados***, si para cualquier producto fibrado en el cual g tenga dicha propiedad ρ_1 también debe tenerla.

A modo de ejemplo, ser mónico es estable bajo productos fibrados; recuerde que m es un morfismo ***mónico*** si para cualquier par de morfismos distintos a y b, los morfismos ma y mb son distintos.

Los productos fibrados serán la clase de límite más usada en este documento, pues ellos permiten unificar varias nociones importantes. Vamos a presentar tres ejemplos de ello:

- El producto fibrado de dos inclusiones $A \hookrightarrow X$ y $B \hookrightarrow X$

$$\begin{tikzcd} A \wedge B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

  es (isomorfo a) la ***intersección*** de A y B, es decir, al definible dado por la conjunción de las formulas que representan a A y B.

- El producto fibrado de un morfismo $f : X \to Y$ consigo mismo,

$$\begin{tikzcd} N_f \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1-2}$$

  se conoce como el ***núcleo*** de f. Cuando f viene de un término, $\mathrm{gr}(f) :: y = t(x)$, tendríamos $N_f :: t(x_1) = t(x_2)$.
  Nota 1.1.6. En una categoría finitamente completa el núcleo $N_f \hookrightarrow X^2$ es una relación de equivalencia.[3] Más aún, sabemos que f es mónico si y solo si su núcleo

[3]Consulte en [1, Cap. 1 sec. 8.4] la definición de relación de equivalencia para una categoría finitamente completa. Alternativamente, vea la noción de relación definible en T dada en el ejemplo 1.2.6 (I).

coincide con la ***diagonal*** en X, siendo ésta el núcleo de la identidad en X. En el caso de $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ donde la diagonal es $\Delta_X :: x_1 = x_2$, este hecho significa que f es mónico si y solo si $T \models$ "f `es 1-1`".

- El producto fibrado de un morfismo $f : X \to Y$ y una inclusión $B \hookrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} f^*B \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

se conoce como la ***substitución*** de f en B. Por ejemplo, si $\mathrm{gr}(f) :: y = t(x)$ y $B :: \psi(y)$, tendremos que $f^*B :: \psi(t(x))$.

- **Imágenes:** En $\mathcal{T}$ el cuantificador existencial permite definir la ***imagen*** de un morfismo $\mathrm{img}(f) :: \exists_x \theta(x, y)$ cuando $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x, y)$. La imagen induce una factorización,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & Y \\ & \mathrm{img}(f) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \tag{1-3}$$

donde $\bar{f} : X \to \mathrm{img}(f)$ tiene el mismo grafo que f.

Definición 1.1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría finitamente completa, un ***epimorfismo regular*** es un morfismo que sirve como co-igualador de su núcleo. Una categoría se dice ***regular*** si es finitamente completa, cada núcleo tiene un co-igualador y los epimorfismos regulares son estables bajo producto fibrado.

Proposición 1.1.8. *La categoría* $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ *es regular.*

Demostración. En la proposición 1.1.4 mostramos que $\mathcal{T}$ es finitamente completa. Veamos ahora que para cualquier morfismo $f : X \to Y$ se tiene que $\bar{f} : X \to \mathrm{img}(f)$ es el co-igualador de $N_f \overset{\rho_1}{\underset{\rho_2}{\rightrightarrows}} X$.

Tome $g : X \to Z$ con grafo $\mathrm{gr}(g) :: \vartheta(y, z)$, tal que $g\rho_1 = g\rho_2$. Por la propiedad universal del núcleo de g, la igualdad anterior implica que $N_f \hookrightarrow N_g$. Si $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x, y)$ definamos $H :: \exists_x[\theta(x, y) \wedge \vartheta(x, z)]$ y verifiquemos que $T \models$ "H `es grafo de un morfismo`":

En efecto, si $\mathfrak{M} \models T$ y tanto (b, c_1) como (b, c_2) pertenecen a $\mathfrak{M}(H)$, existen $a_1, a_2 \in \mathfrak{M}(X)$ tales que $b = f^{\mathfrak{M}}(a_1) = f^{\mathfrak{M}}(a_2)$ y $c_i = g^{\mathfrak{M}}(a_i)$ para $i = 1, 2$. Así $(a_1, a_2) \in \mathfrak{M}(N_f) \subseteq \mathfrak{M}(N_g)$ y por esto $c_1 = g^{\mathfrak{M}}(a_1) = g^{\mathfrak{M}}(a_2) = c_2$. Basta tomar $h : \mathrm{img}(f) \to Z$ con $\mathrm{gr}(h) = H$ para ver que $g = h\bar{f}$. Es bastante claro que si $g = h'\bar{f}$ entonces $h' = h$.

Como los núcleos de f y $\bar{f}$ coinciden, hemos demostrado que f es un epimorfismo regular si y solo si $T \models$ "f `es sobre`". Gracias a esto, la última condición para que $\mathcal{T}$ sea regular se reduce a probar que en el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\rho_Z"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y, \end{tikzcd}$$

si $T \models$ "f `es sobre`" entonces $T \models$ "ρ_Z `es sobre`".

En efecto, dado $\mathfrak{M} \models T$ en el que $f^{\mathfrak{M}}$ es sobre y $c \in \mathfrak{M}(Z)$, basta tomar $a \in \mathfrak{M}(X)$ tal que $g^{\mathfrak{M}}(c) = f^{\mathfrak{M}}(a)$ para ver que $c = \rho_Z^{\mathfrak{M}}(a, c)$. En conclusión, $\mathcal{T}$ es una categoría regular. □

Definición 1.1.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y X un objeto en $\mathcal{C}$. La ***categoría de sub-objetos*** $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ tiene como objetos a los monomorfismos $m : A \to X$. Si $n : B \to X$ es otro monomorfismo un morfismo entre sub-objetos es un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ que satisface $nf = m$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "m"'] & & B \arrow[dl, "n"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

La composición y las identidades en $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ se heredan de $\mathcal{C}$.

Nota 1.1.10. Si $f : A \to B$ es un morfismo entre sub-objetos, entonces f es mónico en $\mathcal{C}$. Más aún, para cada par de sub-objetos existe máximo un morfismo entre ellos, pues $nf = m$ y $ng = m$ implica que $f = g$. Esta observación permite entender $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$ como un pre-orden y simplificar la notación escribiendo $m \hookrightarrow n$ si existe un morfismo entre $m : A \to X$ y $n : B \to X$.

- **Álgebras booleanas de sub-objetos:** Para un definible X en $\mathcal{T} = \mathrm{Def}(T)$, cada monomorfismo $m : A \to X$ tiene en $\mathrm{img}(m) \hookrightarrow X$ su representante canónico la categoría $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$; es decir, dado otro monomorfismo $n : B \to X$ tenemos que existe un morfismo $n \hookrightarrow m$ si y solo si hay una inclusión entre las imágenes $\mathrm{img}(n) \hookrightarrow \mathrm{img}(m)$. Por lo anterior, la categoría $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ es equivalente al orden de los definibles incluidos en X.

  Nota 1.1.11. En adelante trataremos a $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ no como categoría, sino como álgebra booleana. Las operaciones booleanas entre sub-objetos definibles provienen de aplicar el respectivo conectivo a las fórmulas que los definen. En analogía con la lógica proposicional llamaremos a $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ el ***álgebra de Lindembaum-Tarski*** en X.

  Tenga en cuenta que el complemento es la negación relativa a X; me explico, dado $A \hookrightarrow X$ con $A :: \varphi(x)$ y $X :: \psi(x)$ definimos $\neg A :: \neg\varphi(x) \wedge \psi(x)$, asegurando que

$\neg A \hookrightarrow X$. En términos categóricos, la intersección es un producto fibrado y la ***unión*** es el co-límite de la intersección

$$\begin{tikzcd} A \wedge B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, hook] & A \vee B. \end{tikzcd}$$

Para cada morfismo definible $f : X \to Y$ en $\mathcal{T}$ y cada $B \hookrightarrow Y$ en $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y)$ usamos un producto fibrado para construir $f^*B \hookrightarrow X$ en $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y)$. De esta manera consideramos a la substitución f^* como función.

$$f^* : \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$$

$$B \hookrightarrow Y \mapsto \begin{tikzcd} f^*B \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{1-4}$$

Proposición 1.1.12. *Para cualquier morfismo definible $f : X \to Y$ en $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$, la substitución $f^* : \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ tiene adjuntos a izquierda y derecha.*

En consecuencia f^* es un homomorfismo de álgebras booleanas. Más aún, f es mónico si y solo si f^* es sobreyectivo, y dualmente f es un epimorfismo regular si y solo si f^* es inyectivo.

Demostración. El adjunto izquierdo esta dado por $\exists_f : \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y)$ donde

$$\exists_f A :: \exists_x[\theta(x,y) \wedge \varphi(x)],$$

cuando $\mathrm{gr}(f) :: \theta(x,y)$ y $A :: \varphi(x)$. Análogamente el adjunto derecho $\forall_f$ se define por

$$\forall_f A :: \forall_x[\theta(x,y) \to \varphi(x)].$$

Esta adjunción afirma para $A \hookrightarrow X$ y $B \hookrightarrow Y$ que:

$$\frac{A \hookrightarrow f^*B}{\exists_f A \hookrightarrow B} \tag{1-5a}$$

$$\frac{f^*B \hookrightarrow A}{B \hookrightarrow \forall_f A} \tag{1-5b}$$

Suponga que $B :: \psi(y)$. En términos sintácticos, 1-5a afirma la equivalencia de las sentencias

$$\forall_x[\varphi(x) \to \exists_y[\theta(x,y) \wedge \psi(y)]] \qquad \text{y} \qquad \forall_y[\exists_x[\varphi(x) \wedge \theta(x,y)] \to \psi(y)],$$

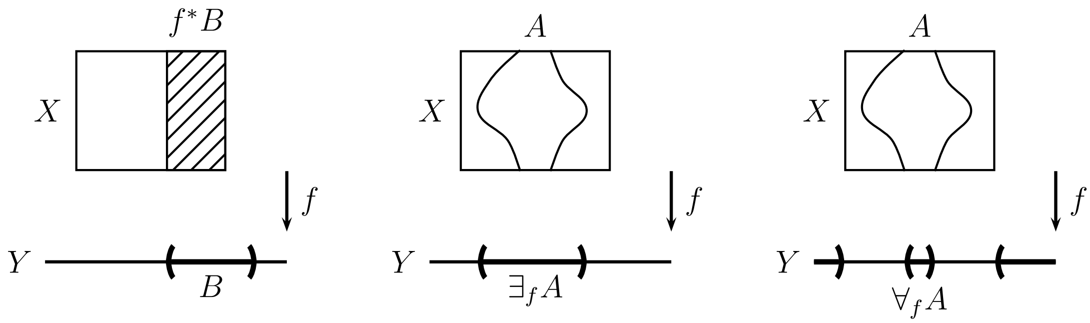

Figura 1-1: Adjunción entre la substitución y los cuantificadores.

dualmente 1-5b la equivalencia entre

$$\forall_x[\exists_y[\theta(x,y) \wedge \psi(y)] \to \varphi(x)] \qquad \text{y} \qquad \forall_y[\psi(y) \to \forall_x[\theta(x,y) \to \varphi(x)]].$$

Ambas equivalencias se demuestran usando que $\forall_{y_1,y_2}[\theta(x,y_1) \wedge \theta(x,y_2) \to y_1 = y_2]$.

Para finalizar, f^* es homomorfismo de álgebras booleanas, porque todo adjunto derecho preserva ($\wedge$) límites y todo adjunto izquierdo preserva ($\vee$) co-límites. Note que f es epimorfismo regular, siempre y cuando $\exists_f f^* B = B$ para todo $B \in \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y)$; es decir, cuando f^* es inyectivo. Dualmente f es mónico, siempre y cuando $f^* \forall_f A = A$ para todo $A \in \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$; es decir, cuando f^* es sobreyectivo. $\square$

- **Co-productos:** En $\mathcal{T}$ el co-producto entre dos definibles $A :: \varphi(x)$ y $B :: \psi(y)$ esta dado por

$$A \sqcup B :: \exists_x[(x \smile y) = \mu_1(x) \wedge \varphi(x)] \vee \exists_y[(x \smile y) = \mu_2(y) \wedge \psi(y)] \tag{1-6}$$

  donde μ_1 (resp. μ_2) es la inclusión de la suerte X (resp. Y) en la suerte $X \sqcup Y$ y la co-tupla $(x \smile y)$ es la variable asociada a esta última. Una co-tupla es simplemente una representación sintáctica de una definición a trozos. Note que en este trabajo el co-producto de suertes, las co-tuplas y las inclusiones son parte integral del lenguaje. Puede ver más detalles en el apéndice.

  En el caso de una teoría con única suerte básica, decimos que ***elimina co-productos***, si esta cuenta con dos constantes distintas, pues es posible definir $\mathbf{2} :: x = c_1 \vee x = c_2$ e identificar $X \sqcup X$ con $X \times 2$.

Definición 1.1.13. Una categoría finitamente completa $\mathcal{C}$ es ***extensiva*** si tiene co-productos finitos y para cualquier par de objetos X, Y la pareja de inclusiones μ_X, μ_Y establecen una equivalencia de categorías $(\mu_X^*, \mu_Y^*) : \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X \sqcup Y) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \times \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(Y)$.

Proposición 1.1.14. *La categoría $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ es una categoría extensiva.*

Demostración. El co-producto de sub-objetos $\sqcup : \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X) \times \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X \sqcup Y)$ es precisamente el homomorfismo inverso a $(\mu_1^*, \mu_2^*) : \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X \sqcup Y) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \times \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(Y)$.

En efecto, dados $A :: \varphi(x)$ y $B :: \psi(y)$ usando la definición de $A \sqcup B$ dada en 1-6 vemos que $\mu_1^*(A \sqcup B) = A$, pues $\mu_1(x) = \mu_2(y)$ es imposible y $\exists_{x_1}[\mu_1(x) = \mu_1(x_1) \wedge \varphi(x_1)]$ es equivalente a $\varphi(x)$. Del mismo modo $\mu_2^*(A \sqcup B) = B$.

Recíprocamente, dado cualquier $C \hookrightarrow X \sqcup Y$ usamos la tautología

$$\forall_{(x \llcorner y)}[\exists_x (x \llcorner y) = \mu_1(x) \vee \exists_y (x \llcorner y) = \mu_2(y)],$$

para obtener que $C = \mu_1^* C \sqcup \mu_2^* C$. □

Nota 1.1.15. En el caso de una teoría con única suerte básica que elimina co-productos, la categoría de definibles en T es extensiva aún cuando el lenguaje no incluyera símbolos de inclusión ni co-productos de suertes.

- **Clasificador de sub-objetos:** Para cualquier sub-objeto $A \hookrightarrow X$ en $\mathcal{T}$ usamos que $A \sqcup \neg A = X$ para definir su ***morfismo característico*** $\chi_A : X \to \mathbf{2}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "\chi_A"] & \neg A \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\mu_1"'] & \mathbf{2} & \mathbf{1} \arrow[l, "\mu_2"] \end{tikzcd}$$

siendo $\mathbf{2} = \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}$ y $\mathbf{1} \overset{\mu_1}{\underset{\mu_2}{\rightrightarrows}} \mathbf{2}$ sus dos elementos. De esta manera se establece un isomorfismo natural entre $\mathrm{Sub}(X)$ y $\mathrm{Hom}(X, \mathbf{2})$, por lo cual decimos que $\mathbf{2}$ es el ***clasificador de sub-objetos*** de $\mathcal{T}$.

Nota 1.1.16. Recuerde que un morfismo f es epi si para todo par a, b de morfismos distintos los morfismos af y bf también son distintos. La existencia de dicho clasificador hace que las nociones de epimorfismo y epimorfismo regular colapsen,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "\chi_{\mathrm{img}(f)}"] \arrow[dr, "c_Y"] & \mathbf{2} \\ & \mathrm{img}(f) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathbf{1} \arrow[u, "\mu_1"'] \end{tikzcd}$$

pues siempre $\mu_1 c_Y f = \chi_{\mathrm{img}(f)} f$; por lo tanto, si f es epi entonces $\mathrm{img}(f) = Y$.

A continuación, vamos a dar un par de definiciones y enunciar un teorema que condensa toda la información anterior.

Definición 1.1.17. Dadas L-estructuras $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ una ***inmersión elemental*** $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ es una colección de funciones $\{\sigma_X : M_x \to N_x \mid X \text{ es una suerte en } L\}$ tales que para todo $a \in M_x$ y toda L-fórmula $\varphi(x)$ tenemos que $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$ implica $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma_x(a))$. Si $\mathfrak{M}$ es una sub-estructura de $\mathfrak{N}$, decimos que $\mathfrak{N}$ es ***extensión elemental*** de $\mathfrak{M}$ si la inclusión es una inmersión elemental.

La ***clase elemental*** de T, denotada $\mathrm{Mod}(T)$, es la categoría cuyos objetos son las L-estructuras que satisfacen T, y cuyos morfismos son las inmersiones elementales entre ellas.

Nota 1.1.18. Tenga en cuenta que para una inmersión elemental $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, también es cierto que $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma_x(a))$ implica $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$, pues $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(a)$ implica $\mathfrak{N} \models \neg\varphi(\sigma_x(a))$.

Definición 1.1.19. Una ***categoría booleana*** es una categoría regular en la cual las substituciones son homomorfismos entre las álgebras booleanas de sub-objetos.

Un funtor entre categorías booleanas $H : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ es un ***funtor booleano*** si cumple las siguientes condiciones:

- H preserva límites finitos. En particular, dado que preserva núcleos también preserva monomorfismos.
- Para cada objeto X en $\mathcal{B}$ la restricción de H entre $\mathrm{Sub}_{\mathcal{B}}(X)$ y $\mathrm{Sub}_{\mathcal{B}'}(HX)$ es un homomorfismo de álgebras booleanas.
- H respeta imágenes, es decir, para cada morfismo $f : X \to Y$ tenemos que $H\,\mathrm{img}(f) = \mathrm{img}(Hf)$.

Si, adicionalmente, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son extensivas y H respeta co-productos, decimos que el funtor H es ***extensivo***.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías arbitrarias. Recuerde que una ***transformación natural*** entre dos funtores $H, K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$ es una colección de morfismos

$$\sigma = \{\sigma_X\}_{X\in\mathcal{B}} = \{\sigma_X : HX \to KX \mid X \text{ es objeto en } \mathcal{C}\}$$

tal que para todo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} HX \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "Hf"'] & KX \arrow[d, "Kf"] \\ HY \arrow[r, "\sigma_Y"'] & KY. \end{tikzcd}$$

Por último, una ***equivalencia de categorías*** es un par de funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasi-inversos, es decir, con isomorfismos naturales $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Ejemplos 1.1.20. (I) La categoría de conjuntos ($\mathcal{C}$onj) es una categoría booleana y extensiva, pero no es (equivalente a) la categoría de definibles de teoría alguna (pues en toda teoría el número de definibles está acotado por $|L| + \aleph_0$).

(II) La categoría con dos objetos $\mathbf{0} \hookrightarrow \mathbf{1}$ es booleana y tiene co-productos, pero no es extensiva pues $\mathrm{Sub}(\mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}) = \mathrm{Sub}(\mathbf{1})$ no es equivalente a $\mathrm{Sub}(\mathbf{1}) \times \mathrm{Sub}(\mathbf{1})$.

(III) La composición de funtores booleanos (y extensivos) es nuevamente un funtor booleano (y extensivo).

Teorema 1.1. *Dada una teoría de primer orden T con vocabulario L. La categoría de definibles $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ es una categoría booleana y extensiva. Adicionalmente, la clase elemental* $\mathrm{Mod}(T)$ *es equivalente a la categoría de funtores booleanos de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{C}$onj. Esto significa que:*

I. *Dado $\mathfrak{M} \models T$ visto como funtor $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ es un funtor booleano y extensivo. Más aún, cada funtor booleano y extensivo entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{C}$onj es naturalmente isomorfo a un modelo.*

II. *Cada inmersión elemental entre modelos de T, puede verse como una transformación natural entre los respectivo funtores.*

Demostración. Las proposiciones 1.1.8, 1.1.12 y 1.1.14 demuestran que $\mathcal{T}$ es booleana y extensiva.

Si $\mathfrak{M}$ es un modelo de T, según vimos en la página 3, podemos considerarlo un funtor definido por $\mathfrak{M}(A) = \varphi(\mathfrak{M})$ cuando A es el definible representado por la fórmula $\varphi(x)$. Debido a la definición inductiva de los conjuntos solución, el funtor $\mathfrak{M}$ preserva los productos y co-productos, los igualadores pues provienen de la igualdad, las operaciones booleanas y las imágenes pues estas provienen del cuantificador existencial. Para más detalles en la definición de los conjuntos solución puede consultar el apéndice.

Recíprocamente, si $H : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ es un funtor booleano, la L-estructura $\mathfrak{M}_H$ obtenida al evaluar el funtor H en cada uno de los símbolos del vocabulario L resulta ser un modelo de T. De forma inductiva, se define un isomorfismo natural entre H y el funtor dado por $\mathfrak{M}_H$.

La noción de transformación natural entre funtores booleanos, coincide con el concepto de inmersión elemental, pues para cada definible $A \hookrightarrow X$ la función σ_X se restringe a $\sigma_A : \mathfrak{M}(A) \to \mathfrak{N}(A)$ y para cada morfismo definible $f : A \to B$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(A) \arrow[r, "f^{\mathfrak{M}}"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & \mathfrak{M}(B) \arrow[d, "\sigma_B"] \\
\mathfrak{N}(A) \arrow[r, "f^{\mathfrak{N}}"] & \mathfrak{N}(B).
\end{tikzcd}$$

□

Notación. En adelante, cuando digamos único funtor booleano, queremos decir único salvo isomorfismo natural.

Ejemplos 1.1.21. (i) Considerando la teoría trivial en el lenguaje puramente lógico, o sea el vocabulario no tiene suertes básicas ni símbolos propios, obtenemos la categoría $\mathcal{F} := \mathrm{Def}_{\emptyset}(\emptyset)$ cuyos objetos son las suertes de la forma $\mathbf{n} = \mathbf{1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{1}$, y en la cual cada morfismo $f : \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ queda determinado por las composiciones $f(i) = f\mu_i$ donde $\mu_i : \mathbf{1} \to \mathbf{n}$ son los n puntos de $\mathbf{n}$. Note que para cualquier categoría booleana y extensiva $\mathcal{B}$ hay un único funtor booleano y extensivo de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{B}$.

(ii) La categoría de conjuntos finitos ($\mathcal{F}$in) es una categoría booleana, de hecho es equivalente a la categoría $\mathcal{F}$ del ejemplo anterior. Explícitamente, la única estructura (funtor booleano y extensivo) $\mathfrak{F} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}\mathrm{in}$ tiene como quasi-inverso a la cardinalidad $\# : \mathcal{F}\mathrm{in} \to \mathcal{F}$.[4] Por lo anterior, pensamos a $\mathcal{F}$ como el esqueleto de los conjuntos finitos.

(iii) Considerando la teoría trivial en el vocabulario L, podemos identificar el lenguaje con la categoría $\mathcal{L} = \mathrm{Def}_L(\emptyset)$. Esta es la categoría booleana y extensiva libre sobre el vocabulario L, pues basta interpretar los símbolos de L en algún otra categoría booleana y extensiva $\mathcal{B}$ y usar inducción sobre fórmulas para obtener un único funtor booleano y extensivo de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{B}$.

En particular, para cualquier L-teoría existe un funtor canónico del lenguaje en los definibles de la teoría. Analicemos detalladamente este morfismo: En $\mathcal{L}$ las sentencias corresponden con los sub-objetos de $\mathbf{1}$, así una teoría $T \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathcal{L}}(\mathbf{1})$ genera un filtro de consecuencias $\bar{T}$. Así, el álgebra booleana cociente $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(1) = \mathrm{Sub}_{\mathcal{L}}(1)/\bar{T}$ nos da las clases de equivalencia de sentencias módulo T.

Para levantar este filtro a cada X en $\mathcal{L}$ substituimos en el morfismo $X \to \mathbf{1}$; gracias a la adjunción entre la substitución y los cuantificadores, esto equivale a construir el

[4] Note que para definir la cardinalidad en morfismos es necesario elegir una enumeración de cada conjunto finito; dicha familia de enumeraciones es precisamente el isomorfismo natural entre $\mathfrak{F}\#$ y el funtor identidad en $\mathcal{F}$in.

filtro $\bar{T}_x = \{A \hookrightarrow X \mid T \models \forall_x A\}$ cuyo cociente $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X) = \mathrm{Sub}_{\mathcal{L}}(X)/\bar{T}_x$ son las clases de equivalencia de fórmulas en X módulo T.

En conclusión, el funtor canónico de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ visto en sub-objetos corresponde con el homomorfismo canónico al cociente entre álgebras de Lindembaum-Tarski.

El teorema 1.1 es el resultado más importante de esta sección. En lo que resta de la misma, vamos a presentar dos preliminares: uno puramente categórico y otro modelo-teórico.

Límites inductivos y proyectivos

A continuación, construiremos las categorías de límites proyectivos ($\mathrm{Pro}\,\mathcal{C}$) y co-límites inductivos ($\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$) para una categoría arbitraria $\mathcal{C}$.

Definición 1.1.22. Una categoría pequeña $\mathcal{I}$ se dice ***dirigida*** si

- Para cada par de objetos i,j existen un objeto k y morfismos $i \to k$ y $j \to k$.
- Para cada par de morfismos $\alpha, \beta : i \to j$ existe un morfismo $\gamma : j \to k$ tal que $\gamma\alpha = \gamma\beta$.

Una categoría $\mathcal{J}$ se dice ***co-dirigida*** si su categoría opuesta $\mathcal{J}^{op}$ es dirigida.

Definición 1.1.23. Un ***sistema dirigido en*** $\mathcal{C}$ es un funtor $(A_i) = (A_i, f_\alpha) : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, para el cual $\mathcal{I}$ es dirigida. Análogamente, un ***sistema co-dirigido en*** $\mathcal{C}$ es un funtor $(B_i) = (B_i, g_\alpha) : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, para el cual $\mathcal{J}$ es co-dirigida.

El ***co-límite*** de un sistema dirigido (A_i) es un objeto $A = \varinjlim A_i$ y unos morfismos $\mu_i : A_i \to A$ en $\mathcal{C}$ tales que $\mu_j f_\alpha = \mu_i$ para todo $\alpha : i \to j$ en $\mathcal{I}$ que cumplen la siguiente propiedad universal: Para cualquier objeto C y morfismos $h_i : A_i \to C$ en $\mathcal{C}$ que conmuten con los f_α, existe un único morfismo $h : A \to C$ tal que $h_i = h\mu_i$.

El ***límite*** de un sistema co-dirigido (B_i) es un objeto $B = \varprojlim B_i$ y unos morfismos $\rho_i : B \to B_i$ en $\mathcal{C}$ tales que $g_\alpha \rho_i = \rho_j$ para todo $\alpha : i \to j$ en $\mathcal{J}$ que cumplen la siguiente propiedad universal: Para cualquier objeto C y morfismos $h_i : C \to B_i$ en $\mathcal{C}$ que conmuten con los g_α, existe un único morfismo $h : C \to B$ tal que $h_i = \rho_i h$.

Ejemplos 1.1.24. (i) El co-límite de un sistema dirigido en $\mathcal{C}$onj es el cociente de la unión disyunta, donde dos elementos son equivalentes si existen morfismos en el sistema que los lleven a la misma imagen. Simbólicamente:

$$\varinjlim A_i = \coprod A_i / \sim$$

donde $a_i \sim a_j$ si existen $\alpha : i \to k$ y $\beta : j \to k$ con $f_\alpha(a_i) = f_\beta(a_j)$.

(II) El límite de un sistema co-dirigido en $\mathcal{C}$onj es el subconjunto del producto formado por las tuplas coherentes. Simbólicamente:

$$\varprojlim B_i = \bigcap_{\alpha: i \to j} \{(b_i) \in \prod B_i \mid g_\alpha(b_i) = b_j\}.$$

Gracias a la propiedad universal en un co-límite dirigido hay control sobre los morfismos que salen y en un límite co-dirigido hay control sobre los morfismos que llegan, es decir, suponiendo que $\varinjlim A_i$ y $\varprojlim B_i$ existen en $\mathcal{C}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim A_i, B) &= \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, B) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varprojlim B_i) &= \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B_i) \end{aligned} \tag{1-7}$$

donde el límite a la derecha se calcula en $\mathcal{C}$onj.

Por el contrario, generalmente no existe ningún control sobre los morfismos en la otra dirección. Para solventar este problema, en lugar de calcular los límites dentro de $\mathcal{C}$ (que podrían no existir) nos valemos de la inmersión de Yoneda para cambiarlos por límites de funtores donde el lema de Yoneda nos permite calcular los conjuntos de morfismos. Intuitivamente, los objetos en $\mathrm{Ind}\,\mathcal{C}$ ($\mathrm{Pro}\,\mathcal{C}$) son límites "formales" de sistemas (co-)dirigidos.

Lema 1.1.25 (Yoneda)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y X un objeto en $\mathcal{C}$.*

- *Para cada funtor $H : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$, las transformaciones naturales de el funtor representable $\hat{X} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ en H están en biyección con $H(X)$.*

  $$\mathrm{Nat}(\hat{X}, H) \cong H(X)$$

  En particular, el funtor $\hat{y} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathrm{onj}^{\mathcal{C}^{op}}$ definido por $X \mapsto \hat{X}$ es fiel y pleno.

- *Para cada funtor $K : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ las transformaciones naturales de el funtor representable $\check{X} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ en H están en biyección con $K(X)$.*

  $$\mathrm{Nat}(\check{X}, K) \cong K(X)$$

  En particular, el funtor $\check{y} : \mathcal{C} \to \check{\mathcal{C}}^{op} = (\mathcal{C}\mathrm{onj}^{\mathcal{C}})^{op}$ definido por $X \mapsto \check{X}$ es fiel y pleno.

Nota 1.1.26. Este es un lema clásico en teoría de categorías cuya demostración puede consultarse en [15, III. 2.]. Los funtores $\hat{y} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ y $\check{y} : \mathcal{C} \to \check{\mathcal{C}}^{op}$ son llamados ***inmersiones de Yoneda*** co-variante y contra-variante.

Rigurosamente, si (A_i) es un sistema dirigido en $\mathcal{C}$, $(\hat{A}_i = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A_i))$ es un sistema dirigido en $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathrm{onj}^{\mathcal{C}^{op}}$. Dualmente, si (B_i) es un sistema co-dirigido en $\mathcal{C}$, $(\check{B}_i = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B_i, -))$ es un sistema co-dirigido en $\check{\mathcal{C}}^{op} = (\mathcal{C}\mathrm{onj}^{\mathcal{C}})^{op}$, es decir, un sistema dirigido en $\check{\mathcal{C}}$. Como en una categoría de funtores los co-límites se calculan luego de evaluar y en $\mathcal{C}$onj sabemos calcular co-límites dirigidos (ejemplo 1.1.24 I) podemos asegurar que $\varinjlim \hat{A}_i$ existe en $\hat{\mathcal{C}}$ y $\varinjlim \check{B}_i$ existe en $\check{\mathcal{C}}$.

Definición 1.1.27. A cada sistema dirigido (A_i) en $\mathcal{C}$ le asociamos su co-límite inductivo $\operatorname{Ind} A_i := \varinjlim \hat{A}_i$ y definimos $\operatorname{Ind}\mathcal{C}$ como la sub-categoría plena de $\hat{\mathcal{C}}$ formada por los co-límites inductivos sobre $\mathcal{C}$.

A cada sistema co-dirigido (B_i) le asociamos su límite proyectivo $\operatorname{Pro} B_i = \varinjlim \check{B}_i$ y definimos $\operatorname{Pro}\mathcal{C}$ como la sub-categoría plena de $\check{\mathcal{C}}^{op}$ formada por los límites proyectivos sobre $\mathcal{C}$.

El que $\operatorname{Ind}\mathcal{C}$ sea sub-categoría plena de $\hat{\mathcal{C}}$, significa que para un objeto C y un sistema dirigido (A_i) cualesquiera en $\mathcal{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}\mathcal{C}}(C, \operatorname{Ind} A_i) &= \operatorname{Nat}(\hat{C}, \operatorname{Ind} A_i) \\ &= (\operatorname{Ind} A_i)(C) = \varinjlim \hat{A}_i(C) \\ &= \varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A_i). \end{aligned} \tag{1-8}$$

Análogamente, el que $\operatorname{Pro}\mathcal{C}$ sea sub-categoría plena de $\check{\mathcal{C}}^{op}$, significa que para un objeto C y un sistema co-dirigido (B_i) cualesquiera en $\mathcal{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Pro}\mathcal{C}}(\operatorname{Pro} B_i, C) &= \operatorname{Nat}(\check{C}, \operatorname{Pro} B_i) \\ &= (\operatorname{Pro} B_i)(C) = \varinjlim \check{B}_i(C) \\ &= \varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B_i, C). \end{aligned} \tag{1-9}$$

Resumiendo las ecuaciones 1-7, 1-8 y 1-9, tenemos que dados un par de sistemas dirigidos (A_i), (V_j) indexados por $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ respectivamente, y un par de sistemas co-dirigidos (B_i), (W_j) indexados por $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ respectivamente

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ind}\mathcal{C}}(\operatorname{Pro} V_j, \operatorname{Pro} A_i) &= \varprojlim_{j\in\mathcal{J}} \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(V_j, A_i) \\ \operatorname{Hom}_{\operatorname{Pro}\mathcal{C}}(\operatorname{Pro} B_i, \operatorname{Pro} W_j) &= \varprojlim_{j\in\mathcal{J}} \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B_i, W_j). \end{aligned} \tag{1-10}$$

En el caso de una categoría de definibles $\mathcal{T}$, podemos pensar los límites inductivos y proyectivos como familias indexadas de fórmulas donde las variables de una fórmula y otra se conectan mediante un morfismo definible. A los objetos en $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ (resp. $\operatorname{Pro}\mathcal{T}$) los llamamos ***ind-(resp. pro-)definibles en*** T.

Recuerde que cada $\mathfrak{M} \models T$ lo entendemos como un funtor $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\text{onj}$. Naturalmente, $\mathfrak{M}$ puede levantarse a las categoría $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ (también a $\operatorname{Pro}\mathcal{T}$), para ello basta definir $\mathfrak{M}(\operatorname{Ind} A_i) = \varinjlim \mathfrak{M}(A_i)$ (resp. $\mathfrak{M}(\operatorname{Pro} B_i) = \varprojlim \mathfrak{M}(B_i)$).

Al mirar a $\mathfrak{M}$ como funtor surge la pregunta de si es o no un objeto en $\operatorname{Pro}\mathcal{T}$, la respuesta es afirmativa, y para comprobarlo usaremos la construcción de Grothendieck (sección 2.2.2). En [8] se encuentra una descripción detallada de las categorías $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$ y $\operatorname{Pro}\mathcal{T}$.

Espacios de tipos

Concluimos esta sección introduciendo una de las herramientas básicas de la teoría de modelos y de paso mostrando ejemplos naturales de ind- y pro-definibles.

Sea $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ la categoría de definibles de una teoría de primer orden.

Definición 1.1.28. Sea X un definible en T. A su álgebra booleana de sub-objetos $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ le corresponde mediante la dualidad de Stone un espacio topológico de Hausdorff, compacto y totalmente disconexo $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ cuyos puntos (ultrafiltros en $\mathrm{Sub}(X)$) son llamados ***tipos completos en*** X.

La topología de $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ tiene por base de abiertos-cerrados a los subconjuntos de la forma $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A) \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ con $A \hookrightarrow X$; claramente para un $p \in S_{\mathcal{T}}(X)$ tenemos que $p \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)$ si y solo si $A \in p$.

Dado $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ y $a \in \mathfrak{M}(X)$ el ***tipo de*** a en $\mathfrak{M}$ es

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a) = \{A \hookrightarrow X \mid a \in \mathfrak{M}(A)\} \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X).$$

El siguiente lema justifica el nombre espacio de tipos, muestra la relación entre tipos y automorfismos, y da un criterio topológico para identificar definibles. Su demostración puede encontrarse en cualquier texto de teoría de modelos, por ejemplo [21, Sec. 5.1].

Lema 1.1.29. *Para cada definible X en $\mathcal{T}$ tenemos que:*

I. *Todo tipo completo en X, $p \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$, es el tipo de algún elemento en algún modelo. Es decir, existen $\mathfrak{M} \models T$ y $a \in \mathfrak{M}(X)$ tales que $p = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a)$.*

II. *Dado $\mathfrak{M} \models T$, dos elementos $a, b \in \mathfrak{M}(X)$ tienen el mismo tipo ($\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(b)$) si y solo si existe una extensión elemental $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ y un automorfismo $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ tal que $\sigma_X(a) = b$.*

III. *Cualquier subconjunto $U \subseteq \mathrm{S}(X)$ que sea abierto y compacto es de la forma $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)$ para algún definible $A \hookrightarrow X$.*

Dado $\mathfrak{M} \models T$ y $U \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ definimos $\mathfrak{M}(U) := \{a \in \mathfrak{M}(X) \mid \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a) \in U\}$. Observe que $\mathfrak{M}(\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)) = \mathfrak{M}(A)$, pues $\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a) \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)$ si y solo si $A \in \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a)$.

Con esto en mente, a cada abierto $O \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ le asociamos el ind-definible $\mathrm{Ind}_{\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A) \subseteq O} A$. Dualmente, a cada cerrado $F \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ le asociamos el pro-definible $\mathrm{Pro}_{F \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)} A$.

De esta forma, para todo cerrado $F \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(F) &= \bigcap_{F\subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)} \mathfrak{M}(\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)) \\ &= \varprojlim_{F\subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)} \mathfrak{M}(A) \\ &= \mathfrak{M}(\mathrm{Pro}_{F\subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)} A).\end{aligned}$$

Dualmente, para todo $O \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$ abierto se cumple que $\mathfrak{M}(O) = \mathfrak{M}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)\subseteq O} A)$.

Nota 1.1.30. La dualidad de Stone actúa funtorialmente, es decir, a cada homomorfismo entre álgebras le asigna una función continua en dirección opuesta. En particular, para un morfismo definible $f : X \to Y$ tenemos el homomorfismo $f^* : \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(Y) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(X)$ y su dual $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(f) : \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X) \to \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(Y)$. Esta última función toma el tipo $p = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a)$, para algún $a \in \mathfrak{M}(X)$, y lo envía en el tipo $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(f)(p) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(f^{\mathfrak{M}}(a))$. Esta dualidad nos da una nueva caracterización de epimorfismos y monomorfismos, pues f^* es inyectiva siempre y cuando $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(f)$ sea sobre, y viceversa.

El espacio de tipos no es otra cosa que el espectro del anillo de subconjuntos definibles,[5] donde el espacio topológico base es exactamente el descrito arriba; en otros término, tenemos un esquema que asocia a cada abierto básico $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A)$ con su anillo coordenado $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(A)$ y cuando $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(A) \subseteq \mathrm{S}_{\mathcal{T}}(B)$ la restricción es $(A \hookrightarrow B)^*$.

1.2. Interpretaciones

En la sección anterior vimos como caracterizar la sintaxis de una teoría de primer orden, teorema 1.1, en esta sección usaremos dicha caracterización para entender como movernos de una teoría a otra. Sean T_0 y T dos teorías de primer orden escritas en lenguajes L_0 y L respectivamente.

Definición 1.2.1. Una ***interpretación*** de T_0 en T es un funtor booleano y extensivo $\iota : \mathrm{Def}_{L_0}(T_0) \to \mathrm{Def}_L(T)$ entre las categorías de definibles de las teorías T_0 y T.

Recuerde (ver definición 1.1.19) que un funtor booleano y extensivo debe preservar límites finitos, debe dar lugar a homomorfismos entre las álgebras de Lindembaum-Tarski y debe respetar tanto imágenes como co-productos.

Ejemplos 1.2.2. (I) El funtor canónico del lenguaje $\mathcal{L} = \mathrm{Def}_L(\emptyset)$ en los definibles de una teoría $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$, visto en el ejemplo 1.1.21 (III) , es una interpretación. Más aún, dadas dos L-teorías $T_0 \subseteq T$ hay una interpretación canónica $\iota : \mathrm{Def}_L(T_0) \to \mathcal{T}$.

[5] En un álgebra booleana los ultrafiltros son complementos de los ideales primos.

(II) La teoría trivial en el lenguaje puramente lógico se interpreta en cualquier otra teoría T, pues existe un único funtor booleano extensivo de $\mathcal{F} = \mathrm{Def}_\emptyset(\emptyset)$ en $\mathcal{T}$. Ver ejemplo 1.1.21 (I).

(III) Si $\mathfrak{M}$ es una estructura finita, o sea M_x es finito para toda suerte X, su teoría $T = Th(\mathfrak{M})$ es interpretable en el lenguaje puramente lógico. Pues $\mathfrak{M}$ es un funtor booleano y extensivo de $\mathcal{T}$ en la categoría de conjuntos finitos $\mathcal{F}$in y al componer con la cardinalidad obtenemos la interpretación $\#\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{F}$.

Receta para construir interpretaciones

El teorema 1.1 nos permite entender a $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ como la categoría booleana y extensiva generada por L y sujeta a las relaciones de T. Aprovechemos esta idea para construir interpretaciones de T_0 en T:

Lo primordial es interpretar cada símbolo de L_0 con una fórmula de $\mathcal{L} = \mathrm{Def}_L(\emptyset)$ y al componer con el funtor canónico un definible en $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$. Por inducción sobre fórmulas la interpretación se extiende a $\mathcal{L}_0 = \mathrm{Def}_{L_0}(\emptyset)$ de una única manera. Una vez la interpretación está definida en sub-objetos, queda definida para cualquier morfismo, pues ya está definida para su grafo. Hecho esto, basta con probar que T demuestra los axiomas de T_0 (interpretados en $\mathcal{L}$).

Ejemplos 1.2.3. (I) Cada ***traducción***, es decir, función entre los vocabularios que respeta el tipo de cada símbolo[6], genera una interpretación $\iota : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}$. Si $T \models \iota\varphi$ para todo φ en T_0 dicha interpretación se eleva a $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Def}_{L_0}(T_0)$ mediante los morfismos canónicos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[d] \\ \mathcal{T}_0 \arrow[r] & \mathcal{T}. \end{tikzcd}$$

(II) Dado un morfismo definible $f : X \to Y$ con $f :: \phi(x, y)$ agregamos al vocabulario un símbolo de función $\mathtt{f}$ y tomamos $T_f = T \sqcup \{\forall_x \forall_y [y = \mathtt{f}(x) \leftrightarrow \phi(x, y)]\}$. Según el ejemplo anterior, tenemos una interpretación $\iota : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_f$ la cual resulta ser una equivalencia de categorías, pues la interpretación inversa $\jmath : \mathcal{T}_f \to \mathcal{T}$ se obtiene inductivamente al interpretar el símbolo $\mathbf{f}$ como el definible f.

(III) La teoría de una relación de equivalencia con infinitas clases infinitas (notada $\mathrm{ER}_{\infty,\infty}$ con $L_{\mathrm{rel}} = \{X, E \hookrightarrow X^2\}$) se interpreta en la teoría de infinitos elementos (T_∞ con

[6]Una traducción $\iota : L_0 \to L$ respeta el producto y co-producto de suertes, si R simboliza una relación en X, ιR simboliza una relación en ιX y análogamente para símbolos de función.

$L_{\text{set}} = \{Y\}$) tomando como suerte a las parejas de elementos ($\iota(X) = Y^2$) y como equivalencia a tener la misma primera componente ($\iota E \hookrightarrow Y^4$ con $\iota E :: y_1 = y_3$).

(IV) La teoría de álgebras booleanas se interpreta en la teoría de anillos (conmutativos con unidad), eligiendo como suerte a los idempotentes ($x^2 = x$), como multiplicación de idempotentes la misma del anillo y como suma de idempotentes la expresión $x+y-xy$.

(V) La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero (ACF_0), se interpreta en la teoría de cuerpos diferencialmente cerrados (DCF), de dos formas distintas: primera, como expansión del vocabulario pues $L_{\text{dif.rings}} = L_{\text{rings}} \cup \{\delta : K \to K\}$; y segunda, como el campo de constantes ($\iota K :: \delta x = 0$).

(VI) La teoría de cuerpos real cerrados (RCF) en el vocabulario $\{R, <, +, -, \cdot, 0, 1\}$, interpreta ACF. Basta tomar $\iota K = R^2$, interpretar la suma como la suma vectorial y la multiplicación coma la función que envía $((a, b), (c, d))$ en $(ac - bd, bc + ad)$.

Usaremos el teorema 1.1, para entender que a nivel semántico una interpretación induce un funtor entre las clases elementales.

Definición 1.2.4. Una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$, entre dos teorías T y T_0, da lugar a un ***funtor de interpretación*** entre las clases elementales $\iota^* : \text{Mod}(T) \to \text{Mod}(T_0)$ que a cada $\mathfrak{M} \models T$ le asigna $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \circ \iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{C}\text{onj}$ y a cada inmersión elemental $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ donde $\sigma = (\sigma_Y)_{Y \in \mathcal{T}}$ le asigna $\iota^*\sigma : \mathfrak{N}_0 \to \mathfrak{M}_0$ donde $\iota^*\sigma_X = \sigma_{\iota X}$ para $X \in \mathcal{T}_0$. El modelo $\mathfrak{M}_0 \models T_0$ es llamado ***reducto*** de $\mathfrak{M}$ a T_0.

Ejemplo 1.2.5. Considere $\iota : \text{Def}(\text{ACF}) \to \text{Def}(\text{RCF})$ la interpretación del ejemplo 1.2.3 (VI) y $\mathfrak{R}$ un cuerpo real cerrado, en este caso $\mathfrak{R}_0 = \iota^*\mathfrak{R} = \mathfrak{R}[\sqrt{-1}]$.

Sea T es una teoría de primer orden y T_0 la teoría de una clase de L_0-estructuras, usaremos el adjetivo "definible en T" para denotar a una interpretación de T_0 en T.

Ejemplos 1.2.6. (I) Una ***relación de equivalencia definible en*** T es una interpretación en T de la teoría de relaciones de equivalencia (ER) con $L_{\text{rel}} = \{X, E \hookrightarrow X^2\}$. Para $\mathfrak{M} \models T$ su reducto a ER es la relación de equivalencia $\mathfrak{M}(E)$ en el conjunto $\mathfrak{M}(X)$.

Compare con la noción de relación de equivalencia en una categoría finitamente completa, dada en [1, Cap. 1 sec. 8.4].

(II) Un ***grupo definible*** en T es una interpretación en T de la teoría de grupos (GR) en el vocabulario $L_{\text{groups}} = \{G, \cdot, (-)^{-1}, e\}$. Para $\mathfrak{M} \models T$ su reducto a GR es el grupo $\mathfrak{M}(G)$ cuya multiplicación, inversos y elemento neutro se obtienen la interpretar los símbolos de L_{groups} en $\mathfrak{M}$.

Compare con la noción de grupo en una categoría cartesiana. Véase pág. 57

(iii) Una ***acción definible de grupo*** en T es una interpretación en T de la teoría de acciones de grupo (GRA). Dicha teoría añade al vocabulario L_{groups} una suerte X y un símbolo de función $m : G \times X \to X$ e incluye axiomas para garantizar que se respete la composición ($m(gh, x) = m(g, m(h, x))$) y la identidad ($m(e, x) = x$). De modo que, para cada $\mathfrak{M} \models T$ su reducto a GRA es una acción del grupo $\mathfrak{M}(G)$ en $\mathfrak{M}(X)$.

(iv) Una ***categoría definible*** en T es una interpretación en T de la teoría elemental de categorías (CAT) cuyo vocabulario es $L_{\text{cat.}} = \{\mathrm{Obj}, \mathrm{Mor}, s, t, \mathrm{id}, \circ\}$. Este tiene dos suertes, Obj para objetos y Mor para morfismos; símbolos de función $s, t : \mathrm{Mor} \to \mathrm{Obj}$ que indican el dominio y co-dominio de cada morfismo, $\mathrm{id} : \mathrm{Obj} \to \mathrm{Mor}$ que escoge la identidad de cada objeto; y un símbolo de relación $\circ \hookrightarrow \mathrm{Mor}^3$ que indica la composición de morfismos. Los axiomas de CAT aseguran que la composición es el grafo de una operación $\circ : \mathrm{Mor} \times_{\mathrm{Obj}} \mathrm{Mor} \to \mathrm{Mor}$, donde $\mathrm{Mor} \times_{\mathrm{Obj}} \mathrm{Mor}$ es el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor} \times_{\mathrm{Obj}} \mathrm{Mor} \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \mathrm{Mor} \arrow[d, "s"] \\ \mathrm{Mor} \arrow[r, "t"'] & \mathrm{Obj}\,. \end{tikzcd} \tag{1-11}$$

y que dicha operación es asociativa, respeta dominios, co-dominios e identidades.

Para cada $\mathfrak{M} \models T$ su reducto a CAT es una categoría pequeña con objetos $\mathfrak{M}(\mathrm{Obj})$ y morfismos $\mathfrak{M}(\mathrm{Mor})$.

(v) Un ***grupoide*** es una categoría pequeña en la cual todo morfismo tiene inversa. La teoría de grupoides (GRD) es una expansion de CAT que añade a $L_{\text{cat.}}$ un símbolo de función $(-)^{-1} : \mathrm{Mor} \to \mathrm{Mor}$ junto con los axiomas que garantizan que gg^{-1} y $g^{-1}g$ son identidades.

En consecuencia, un ***grupoide definible*** en T es una interpretación de GRD en T. Así para $\mathfrak{M} \models T$ su reducto a GRD es un grupoide $\mathcal{G}^{\mathfrak{M}}$ con objetos $\mathfrak{M}(\mathrm{Obj})$ y morfismos $\mathfrak{M}(\mathrm{Mor})$.

1.2.1. Expansiones por constantes, inmersiones y estabilidad

Sea T una teoría de primer orden en el vocabulario L. En este momento haremos una digresión para mostrar la equivalencia entre expansiones por constantes de T y estructuras definiblemente cerradas en T. Para esto haremos una caracterización funtorial de dichas estructuras.

Definición 1.2.7. Una ***expansión por constantes de*** T es una teoría completa T' que extiende a T en un vocabulario de la forma $L' = L \cup \{c_i : \mathbf{1} \to X_i\}_{i \in I}$. La inclusión $L \subseteq L'$ da lugar a una interpretación canónica $\jmath : \mathrm{Def}_L(T) \to \mathrm{Def}_{L'}(T')$.

Definición 1.2.8. Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura y $\{a_i\}_{i \in I}$ un conjunto indexado de elementos $a_i \in \mathfrak{M}(X_i)$, decimos que un elemento $b \in \mathfrak{M}(Y)$ pertenece a ***la clausura definible de*** $\{a_i\}_{i \in I}$, denotada $\mathrm{dcl}(\{a_i\}_{i \in I})$, si existe una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ tal que

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n, b) \wedge \exists!_y \phi(a_1, \ldots, a_n, y),$$

en otras palabras, $b \in \mathrm{dcl}(\{a_i\}_{i \in I})$ cuando existen un morfismo $f : A \to Y$ definible en $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ y un subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \{a_i\}$ donde $A \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ tales que $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = b$. Pues, basta tomar $A :: \exists!_y \phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathrm{gr}(f) :: \phi(a_1, \ldots, a_n, y)$.

Suponga que $\mathfrak{M} \models T$, según el teorema 1.1 $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ es un funtor booleano y extensivo. En ese contexto, la clausura definible de un conjunto $\mathfrak{A} = \mathrm{dcl}(\{a_i\}_{i \in I})$ puede entenderse como un funtor de $\mathfrak{A} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ definido por $X \mapsto \mathfrak{M}(X) \cap \mathrm{dcl}(\{a_i\}_{i \in I})$.

Note $\mathfrak{A}$ es sub-funtor de $\mathfrak{M}$, por tanto $\mathfrak{A}$ es una sub-estructura de $\mathfrak{M}$, respecto a L y a cualquier expansión de L mediante morfismos definibles (vea el ejemplo 1.2.3 II). Esto implica que $\mathfrak{A}$ respeta productos, co-productos, igualadores y operaciones booleanas entre sub-objetos; porque dichas construcciones pueden definirse sin usar el cuantificador existencial y por tanto se preservan bajo sub-estructuras. Esta discusión motiva la siguiente definición:

Definición 1.2.9. Un funtor $\mathfrak{A} : \mathrm{Def}_L(T) \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ que preserve límites, co-productos y operaciones booleanas entre sub-objetos es llamado ***estructura definiblemente cerrada*** en T.

Nota 1.2.10. Es claro que todo $\mathfrak{M} \models T$ es una estructura definiblemente cerrada. Por el contrario, para que una estructura definiblemente cerrada sea un modelo de T hace falta que preserve imágenes (teorema 1.1), es decir, que sea existencialmente cerrada. Este hecho es la versión categórica del ***test de Tarski-Vaught*** para subestructuras elementales.

Ejemplo 1.2.11. Una estructura definiblemente cerrada en la teoría ACF es un cuerpo perfecto, pues el automorfismo de Frobenius inverso es una función definible. En otros términos, en un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p, se cumple que

$$\mathrm{dcl}(\{a_i\}) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\,(a_i)^{p^{-\infty}}.$$

Lema 1.2.12. *Las expansiones por constantes de T están en correspondencia biyectiva con las estructuras definiblemente cerradas en T.*

Demostración. Sea T' una expansión por constantes de T. Llamemos $\mathfrak{A}$ a la composición de la interpretación canónica $\jmath : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ y el funtor de puntos T'-definibles $\Gamma' : \mathcal{T}' \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$

siendo $\Gamma'(X) = \mathrm{Hom}_{T'}(\mathbf{1}, X)$. Para comprobar que $\mathfrak{A} = \Gamma' \circ \jmath$, basta recordar que $\jmath$ es un funtor booleano y extensivo mientra que $\Gamma' = \mathrm{dcl}_{T'}(\emptyset)$ (nota 1.1.2).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "\jmath^{\mathfrak{A}}"] \arrow[dr, "\mathfrak{A}"'] & \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}. \arrow[d, "\Gamma^{\mathfrak{A}}"] \\ & \mathcal{C}\mathrm{onj} \end{tikzcd} \tag{1-12}$$

Recíprocamente, dada $\mathfrak{A}$ una estructura definiblemente cerrada en T vamos a construir $T^{\mathfrak{A}}$ una expansión por constantes de T: Tome $\{a_i\}_{i\in I} = \bigsqcup_X \mathfrak{A}(X)$ donde la unión se toma sobre todas las suertes básicas X en L, el vocabulario $L^{\mathfrak{A}} = L \sqcup \{c_i : \mathbf{1} \to X_i\}$ dado que $a_i \in \mathfrak{A}(X_i)$, y $\varphi(c_1, \dots c_n)$ es axioma de $T^{\mathfrak{A}}$ siempre que $(a_1, \dots a_n) \in \mathfrak{A}(A)$ donde $A :: \varphi(x_1, \dots x_n)$.

Vemos que $T^{\mathfrak{A}}$ es completa y extiende a T, pues para cada L-sentencia φ tome $A :: \varphi$ en $\mathcal{T}$ y vea que $\mathfrak{A}(A)$ es vacío $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{A}(\mathbf{0})$ o tiene exactamente un elemento $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{A}(\mathbf{1})$.

La correspondencia es biyectiva: Para cada expansión por constantes T' con vocabulario $L' = L \cup \{c_i : \mathbf{1} \to X_i\}_{i\in I}$, el teorema de completitud asegura existe $\mathfrak{M} \models T$ y un conjunto $\{a_i\}_{i\in I}$ con $a_i \in \mathfrak{M}(X_i)$ tal que $T' = Th(\mathfrak{M}, a_i)_{i\in I}$. En este caso $\mathfrak{A} = \Gamma' \circ \jmath$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{dcl}(\{a_i\}_{i\in I})$. Como $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{dcl}(\{a_i\}_{i\in I})$ la teoría $Th(\mathfrak{M}, a_i)$ es interpretable en $T^{\mathfrak{A}} = Th(\mathfrak{M}, \mathrm{dcl}(\{a_i\}))$. Más aún, dicha interpretación posee inversa; pues para cada $b \in \mathfrak{A}(Y)$ existe un morfismo f definible en T tal que $f^{\mathfrak{M}}(a_i, \dots, a_n) = b$ para $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{a_i\}$, así interpretamos la constante correspondiente a b como el término $f(c_1, \dots c_n)$.

Por último, para cualquier $\mathfrak{A}$ definiblemente cerrado en T tenemos que $\mathfrak{A} = \Gamma^{\mathfrak{A}} \circ \jmath^{\mathfrak{A}}$. $\square$

Definición 1.2.13. Dada $\mathfrak{A}$ una estructura definiblemente cerrada en T, a la categoría de $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}} = \mathrm{Def}_{L^{\mathfrak{A}}}(T^{\mathfrak{A}})$ se le conoce como categoría de definibles en T con ***parámetros en*** $\mathfrak{A}$. Notaremos $\jmath^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ a la interpretación canónica correspondiente.

Nota 1.2.14. Para $\mathfrak{M}$ modelo de T, un modelo de $T^{\mathfrak{M}}$ es precisamente una extensión elemental de $\mathfrak{M}$.

Los definibles en T con parámetros en $\mathfrak{A}$ también son llamados $\mathfrak{A}$-definibles. Cada uno de estos es la substitución de un elemento de $\mathfrak{A}$ en un definible en T, o sea, para cada B en $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ existen definibles X, Z y $A \hookrightarrow Z \times X$ en $\mathcal{T}$, junto con un ***parámetro*** $a \in \mathfrak{A}(Z)$ tales que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] \arrow[d] & X = \mathbf{1} \times X \arrow[d, "a \times \mathrm{id}_X"] \\ A \arrow[r, hook] & Z \times X, \end{tikzcd} \tag{1-13}$$

en este caso notaremos a B como A_a. En términos sintácticos , si $A :: \varphi(z,x)$ entonces $A_a :: \varphi(a,x)$.

En particular, para cada morfismo $g : X \to Y$ $\mathfrak{A}$-definible con X y Y en $\mathcal{T}$, tenemos un morfismo definible $f : Z \times X \to Y$ y un parámetro $a \in \mathfrak{A}(Z)$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \times X = X \arrow[d, "a\times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z \times X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1-14}$$

en este caso notaremos a g como f_a.

Solo falta dar una forma de describir un morfismo $\mathfrak{A}$-definible con dominio $\mathfrak{A}$-definible $f_a : A_{a_1} \to B$, para el cual $a \in \mathfrak{A}(Z)$, $a_1 \in \mathfrak{A}(Z_1)$ y A_{a_1} proviene de $A \hookrightarrow Z_1 \times X$ (1-15a):

$$\begin{tikzcd} A_{a_1} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "a_1\times \mathrm{id}_X"] \\ A \arrow[r, hook] & Z_1 \times X \end{tikzcd} \tag{1-15a}$$

$$\begin{tikzcd} Z \times_{Z_1} A \arrow[r, "\rho_Z"] \arrow[d, "\rho_A"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r] & Z_1 \end{tikzcd} \tag{1-15b}$$

Para ello necesitamos morfismos $s : Z \to Z_1$ y $f : Z \times_{Z_1} A \to B$ definibles en T, tales que $Z \times_{Z_1} A$ es el producto fibrado en (1-15b) y $a_1 = s^{\mathfrak{A}}(a)$. Así obtenemos el morfismo $\mathfrak{A}$-definible $A_{a_1} \to Z \times_{Z_1} A$, cuyas componentes son $A_{a_1} \to A$ y $A_{a_1} \to \mathbf{1} \xrightarrow{a} Z$.

Adicionalmente, si el co-dominio debe ser B_{a_2} proveniente de $B \hookrightarrow Z_2 \times Y$ y $a_2 \in \mathfrak{A}(Z_2)$, necesitamos otro morfismo $t : Z \to Z_2$ definible en T, tal que el diagrama (1-16a) conmuta y $a_2 = t^{\mathfrak{A}}(a)$. En dicho caso, obtenemos el diagrama (1-16b).

$$\begin{tikzcd} Z \times_{Z_1} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_Z"'] & B \arrow[d, "\rho_{Z_2}"] \\ Z \arrow[r, "t"'] & Z_2 \end{tikzcd} \tag{1-16a}$$

$$\begin{tikzcd} A_{a_1} \arrow[r, "f_a"] \arrow[d] & B_{a_2} \arrow[d] \\ Z \times_{Z_1} A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd} \tag{1-16b}$$

Ejemplos 1.2.15. (I) Para cualquier objeto en un grupoide, sus endomorfismos conforman un grupo conocido como ***grupo de isotropía***.

Sea $\mathcal{G}$ un grupoide definible en T, ejemplo 1.2.6 (V), dado $\mathfrak{M} \models T$ y $a \in \mathfrak{M}(\mathrm{Obj})$ el grupo de isotropía de $\mathcal{G}^{\mathfrak{M}}$ en a es precisamente $\mathfrak{M}(G_a)$ donde $G_a \hookrightarrow \mathrm{Mor}$ es el dcl(a)-definible representado por la formula $s(g) = a \wedge t(g) = a$, donde g es la variable correspondiente a Mor. Note que la multiplicación en $\mathfrak{M}(G_a)$ es la restricción de la composición de morfismos en $\mathcal{G}^{\mathfrak{M}}$.

En conclusión, si $\mathcal{G}$ es un grupoide definible en T, entonces cada grupo de isotropía es definible con parámetros.

(II) Una ***acción de un grupoide*** es un funtor del grupoide $\mathcal{G}$ en $\mathcal{C}$onj, diremos que la acción es acotada a un conjunto X si para todo objeto en $\mathcal{G}$ su imagen es un subconjunto de X.

La teoría de acciones acotadas de grupoides (GRDA) es una expansión de GRD que adiciona al vocabulario $L_{\text{cat.}} \sqcup \{(-)^{-1}\}$ una suerte X y relaciones $U \hookrightarrow \text{Obj} \times X$, $\Psi \hookrightarrow \text{Mor} \times X^2$. Los nuevos axiomas de GRDA afirman que Ψ es el grafo de un morfismo $\Psi : \text{Mor} \times_{\text{Obj}} U \to U$ de modo que para cada parámetro g en Mor se obtiene el morfismo $\psi_g : U_{s(g)} \to U_{t(g)}$, descrito en los diagramas (1-15) y (1-16). El resto de axiomas afirman la funtorialidad de Ψ, estos son $\psi_{gh} = \psi_g \psi_h$ y $\psi_{\text{id}(a)} = \text{id}_{U_a}$ donde a varia en la suerte Obj y tanto g como h varían en la suerte Mor.

Una ***acción definible de grupoide*** en T es una interpretación de GRDA en T. Esto quiere decir que para cada $\mathfrak{M} \models T$ el grupoide $\mathcal{G}^{\mathfrak{M}}$ actúa en subconjuntos definibles de $\mathfrak{M}(X)$ mediante el funtor $a \mapsto \mathfrak{M}(U_a)$ para $a \in \mathfrak{M}(\text{Obj})$ y $g \mapsto \psi_g^{\mathfrak{M}}$ para $g \in \mathfrak{M}(\text{Mor})$.

(III) Combinando los ejemplos I y II, tenemos que si $(\mathcal{G}, X, U, \Psi)$ es una acción definible en T de grupoide y $a \in \mathfrak{M}(\text{Obj})$ para algún $\mathfrak{M} \models T$, entonces (G_a, U_a) es una acción de grupo definible en T con parámetros en dcl(a). Note que la multiplicación $m_a : G_a \times U_a \to U_a$ se obtiene como restricción de Ψ.

Finalizamos nuestra digresión sobre expansiones por constantes notando que estas se reducen e inducen levantamientos naturales de cualquier otra interpretación.

Definición 1.2.16. Dada una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$. Para cada $\mathfrak{A} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$onj estructura definiblemente cerrada en T su ***reducto*** es la estructura definiblemente cerrada en T_0 denotada $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \circ \iota$. Usando las expansiones por constantes $\jmath^{\mathfrak{A}}$ y $\jmath^{\mathfrak{A}_0}$ ***elevamos*** $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ a $\iota^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{A}_0}"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{A}}"] \\
\mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \arrow[r, "\iota^{\mathfrak{A}}"'] & \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd} \tag{1-17}$$

Inyectividad y sobreyectividad

Retomamos ahora el estudio de las propiedades de una interpretación. Tal como una categoría de definibles puede ser entendida a partir de sus álgebras de sub-objetos, una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ puede ser entendida a partir del sistema coherente de homomorfismos $\iota_X : \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(\iota X)$ para X definible en T_0. El adjetivo ***coherente*** significa que para cada morfismo $f : X \to Y$ definible en T_0 el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}_0}(Y) \arrow[r, "\iota_Y"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(\iota Y) \arrow[d, "(\iota f)^*"] \\
\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}_0}(X) \arrow[r, "\iota_X"'] & \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(\iota X).
\end{tikzcd}$$

La siguientes proposiciones relacionan las propiedades de estos homomorfismos con las propiedades de la interpretación.

Proposición 1.2.17. *Dada una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ las siguientes propiedades de ι son equivalentes:*

I. *El homomorfismo $\iota_{\mathbf{1}}$ es inyectivo.*

II. *El homomorfismo ι_X es inyectivo para todo X en $\mathcal{T}_0$.*

III. *El funtor ι es fiel.*

Demostración. I $\Rightarrow$ II : Para cualquier $A \hookrightarrow X$, como ι respeta imágenes tenemos $\exists_{\iota x}(\iota_X A) = \iota_{\mathbf{1}} \exists_x A$, así $\iota_X A = \mathbf{0}$ si y solo si $\iota_{\mathbf{1}} \exists_x A = \mathbf{0}$.

II $\Rightarrow$ III : Sabiendo que dos morfismos se interpretan igual siempre y cuando sus grafos se interpreten igual, la inyectividad de $\iota_{X\times Y}$ garantiza la fidelidad de ι para los morfismos desde X hacia Y.

III $\Rightarrow$ I : Sea $A \hookrightarrow \mathbf{1}$ con $\iota A = \mathbf{0}$, al tomar la imagen de las composiciones $A \hookrightarrow \mathbf{1} \rightrightarrows \mathbf{2}$ se obtiene el único morfismo entre $\iota A = \mathbf{0}$ y $\iota \mathbf{2} = \mathbf{2}$. Así que, cuando ι es fiel A iguala los dos elementos de $\mathbf{2}$ y por tanto $A = \mathbf{0}$. □

Definición 1.2.18. Una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ se dirá ***inyectiva*** si cumple cualquiera de las propiedades de la proposición 1.2.17.

Nota 1.2.19. En términos lógicos, ι es inyectiva cuando $T \models \iota\varphi$ equivale a $T_0 \models \varphi$ para toda sentencia. Desde la perspectiva topológica, $\iota_X : \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}_0}(X) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{T}}(\iota X)$ es inyectiva siempre y cuando $\mathrm{S}(\iota_X) : \mathrm{S}_T(\iota X) \to \mathrm{S}_{T_0}(X)$ sea sobre; esto quiere decir que cualquier tipo en T_0 se puede extender a al menos un tipo en T.

Lema 1.2.20. *Si T_0 es una teoría completa, cualquier interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es inyectiva.*

Demostración. En una teoría completa, se tiene que $\mathrm{Sub}_{\mathcal{T}_0}(\mathbf{1}) = \{\mathbf{0} \hookrightarrow \mathbf{1}\}$. □

El siguiente lema nos dice que una interpretación ι es inyectiva, si su funtor de interpretación ι^*, definido en 1.2.4, es representativo.

Lema 1.2.21. *Una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es inyectiva, si y solo si, para todo $\mathfrak{N}$ modelo de T_0 existe un $\mathfrak{M}$ modelo de T tal que su reducto a T_0 es isomorfo con $\mathfrak{N}$.*

Demostración. Suponga que ι es completa y fije $\mathfrak{N} \models T_0$. Vamos a definir una teoría $T^{\mathfrak{N}}$, de tal manera que si $\mathfrak{M} \models T^{\mathfrak{N}}$ entonces $\mathfrak{M} \models T$ y $\mathfrak{M}_0$ es isomorfo a $\mathfrak{N}$.

Tome $\{a_i\}_{i\in I} = \bigsqcup_X \mathfrak{N}(X)$ donde la unión se toma sobre todas las suertes básicas X en L_0. El vocabulario $L^{\mathfrak{N}} = L \sqcup \{c_i : \mathbf{1} \to \iota X_i\}$ siempre que $a_i \in \mathfrak{N}(X_i)$. Los axiomas de $T^{\mathfrak{N}}$ son los de T unidos con las sentencias $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ para las cuales existe un T_0-definible A tal que $\iota A :: \varphi(x_1, \ldots x_n)$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{N}(A)$.

Solo nos falta comprobar que $T^{\mathfrak{N}}$ es finitamente consistente, para que el teorema de compacidad para la lógica de primer orden nos garantice la existencia del $\mathfrak{M}$ deseado. Observe que cada fragmento finito de $T^{\mathfrak{N}}$ se puede deducir a partir de T y uno solo de los axiomas $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$, en ese caso note que como $\mathfrak{N}(A) \neq \emptyset$, A no es isomorfo a $\mathbf{0}$ en T_0 y por ser ι inyectiva ιA no es isomorfo $\mathbf{0}$ en T. Por lo anterior, existe $\mathfrak{M}' \models T$ y alguna tupla $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{M}'(\iota A)$ así al interpretar $c_i^{\mathfrak{M}'} = b_i$ para $i = 1, \ldots, n$ obtenemos un modelo del fragmento finito de $T^{\mathfrak{N}}$.

Recíprocamente, si $A \hookrightarrow \mathbf{1}$ es una sentencia consistente en T_0, por completitud existe $\mathfrak{N}$ modelo de $\mathcal{T}_0 \cup \{A\}$, al tomar $\mathfrak{M} \models T$ tal que $\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{N}$ tenemos que $\mathfrak{M} \models \iota A$ por lo cual ιA es consistente en T. Probando así que $\iota_{\mathbf{1}}$ (y también ι) es inyectiva. □

Lema 1.2.22. *Dadas una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ y $\mathfrak{A}$ una estructura definiblemente cerrada en T. Para todo $\mathfrak{N}$ modelo de $T_0^{\mathfrak{A}_0}$ existe un $\mathfrak{M}$ modelo de $T^{\mathfrak{A}}$ tal que su reducto a $T_0^{\mathfrak{A}_0}$ es isomorfo con $\mathfrak{N}$.*

Demostración. Basta observar que el levantamiento $\iota^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$, definido en 1.2.16, es una interpretación inyectiva, porque $T_0^{\mathfrak{A}_0}$ es una teoría completa (lema 1.2.20), y aplicar el lema 1.2.21. □

Habiendo entendido el rol de la inyectividad en las interpretaciones, nuestro siguiente objetivo es hacer lo mismo para la sobreyectivdad.

Proposición 1.2.23. *Dada una interpretación inyectiva $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ las siguientes propiedades de ι son equivalentes:*

I. *El homomorfismo ι_X es sobreyectivo para todo X en $\mathcal{T}$.*

II. *El funtor ι es pleno.*

Demostración. I $\Rightarrow$ II : Dado que el grafo de un morfismo $g : \iota X \to \iota Y$ es un sub-objeto $R_g \hookrightarrow \iota(X \times Y)$, por hipótesis existe $R \hookrightarrow X \times Y$ con $\iota R = R_g$. Considere la sentencia A :: "R `es el grafo de un morfismo`"; es claro que $T \models \iota A$ y como ι es inyectiva $T_0 \models A$, es decir, existe $f : X \to Y$ en $\mathcal{T}_0$ cuyo grafo es R y por eso $\iota f = g$.

II $\Rightarrow$ I : Dado que a cada sub-objeto $A \hookrightarrow \iota X$ le asociamos su morfismo característico $\chi_A : \iota X \to \mathbf{2}$ cuando ι es pleno $\chi_A = \iota\chi_B$ para algún $B \hookrightarrow X$ y naturalmente $A = \iota B$. $\square$

Definición 1.2.24. Una interpretación inyectiva $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ se dirá ***inmersión*** si cumple cualquiera de las propiedades de la proposición 1.2.23

Nota 1.2.25. Desde el punto de vista topológico, una inmersión $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ induce homeomorfismos[7] $\mathrm{S}(\iota_X) : \mathrm{S}_T(\iota X) \to \mathrm{S}_{T_0}(X)$ para cada X en $\mathcal{T}_0$. En otras palabras, cada tipo en T_0 se puede extender de manera única a un tipo en T.

Ejemplo 1.2.26. En la interpretación $\iota : \mathrm{Def}(ER_{\infty,\infty}) \to \mathcal{T}_\infty$ vista en el ejemplo 1.2.3 (III), el definible $A \hookrightarrow \iota X^2$ donde $A :: y_2 = y_4$ (recuerde que $\iota X^2 = Y^4$) no es imagen de algún definible en $ER_{\infty,\infty}$. Por otro lado, ambas teorías son completas y por tanto $\iota_{\mathbf{1}}$ es sobre. La moraleja es que para determinar si una interpretación es inmersión, toca verificar la sobreyectividad en todos los definibles.

Criterio de definibilidad de Beth

El problema de determinar si una interpretación es inmersión o no, es simplemente un problema de definibilidad; por lo cual la manera natural de abordarlo es mediante automorfismos, pues los definibles son invariantes bajo automorfismos. El siguiente teorema no es más que la versión categórica del criterio de definibilidad de Beth. La demostración acá presentada es una adaptación de [21, Sec. 9.1] donde es llamado teorema de Svenonius.

Teorema 1.2. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación inyectiva. Para todo definible $B \hookrightarrow \iota X$ en $\mathcal{T}$ las siguientes propiedades son equivalentes:*

I. *Existe un definible $A \hookrightarrow X$ en $\mathcal{T}_0$ con $\iota A = B$.*

II. *Para todo $\mathfrak{M}$ modelo de T y todo $\sigma : \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}_0$ automorfismo de su reducto a T_0, el conjunto $\mathfrak{M}(B) \subseteq \mathfrak{M}_0(X)$ es invariante bajo σ_X, o sea*

$$\sigma_X(\mathfrak{M}(B)) = \mathfrak{M}(B).$$

[7] Toda función continua entre espacios de Stone es cerrada, pues la imagen de un compacto es compacta.

Demostración. Si $B = \iota A$ con $A \hookrightarrow X$ entonces $\mathfrak{M}(B) = \mathfrak{M}(\iota A) = \mathfrak{M}_0(A)$. Como σ_X se restringe a A, $\mathfrak{M}(B)$ es invariante bajo σ_X.

Recíprocamente, supondremos que no existe dicho $A \hookrightarrow X$ y encontraremos dos tipos $p, q \in S_T(\iota X)$ tales que $B \in p$ y $\neg B \in q$, que extiendan al mismo tipo en $\mathrm{S}_{T_0}(X)$, es decir, que $\mathrm{S}(\iota_X)(p) = \mathrm{S}(\iota_X)(q)$. Esto es suficiente para mostrar que $B \hookrightarrow \iota X$ no cumple II:

El lema 1.1.29 garantiza que existe un modelo $\mathfrak{N} \models T$ con elementos $a, b \in \mathfrak{N}(iX) = \mathfrak{N}_0(X)$ tales que $\mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(a) = p$ y $\mathrm{tp}_{\mathfrak{N}}(b) = q$; en particular, $\mathrm{tp}_{\mathfrak{N}_0}(a) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{N}_0}(b)$. De nuevo, el lema 1.1.29 dice que existe $\mathfrak{N}'$ extensión elemental de $\mathfrak{N}_0$ y un automorfismo de $\mathfrak{N}'$ que envía a en b.

Por último, el lema 1.2.22 nos permite encontrar $\mathfrak{M}$ extensión elemental de $\mathfrak{N}$ tal que $\mathfrak{M}_0$ es isomorfo a $\mathfrak{N}'$. De esta manera, $a \in \mathfrak{M}(B)$, $b \notin \mathfrak{M}(B)$ y existe un automorfismo de $\mathfrak{M}_0$ que envía a en b.

Solo nos resta probar la existencia de los tipos p y q: note que el compacto $\mathrm{S}_T(B) \subseteq \mathrm{S}_T(\iota X)$ es enviado mediante $\mathrm{S}(\iota_X)$ en el compacto (y por tanto cerrado) $F \subseteq \mathrm{S}_{T_0}(X)$, si F resultara también abierto tendríamos $F = \mathrm{S}_{T_0}(A)$ para algún $A \hookrightarrow X$ y por dualidad $\iota A = B$ lo cuál supusimos imposible. Por tanto, F es cerrado y no es abierto.

Como ι es inyectiva, $\mathrm{S}(\iota_X)$ es sobreyectiva. Así, $\mathrm{S}_{T_0}(X) = F \cup F'$ siendo F' la imagen de $\mathrm{S}_T(\neg B)$. Sabiendo que F no puede ser abierto $F \cap F' \neq \emptyset$. Tomando $r \in F \cap F'$ existen $p \in \mathrm{S}_T(B)$ y $q \in \mathrm{S}_T(\neg B)$ con $\mathrm{S}(\iota_X)(p) = r = \mathrm{S}(\iota_X)(q)$. $\square$

Este teorema nos permite conectar las propiedades de una interpretación ι, con las de su correspondiente funtor entre clases elementales $\iota^* : \mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Mod}(T_0)$, definido en 1.2.4.

Lema 1.2.27. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación inyectiva. Si ι^* es pleno, entonces ι es inmersión*

Demostración. Dado $\mathfrak{M} \models T$ y σ automorfismo de su reducto $\mathfrak{M}_0$. Como ι^* es pleno, existe $\hat{\sigma} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ tal que $\sigma = \iota^*\hat{\sigma}$, así para cualquier $B \hookrightarrow iX$

$$\sigma_X(\mathfrak{M}(B)) = \hat{\sigma}_{\iota X}(\mathfrak{M}(B)) = \mathfrak{M}(B).$$

Por 1.2 concluimos que ι es inmersión. $\square$

Lema 1.2.28. *Para una inmersión $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *ι^* es fiel.*

II. *Para cada $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{M} = \mathrm{dcl}_T(\mathfrak{M}_0)$.*

III. *Para cada Y en $\mathcal{T}$, existe X en $\mathcal{T}_0$ y $f : \iota X \to Y$ epimorfismo regular en $\mathcal{T}$.*

Demostración. I $\Rightarrow$ II: Vamos a aplicar 1.2 para mostrar que $\jmath : \mathcal{T}^{\mathfrak{M}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}$ es una inmersión, donde $T^{\mathfrak{M}_0}$ y $T^{\mathfrak{M}}$ son las teorías de $\mathfrak{M}$ cuando añadimos al vocabulario una constante para cada elemento de $\mathfrak{M}_0$ y de $\mathfrak{M}$ respectivamente. Como $T^{\mathfrak{M}_0}$ es completa $\jmath$ es inyectiva. Considere $\mathfrak{N} \models T^{\mathfrak{M}}$ (i.e. $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$) y $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ un $T^{\mathfrak{M}_0}$ automorfismo (i.e. automorfismo de $\mathfrak{N}$ que fija $\mathfrak{M}_0$ puntualmente). Por la manera en que $\iota^*\sigma : \mathfrak{N}_0 \to \mathfrak{N}_0$ se construye, es claro que $i^*\sigma$ fija puntualmente a $\mathfrak{M}_0$; dicho de otra manera, notando por h a la inmersión elemental entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{N}_0 \arrow[r, "i^*\sigma"] & \mathfrak{N}_0 \\
\mathfrak{M}_0 \arrow[u, "i^*h"] \arrow[ur, "i^*h"'] &
\end{tikzcd}$$

Por fidelidad de ι^*, $\iota^*(\sigma h) = (\iota^*\sigma)(\iota^* h) = \iota^* h$ implica $\sigma h = h$, es decir, que σ fija puntualmente todo $\mathfrak{M}$. Hemos mostrado que todos los conjuntos $\mathfrak{M}$-definibles en T son $\mathfrak{M}_0$-definibles en T, en particular todos los elementos de $\mathfrak{M}$ son $\mathfrak{M}_0$-definibles en $\mathcal{T}$.

II$\Rightarrow$ III: Dado Y en $\mathcal{T}$, para todo $\mathfrak{M} \models T$ tenemos que

$$\mathfrak{M}(Y) \subseteq \bigcup_{f:\iota A \to Y} \mathfrak{M}(\mathrm{img}(f))$$

donde A esta en $\mathcal{T}_0$ y f esta en $\mathcal{T}$. En efecto, dado $b \in \mathfrak{M}(Y)$ por pertenecer a $\mathrm{dcl}_T(\mathfrak{M}_0)$ sabemos que existe $f : B \to Y$ morfismo definible en $\mathcal{T}$ con $B \hookrightarrow \iota X$ tal que $f^{\mathfrak{M}}(a) = b$ para algún $a \in \mathfrak{M}(B) \subseteq \mathfrak{M}_0(X)$, como ι es una inmersión existe $A \hookrightarrow X$ con $B = \iota A$.

Por compacidad, existen $f_1, \ldots, f_n$ tales que

$$Y = \bigvee_{k=1}^{n} \mathrm{img}(f_k).$$

Basta tomar el co-producto $f = (f_1 \sqcup \ldots \sqcup f_n)$, en otras palabras el morfismo definido a trozos, para que $f : \iota A_1 \amalg \cdots \amalg \iota A_n \to Y$ sea un epimorfismo regular.

III$\Rightarrow$ I. Sean σ y ϱ inmersiones elementales entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ modelos de T tales que

$$\iota^*\sigma = \iota^*\varrho : \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{N}_0,$$

Para cualesquiera Y en $\mathcal{T}$ y $b \in \mathfrak{M}(Y)$ existen X en $\mathcal{T}_0$ un $a \in \mathfrak{M}_0(X)$ y $f : \iota X \to Y$ tales que $b = f^{\mathfrak{M}}(a)$. Por tanto

$$\sigma_Y(b) = \sigma_Y(f^{\mathfrak{M}}(a)) = f^{\mathfrak{M}}(\sigma_{\iota X}(a)) = f^{\mathfrak{M}}((\iota^*\sigma)_X(a)).$$

Como lo mismo es cierto para $\varrho(b)$, concluimos que $\sigma = \varrho$. $\square$

Estabilidad

La estabilidad es una noción central en teoría de modelos, intuitivamente una teoría es estable si sus expansiones por constantes no son mucho más complicadas que ella. Nuestro objetivo no es estudiar las teorías estables, solo las mencionaremos de pasada, sino mostrar la relación entre internalidad y teoría de Galois.

A pesar de que inicialmente y durante muchos años, desde [26] hasta [6], dicha relación fue observada únicamente para teorías estables; la posición de este documento, basada en lo expuesto por Hrushovski en [7] y [6], es que lo realmente necesario es que la interpretación sea estable.

Definición 1.2.29. Una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es ***estable*** si para cada $\mathfrak{M}$ modelo de T el levantamiento $\iota^{\mathfrak{M}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{M}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}$, definido en 1.2.16, es una inmersión.

Esto quiere decir que para cualquier definible en $B_b \hookrightarrow \iota X$ (con X en $\mathcal{T}_0$) con parámetro b en $\mathfrak{M}$, existe un $A_a \hookrightarrow X$ definible en T con parámetro a en $\mathfrak{M}_0$, tal que $\iota^{\mathfrak{M}} A_a = B_b$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{M}_0}"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{M}}"] \\ \mathcal{T}_0^{\mathfrak{M}_0} \arrow[r, "\iota^{\mathfrak{M}}"'] & \mathcal{T}^{\mathfrak{M}} \end{tikzcd} \tag{1-18}$$

Por otro lado, una ***teoría*** T ***es estable*** si ninguna formula podría ordenar un conjunto infinito, es decir, una teoría no es estable cuando existe alguna fórmula $\varphi(x_1, x_2)$ y una sucesión $(a_i)_{i\in\omega}$ de elementos en un modelo $\mathfrak{M} \models T$ tales que

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_i, a_j) \text{ si y solo si } i < j.$$

La relación entre ambos conceptos de estabilidad está dada por el siguiente hecho:

Hecho 1.2.30. *Si $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es una inmersión con T una teoría estable, entonces ι es una interpretación estable y T_0 es una teoría estable.*

Demostración. Si T es estable, el *Teorema de Separación de Parámetros* (ver [21, 12.31 pág. 261]) dice que para cada definible $B_b \hookrightarrow \iota X$ con parámetros en $\mathfrak{M}$, existe un número n, un parámetro $a \in \mathfrak{M}(\iota X^n) = \mathfrak{M}_0(X^n)$ y un T-definible $C \hookrightarrow \iota X^n \times \iota X$ tales que $B_b = C_a$. Siendo ι una inmersión, existe un T_0-definible $A \hookrightarrow X^n \times X$ tal que $\iota A = C$ y por tanto $\iota^{\mathfrak{M}} A_a = C_a = B_b$.

Por otro lado, si $A \hookrightarrow X \times X$ puede ordenar un conjunto infinito en T_0, lo mismo es cierto para ιA en $\mathcal{T}$. Es decir, si la teoría T_0 no fuera estable, automáticamente T tampoco lo sería. $\square$

Lema 1.2.31. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación inyectiva. Si ι^* es pleno, entonces ι es inmersión estable.*

Demostración. Si ι^* es pleno, entonces para todo $\mathfrak{M} \models T$ con reducto $\mathfrak{M}_0 \models T_0$ tenemos que $(\iota^{\mathfrak{M}})^* : \mathrm{Mod}(T^{\mathfrak{M}}) \to \mathrm{Mod}(T_0^{\mathfrak{M}_0})$ también es pleno, luego el lema 1.2.27 garantiza que $\iota^{\mathfrak{M}}$ es inmersión. □

Ejemplos 1.2.32. (I) Para un conjunto de parámetros, la interpretación canónica $\jmath^{\mathfrak{A}}$ no es inmersión, existen $\mathfrak{A}$-definibles que no son definibles, sin embargo es estable pues los $\mathfrak{M}$-definibles en $T^{\mathfrak{A}}$ son los mismos $\mathfrak{M}$-definibles en T.

(II) Cualquier retracto de una teoría estable está inmerso establemente. El cuerpo de constantes $(x' = 0)$ de un cuerpo diferencialmente cerrado[8] es un caso particular de este ejemplo.

(III) En teorías inestables algunos retractos están inmersos establemente y otros no: Considere la teoría (DLO) de un orden lineal denso y sin extremos en el vocabulario $L_{\text{order}} = \{Q, <\}$. La teoría $\mathrm{DLO}_{a<b}$ expande DLO e incluye dos constantes a y b en la suerte Q satisfaciendo $a < b$, la interpretación $\iota_1 : \mathrm{Def}(\mathrm{DLO}) \to \mathrm{Def}(\mathrm{DLO}_{a<b})$ definida a partir de $\iota_1 Q :: a < q < b$ es una inmersión estable, pues es simplemente el retracto al intervalo (a, b) y cada automorfismo de este puede extenderse como la identidad en su complemento.

La teoría $\mathrm{DLO}_{\mathrm{DLO}}$ expande a DLO mediante un predicado $D \hookrightarrow Q$ asegurando que D es denso y de complemento denso en Q. La interpretación $\iota_2 : \mathrm{Def}(\mathrm{DLO}) \to \mathrm{Def}(\mathrm{DLO}_{\mathrm{DLO}})$ definida a partir de $\iota_2 Q = D$ es una inmersión pero no es estable. Es inmersión por que el tipo de una tupla en D sólo depende de su orden, o sea cada tipo en DLO se extiende de manera única a un tipo en T_2. No es estable, por ejemplo $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, <) \models \mathrm{DLO}_{\mathrm{DLO}}$ y $d < \sqrt{2}$ no equivale a ninguna fórmula con parámetros en $\mathbb{Q}$.

1.2.2. Expansiones imaginarias

El último escollo que vamos a superar antes de hablar sobre internalidad, es analizar categóricamente las expansiones imaginarias de una teoría. Estas son la forma de construir cocientes entre definibles. Sea T una teoría de primer orden con vocabulario L y $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$.

Definición 1.2.33. Para cada relación de equivalencia definible $E \hookrightarrow X^2$ en $\mathcal{T}$, construimos su ***expansión imaginaria*** T_E, adicionando a L la suerte X/E y el símbolo de función q :

[8] La eliminación de cuantificadores asegura que la teoría del cuerpo de constantes es simplemente la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados.

$X \to X/E$ al vocabulario ($L_E = L \sqcup \{X/E, q\}$) y agregamos a la teoría axiomas garantizando que E es el núcleo de q y que X/E es la imagen de q.

$$T_E = T \cup \{\forall_{(x_1,x_2)}[\, q(x_1) = q(x_2) \leftrightarrow x_1 E x_2 \,]\,,\, \forall_{x_1/E}\exists_{x_2}[\, x_1/E = q(x_2)\,]\}.$$

Como $L \subseteq L_E$ y $T \subseteq T_E$, existe una interpretación canónica $\jmath_E : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$.

La característica definitoria de una expansión imaginaria, es que a nivel semántico no agrega nada. Porque los elementos nuevos, los de la suerte X/E, virtualmente ya están en cualquier modelo de T. Por esa razón, fueron bautizados como elementos imaginarios.

Proposición 1.2.34. *Para toda expansión imaginaria $\jmath_E : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$, el funtor de interpretación $\jmath_E^* : \mathrm{Mod}(T_E) \to \mathrm{Mod}(T)$ es una equivalencia de categorías.*

Demostración. La (quasi)-inversa de $\jmath_E^*$ se obtiene al realizar el cociente en la categoría de conjuntos. Específicamente:

Cualquier $\mathfrak{M} \models T$ puede expandirse a $\mathfrak{M}_E = (\mathfrak{M}, (X/E)^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}(X)/\mathfrak{M}(E), q^{\mathfrak{M}}) \models T_E$ y cada inmersión elemental $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ se puede expandir a $\sigma^E : \mathfrak{M}_E \to \mathfrak{N}_E$ definiendo $\sigma^E_{X/E}(q^{\mathfrak{M}}(a)) = q^{\mathfrak{N}}(\sigma_X(a))$. □

Definición 1.2.35. Desde el punto de vista categórico, una relación de equivalencia $E \hookrightarrow X^2$ en una categoría regular $\mathcal{R}$ es llamada ***efectiva*** si existe un morfismo $f : X \to Y$ tal que $E = N_f$. La categoría regular $\mathcal{R}$ se dirá ***efectiva*** si todas las equivalencias en $\mathcal{R}$ son efectivas. En teoría de modelos, decimos que una teoría T **elimina imaginarios** cuando la categoría $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ es efectiva.

Nota 1.2.36. Si la relación E es efectiva en la categoría $\mathcal{T}$ podemos construir una interpretación $\kappa : \mathcal{T}_E \to \mathcal{T}$ inversa a $\jmath_E : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$: Basta tomar $\kappa(X/E) = \mathrm{img}(f)$ y $\kappa(q) = \bar{f}$ donde $E = N_f$. Note que en este caso $\kappa^* : \mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Mod}(T_E)$ es precisamente la inversa de $\jmath_E^*$.

Si bien muchas teorías NO eliminan imaginarios, para cualquier T es posible construir su ***clausura imaginaria*** $T^{eq} = \bigcup_{E \in \mathcal{T}} T_E$ en el vocabulario $L^{eq} = \bigcup_{E \in \mathcal{T}} L_E$, donde la unión se toma sobre todas las relaciones de equivalencia definibles en T.

Por la proposición 1.2.34, la interpretación canónica $\jmath_{eq} : \mathrm{Def}_L(T) \to \mathrm{Def}_{L_{eq}}(T_{eq})$ produce una equivalencia $\jmath_{eq}^*$ entre las clases elementales $\mathrm{Mod}(T)$ y $\mathrm{Mod}(T^{eq})$. Es decir, para cada $\mathfrak{M} \models T$ existe un único $\mathfrak{M}^{eq} \models T^{eq}$ tal que $\mathfrak{M} = \jmath_{eq}^*(\mathfrak{M}^{eq})$. [9]

Proposición 1.2.37. *Para cualquier teoría T tenemos que T^{eq} elimina imaginarios.*

[9] En [20] y otros textos, se comete el error de considerar a las distintas suertes imaginarias como partición de una única suerte básica (universo). Este error crea, por compacidad, un tipo parásito; o sea, un tipo que no pertenece a ninguna de las suertes imaginarias. En ese caso, la diferencia entre dos modelos de T^{eq} con el mismo reducto a T son las realizaciones del tipo parásito.

Demostración. Dada una relación de equivalencia $F \hookrightarrow (X/E)^2$ definible en en T^{eq} substituimos en $q \times q : X^2 \to (X/E)^2$ obteniendo ${}^*F = (q \times q)^*F \hookrightarrow X^2$. Note que por el lema 1.2.21, $\jmath_{eq}$ es inyectiva. Además $\jmath_{eq}^*$ es pleno, por lo cual, el lema 1.2.27 garantiza que $\jmath_{eq}$ es una inmersión; esto implica que ${}^*F$ es definible en T. Así, $X/{}^*F$ es una suerte en L^{eq}.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "q'"] & \\
X/E \arrow[r, "h"'] & X/{}^*F
\end{tikzcd}$$

Notando que $N_q = E \hookrightarrow N_{q'} = {}^*F$ por ser q un epimorfismo regular obtenemos un único morfismo definible $h : (X/E) \to X/{}^*F$ tal que $F = N_h$, o sea, $(X/E)/F = X/{}^*F$. □

Nota 1.2.38. Dada una interpretación $\iota : \mathrm{Def}_{L_0}(T_0) \to \mathrm{Def}_L(T)$ existe una única interpretación $\iota_{eq} : \mathrm{Def}_{L_0^{eq}}(T_0^{eq}) \to \mathrm{Def}_{L^{eq}}(T^{eq})$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\jmath_{eq}"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\jmath_{eq}"] \\
\mathcal{T}_0^{eq} \arrow[r, "\iota_{eq}"'] & \mathcal{T}^{eq},
\end{tikzcd} \tag{1-19}$$

pues es suficiente definir $\iota_{eq}(X/E) = \iota X/\iota E$.

Ejemplos 1.2.39. (I) En álgebra universal, todo cociente por una relación de congruencia definible es una suerte imaginaria. En particular, grupos, anillos y módulos cocientes siempre son suertes imaginarias en la teoría de la estructura respectiva.

(II) En la teoría de espacios vectoriales (VE) en dos suertes, K para escalares y V para vectores, o sea $L_{\text{vect.}} = L_{\text{rings}} \sqcup \{V, +, 0, \cdot : K \times V \to V\}$, el ***espacio proyectivo*** es una suerte imaginaria. Basta considerar la equivalencia $E \hookrightarrow V^*$ donde $V^* :: v \neq 0$ y $E :: \exists_k[v_1 = kv_2]$ así $P = P_K(V) := V^*/E$.

(III) En X^n considere la relación de equivalencia $E_{S^n} :: \bigvee_{\tau \in S^n}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$ siendo S^n el grupo de permutaciones de n elementos. Llamamos ***función simétrica elemental*** a un cociente $q : X^n \to X^n/E_{S^n}$. En el caso de la teoría de cuerpos, una función simétrica elemental (en una variable) le asocia a cada tupla los coeficientes del polinomio $\prod_{k=1}^n(x - x_k)$.

(IV) La teoría de cuerpos algebraicamente cerrados elimina imaginarios. La teoría T_∞ no elimina imaginarios, sin embargo, al adicionar las funciones simétricas elementales sí elimina imaginarios.

Ahora vamos a demostrar dos lemas que relacionan las expansiones por constantes y la eliminación de imaginarios. Para eso usaremos la caracterización de definibles con parámetros, definición 1.2.13 y ecuación (1-13).

Definición 1.2.40. Dados $\mathfrak{A}$ una estructura definiblemente cerrada en T y $A_a \hookrightarrow X$ un definible en T con parámetros en $\mathfrak{A}$, diremos que el parámetro $a \in \mathfrak{A}(Z)$ es una ***base canónica para*** A_a si para cualquier $\mathfrak{M} \models T^{\mathfrak{A}}$ y cualquier T-automorfismo $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ se cumple que σ_X fija a $\mathfrak{M}(A_a)$ como conjunto, si y solo si, $\sigma_Z(a) = a$.

Nota 1.2.41. Si $a \in \mathfrak{A}(Z)$ y $b \in \mathfrak{A}(Z')$ son dos bases canónicas para $A_a = B_b$, el teorema 1.2 nos asegura que $b \in \operatorname{dcl}(a)$. En este caso $\operatorname{dcl}(a) = \operatorname{dcl}(b)$ es llamada ***estructura de definición*** para A_a.

La eliminación de imaginarios garantiza la existencia de bases canónicas y por tanto de estructuras de definición. En adelante cada vez que se diga “tomando bases canónicas” nos referiremos a aplicar el procedimiento del siguiente lema.

Lema 1.2.42. *Si la teoría T elimina imaginarios, entonces para todo definible con parámetros existe una base canónica.*

Demostración. Dado un definible $A \hookrightarrow Z \times X$, construimos la relación de equivalencia $E_A \hookrightarrow Z^2$ definiendo

$$E_A :: \forall_x[\varphi(z_1, x) \leftrightarrow \varphi(z_2, x)],$$

siendo $A :: \varphi(z, x)$. Cada elemento de la suerte imaginaria Z/E_A corresponde a un definible con parámetros, es decir, para cualquier $\mathfrak{A}$ definiblemente cerrada en T y todo $a \in \mathfrak{A}(Z)$ tenemos que $A_a :: \varphi(a, x)$ es igual a B_b siendo $b = q^{\mathfrak{A}}(a)$ y $B :: \exists_{z_1}[\bar{z} = q(z_1) \wedge \varphi(z_1, x)]$.

$$\begin{tikzcd}
A_a = B_b \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "a \times \mathrm{id}_X"'] & Z \times X \arrow[r, "q \times \mathrm{id}_X"'] & (Z/E_A) \times X
\end{tikzcd}$$

Si $\mathfrak{M} \models T^{\mathfrak{A}}$ y $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ es un automorfismo que fija a $\mathfrak{M}(A_a)$ como conjunto, entonces $\mathfrak{M}(A_{\sigma_Z(a)}) = \sigma_X(\mathfrak{M}(A_a)) = \mathfrak{M}(A_a)$. Por la definición de E_A tenemos $(a, \sigma_Z(a)) \in \mathfrak{M}(E_A)$, de modo que $\sigma_{Z/E_A}(b) = \sigma_{Z/E_A}(q^{\mathfrak{M}}(a)) = q^{\mathfrak{M}}(\sigma_Z(a)) = q^{\mathfrak{M}}(a) = b$. $\square$

Nota 1.2.43. Durante la prueba se evidencia que la proposición “a es base canónica para A_a” equivale a “la clase de a bajo E_A tiene un solo elemento” y por tanto es definible en primer orden.

El recíproco del lema anterior también es cierto. En [20, Lem. 2] se pone la hipótesis adicional de que existan dos constantes definibles distintas. Para este documento dicha hipótesis es redundante, pues los co-productos son parte del lenguaje; así $\mathbf{2} = \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}$ tiene las dos constantes definibles.

Lema 1.2.44. *Si en la teoría T todo definible con parámetros tiene una base canónica, entonces T elimina imaginarios.*

Demostración. Dada una relación de equivalencia $E \hookrightarrow X^2$, vamos a usar las bases canónicas de las clases de equivalencia para definir X/E: Si $B \hookrightarrow Z \times X$ es tal que T satisface la sentencia " todo $z \in Z$ es base canónica de B_z" definimos $\Omega B \hookrightarrow X$ mediante " existe z tal que B_z es igual a la E-clase de x".

Como todas las clases tienen base canónica, para todo $\mathfrak{M} \models T$ tenemos $\mathfrak{M}(X) = \bigcup_B \mathfrak{M}(\Omega B)$. Por el teorema de compacidad, existen B_i con $i = 1, \ldots, n$ tal que $Z = \bigvee_{i=1}^n \Omega B_i$; sin perdida de generalidad, podemos suponer que los ΩB_i son dos a dos disyuntos y tomar el co-producto $B \hookrightarrow Y \times X$ donde $B = \sqcup_{i=1}^n B_i$ y $Y = \sqcup_{i=1}^n Y_i$. Así $X = \Omega B$ y la fórmula "B_z es igual a la E-clase de x" es grafo de un morfismo $q : X \to Y$ que permite identificar a Y con X/E. ☐

Veamos que la eliminación de imaginarios se conserva al introducir parámetros.

Lema 1.2.45. *Si la teoría T elimina imaginarios, toda expansión por constantes de T también los elimina.*

Demostración. Dada una relación de equivalencia definible $E_a \hookrightarrow X^2$ con parámetros en $\mathfrak{A}$, existe un definble $E \hookrightarrow Z \times X^2$ con $E :: \psi(z, x_1, x_2)$ y $a \in \mathfrak{A}(Z)$ tales que $E_a :: \psi(a, x_1, x_2)$.

Definimos una equivalencia sin parámetros $F \hookrightarrow (Z \times X)^2$ mediante

$$F :: (z_1 = z_2) \wedge \forall_{x_3}[\psi(z_1, x_1, x_3) \leftrightarrow \psi(z_2, x_2, x_3)], \tag{1-20}$$

así el cociente X/E_a puede interpretarse como $(\{a\} \times X)/F \hookrightarrow (Z \times X)/F$. ☐

A continuación, vamos a usar la eliminación de imaginarios para demostrar algunos lemas sobre interpretaciones estables. Empecemos por uno sencillo, veamos que la diferencia entre interpretación estable e inmersión estable es solo una expansión por constantes.

Lema 1.2.46. *Si $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es una interpretación estable, T es completa y T_0 elimina imaginarios, entonces $\iota^{\mathfrak{B}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{B}} \to \mathcal{T}$ es una inmersión estable donde $\mathfrak{B}$ es el reducto a T_0 de* $\mathrm{dcl}_T(\emptyset)$.

Demostración. Dado $B \hookrightarrow \iota X$ en $\mathcal{T}$, por la estabilidad ι para cada $\mathfrak{M} \models \mathcal{T}$ existe Z en $\mathcal{T}_0$ y un parámetro $b \in \mathfrak{M}_0(Z)$ tal que $B = \iota^{\mathfrak{M}} A_b$ con $A_b \hookrightarrow X$ en $T_0^{\mathfrak{M}_0}$. Por eliminación de imaginarios podemos suponer que b es una base canónica para A_b, esto implica que todo T-automorfismo de cualquier extensión elemental de $\mathfrak{M}$ fija puntualmente a b, pues debe fijar como conjunto a $\iota^{\mathfrak{M}} A_b = B$. Por el teorema 1.2 aplicado a $\jmath^{\mathfrak{M}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}$ y $\{b\} \hookrightarrow \iota Z$, $\{b\}$ es definible en T, es decir, $b \in \mathrm{dcl}_T(\emptyset)(\iota Z) = \mathfrak{B}(Z)$. $\square$

Nota 1.2.47. En la definición de interpretación estable 1.2.29, pedimos que $\iota^{\mathfrak{M}}$ fuera inmersión para todo $\mathfrak{M} \models T$. Este lema permite concluir que: si T_0 elimina imaginarios y ι es estable, entonces $\iota^{\mathfrak{A}}$ es inmersión para toda estructura $\mathfrak{A}$ definiblemente cerrada en T.

Ahora mostremos que la estabilidad siempre es uniforme y además existe un módulo de uniformidad.

Lema 1.2.48. *Si $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es una interpretación estable y T_0 elimina imaginarios, entonces para cada $B \hookrightarrow Y \times \iota X$ existe $A \hookrightarrow Z \times X$ en $\mathcal{T}_0$ y un morfismo definible $q : Y \to \iota Z$ de forma que para todo $\mathfrak{M} \models T$ y todo $a \in \mathfrak{M}(Y)$, tenemos $\mathfrak{M}(B_a) = \mathfrak{M}_0(A_{q^{\mathfrak{M}}(a)})$.*

Demostración. Dados $\mathfrak{M} \models T$ y $a \in \mathfrak{M}(Y)$ por estabilidad existen un Z en $\mathcal{T}_0$, un $A \hookrightarrow X \times Z$ en $\mathcal{T}_0$ y un $b \in \mathfrak{M}_0(Z)$ tales que $\mathfrak{M}(B_a) = \mathfrak{M}_0(A_b)$. El asunto es que, a priori, Z, A y b dependen de a. Nuestro objetivo es mostrar que tanto Z como A se pueden elegir uniformemente; más aún, ver que la dependencia de b respecto a a es una función definible.

Suponga que $\iota X :: \psi(\tilde{x})$, $\iota Z :: \phi(\tilde{z})$, $\iota A :: \varphi(\tilde{z}, \tilde{x})$ y $B :: \theta(y, \tilde{x})$, definimos $B \bigtriangleup A \hookrightarrow Y$ mediante

$$B \bigtriangleup A :: \exists_{\tilde{z}}[\phi(\tilde{z}) \wedge \forall_{\tilde{x}}[\psi(\tilde{x}) \to [\varphi(\tilde{z}, \tilde{x}) \leftrightarrow \theta(y, \tilde{x})]]],$$

note que $a \in \mathfrak{M}(B \bigtriangleup A)$ significa que existe un $b \in \mathfrak{M}_0(Z)$ tal que $\mathfrak{M}(B_a) = \mathfrak{M}_0(A_b)$.

Con esta convención, la estabilidad se traduce como

$$\mathfrak{M}(Y) = \bigcup_{Z \text{ en } \mathcal{T}_0} \; \bigcup_{A \in \mathrm{Sub}(X \times Z)} \mathfrak{M}(B \bigtriangleup A)$$

El teorema de compacidad obliga a que basten finitos Z y finitos A, de ahí que, al reunir estos finitos mediante un co-producto (definición a trozos) podemos suponer que $Y = B \bigtriangleup A$.

Al tomar bases canónicas para A, en la definición de $B \bigtriangleup A$ podemos cambiar $\exists_{\tilde{z}}$ por $\exists!_{\tilde{z}}$; por tanto, $\phi(\tilde{z}) \wedge \forall_{\tilde{x}}[\psi(\tilde{x}) \to [\varphi(\tilde{z}, \tilde{x}) \leftrightarrow \theta(y, \tilde{x})]]$ define el grafo del morfismo $q : Y \to \iota Z$. $\square$

Terminemos con un lema importante, básicamente dice que una inmersión con grupo de enlace trivial debe ser una expansión imaginaria.

Lema 1.2.49. *Si $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es una inmersión para la cual ι^* es fiel y T_0 elimina imaginarios, entonces existe una interpretación $\kappa : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_0$ que es inversa a ι.*

Demostración. Definamos κ para un Y en $\mathcal{T}$, en virtud de 1.2.28 existe un epimorfismo regular $f : \iota X \to Y$ en $\mathcal{T}$. Dado que ι es una inmersión existe $E \hookrightarrow X^2$ tal que el núcleo de f es igual a ιE. Como N_f es una relación de equivalencia, E también lo es.

Usando la eliminación de imaginarios en $\mathcal{T}_0$ podemos definir $\kappa Y := X/E$. Para definir completamente el funtor κ basta definirlo en sub-objetos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}_T(Y) \arrow[r, "\kappa_Y"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{Sub}_{T_0}(E/X) \arrow[d, "q^*"] \\
\mathrm{Sub}_T(\iota X) \arrow[r, "\iota_X^{-1}"'] & \mathrm{Sub}_{T_0}(X)
\end{tikzcd}$$

Dado $B \hookrightarrow Y$, luego $f^*B \hookrightarrow \iota X$ por ser inmersión existe un único $A \hookrightarrow X$ con $\iota A = f^*B$. Usamos el morfismo canónico $q : X \to X/E$ para definir $\kappa_Y B = \exists_q A$. Como $\iota N_q = N_f$ tenemos que $A = q^*\exists_q A$. Así, la adjunción entre la substitución y los cuantificadores garantiza que κ_Y es un isomorfismo de álgebras booleanas.

Para ver que ι y κ son inversas basta notar que $1_{\iota X} : \iota X \to \iota X$ es epimorfismo regular con núcleo $N_1 = \iota\Delta_X$, de ahí que $\kappa(\iota X) = X/\Delta_X \cong X$. En el otro orden, $\iota(\kappa Y) = \iota(X/E)$ y tanto $f : \iota X \to Y$ como $\iota q : \iota X \to \iota(X/E)$ son epimorfimos regulares con el mismo núcleo. Así, $\iota(\kappa Y) \cong Y$. $\square$

Ejemplo 1.2.50 (Casi infantil)**.** La aritmética natural ($T_0 = \mathrm{Th}(\mathbb{N}, <, +, \cdot, 0)$) está inmersa de manera obvia ($\iota N :: z \geq 0$) en la aritmética entera $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <, +, -, \cdot, 0)$, en esta última el morfismo $f : \iota N^2 \to Z$ definido por $f(n, m) = n - m$ es un epimorfismo regular. Así, al re-interpretar Z como N^2/E siendo ιE el núcleo de f (los naturales eliminan imaginarios pues basta tomar el mínimo de cada clase en el orden lexicográfico) obtenemos que las categorías de definibles son equivalentes.

Finalizamos con un resultado que en [16, Cap. 7] es llamado completitud conceptual.

Corolario 1.3. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación donde T_0 elimina imaginarios. ι es una equivalencia de categorías, si y solo si, $\iota^* : \mathrm{Mod}(T) \to \mathrm{Mod}(T_0)$ también lo es.*

Demostración. Si ι tiene inversa κ, κ^* resulta ser la inversa de ι^*; porque, para cualquier $\mathfrak{M} \models T$

$$\kappa^*(\iota^*\mathfrak{M}) = (\kappa\iota)^*(\mathfrak{M}) \cong 1^*_{\mathcal{T}}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M},$$

lo mismo pasa con cada modelo de T_0.

La dirección recíproca es la interesante, si ι^* es equivalencia de categorías necesariamente es un funtor fiel, pleno y representativo. Esto último significa que, para cada $\mathfrak{N} \models T_0$ existe

$\mathfrak{M}$ modelo de T con $\mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{N}$, en el lema 1.2.21 mostramos que esto equivale a que ι es inyectiva.

Sabiendo que ι es inyectiva y que ι^* es pleno, el lema 1.2.27 nos dice que ι es inmersión. Así, el lema anterior garantiza que ι tiene inversa. ☐

1.2.3. Cubrimientos internos

Sean T_0 y T dos teorías de primer orden escritas en lenguajes L_0 y L respectivamente, notamos mediante $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Def}_{L_0}(T_0)$ y $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ a sus categorías de definibles. Finalmente hemos concluido los preliminares y vamos a introducir la principal definición de este trabajo:

Definición 1.2.51. Dadas una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ y una estructura $\mathfrak{A}$ definiblemente cerrada en T. Un definible Y en $\mathcal{T}$ es llamado T_0 ***interno sobre*** $\mathfrak{A}$, si para todo $\mathfrak{M}$ modelo de $T^{\mathfrak{A}}$

$$\mathfrak{M}(Y) \subseteq \mathrm{dcl}_T(\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{A}) = \mathrm{dcl}_{T^{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{M}_0) \tag{1-21}$$

siendo $\mathfrak{M}_0$ el reducto de $\mathfrak{M}$ a T_0.

La manera más obvia para que un T-definible Y sea T_0 interno sobre $\mathfrak{A}$ es que existan un T_0-definible X, un morfismo T-definible $f : Z \times \iota X \to Y$ y un $a \in \mathfrak{A}(Z)$ tales que $f_a : \iota X \to Y$ es un epimorfismo regular en $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$. Veamos que, bajo hipótesis bastante débiles, la internalidad siempre se presenta de manera muy similar a esta.

Definición 1.2.52. Dada una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ y un definible Y en $\mathcal{T}$, llamaremos ***principio de superposición*** para Y a un morfismo $f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$ definible en T, junto con $s : Z \to \iota O$ definible en T y $A \hookrightarrow O \times X$ definibles en T_0.

Si para cualquier modelo $\mathfrak{M} \models T$ se cumple que $\mathfrak{M}(Z)$ no es vacío, para todo $a \in \mathfrak{M}(Z)$, siendo $b = s^{\mathfrak{M}}(a)$, la función $f_a^{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M}_0(A_b) \to \mathfrak{M}(Y)$ es sobreyectiva y a es una base canónica para f_a. En este caso diremos que a es ***base de internalidad*** para Y, pues Y es T_0 interno sobre $\mathrm{dcl}(a)$.

Nota 1.2.53. Observe que "f es un principio de superposición" es una sentencia de primer orden. El único detalle no trivial fue explicado en la nota 1.2.43. En casi todos los ejemplos de principio de superposición que daremos, el definible O tendrá un solo punto, es decir, el dominio A será definible sin parámetros.

Lema 1.2.54. *Suponga que la interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es una inmersión estable y T_0 elimina imaginarios. Para cada Y que sea interno sobre $\mathfrak{A}$ existen T_0 definibles $A \hookrightarrow O \times X$, un morfismo T-definible $f : Z \times_O \iota A \to Y$, junto con $a \in \mathfrak{A}(Z)$ y $b \in \mathfrak{A}_0(O)$ tales que $f_a : \iota A_b \to Y$ es un epimorfismo regular en $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$. Si T es completa y elimina imaginarios, podemos suponer que f es un principio de superposición para Y.*

Demostración. Por al lema 1.2.49, el levantamiento $\iota^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ es una inmersión. Aplicando el lema 1.2.28 a $\iota^{\mathfrak{A}}$ y la ecuación 1-21, obtenemos un epimorfismo regular $f_a : \iota^{\mathfrak{A}} A_b \to Y$ definible en T con parámetros en $\mathfrak{A}$. Teniendo en cuenta la descripción de morfismos $\mathfrak{A}$-definibles, con dominio $\mathfrak{A}$-definible, definición 1.2.13 y ecuación (1-15), obtenemos el morfismo $f : Z \times_O \iota A \to Y$ y $s : Z \to \iota O$.

Precisamente, existen definibles $B \hookrightarrow X_1 \times X_2$ en T_0 y $\Theta \hookrightarrow Z_1 \times \iota B \times Y$ en T, junto a parámetros $a \in \mathfrak{A}(Z_1)$ y $b \in \mathfrak{A}_0(X_1)$ tales que $\mathrm{gr}(f_a) = \Theta_{(a,b)}$.

Para verificar el último enunciado, tome $Z' \hookrightarrow Z$ con Z :: "f_z `es sobre`" y la relación de equivalencia $E_{\mathrm{gr}(f)} \hookrightarrow Z^2$ definida por $E_{\mathrm{gr}(f)}$ :: "$f_{z_1} = f_{z_2}$". Como T elimina imaginarios, tenemos $q : Z \to Z/E_{\mathrm{gr}(f)}$; así $q^{\mathfrak{A}}(a) \in \mathfrak{A}(Z'/E_{\mathrm{gr}(f)})$, siendo T completa, esto garantiza que $\bar{f} : Z'/E_{\mathrm{gr}(f)} \times \iota A \to Y$ es un principio de superposición. □

Ejemplos 1.2.55. (I) La teoría de cuerpos se interpreta la teoría de espacios vectoriales de dimensión fija (VE_n). Recuerde que VE tiene dos suertes, K para el cuerpo de escalares y V para los vectores. Note que V es interno a la teoría de cuerpos, pues cada vector puede escribirse como combinación lineal de n vectores linealmente independientes, siendo n la dimensión de V.

En detalle, siendo $\mathrm{GL}_V \hookrightarrow V^n$ definido mediante "$(v_1, \ldots, v_n)$ son linealmente independientes" tenemos un principio de superposición $f : \mathrm{GL}_V \times K^n \to V$ definido por la combinación lineal $(v_j, \lambda_j) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$. En este sentido, una base de internalidad para V es una base K-lineal.

En general, si $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es una interpretación y (K, V) es un espacio vectorial de dimensión n definible en T, (i.e. una interpretación de VE_n en T) para el cual $K = \iota X$ siendo X definible en T_0. En este contexto, llamaremos a f el ***principio de superposición lineal*** para V.

(II) Sea K un cuerpo diferencialmente cerrado (modelo de DCF) y Y el conjunto solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de grado n, tenemos que Y es interno al campo de constantes C (modelo de ACF_0). Vea el ejemplo 1.2.3 (V). En este caso, tenemos un principio de superposición es lineal $f : \mathrm{GL}_Y \times C^n \to Y$ y una base de intenalidad es un sistema fundamental de soluciones. Otras ecuaciones, por ejemplo las lineales no-homogéneas o la ecuación de Riccati, admiten otros principios de superposición.

(III) La teoría de cuerpos se interpreta en la teoría de extensiones (FE_n) de grado n. Tomando la suerte E para la extensión y F para el cuerpo de base, (F, E) es un espacio vectorial definible y por lo tanto tenemos un principio de superposición lineal.

Esto dice que las bases de internalidad, son tuplas con n elementos de E independientes sobre F; sin embargo, podemos usar la multiplicación en E para mejorar esta descripción. Para una extensión separable, considere el morfismo $t : E \to E^n$ definido mediante $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$, y llamamos primitivo a un elemento del producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Prim}_E \arrow[r, hook] \arrow[d] & E \arrow[d, "t"] \\ \mathrm{GL}_E \arrow[r, hook] & E^n \end{tikzcd} \tag{1-22}$$

Sea $\mathfrak{M} = (F^{\mathfrak{M}}, E^{\mathfrak{M}})$ un modelo de FE_n. Cuando la extensión $F^{\mathfrak{M}} \leq E^{\mathfrak{M}}$ es separable, el *teorema del elemento primitivo* asegura que $\mathfrak{M}(\mathrm{Prim}_E)$ es no vacío, y por tanto los elementos primitivos son bases canónicas para E. De lo contrario, $F^{\mathfrak{M}}$ tiene característica p y $n = p^k m$ donde p no divide a M; la clausura totalmente inseparable de $F^{\mathfrak{M}}$ en $E^{\mathfrak{M}}$, es $\mathfrak{M}(S)$ siendo $S \hookrightarrow E$ el T-definible $S :: \exists_\alpha[\alpha \in F \wedge x^{p^k} - \alpha = 0]$. En este caso, la extensión $\mathfrak{M}(S) \leq E^{\mathfrak{M}}$ es separable y una base canónica para E es un elemento primitivo de E sobre S.

Este es un ejemplo importante, no sólo por ser el primero históricamente sino porque las teorías en cuestión pueden ser muy complicadas. Por ejemplo, la teoría del cuerpo de números racionales interpreta la aritmética.[10]

(iv) Sea $\mathfrak{M}$ una estructura finita. Considere $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ la interpretación de la teoría trivial $\mathcal{F} = \mathrm{Def}_\emptyset(\emptyset)$ en $T = Th(\mathfrak{M})$, recuerde el ejemplo 1.1.21 (i). Cualquier X en $\mathcal{T}$ resulta ser $\mathcal{F}$ interno; pues cuando $\mathfrak{M}(X)$ tiene n elementos es posible enumerarlos.

En detalle, siendo $\Lambda_n X \hookrightarrow X^n$ definido por $\Lambda_n X :: \bigwedge_{i<j\leq n}[x_i \neq x_j]$ el morfismo $\Lambda_n X \times \mathbf{n} \to X$ dado por $(\bar{x}, k) \mapsto x_k$ es un principio de superposición. Una base de internalidad para X es una tupla con n entradas distintas.

(v) La teoría de álgebras booleanas sin átomos se interpreta en teoría de álgebras booleanas con un número fijo de átomos. Considere p el supremo de todos los átomos, un elemento x no tiene átomos bajo él si y solo si $x \wedge p = 0$ (esta fórmula define la interpretación). Así, cada elemento y se escribe cómo $(y \wedge \neg p) \vee (y \wedge p)$ y cualquier enumeración de los átomos es una base de internalidad.

En detalle, siendo B el álgebra booleana, X el conjunto de sus átomos y $A :: x \wedge p = 0$ el álgebra sin átomos. Tenemos el principio de superposición $f : \Lambda_n X \times A^{n+1} \to B$ definido por $(x_i, a_0, a_i) \mapsto a_0 \vee \bigvee_{i=1}^n (x_i \vee a_i)$.

(vi) La teoría de grupos se interpreta en la teoría de acciones de grupos. Sea (G, X) una acción de grupo con n orbitas. En este caso, X es interno a la teoría del grupo y cualquier tupla transversal es una base de internalidad.

[10] Véase [12]. En lógica, la aritmética es el epítome de lo complicado debido a los teoremas de incompletitud.

Una tupla es transversal si tiene exactamente una coordenada en cada orbita. Es decir, al definir $T \hookrightarrow X^n$ mediante

$$T :: \bigwedge_{i<j\leq n} \forall_g [x_i \neq g(x_j)],$$

obtenemos un principio de superposición $f : T \times G \times \mathbf{n} \to X$ donde $(x_j, g, k) \mapsto g(x_k)$.

Definición 1.2.56. Una inmersión estable $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es un ***cubrimiento interno*** si ambas teorías eliminan imaginarios, T es una teoría completa y todo T definible es T_0 interno. Cuando ι sea evidente, diremos que T es un ***cubrimiento interno*** de T_0.

Llamamos ***fibra de internalidad*** a una estructura estructura definiblemente cerrada en T, que contenga (al menos) una base de internalidad para cada T definible.

Diremos que T_0 ***tiene suficientes constantes*** para el cubrimiento interno $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ si existe alguna fibra de internalidad con reducto constante.

Nota 1.2.57. Si $\iota : \mathcal{T}_0 \to T$ es un cubrimiento interno, el lema 1.2.54 implica que para todo T-definible Y existe un principio de superposición. En consecuencia, en cualquier modelo $\mathfrak{M} \models T$ podemos escoger una base de internalidad para cada T-definible. Así, al tomar la clausura definible de dichas bases, obtenemos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ una fibra de internalidad con cardinalidad $|\mathfrak{A}| \leq |\mathcal{T}| = |L| + \aleph_0$.

Ejemplo 1.2.58. Sea $\mathfrak{M}$ una estructura finita. Considere $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}^{eq})$ y $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ la interpretación de la teoría trivial, como en el ejemplo 1.2.55 (IV) todo T-definible es $\mathcal{F}$ interno. Como en $\mathcal{F}$ todo definible con parámetros es definible sin parámetros, ι es una inmersión estable.

Es claro que $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}^{eq})$ y la teoría trivial eliminan imaginarios, por tanto ι es un cubrimiento interno. Además, la única fibra de internalidad es todo $\mathfrak{M}^{eq}$, pues cada base de internalidad enumera todos los elementos, y el reducto de $\mathfrak{M}^{eq}$ a $\mathcal{F}$ es la única estructura posible $\mathfrak{F} : \mathcal{F} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$. Recuerde el ejemplo 1.1.21.

Más adelante, vea el lema 2.1.11 y los ejemplos subsiguientes, veremos que los otros ejemplos en 1.2.55 también dan lugar a cubrimientos internos.

Por fin cumplimos nuestro objetivo de dar una caracterización categórica de internalidad.

Teorema 1.4. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ un cubrimiento interno con fibra de internalidad $\mathfrak{A}$. Existe una interpretación $\pi^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0}$ tal que $\pi^{\mathfrak{A}}\iota$ y $\iota^{\mathfrak{A}}\pi^{\mathfrak{A}}$ son naturalmente isomorfos a $\jmath^{\mathfrak{A}_0}$ y $\jmath^{\mathfrak{A}}$ respectivamente.*

Nota 1.2.59. Si $\mathfrak{A}$ es una fibra de internalidad con reducto constante ($\mathfrak{A}_0 = \mathrm{dcl}_{T_0}(\emptyset)$) entonces $\pi^{\mathfrak{A}}$ es una inversa a izquierda de ι.

Demostración. Como ι es una inmersión estable, gracias al lema 1.2.46, tenemos que $\iota^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ es una inmersión estable. Por otro lado, como todo T-definible es T_0 interno, tenemos $\mathfrak{M} = \mathrm{dcl}_T(\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{A})$ para todo $\mathfrak{M} \models T$. El lema 1.2.28 asegura que el funtor entre modelos $(\iota^{\mathfrak{A}})^*$ es fiel, así por 1.2.49 existe una interpretación inversa a $\iota^{\mathfrak{A}}$la

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{A}_0}"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{A}}"] \arrow[dl, "\pi^{\mathfrak{A}}"] \\
\mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \arrow[r, leftrightarrow, "\iota^{\mathfrak{A}}"'] & \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd}$$

Basta definir $\pi^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0}$ como la composición entre $\jmath^{\mathfrak{A}}$ y la inversa de $\iota^{\mathfrak{A}}$. $\square$

Terminamos con una pequeña observación sobre estabilidad, que establece un recíproco al hecho 1.2.30:

Hecho 1.2.60. *Si T_0 es una teoría completa estable y $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es un cubrimiento interno, entonces T es una teoría estable.*

Demostración. Es bien conocido, que una teoría completa es estable, si y solo si, alguna (y por tanto cualquier) expansión por constantes lo es. Como T_0 es estable, $T_0^{\mathfrak{A}_0}$ también lo es; dado que ι es un cubrimiento interno entonces $T^{\mathfrak{A}}$ y $T_0^{\mathfrak{A}_0}$ son bi-interpretables ($\iota^{\mathfrak{A}}$ es una equivalencia de categorías), $T^{\mathfrak{A}}$ es estable. Por tanto T también es estable. $\square$

2 Grupos de Enlace

Este capítulo está dedicado a la construcción del grupo de enlace para un cubrimiento interno, es decir, una inmersión estable de la teoría T_0 en la teoría T, en el cual todo definible en T es T_0-interno, T es completa y ambas teorías eliminan imaginarios.

Puntualmente, mostraremos que cuando $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es un cubrimiento interno entre teorías, existe un sistema proyectivo de grupos definibles (tal vez con parámetros) en T_0, $\{G_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ tal que para cualquier $\mathfrak{M} \models T$ el grupo de enlace $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$ es igual al límite $\varprojlim_{k\in\mathcal{I}} \mathfrak{M}_0(G_k)$.

Cada sección presenta una versión distinta de la construcción de dicho sistema: La primera, basada en [7], toma una perspectiva algebraica y construye cada grupo a partir de los cambios de base de internalidad. La segunda, basada en [9], muestra que la construcción del grupo de enlace es un caso particular de una construcción categórica que es posible siempre que tenemos una buena codificación interna de morfismos.

2.1. Construcción algebraica. Siguiendo a Hrushovski

Esta sección está escrita para el paladar de un algebrista: quien está iniciado en teoría de modelos encuentra evidente que para construir un automorfismo que intercambie dos elementos, lo primero es que estos tengan el mismo tipo; sin embargo, nuestra manera de proceder será ir construyendo morfismos y cocientes, de manera que solo al final (para que todo pegue bien) descubriremos que los elementos tienen el mismo tipo.

Antes de comenzar, fijemos la notación que usaremos durante esta sección: Sean T_0 y T dos teorías de primer orden que eliminan imaginarios escritas en vocabularios L_0 y L, y con categorías de definibles $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Def}_{L_0}(T_0)$ y $\mathcal{T} = \mathrm{Def}_L(T)$ respectivamente. Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación, y $\mathfrak{A}$ una estructura definiblemente cerrada en T, denotamos $\mathfrak{A}_0$ a su reducto a T_0, ver definición 1.2.16. En particular, para $\mathfrak{M} \models T$ tenemos que $\mathfrak{M}_0 \models T_0$.

Dado Y un definible en T que es T_0 interno, fijaremos $f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$ un principio de superposición para Y. Recuerde que en la definición 1.2.52, $A \hookrightarrow O \times X$ y además de f contamos con el morfismo $s : Z \to \iota O$. Si suponemos que ι es un cubrimiento interno, ver definición 1.2.56, el lema 1.2.54 garantiza la existencia de f.

Cambios de base para un conjunto interno

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura definiblemente cerrada en T. El que f sea principio de superposición, significa que para cada $a \in \mathfrak{A}(Z)$ el morfismo $\mathfrak{A}$-definible $f_a : \iota A_b \to Y$ es un epimorfismo regular, siendo $b = s^{\mathfrak{A}}(a) \in \mathfrak{A}_0(O)$. Sea $N_a = N_{f_a} \hookrightarrow \iota A_b^2$ el núcleo de f_a, esta es la relación de equivalencia dada por tener la misma imagen bajo f_a. Como T elimina imaginarios, $T^{\mathfrak{A}}$ también los elimina (lema 1.2.45). Así, existe $q_a : \iota A_b \to \iota A_b/N_a$ y un isomorfismo $\phi_a : \iota A_b/N_a \to Y$, pues tanto f_a como q_a son co-igualadores para $N_a \underset{\rho_2}{\overset{\rho_1}{\rightrightarrows}} \iota A_b$. Si no le resulta claro como definir ϕ_a^{-1}, consulte la definición de epimorfismo regular 1.1.7 y la proposición subsiguiente.

Si c es otro elemento de $\mathfrak{A}(Z)$ tal que $b = s^{\mathfrak{A}}(c)$ y $N_a = N_c$, es decir, tal que f_a y f_c tienen el mismo dominio y el mismo núcleo, obtenemos un automorfismo $\mathfrak{A}$-definible $\phi_{c,a} = \phi_c \phi_a^{-1} : Y \to Y$.

$$\begin{tikzcd} & \iota A_b \arrow[dl, "f_a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "f_c"] & \\ Y & \iota A_b/N_a \arrow[l, "\phi_a"] \arrow[r, "\phi_c"'] & Y \end{tikzcd} \tag{2-1}$$

Definición 2.1.1. Dado un principio de superposición $f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$, definimos la relación de ***0-compatibilidad*** $R_0 \hookrightarrow Z^2$ mediante la fórmula

$$s(z_1) = s(z_2) \wedge \forall_{x_1} \forall_{x_2} [f(z_1, x_1) = f(z_1, x_2) \leftrightarrow f(z_2, x_1) = f(z_2, x_2)].$$

El morfismo de ***cambios de base*** $\Phi : R_0 \times Y \to Y$ satisface que $y_2 = \Phi(z_2, z_1, y_1)$ si y solo si $\exists_x [y_1 = f(z_1, x) \wedge y_2 = f(z_2, x)]$.

Nota 2.1.2. Tenga en cuenta que $f(z, x)$ está bien definido únicamente cuando $(s(z), x)$ está en $A \hookrightarrow O \times X$.

Ejemplo 2.1.3. En el caso de un principio de superposición lineal, ejemplo 1.2.55 (i), todo par de bases en GL_V son 0-compatibles; porque el dominio K^n es definible sin parámetros (i.e. $O = \mathbf{1}$), y los núcleos son siempre triviales (i.e. $N_{f_a} = \Delta_{K^n} \hookrightarrow (K^n)^2$).

Dado $a = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathfrak{A}(\mathrm{GL}_V)$ el morfismo $\phi_a^{-1} : V \to K^n$ envía cada vector en sus coordenadas respecto a la base a. Si $c = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathfrak{A}(\mathrm{GL}_V)$ es otra base el morfismo $\phi_{c,a} : V \to V$ esta definido por $v_i \mapsto w_i$.

Un ejercicio provechoso para el lector, sería calcular la 0-compatibilidad y los cambios de base para cada uno de los ejemplos en 1.2.55.

Sea $\mathfrak{M}$ un modelo de T, recuerde que, según el teorema 1.1, un automorfismo $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ es un isomorfismo natural $\sigma = \{\sigma_Y : \mathfrak{M}(Y) \to \mathfrak{M}(Y)\}_{Y \in \mathcal{T}}$. Así, para su reducto $\mathfrak{M}_0 \models T_0$

el automorfismo σ se reduce a $\iota^*\sigma : \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}_0$, ver definición 1.2.4. Diremos que σ ***fija (puntualmente)*** a $\mathfrak{M}_0$ si $\iota^*\sigma$ es la identidad, o sea $\sigma_{\iota X} = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_0(X)}$ para todo T_0-definible X. Denotamos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$ al grupo de automorfismos de $\mathfrak{M}$ que fijan a $\mathfrak{M}_0$.

Proposición 2.1.4. *Dada una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ y $f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$ un principio de superposición para Y. Para cada $\mathfrak{M} \models T$ y cada σ automorfismo de $\mathfrak{M}$ que fija a $\mathfrak{M}_0$, existe una pareja 0-compatible $(c, a) \in \mathfrak{M}(R_0) \subseteq \mathfrak{M}(Z)^2$ tal que σ_Y es igual al cambio de base $\phi^{\mathfrak{M}}_{c,a}$.*

Demostración. Tome cualquier $a \in \mathfrak{M}(Z)$ y defina $c = \sigma_Z(a)$. Vamos a usar que σ es una transformación natural y $\iota^*\sigma$ es la identidad, para ver que a y c son compatibles:

Primero $s^{\mathfrak{M}}(c) = s^{\mathfrak{M}}(\sigma_Z(a)) = \sigma_{\iota O}(s^{\mathfrak{M}}(a)) = s^{\mathfrak{M}}(a) = b$, pues $s^{\mathfrak{M}}\sigma_Z = \sigma_{\iota O}s^{\mathfrak{M}}$ por naturalidad y $\sigma_{\iota O}$ es la identidad. Así el dominio de f_a y f_c es ιA_b.

Nuevamente por la naturalidad de σ unido a que $\sigma_{\iota A} = \mathrm{id}_{\iota A}$, obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_0(A_b) \arrow[d, "a\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "c\times\mathrm{id}"] & \\
\mathfrak{M}(Z \times_{\iota O} \iota A) \arrow[r, "\sigma_Z\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "f^{\mathfrak{M}}"'] & \mathfrak{M}(Z \times_{\iota O} \iota A) \arrow[d, "f^{\mathfrak{M}}"] \\
\mathfrak{M}(Y) \arrow[r, "\sigma_Y"'] & \mathfrak{M}(Y).
\end{tikzcd} \tag{2-2}$$

Del diagrama se deduce que $\sigma_Y f^{\mathfrak{M}}_a = f^{\mathfrak{M}}_c$. Como σ_Y es biyección, es claro que f_a y f_c tienen el mismo núcleo; por tanto, $(c, a) \in \mathfrak{M}(R_0)$. Como $\phi_{c,a}$ satisface $f_c = \phi_{c,a}f_a$, ecuación (2-1), y f_a es un epimorfismo, concluimos que $\sigma_Y = \phi^{\mathfrak{M}}_{c,a}$. □

Esta importante proposición nos deja con varias tareas pendientes: Primera, si $\phi_{c,a}$ es la componente Y de un automorfismo ¿quiénes son las otras componentes? Segunda, ¿qué relación deben tener a y c para que este automorfismo exista? Por último, ¿cómo vamos a hacer para agrupar todos ellos?

A continuación, vamos a abordar una a una las preguntas anteriores.

Generadores, levantamientos y restricciones

La respuesta a la primera pregunta es: todas las componentes de un automorfismo, deberían provenir de principios de superposición. Por tanto, debemos escoger un principio de superposición para cada T-definible. Pero no podemos escogerlos de cualquier manera, pues violaría la naturalidad de un automorfismo. Por eso, en este momento, vamos a ver que un principio de superposición para Y se levanta y se restringe naturalmente a principios de superposición para cada definible generado por Y.

Definición 2.1.5. Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación, y fije un T-definible Y. Definiremos inductivamente a los T-definibles ***generados por*** Y ***sobre*** ι:

I. Tanto Y como cualquier definible de la forma ιX, con X definible en T_0, son generados por Y sobre ι.

II. Si U y V son generados por Y sobre ι, entonces $U \times V$ y $U \sqcup V$ son generados por Y sobre ι.

III. Si U es generado por Y sobre ι y $B \hookrightarrow U$, entonces B es generado por Y sobre ι.

IV. Si U es generado por Y sobre ι y $q : U \to Q$ es un epimorfismo regular, entonces Q es generado por Y sobre ι.

Notaremos $\mathcal{T}{\restriction_\iota} Y$, a la sub-categoría plena de $\mathcal{T}$ formada por los definibles generados por Y sobre ι. Diremos que Y es un ***generador para*** $\mathcal{T}$ ***sobre*** ι si $\mathcal{T} = \mathcal{T}{\restriction_\iota} Y$.

Nota 2.1.6. Siguiendo la demostración del teorema 1.1, es claro que $\mathcal{T}{\restriction_\iota} Y$ siempre es una categoría booleana y extensiva. Además, si $\mathcal{T}$ es efectiva (i.e. T elimina imaginarios) entonces $\mathcal{T}{\restriction_\iota} Y$ también lo es. Además, $\mathcal{T}{\restriction_\iota} Y$ permite factorizar a ι mediante:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_0 \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\bar{\iota}"'] & & \mathcal{T} \\ & \mathcal{T}{\restriction_\iota} Y \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \tag{2-3}$$

donde, por definición, $\mathcal{T}{\restriction_\iota} Y \hookrightarrow \mathcal{T}$ es siempre una inmersión. Si $Y = \iota X$ para algún T_0 definible X, notamos $\mathcal{T}{\restriction_\iota} = \mathcal{T}{\restriction_\iota} Y$.

Lema 2.1.7. *Dada una interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ y $f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$ un principio de superposición para Y. Para cada U generado por Y sobre ι, existen ϖU y ζU definibles en $\mathcal{T}{\restriction_\iota}$, y un principio de superposición $f^{|U} : Z \times_{\zeta U} \varpi U \to U$ natural respecto a U.*

Nota 2.1.8. De este modo una base de internalidad para Y, es base de internalidad para todo U generado por Y. En este caso la naturalidad significa que para cada morfismo definible $h : U \to V$ donde U y V son generados por Y sobre ι y para cada base de internalidad $a \in \mathfrak{A}(Z)$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \varpi U_{b_1}/N_{f_a^{|U}} \arrow[r, "\phi_a^{|U}"] \arrow[d, "\pi_a h"'] & U \arrow[d, "h"] \\ \varpi V_{b_2}/N_{f_a^{|V}} \arrow[r, "\phi_a^{|V}"'] & V \end{tikzcd} \tag{2-4}$$

donde $b_1 = (s^{|U})^{\mathfrak{A}}(a)$, ϖU_{b_1} es el dominio y $N_{f_a^{|U}}$ el núcleo de $f_a^{|U}$, de modo que $\phi_a^{|U}$ es el isomorfismo descrito en (2-1); lo análogo es cierto para V, en consecuencia $\pi_a h = (\phi_a^{|V})^{-1} h \phi_a^{|U}$.

Demostración. Procederemos inductivamente, siguiendo uno a uno los puntos de la definición 2.1.5 en los lemas 2.1.9 y 2.1.10. En el caso base, $f^{|Y} = f$ y $f^{|\iota X} : Z \times \iota X \to \iota X$ es simplemente la proyección sobre ιX. □

Lema 2.1.9. *Si $f^{|U} : Z \times_{\zeta U} \varpi U \to U$ y $f^{|V} : Z' \times_{\zeta V} \varpi V \to V$ son principios de superposición para U y V, existen principios de superposición $f^{|W} : (Z \times Z') \times_{\zeta W} \varpi W \to W$ para $W = U \times V$ y también para $W = U \sqcup V$. En el caso $Z = Z'$ podemos en $f^{|W}$ substituir $Z \times Z$ por Z.*

Demostración. Sea $W = U \times V$, tome $\zeta W = \zeta U \times \zeta V$ y dese cuenta que hay un isomorfismo ψ, que reordena los factores del producto:

$$\psi : (Z \times Z') \times_{\zeta W} (\varpi U \times \varpi V) \to (Z \times_{\zeta U} \varpi U) \times (Z' \times_{\zeta V} \varpi V).$$

Definiendo $\varpi W = \varpi U \times \varpi V$ y cayendo en cuenta que el co-dominio de ψ es el dominio de $f^{|U} \times f^{|V}$, basta definir $f^{|W} = (f^{|U} \times f^{|V})\psi$.

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ definiblemente cerrada en T y cualquier $a = (a_1, a_2) \in \mathfrak{A}(Z \times Z')$, tenemos que $f_a^{|W} = (f_{a_1}^{|U} \times f_{a_2}^{|V})$. Por tanto $f_a^{|W}$ será un epimorfismo regular para el cual a es una base canónica.

En caso que $W = U \sqcup V$, tome $\zeta W = \zeta U \times \zeta V$ y dese cuenta que hay un epimorfimo regular ψ, que distribuye $\times$ respecto a $\sqcup$ y luego proyecta sobre Z y Z' respectivamente:

$$\psi : (Z \times Z') \times_{\zeta W} (\varpi U \sqcup \varpi V) \to (Z \times_{\zeta U} \varpi U) \sqcup (Z' \times_{\zeta V} \varpi V).$$

Basta definir $\varpi W = \varpi U \sqcup \varpi V$ y $f^{|W} = (f^{|U} \sqcup f^{|V})\psi$, para que una argumentación análoga a la de arriba muestre que $f^{|W}$ es un principio de superposición.

En el caso $Z = Z'$, podemos considerar el mapa diagonal $\Delta_Z = (\mathrm{id}_Z, \mathrm{id}_Z) : Z \to Z \times Z$ y componer el $f^{|W}$ arriba definido con $\Delta_Z \times \mathrm{id}_{\varpi W}$. □

Lema 2.1.10. *Sea $f^{|U} : Z \times_{\zeta U} \varpi U \to U$ un principio de superposición para U, para cada $B \hookrightarrow U$ y cada $q : U \to Q$ existen principios de superposición $f^{|B}$ y $f^{|Q}$ respectivamente.*

Demostración. Dado $B \hookrightarrow U$ tenemos los siguientes productos fibrados:

$$\begin{tikzcd} f_a^{*|U} B \arrow[r] \arrow[d, hook] & f^{*|U} B \arrow[r, "f^{|B}"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ \varpi U_b \arrow[r, "a \times 1"'] & Z \times_{\zeta U} \varpi U \arrow[r, "f^{|U}"'] & U \end{tikzcd} \tag{2-5}$$

Como el morfismo inferior ($f_a^{|U}$) es epi regular, el superior ($f_a^{|B}$) también lo es. Veamos que $f^{*|U}B = Z \times_{\zeta B} \varpi B$ donde $\varpi B :: \exists_z[f(z,x) \in B]$ así $\varpi B \hookrightarrow \varpi U$ y $\zeta B = \zeta O \times_U B$.

Dado un epimorfismo regular $q : U \to Q$ basta definir $f^{|Q} = q f^{|U}$. □

Lema 2.1.11. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una interpretación inyectiva. Si tenemos un principio de superposición para cada suerte básica y este respeta los simbolos del vocabulario, entonces la interpretación es una inmersión estable*

Demostración. La plenitud de ι^* significa que: dados $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ modelos de T y una inmersión elemental $\sigma : \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{N}_0$ existe una extensión $\tilde{\sigma} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$

□

Definición proyectiva de compatibilidad

Ahora nuestro objetivo es saber ¿cuáles parejas $(a,c) \in \mathfrak{M}(Z^2)$ permiten definir un automorfismo de $\mathfrak{M}$ que fije a $\mathfrak{M}_0$? Para esto, vamos a hacer una observación:

Segunda, nuestro objetivo es componer $\left(\phi_a^{|U}\right)^{-1}$ y $\phi_c^{|U}$ para obtener la componente del automorfismo en U; sin embargo, para que esto sea posible $f_a^{|U}$ y $f_c^{|U}$ deben tener el mismo dominio y el mismo núcleo.

Definición 2.1.12. Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ una inmersión estable. Dado un principio de superposición $f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$, y un T-definble U generado por Y sobre ι, definimos la relación de ***U-compatibilidad*** $R_U \hookrightarrow Z^2$ como la 0-compatibilidad respecto al principio de superposición $f^{|U}$.

Es aquí donde usamos la estabilidad de manera uniforme (ver lema 1.2.48):

Para $f^{*|U}B \hookrightarrow Z \times \iota(X^n \times V)$ existe $q : Z \to \iota S$ y $A \hookrightarrow S \times (X^n \times V)$, tales que, para cualquier a en $\mathfrak{M}(Z)$

$$f_a^{*|U}B = \iota(A_{q^{\mathfrak{M}}(a)}).$$

Organizando, a partir de cada $B \hookrightarrow U$ definimos una relación de equivalencia $R_B \hookrightarrow Z^2$ siendo $R_B ::$ "$f_{z_1}^{*|U}B = f_{z_2}^{*|U}B$". Sabiendo que ι es inyectiva, $(a,c) \in \mathfrak{M}(R_B)$ equivale a que $A_{q^{\mathfrak{M}}(a)} = A_{q^{\mathfrak{M}}(c)}$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que q es epi y que los elementos de S son bases canónicas, es decir, que $\iota S = Z/R_B$.

En el caso especial $\Delta_Y \hookrightarrow Y^2$, $(a,c) \in \mathfrak{M}(R_{\Delta_Y})$ significa que f_a y f_c tienen el mismo núcleo. Notemos $q_0 : Z \to \iota S_0$ al cociente por R_{Δ_Y} y $E \hookrightarrow S_0 \times X^2$ a la re-interpretación uniforme de los núcleos (el núcleo de f_a es $\iota E_{q_0(a)}$); en consecuencia, cada re-interpretación de Y (cada definible de la forma X/E_b) es un sub-objeto de $(S_0 \times X)/F$. Vea la definición de F en la página 36.

Si $(a, c) \in \mathfrak{M}(R_B)$ para cualquier $B \hookrightarrow U$, entonces ϕ_a^{-1} y ϕ_c junto con todos sus levantamientos y restricciones se pueden componer. En ese caso, $\phi_{c,a}$ es un automorfismo de $\mathfrak{M}$.

A esta relación en Z la llamamos ***compatibilidad***, si bien, no podemos garantizar que sea definible, por lo menos, sabemos que es un límite proyectivo de relaciones definibles.

Para ver esto, tomamos como categoría de índices $\mathcal{I}$, a los conjuntos finitos de sub-objetos

$$k \in \mathcal{I} \text{ significa } k = \{B_1 \hookrightarrow U_1, \cdots, B_n \hookrightarrow U_n\},$$

ordenados por contenencia, trivialmente $\mathcal{I}$ es una categoría dirigida. Definimos R_k como $\left(\bigwedge_{B\in k} R_B\right) \wedge R_{\Delta_y}$, así $k_1 \leq k_2$ implica $R_{k_2} \hookrightarrow R_{k_1}$. Pues bien, la compatibilidad R es igual a $\operatorname{Pro} R_k$.

Note que la compatibilidad puede comprobarse en $\mathfrak{M}_0$: Para cada k en $\mathcal{I}$, existe S_k en $\mathcal{T}_0$ y $q_k : Z \to \iota S_k$ cociente para R_k, así a es compatible con c si y solo si $q_k^{\mathfrak{M}}(a) = q_k^{\mathfrak{M}}(c)$ para todo k.

Proposición 2.1.13. *Dado $\mathfrak{M} \models T$ y $a, c \in \mathfrak{M}(Z)$ compatibles, entonces $\phi_{c,a}^{\mathfrak{M}}$ es (determina) un automorfismo de $\mathfrak{M}$ que fija a $\mathfrak{M}_0$.*

Corolario 2.1. *Dado $\mathfrak{M} \models T$ y $m \in \mathfrak{M}$ punto fijo de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$, es decir, $\sigma(m) = m$ para todo $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$. Entonces $m \in \operatorname{dcl}_T(\mathfrak{M}_0)$.*

Demostración. Inicialmente suponga $m \in \mathfrak{M}(Y)$. Sabemos que $m = f_a^{\mathfrak{M}}(b)$ para algún $a \in \mathfrak{M}(Z)$ y $b \in \mathfrak{M}_0(X)$; más aún, para cualquier $c \in \mathfrak{M}(Z)$ que sea compatible con a tenemos que $\phi_{c,a}^{\mathfrak{M}} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$.

Por hipótesis,

$$m = \phi_{c,a}^{\mathfrak{M}}(m) = \phi_{c,a}^{\mathfrak{M}}(f_a^{\mathfrak{M}}(b)) = f_c^{\mathfrak{M}}(b);$$

definiendo $b_k = q_k^{\mathfrak{M}}(a)$, concluimos que $q_k(z) = b_k$ para todo k implica $f(z, b) = m$. Por compacidad, bastan finitas formulas $q_{k_l}(z) = b_{k_l}$ para garantizar la implicación, tomando $k_0 = \bigcup_l k_l$ obtenemos que $\exists_z[f(z, b) = y \wedge q_{k_0}(z) = b_{k_0}]$ es una definición de m. Ahora si $m = (m_1, \ldots, m_n, m_v) \in \mathfrak{M}(Y^n \times \iota V)$ recién probamos que cada $m_i \in \operatorname{dcl}_T(\mathfrak{M}_0)$. □

Grupoide de cambios de base

¿Por qué un grupoide y no un grupo? para componer ϕ_a^{-1} y ϕ_c necesitamos la compatibilidad, no obstante, siempre es posible componerlos en el orden contrario formando las biyecciónes definibles $\psi_{c,a} = \phi_c^{-1}\phi_a$ cuyo único defecto es actuar entre objetos distintos.

$$\begin{tikzcd}
\iota X \arrow[d] \arrow[drr, "f_a"] & & & & \iota X \arrow[d] \arrow[dll, "f_c"'] \\
\iota(X/E_{q_0(a)}) \arrow[rr, "\phi_a"'] & & Y & & \iota(X/E_{q_0(c)}) \arrow[ll, "\phi_c"]
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\psi_{c,a}$ es definible con parámetros, o sea, $\operatorname{gr}\psi_{c,a} \hookrightarrow \iota(X/E_{q_0(a)}) \times \iota(X/E_{q_0(c)})$; sabiendo que cualquier $X/E_b \hookrightarrow P := (S_0 \times X)/F$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{gr}\psi_{c,a} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \iota P^2 \arrow[d, "(a,c)\times 1"] \\
\operatorname{gr}\psi \arrow[r, hook] & (Z \times Z) \times \iota P^2
\end{tikzcd}$$

Usando estabilidad uniforme y tomando bases canónicas (varias parejas pueden definir la misma biyección), tenemos un cociente $q^m : Z \times Z \to \iota Q$ y $\Psi \hookrightarrow Q \times P^2$ de tal manera que $\operatorname{gr}\psi_{c,a} = \Psi_{q^m(a,c)}$.

Para cada índice $k = \{B_1 \hookrightarrow U_1, \cdots, B_n \hookrightarrow U_n\}$ vamos definir el grupoide $\mathcal{G}_k$ dentro de $\mathcal{T}_0$: Sus objetos serán $\mathrm{Obj}_k = S_k$, donde ιS_k es igual al cociente Z/R_k. Sus morfismos serán $\mathrm{Mor}_k \hookrightarrow S_k^2 \times Q$ satisfacen $\iota\,\mathrm{Mor}_k = \mathrm{img}(q)$,siendo $q = (q_k^2, q_m) : Z^2 \to \iota(S_k^2 \times Q)$ tal que a $(a,c) \in \mathfrak{M}(Z^2)$ le asociamos la tripla $(q_k(a), q_k(c), q_m(a,c))$ donde la primera componente es el dominio, la segunda el co-dominio, y la tercera determinará la acción. Por último, la composición se hereda de las parejas en Z $((z_3, z_4) \circ (z_1, z_2) = (z_1, z_4)$ siempre y cuando $q_k(z_2) = q_k(z_3))$.

Ahora note que si $k_1 \leq k_2$ tenemos $R_{k_2} \hookrightarrow R_{k_1}$, lo que significa que existe una función $S_{k_2} \xrightarrow{\alpha} S_{k_1}$ que refina las clase de equivalencia, lo que significa que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "q_{k_2}"'] \arrow[dr, "q_{k_1}"] & \\
S_{k_2} \arrow[r, "\alpha"'] & S_{k_2}
\end{tikzcd}$$

Esta función puede ser extendida hasta los morfismos, generando de esta forma un funtor definible $\mathcal{G}_{k_2} \to \mathcal{G}_{k_1}$, así el grupoide de cambio de bases compatibles será el limite proyectivo de este sistema, $\mathcal{G} = \operatorname{Pro}\mathcal{G}_k$.

Por ultimo definamos la acción del grupoide $\mathcal{G}_k$ como; para los objetos

$$[\alpha_k(s_k) = s_c] \hookrightarrow S_k \times P$$

Es decir, a cada $b_k = q_k(a)$ le asociamos el cociente X/E_{b_0}, además para los morfismos restringimos nuestros cambios de base Ψ como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Psi_k \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Mor}_k \times P \arrow[d] \\ \Psi \arrow[r, hook] & Q \times P \end{tikzcd}$$

Es decir a un morfismo $q_k(a) \xrightarrow{q(a,c)} q_k(c)$ le asociamos el isomorfismo $X/E_{b_0} \xrightarrow{\Psi_{c,a}} X/E_{b'_0}$.

Naturalmente la acción de $\mathcal{G}$ será el limite proyectivo de las acciones de $\mathcal{G}_k$, note que al refinar la compatibilidad únicamente se obtienen mas puntos dentro del grupoide, no se cambian ni los morfismos, ni su acción.

Llevando la acción a Y

El grupoide de cambios de base esta definido y actúa en $\mathcal{T}_0$; por tanto, podemos interpretarlo a él y a su acción dentro de $\mathcal{T}$, con la ventaja de que ahora es posible llevar la acción a nuestro definible Y. Para esto definimos $\mathcal{G}^*$ agregando un punto nuevo a $\mathcal{G}$ de forma que $\mathrm{Obj}\,\mathcal{G}^* = \mathrm{Obj}\,\mathcal{G} \sqcup \{*\}$; los morfismos son definidos como $\mathrm{Mor}\,\mathcal{G}^* = \mathrm{Mor}\,\mathcal{G} \sqcup (Z,*) \sqcup (*,Z) \sqcup (*,R,*)/N$ donde a cada elemento $(a,*)$ será un morfismo de $q(a)$ en $*$ cuya acción es $i(X/E_b) \xrightarrow{\phi_a} Y$. La pareja $(*,a)$ actúa mediante ϕ_a^{-1}. Por ultimo los morfismos $(*,a,c,*)$ son tales que parten y terminan en $*$, y actúan mediante $\phi_{c,a} = \phi_c \phi_a^{-1}$ donde a y c son bases compatibles, y la equivalencia $(a,c)N(a',c')$ significa $\Psi_{a,a'} = \Psi_{c,c'}$.

El siguiente teorema resume todo lo demostrado en esta sección.

Teorema 2.2 (Grupoide de enlace)**.** *Para un cubrimiento interno existen grupoides conexos pro-definibles que actúan definiblemente: $\mathcal{G}$ en $\mathcal{T}_0$ y $\mathcal{G}^*$ en $\mathcal{T}$ tales que, $\mathcal{G}$ es un subgrupoide pleno de $\mathcal{G}^*$, la acción definible de los dos coincide en $\mathcal{T}_0$ y para cualquier modelo $\mathfrak{M} \models T$ el grupo de isotropía del punto $*$ coincide con los automorfismos de $\mathfrak{M}$ que fijan a $\mathfrak{M}_0$.*

Concluimos esta demostración con los siguientes comentarios:

I Hemos demostrado el teorema en el caso en que Y es la única suerte básica de $\mathcal{T}$, si el lenguaje de $\mathcal{T}$ tuviera infinitas suertes básicas, basta incluirlas junto con sus uniones disyuntas dentro del conjunto de índices, es decir un índice será una pareja (V,k) siendo $V = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$, y k como antes, así $\mathcal{G} = \mathrm{Pro}\,\mathcal{G}_{V,k}$, y igualmente para $\mathcal{G}^*$.

II Para una base de internalidad a considere la tupla infinita $b = (b_k) = (q_k(a), k \in \mathcal{I})$ formada por sus clases de compatibilidad; para cualquier otra base c, ser compatible significa que $q_k(c) = b_k$ para todo k, y en este caso existe un automorfismo σ de $\mathfrak{M}$ que fija a $\mathfrak{M}_0$, tal que $\sigma(a) = c$, es decir, la tupla b aísla el tipo de a sobre $\mathfrak{M}_0$. Más aún, los objetos de $\mathcal{G}$ corresponden exactamente con tuplas que tienen el mismo tipo (en $\mathcal{T}_0$) que b y un morfismo entre dos de esas tuplas (digamos que $b = (b_k)$ y $d = (d_k)$) consiste en una pareja (a, c) tal que $\mathrm{tp}(ba) = \mathrm{tp}(dc)$.

III Si $\mathcal{T}_0$ tiene suficientes constantes, podemos conseguir una base a tal que la tupla infinita b es una constante, así el grupo de isotropía de b (G_b) es pro-definible sin parámetros en $\mathcal{T}_0$; sabiendo que en un grupoide conexo todos los grupos de isotropía son isomorfos, tenemos que para cualquier modelo

$$\mathfrak{M}_0(G_b) = \mathfrak{M}(G^*_*) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$$

Corolario 2.3. *Si $\mathfrak{M}$ es una estructura finita, su grupo de automorfismos es pro-finito. Más aún, para cada definible Y en la teoría de $\mathfrak{M}$, la acción de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}) = \varinjlim G_k$ en $\mathfrak{M}(Y)$ proviene de una acción definible de G_k en Y.*

Demostración. Note que $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}^{eq})$ es un cubrimiento interno de la teoría trivial $\mathcal{F} = \mathrm{Def}_\emptyset(\emptyset)$ y esta última tiene suficientes constantes, pues todos sus elementos son constantes. Gracias al teorema 2.2 existe $G = \mathrm{Pro}\, G_k$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}^{eq}/\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(G) = \varprojlim \mathfrak{F}(G_k).$$

Note que $G_k = \mathfrak{F}(G_k)$ es un grupo finito.

Fije Y en $\mathcal{T}$ y tome Z el conjunto bases de internalidad para Y. Note que la compatibilidad $R = \mathrm{Pro}\, R_k \hookrightarrow Z^2$, debe ser igual a R_k para algún k, pues $\mathfrak{M}(Z^2)$ es finito. Así la acción de G en Y provien de la acción de G_k en Y. ☐

2.2. Construcción categórica. Siguiendo a Kamensky

La idea de esta sección (tomada directamente de [9]) es mostrar que (una versión ligeramente más débil de) el teorema 2.2 puede demostrarse a partir de un principio categórico general; visión que se encuentra estrechamente ligada a la visión de Alexander Grothendieck y su escuela sobre la teoría de Galois.

Esta sección se divide en tres partes: en la primera parte, vamos a establecer algunas generalidades sobre categorías monoidales cerradas y funtores entre ellas. Brevemente, una categoría monoidal cerrada tiene un producto y una potenciación que satisfacen una ley exponencial, esto es muy importante porque permite codificar al interior de la categoría los conjuntos de morfismos.

En la segunda parte, mostraremos que la categoría de definibles de una teoría es ind-cerrada, es decir, la potencia de dos definibles puede no ser definible pero seguro es límite inductivo de definibles; para ello utilizaremos una técnica conocida como la construcción de Grothendieck de un funtor.

En la tercera parte, demostraremos que los automorfismos de un funtor cerrado pueden representarse por un límite proyectivo de grupos. Aterrizando este resultado al caso de un cubrimiento interno entre teorías, tenemos un método distinto para construir el grupo de enlace.

2.2.1. Categorías monoidales cerradas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Un ***producto monoidal*** es un funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es la categoría producto, definida en [15, Sec. II. 3.].

Una ***condición asociativa*** para $\otimes$ es un isomorfismo natural $a = \{a_{X,Y,Z}\}$, que a cada tripla X, Y, Z de objetos en $\mathcal{C}$, le asigna

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z,$$

de manera tal que el diagrama con las 5 posibles maneras de asociar 4 objetos es conmutativo. Vea el ***axioma del pentágono*** en [15, Sec. VII. 1.].

Una ***condición conmutativa*** para $\otimes$ es un isomorfismo natural $c = \{c_{X,Y}\}$ que a cada pareja X, Y de objetos en $\mathcal{C}$ le asigna

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

de manera tal que $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$. Las condiciones asociativa y conmutativa son ***compatibles*** si el diagrama con las 6 maneras de asociar y ordenar 3 objetos es conmutativo. Vea el ***axioma del hexágono*** en [15, VII. 7.].

Una ***unidad*** es un objeto $\mathbb{1}$ en $\mathcal{C}$, junto con un isomorfismo natural $l = \{l_X\}$ que a cada objeto X en $\mathcal{C}$ le asigna $l_X : \mathbb{1} \otimes X \to X$; de hecho, cuando el producto tiene condiciones asociativa y conmutativa compatibles podemos suponer (ver [3, Prop. 1.3]) que l, a y c son compatibles, es decir, que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "l"] & \\ (\mathbb{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"'] & X \otimes Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c\otimes\mathrm{id}"'] & X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes l"] \\ (\mathbb{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "l\otimes\mathrm{id}"'] & X \otimes Y. \end{tikzcd}$$

Definición 2.2.1. A una categoría $\mathcal{C}$ dotada con un producto monoidal, unidad, y condiciones asociativa y conmutativa $(\mathcal{C}, \otimes) = (\mathcal{C}, \otimes, a, c, \mathbb{1}, m)$ la llamamos ***categoría monoidal (simétrica con unidad)***[1].

Potencias y ley exponencial

Dada una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes)$ para cada par de objetos X, Y en $\mathcal{C}$ definimos el ***funtor de morfismos*** $\mathrm{Hom}(- \otimes X, Y) : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ mediante $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y)$. Este funtor es contravariante pues a cada $f : Z_1 \to Z_2$ le asocia la función

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(f \otimes X, Y) : \mathrm{Hom}(Z_2 \otimes X, Y) &\to \mathrm{Hom}(Z_1 \otimes X, Y) \\ g &\mapsto g(f \otimes \mathrm{id}_X). \end{aligned}$$

Si el funtor de morfismos es representable, llamamos ***potencia*** $[X, Y]$ al objeto en $\mathcal{C}$ que lo representa. Esto quiere decir que

$$\mathrm{Hom}(Z, [X, Y]) \simeq \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y), \tag{2-6}$$

para cualquier objeto Z en $\mathcal{C}$. Esta igualdad se conoce como ***ley exponencial*** y es sencillamente la correspondencia

$$\frac{Z \to [X, Y]}{Z \otimes X \to Y}$$

Definición 2.2.2. Decimos que $(\mathcal{C}, \otimes)$ es ***cerrada*** si para todo par de objetos X, Y existe la potencia $[X, Y]$.

La unidad permite definir el ***funtor de secciones*** $\Gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ tomando $\Gamma(X) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X)$. Cuando existe la potencia $[X, Y]$ sus secciones corresponden a los morfismos entre X y Y

$$\Gamma([X, Y]) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, [X, Y]) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{1} \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Por esta razón, la potencia también es llamada ***morfismos internos***.

[1] En este documento monoidal es monoidal simétrica con unidad.

Definición 2.2.3. Sea $(\mathcal{C}, \otimes)$ una categoría monoidal, tome X, Y y Z objetos para los cuales las potencias $[X,Y]$, $[Y,Z]$ y $[X,Z]$ existen. La ley exponencial nos permite definir los siguientes morfismos:

(I) A cada $f : X \to Y$ le corresponde una sección, a la cual llamamos ***código de*** f y denotamos $\mathbb{1} \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} [X,Y]$.

(II) A la identidad $\mathrm{id} : [X,Y] \to [X,Y]$ le corresponde un morfismo $\eta : [X,Y] \otimes X \to Y$ al cual llamamos ***evaluación***, pues cualquier $f : X \to Y$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y] \otimes X} \arrow[r, "\eta"] & Y \\
\mathbb{1} \otimes X \approx X \arrow[u, "\ulcorner f \urcorner \otimes 1_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{2-7}$$

(III) Al evaluar primero en X y luego en Y obtenemos un morfismo

$$[Y,Z] \otimes ([X,Y] \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \eta} [Y,Z] \otimes Y \xrightarrow{\eta} Z$$

al cual le corresponde $\circ : [Y,Z] \otimes [X,Y] \to [X,Z]$ conocido como ***composición*** pues este hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[Y,Z] \otimes [X,Y]} \arrow[r, "\circ"] & {[X,Z]} \\
\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \approx \mathbb{1} \arrow[u, "\ulcorner g \urcorner \otimes \ulcorner f \urcorner"] \arrow[ur, "\ulcorner gf \urcorner"'] &
\end{tikzcd} \tag{2-8}$$

para cualquier par de morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$.

Más aún, la composición permite definir los morfismos ***pre-componer con*** f denotado $[f,Z] : [Y,Z] \to [X,Z]$ y ***componer con*** g denotado $[X,g] : [X,Y] \to [X,Z]$ mediante:

$$\begin{tikzcd}
{[Y,Z] \otimes [X,Y]} \arrow[r, "\circ"] & {[X,Z]} \\
{[Y,Z] \otimes \mathbb{1} \approx [Y,Z]} \arrow[u, "1 \otimes \ulcorner f \urcorner"] \arrow[ur, "{[f,Z]}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2-9a}$$

$$\begin{tikzcd}
{[Y,Z] \otimes [X,Y]} \arrow[r, "\circ"] & {[X,Z]} \\
{\mathbb{1} \otimes [X,Y] \approx [X,Y]} \arrow[u, "\ulcorner g \urcorner \otimes 1"] \arrow[ur, "{[X,g]}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2-9b}$$

Monoide de endomorfismos y grupo de automorfismos

Un ***monoide*** en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes)$ es un objeto M junto a dos morfismos $m : M \otimes M \to M$ y $e : \mathbb{1} \to M$ que hacen conmutar un diagrama de asociatividad y uno de elemento neutro; vea [15, Sec. VII. 3.].

Ejemplo 2.2.4. Sea X un objeto en $\mathcal{C}$ para el cual la potencia $[X, X]$ existe. La composición y el código de la identidad, definidos en 2.2.3, hacen de $[X, X]$ un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes)$ el cual notaremos $\mathrm{End}[X]$.

Definición 2.2.5. Una ***categoría cartesiana*** es una categoría finitamente completa considerada como categoría monoidal donde el producto es el producto cartesiano $\otimes = \times$ y la unidad es el objeto final $\mathbb{1} = \mathbf{1}$. Un ***grupo en una categoría cartesiana*** es un monoide (G, m, e) con un isomorfismo $i : G \to G$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "i\times \mathrm{id}_G"] & & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "\Delta_G"] \arrow[r] & \mathbf{1} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "\mathrm{id}_G \times i"] & & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "\Delta_G"] \arrow[r] & \mathbf{1} \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd}$$

donde $\Delta_G = (\mathrm{id}_G, \mathrm{id}_G) : G \to G \times G$ es el morfismo diagonal.

Proposición 2.2.6. *En una categoría cartesiana $(\mathcal{C}, \times)$ es posible extraer el grupo de invertibles de cada monoide. O sea, para cada monoide M, existe un grupo $G \hookrightarrow M$ al que llamaremos grupo de invertibles en M.*

Demostración. Dado un monoide M basta definir $\nabla_M \hookrightarrow M \times M$ como el igualador de $m : M \times M \to M$, $mc_{M,M} : M \times M \to M$ y $M \times M \to \mathbf{1} \xrightarrow{e} M$ (o sea $a_1 a_2 = a_2 a_1 = e$). La multiplicación ∇_M corresponde a multiplicar las primeras componentes y multiplicar en orden contrario las segundas componentes en $M \times M$ (o sea $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, b_2 a_2)$), la identidad es (e, e) y la inversa corresponde a $c_{M,M}$ (o sea $(a_1, a_2)^{-1} = (a_2, a_1)$).

Al componer con la primera proyección obtenemos $\bar{\rho}_1 : \nabla_M \to M$, el cual es mono porque la inversa bilateral es única (si $a_1 = b_1$ entonces $a_2 = b_2$). En resumen, tenemos una interpretación cartesiana (ecuacional) de la teoría de grupos en la de monoides. $\square$

Ejemplo 2.2.7. Sea $(\mathcal{C}, \times)$ una categoría cartesiana y X un objeto tal que la potencia $[X, X]$ existe, notamos por $\mathrm{Aut}[X]$ al grupo de invertibles del monoide $\mathrm{End}[X]$.

Funtores entre categorías monoidales

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice ***monoidal (fuerte)*** si existe un isomorfismo natural ente $FX \otimes FY$ y $F(X \otimes Y)$, donde X y Y son objetos en $\mathcal{C}$.

Diremos que el funtor monoidal F es ***cerrado para el par*** X, Y cuando las potencias $[X, Y]$ en $\mathcal{C}$ y $[FX, FY]$ en $\mathcal{D}$ existen, y además, el morfismo $t : F([X, Y]) \to [FX, FY]$ es un isomorfismo. Donde t es obtenido a partir de la evaluación $\eta : [X, Y] \otimes X \to Y$ mediante la ley exponencial:

$$\frac{F\eta : F([X, Y]) \otimes FX \to FY}{t : F([X, Y]) \to [FX, FY].}$$

Un ***cubrimiento interno*** es una pareja de funtores cerrados (para todos los pares) $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $\pi\iota$ es naturalmente isomorfo a la identidad en $\mathcal{C}$. Un cubrimiento interno es una versión interna de adjunción pues

$$\pi([\iota X, Y]) \leftrightarrow [\pi\iota X, \pi Y] \leftrightarrow [X, \pi Y]. \tag{2-11}$$

2.2.2. Construcciones de Grothendieck en la categoría de definibles

De acuerdo con las definiciones anteriores, la categoría de definibles de una teoría $\mathcal{T}$ es Cartesiana y una interpretación es un funtor monoidal. En este momento, tenemos dos objetivos: primero, usar la construcción de Grothendieck para definir los morfismos internos entre dos definibles, y segundo, determinar cuando una interpretación es un funtor cerrado.

La construcción de Grothendieck para una estructura definiblemente cerrada

Para entender en que consiste y como se usa la construcción de Grothendieck vamos a tomar como ejemplo a una estructura definiblemente cerrada $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M} \models T$. Recuerde que esta es simplemente un funtor $\mathfrak{A} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ que respeta límites, co-productos e induce homomorfismos entre las álgebras de sub-objetos. El objetivo de la construcción de Grothendick es presentar este funtor como un límite proyectivo de funtores representables y por lo tanto identificar a $\mathfrak{A}$ con un pro-definible.

Usaremos como índices a la categoría de elementos, cuyos objetos son las parejas (X, a) donde X es un definible en $\mathcal{T}$ y $a \in \mathfrak{A}(X)$. Los morfismos entre (X, a) y (Y, b) son morfismos definibles $\alpha : X \to Y$ tales que $\alpha^{\mathfrak{A}}(a) = b$.

Para comprobar que estos índices están dirigidos en sentido inverso, basta construir los siguientes límites:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (X,a) \\ (X\times Y,(a,b)) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (Y,b) \end{tikzcd}$$

$$(E,a) \longrightarrow (X,a) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} (Y,b)$$

siendo E el igualador de α y β.

Así tenemos un sistema dirigido inverso $(X,a) \mapsto X$ (abreviaremos $X_{(X,a)}$ como X_a) cuyo límite proyectivo $\operatorname{Pro} X_a = \varinjlim \check{X}_a$ debería representar a $\mathfrak{A}$. Intuitivamente, lo que hacemos es desempacar $\mathfrak{A}$ poniendo una copia de X por cada elemento en $\mathfrak{A}(X)$.

Para comprobar que efectivamente $\operatorname{Pro} X_a$ representa a $\mathfrak{A}$ usamos la caracterización de morfismos 1-9, por tanto, debemos mostrar que $\operatorname{Hom}(\operatorname{Pro} X_a, Z) = \varinjlim \operatorname{Hom}(X_a, Z)$ está en correspondencia natural con $\mathfrak{A}(Z)$ para cualquier Z en $\mathcal{T}$.

Dicha correspondencia se obtiene como límite de las evaluaciones $\eta_a : \operatorname{Hom}(X_a, Z) \to \mathfrak{A}(Z)$ que envían $f \mapsto f_{\mathfrak{A}}(a)$, las cuales son coherentes pues cuando $f \sim g$, o sea, cuando $f = g\alpha$ con $(X,a) \xrightarrow{\alpha} (Y,b)$ tenemos $f_{\mathfrak{A}}(a) = g_{\mathfrak{A}}(b)$. En dirección contraria, para cada $c \in \mathfrak{A}(Z)$ tenemos el índice (Z,c) y el morfismo $1_Z : Z_c \to Z$ tiene una clase de equivalencia en $\varinjlim \operatorname{Hom}(X_a, Z)$.

$$\begin{array}{rcl} \varinjlim \operatorname{Hom}(X_a, Z) & \longleftrightarrow & \mathfrak{A}(Z) \\ \bar{f} & \longmapsto & f_{\mathfrak{A}}(a) \\ \bar{1}_{Z_c} & \longleftarrow\!\shortmid & c \end{array}$$

Estas funciones son inversas pues $1_{Z_c,\mathfrak{A}}(c) = c$ y cuando $c = f_{\mathfrak{A}}(a)$ tenemos $(X,a) \xrightarrow{f} (Z,c)$ con $f = 1_{Z_c} f$, o sea, $1_{Z_c} \sim f$.

Proposición 2.2.8. *Cada estructura definiblemente cerrada es pro-definible, en particular, todo modelo de la teoría es pro-definible. Además, para cada par de modelos los morfismos entre ellos son duales a las inmersiones elementales.*

Demostración. La primera parte está probada arriba. Considere $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos conjuntos de parámetros

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathrm{Pro}\,X_b)\\ &= \varprojlim_{\mathfrak{B}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{A},X_b)\\ &= \varprojlim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{A}(X_b)\end{aligned}$$

Los elementos de este último conjunto son tuplas coherentes (indexadas por $\mathfrak{B}$) de elementos en $\mathfrak{A}$ que respetan todos los definibles ($a_b \in \mathfrak{A}(X) \Leftrightarrow b \in \mathfrak{B}(X)$), estas no son otra cosa que inmersiones elementales de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$. $\square$

La proposición anterior nos dice que existe una inclusión (funtor fiel y pleno) contravariante de la clase elemental $\mathrm{Mod}(T)$ en la categoría $\mathrm{Pro}\,\mathcal{T}$.

La construcción de Grothendieck para el funtor de morfismos definibles

Ahora si, vamos a demostrar que el funtor de morfismos $\mathrm{Hom}(- \times X, Y) : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ es representable en $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$. Para esto la categoría de índices tendrá por objetos a las funciones definibles $f : Z_f \times X \to Y$ y por morfismos $f \xrightarrow{\alpha} g$ a funciones definibles $\alpha : Z_f \to Z_g$ tales que

$$\begin{tikzcd} Z_f \times X \arrow[d, "\alpha\times 1_x"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z_g \times X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

La idea es que, en cualquier estructura definiblemente cerrada $\mathfrak{A}$, cada $a \in \mathfrak{A}(Z_f)$ define un morfismo $f_a : X \to Y$; que el diagrama conmute significa que $f_a = g_{\alpha^{\mathfrak{A}}(a)}$. Nuestra mirada esta puesta en mostrar que $\mathrm{Ind}\,Z_f = [X, Y]$. Antes de esto necesitamos verificar que la categoría de índices sea dirigida. Primero usamos los co-productos:

$$\begin{tikzcd} Z_f \times X \arrow[d, "\mu_1\times 1_x"'] \arrow[dr, "f"] & \\ (Z_f \amalg Z_g) \times X \arrow[r, "f\amalg g"] & Y \\ Z_g \times X \arrow[u, "\mu_2\times 1_x"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} f \arrow[dr, "\mu_1"] & \\ & f \amalg g \\ g \arrow[ur, "\mu_2"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, como es posible que parámetros distintos definan el mismo morfismo para igualar un par $g \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} f$ necesitamos usar bases canónicas; y por tanto, suponer que T elimina imaginarios.

Explícitamente, tomamos el cociente bajo la relación de equivalencia en $E \hookrightarrow Z_f^2$ definida por $E :: \forall_x[f(z_1, x) = f(z_2, x)]$. Así, obtenemos $\bar{f} : (Z_f/E) \times X \to Y$ y observamos que $q : Z_f \to Z_f/E$ es un morfismo $f \xrightarrow{q} \bar{f}$. Note que para cualquier $a \in \mathfrak{A}(Z_g)$ tenemos que $f_{\alpha^{\mathfrak{A}}(a)} = g_a = f_{\beta^{\mathfrak{A}}(a)}$ de donde $(\alpha^{\mathfrak{A}}(a), \beta^{\mathfrak{A}}(a)) \in \mathfrak{A}(E)$. Esto implica que $f \xrightarrow{q} \bar{f}$ iguala cualquier par $g \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} f$.

Demostremos ahora que $\operatorname{Ind} Z_f = [X, Y]$, es decir, que $\operatorname{Ind} Z_f$ representa al funtor $\operatorname{Hom}(- \times X, Y)$. Sea Z cualquier definible en T, mostraremos que $\operatorname{Hom}(Z, \operatorname{Ind} Z_f) = \varinjlim \operatorname{Hom}(Z, Z_f)$ (ver 1-8) es igual a $\operatorname{Hom}(Z \times X, Y)$:

A cada $t : Z \to Z_f$ podemos asignarle la composición $f(t \times 1) : Z \times X \to Y$, esta asignación es coherente, es decir, para $u \sim t$ (existe $f \xrightarrow{\alpha} g$ con $u = \alpha t : Z \to Z_g$) tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & Z_f \times X \arrow[d, "\alpha\times 1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Z \times X \arrow[ur, "t\times 1"] \arrow[r, "u\times 1"'] & Z_g \times X \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

o sea, $g(u \times 1) = g(\alpha \times 1)(t \times 1) = f(t \times 1)$.

Recíprocamente, cada $h : Z \times X \to Y$ sirve de índice, y por tanto tenemos el morfismo $1_Z : Z \to Z_h$. En resumen:

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim \operatorname{Hom}(Z, Z_f) & \longleftrightarrow & \operatorname{Hom}(Z \times X, Y) \\
\bar{t}_f & \longmapsto & f(t \times 1) \\
\bar{1}_{Z_h} & \longleftarrow\!\shortmid & h
\end{array}$$

Estas funciones son inversas ($h = h(1_{Z_h} \times 1)$ y cuando $h = f(t \times 1)$ tenemos $h \xrightarrow{t} f$ con $t = t1_{Z_h}$, o sea $1_{Z_h} \sim t$) y por tanto conforman una biyección natural.

Teorema 2.4. *Una teoría T elimina imaginarios, si y solo si, los funtores de morfismos definibles son representables en* $\operatorname{Ind} \mathcal{T}$.

Demostración. Arriba vimos que la eliminación de imaginarios garantiza que la construcción de Grothendieck es dirigida. Mostremos ahora el recíproco. A cada equivalencia $E \hookrightarrow X^2$ le asociamos su morfismo característico $\chi_E : X \times X \to \mathbf{2}$.

Si $[X, \mathbf{2}] = \operatorname{Ind} Y_i$ representa al funtor $\operatorname{Hom}(- \times X, \mathbf{2})$, entonces a χ_E le corresponde un morfismo $q : X \to [X, \mathbf{2}]$ en $\operatorname{Ind} T$. De ahí que para un k fijo, existe $q_k : X \to Y_k$ tal que $q = \bar{q}_k$. Ver página 16.

Para cualquier $a \in \mathfrak{M}(X)$ con $\mathfrak{M} \models T$, el morfismo $\chi_{E,a} : X \to \mathbf{2}$ es el característico de la clase a respecto a E. Por lo cual, $(a, b) \in \mathfrak{M}(E)$ siempre y cuando $\chi_{E,a} = \chi_{E,b}$. Por otro lado, en $\operatorname{Ind} \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}$ tenemos que $q(a) : \mathbf{1} \to [X, \mathbf{2}]$ es precisamente $\ulcorner \chi_{E,a} \urcorner$; por tanto, $q(a) = q(b)$ equivale a que $\chi_{E,a} = \chi_{E,b}$. Por último, como $q = \bar{q}_k$ verificar que $q(a) = q(b)$ es precisamente ver si existe $k \xrightarrow{\alpha} i$ tal que $(f_\alpha q_k)^{\mathfrak{M}}(a) = (f_\alpha q_k)^{\mathfrak{M}}(b)$.

Lo anterior muestra, que $(a, b) \in \mathfrak{M}(E)$, si y solo si, existe algún $k \xrightarrow{\alpha} i$ tal que $(f_\alpha q_k)^{\mathfrak{M}}(a) = (f_\alpha q_k)^{\mathfrak{M}}(b)$; es decir,

$$\mathfrak{M}(E) = \bigcup_{k \xrightarrow{\alpha} i} \mathfrak{M}(N_\alpha)$$

Siendo N_α el núcleo de $f_\alpha q_k$.

Por compacidad, en la unión basta tomar finitos α y por estar dirigido solamente uno. Por tanto, $E = N_\alpha$ y podemos interpretar X/E como $\operatorname{img}(f_\alpha q_k)$. $\square$

Interpretaciones cerradas y estabilidad

Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_0$ eliminan imaginarios, diremos que una intepretación $\iota \mathcal{T} \to \mathcal{T}_0$ es cerrada si su extensión inductiva $\iota : \operatorname{Ind} \mathcal{T} \to \operatorname{Ind} \mathcal{T}_0$ es cerrada para todo par en $\mathcal{T}$.

Lema 2.2.9. *Si T elimina imaginarios, para toda expansión por constantes la interpretación canónica $\jmath^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ es cerrada.*

Demostración. Por construcción $\jmath^{\mathfrak{A}}[X, Y] = \operatorname{Ind}_{f \in \mathcal{T}} Z_f$ y $[\jmath^{\mathfrak{A}} X, \jmath^{\mathfrak{A}} Y] = \operatorname{Ind}_{g \in \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}} Z_g$.

Cada f definible en $\mathcal{T}$ también lo es en $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$, usaremos la convención $\jmath^{\mathfrak{A}} f = f$. Así, la inclusión entre índices $\{f \in \mathcal{T}\} \hookrightarrow \{g \in \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}\}$ induce un morfismo $t : \operatorname{Ind}_{f \in \mathcal{T}} Z_f \to \operatorname{Ind}_{g \in \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}} Z_g$. O, mejor dicho, las identidades de Z_f vistas en $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ dan lugar al morfismo t. Para definir la inversa de t mostraremos que la inclusión entre índices es cofinal:

Para cada $g : Z_g \times X \to Y$ definible con parámetro $a \in \mathfrak{A}(W)$ tenemos $Z_g = A_a$ siendo $A \hookrightarrow W \times Z$ en $\mathcal{T}$ y el grafo de $\operatorname{gr} g = \psi_a$ con $\psi \hookrightarrow (W \times Z \times X) \times Y$ en $\mathcal{T}$.

Al definir $W_0 \hookrightarrow W$ usando la condición "ψ es funcional en Y", obtenemos un morfismo $f_g : (W_0 \times Z) \times X \to Y$ en $\mathcal{T}$. En $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$ tenemos $a : \mathbf{1} \to W_0$ y $m : Z_g \to Z$ el morfismo $a \times m : Z_g \to (W_0 \times Z)$ hace que $g \to f_g$.

Esta co-finalidad, o, mejor dicho los morfismos $Z_g \to Z_{f_g}$ dan lugar a un morfismo que resulta naturalmente inverso a t. □

Corolario 2.5. *Si T elimina imaginarios, para cualquier estructura definiblemente cerrada $\mathfrak{A} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$, Al evaluarlo en la potencia $[X, Y]$ en $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$ se obtienen los morfismos $\mathfrak{A}$-definibles.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}[X, Y] &= \Gamma^{\mathfrak{A}}(\jmath^{\mathfrak{A}}[X, Y]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathbf{1}, [\jmath^{\mathfrak{A}}X, \jmath^{\mathfrak{A}}Y]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(X, Y).\end{aligned}$$ □

Proposición 2.2.10. *Cuando ambas teorías que eliminan imaginarios, una interpretación $\iota : T_0 \to \mathcal{T}$ es cerrada, si y solo si, es estable.*

Demostración. Dado $\mathfrak{M} \models T$, gracias al corolario anterior

$$\mathfrak{M}[\iota X, \iota Y] = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\iota X, \iota Y)$$

por la misma razón, recuerde que $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\iota$,

$$\mathfrak{M}(\iota[X, Y]) = \mathfrak{M}_0[X, Y] = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_0}(X, Y).$$

esto quiere decir que la función

$$t^{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M}(\iota[X, Y]) \to \mathfrak{M}([\iota X, \iota Y])$$

envía cada morfismo $\mathfrak{M}_0$-definible f en $\iota^{\mathfrak{M}} f$.

Cuando ι es estable $\iota^{\mathfrak{M}}$ es una inmersión, por tanto un funtor fiel y pleno, en conclusión $t^{\mathfrak{M}}$ es una biyección. Visto que t es biyectiva en cada modelo, t es isomorfismo.

Recíprocamente, cada $B \hookrightarrow \iota X$ definible en $\mathcal{T}$ con parámetros en $\mathfrak{M}$, tiene un morfismo característico $\chi_B : \iota X \to \mathbf{2}$ en $\mathcal{T}^{\mathfrak{M}}$. Por ley exponencial, a este morfismo le corresponde un código $\ulcorner \chi_B \urcorner : \mathbf{1} \to [\iota X, \mathbf{2}]$. Como ι es cerrado, existe $\ulcorner \chi_A \urcorner : \mathbf{1} \to \iota[X, \mathbf{2}]$ tal que $t\ulcorner \chi_A \urcorner = \ulcorner \chi_B \urcorner$. De nuevo por ley exponencial, $\ulcorner \chi_A \urcorner$ corresponde a un $A \hookrightarrow X$ en $\mathcal{T}_0^{\mathfrak{M}_0}$ tal que $\iota^{\mathfrak{M}} A = B$. □

Terminamos esta sección recordando que cada $\mathfrak{M} \models T$ es un funtor $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ que difícilmente es cerrado; sin embargo, este puede descomponerse en un funtor cerrado $\jmath^{\mathfrak{M}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{M}}$ y un funtor de puntos $\Gamma^{\mathfrak{M}} : \mathcal{T}^{\mathfrak{M}} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$. Además, los automorfismos de $\mathfrak{M}$ son precisamente las transformaciones naturales biyectivas de $\mathfrak{M}$ a el mismo.

2.2.3. Representación interna de los automorfismos de un funtor

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor, externamente los endomorfismos ($\operatorname{End} F$) son las transformaciones naturales de F en si mismo, o sea, las tuplas $\sigma = (\sigma_X)_{X\in\mathcal{C}}$ que son coherentes con cada morfismo en $\mathcal{C}$ y los automorfismos ($\operatorname{Aut} F$) son aquellos endomorfismos para los cuales σ_X siempre es un ismorfismo.

Cuando D es cartesiana, podemos *agregar parámetros* en un objeto $T \in \mathcal{D}$, al considerar ($\operatorname{End}_T F$) las transformaciones naturales de $T \times F$ a F, o sea, $\sigma_X : T \times FX \to FX$, la idea es que para cada punto $a : \mathbf{1} \to T$, $\sigma_X^a = \sigma_X(a \times 1_{FX}) : FX \to FX$ define un endomorfismo. Para garantizar que estos endomorfismos siempre serán isomorfismos basta que $(\rho_T, \sigma) : T \times FX \to T \times FX$ sea un isomorfismo, tomamos esto último como definición de $\operatorname{Aut}_T F$.

Cuando $h : T_1 \to T_2$ es un morfismo en $\mathcal{D}$ tenemos una función $h^* : \operatorname{End}_{T_2} F \to \operatorname{End}_{T_1} F$ definida por,

$$\begin{tikzcd}
T_1 \times FX \arrow[d, "h\times 1"'] \arrow[dr, dotted, "h^*\sigma_X"] & \\
T_2 \times FX \arrow[r, "\sigma_X"'] & FX,
\end{tikzcd}$$

h^* se restringe correctamente a $\operatorname{Aut}_T F$, pues $(h^*\sigma_X, 1_{T_1})^{-1} = h^*(\sigma_X, \times 1_{T_2})^{-1}$. En resumen, hemos definido dos funtores contra-variantes $T \mapsto \operatorname{End}_T F$ y $T \mapsto \operatorname{Aut}_T F$ entre $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$onj; en la proposición 2.2.11 mostraremos que cuando $\mathcal{D}$ tiene potencias, la construcción de estos funtores se puede realizar internamente.

Una última definición antes de probar dicha proposición, dado $J : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$, notamos $\operatorname{End}_T(F/J)$ y $\operatorname{Aut}_T(F/J)$ a los subconjuntos de $\operatorname{End}_T F$ y $\operatorname{Aut}_T F$ formados por aquellos σ tales que $\sigma_{JX} : T \times FJX_0 \to FJX_0$ es la proyección para cada X_0 en $\mathcal{C}_0$.

Proposición 2.2.11. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $J : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ funtores. Si $\mathcal{D}$ es cartesiana y cerrada, o al menos cerrada sobre F, entonces existen $M = \operatorname{Pro} M_k$ y $G = \operatorname{Pro} G_k$ en $\operatorname{Pro}\mathcal{D}$ con M_k monoides y G_k grupos en $\mathcal{D}$, tales que M representa al funtor $T \mapsto \operatorname{End}_T(F/J)$ y G a $T \mapsto \operatorname{Aut}_T(F/J)$.*

Adicionalmente, para cualquier $H : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0$ cerrado, tenemos que $H(M)$ y $H(G)$ representan a $U \mapsto \operatorname{End}_U(HF/J)$ y $U \mapsto \operatorname{Aut}_U(HF/J)$ respectivamente.

Demostración. Para $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ tenemos el límite en $\mathcal{D}$

$$
\begin{tikzcd}
G_f \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, dotted] \arrow[dd, dotted] & & \mathrm{Aut}[FX] \arrow[d, hook] \\
& M_f \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & {[FX, FX]} \arrow[d, "{[FX,Ff]}"] \\
\mathrm{Aut}[FY] \arrow[r, hook] & {[FY, FY]} \arrow[r, "{[Ff,FY]}"'] & {[FX, FY]}
\end{tikzcd}
$$

Si $X = JX_0$ debemos, adicionalmente, tomar el pullback tanto en M_f como en G_f a lo largo de la identidad $\cdot 1_{FX} : \mathbf{1} \to [FJX_0, FJX_0]$. Tomando como índices a subconjuntos finitos de morfismos en $\mathcal{C}$, a cada $k = \{f_1, \cdots, f_n\}$ le asociamos $G_k \hookrightarrow M_k$ el límite simultaneo de los n diagramas y definimos $\mathbf{G} = \mathrm{Pro}\, G_k$ y $\mathbf{M} = \mathrm{Pro}\, M_k$.

Decir que H es cerrado es asegurar que $H[FX, FY]$ es isomorfo a $[HFX, HFY]$, por tanto, los límites arriba construidos también son naturalmente isomorfos. (H se extiende a las categorías Pro justamente conservando los límites.) $\square$

Lema 2.2.12. *Si $\iota : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$, $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ es un cubrimiento interno, y $H : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}$ un funtor cerrado, entonces existe un isomorfismo en entre los grupos $\mathrm{Aut}(H \circ \pi/\iota)$ y $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathcal{D}} \circ H \circ \pi/\iota)$*

Demostración. Ver [9]. Para el caso de un cubrimiento interno entre teorías su contenido es exactamente el mismo de la proposición 2.1.4. $\square$

Uniendo este lema con la proposición anterior se sigue directamente el siguiente corolario, el cual es un equivalente categórico del teorema 2.2

Corolario 2.6. *Si $\iota : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$, $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ es un cubrimiento interno, existe $\mathbf{G}$ límite proyectivo de grupos en $\mathrm{Ind}\, \mathcal{C}_0$ tal que para cualquier funtor cerrado $H : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}$ se tiene qué*

$$\Gamma_{\mathcal{D}} \circ H(\mathbf{G}) = \mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathcal{D}} \circ H \circ \pi/\iota)$$

3 Teoría de Galois

En este capítulo estableceremos una correspondencia de Galois para el cubrimiento interno de dos teorías y luego exploraremos sus consecuencias en dos casos especiales. En el caso finito, veremos que la versión acá expuesta es equivalente a la versión de Grothendieck, presentada en [5], y también a la de Poizat [20].

En el caso lineal, inspirados en el trabajo de Kamensky [10], a cada categoría tannakiana le asociamos una teoría que resulta ser cubrimiento interno de la teoría de campos algebraicamente cerrados. El grupo de enlace de dicho cubrimiento nos permite recuperar un esquema afin de grupos a partir de la categoría de representaciones del mismo.

3.1. El caso de los cubrimientos internos

Bases algebraicas para topologías pro-discretas

Un ***grupo topológico*** es un grupo con una topología en la cual multiplicar y tomar inversos son operaciones continuas.

Definición 3.1.1. Dados un grupo G y una familia de subgrupos $\mathcal{H}$ que satisface:

- Para todo $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ existe un $H_3 \in \mathcal{H}$ con $H_3 \leq H_1 \cap H_2$.
- Si $H \in \mathcal{H}$ entonces $g^{-1}Hg \in \mathcal{H}$ para cualquier $g \in G$.

Existe una única topología τ que hace de G un grupo topológico en el cual $\mathcal{H}$ es una base para el filtro de vecindades de la identidad. Observe que para determinar la topología de un grupo basta conocer las vecindades de la identidad, pues la multiplicación $g \mapsto hg$ define un homeomorfismo para cada $h \in G$. En este caso, diremos que τ es la topología ***pro-discreta*** en G con ***base algebraica*** $\mathcal{H}$.

Nota 3.1.2. El lector no tendrá problema en verificar que con esta topología, un subgrupo $H \leq G$ es abierto si y solo si existe $H' \in \mathcal{H}$ con $H' \leq H$; además, la clausura de un subgrupo se puede calcular mediante

$$\bar{H} = \bigcap_{H' \in \mathcal{H}} H'H = \bigcap_{H' \in \mathcal{H}} HH'.$$

En particular, si $\mathcal{H}$ esta formada por subgrupos normales, la clausura de un subgrupo es igual a la intersección de los subgrupos abiertos que lo contienen.

Ejemplo 3.1.3. Dado un límite proyectivo de grupos $G = \varprojlim G_k$, dotamos a G de la topología pro-discreta con base algebraica $\mathcal{H} = \{\ker(G \to G_k)\}$. En particular, consideraremos que todo grupo pro-finito viene dotado con esta topología.

El estabilizador de una expansión por constantes

A lo largo de esta sección $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ es un cubrimiento interno para el cuál T_0 tiene suficientes constantes. Esto último significa que tenemos una fibra de internalidad $\mathfrak{A}$ cuyo reducto a T_0 es constante (i.e. $\mathfrak{A}_0 = \mathrm{dcl}_{T_0}(\emptyset)$). En particular, supondremos que T y T_0 eliminan imaginarios.

Denotaremos $G = \mathrm{Pro}\, G_k$ al grupo pro-definible de enlace, y para todo $\mathfrak{M} \models T$ dotaremos a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_0/\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_0(G) = \varprojlim \mathfrak{M}_0(G_k)$ de la topología pro-discreta.

Definición 3.1.4. Sea $T^{\mathfrak{B}}$ una expansión por constantes de T. O sea $\mathfrak{B}$ es una estructura definiblemente cerrada en T. Como cada $\mathfrak{B}$-definible es sub-objeto de algún T-definible, $\iota^{\mathfrak{B}} : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}^{\mathfrak{B}}$ también es un cubrimiento interno con fibra de internalidad $\mathfrak{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota^{\mathfrak{B}}"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\jmath^{\mathfrak{B}}"] \\
 & \mathcal{T}^{\mathfrak{B}}
\end{tikzcd}$$

El teorema 2.2 nos dice que existe un grupo pro-definible $G^{\mathfrak{B}} = \mathrm{Pro}\, G_k^{\mathfrak{B}}$ en T_0, al que llamaremos ***estabilizador de*** $\mathfrak{B}$, tal que para todo $\mathfrak{M} \models T^{\mathfrak{B}}$ se cumple

$$G^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}_0) = \mathrm{Aut}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{B}). \tag{3-1}$$

El siguiente lema muestra que la anterior construcción es funtorial (contra-variante) y de paso nos da una manera de entender los sub-grupos pro-definibles de un grupo de enlace.

Lema 3.1.5. *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ un cubrimiento interno con suficientes constantes. Sea $G = \mathrm{Pro}\, G_k$ su grupo de enlace y $\mathfrak{M} \models T$.*

I. *Dar un grupo pro-definible $H = \mathrm{Pro}\, H_\kappa$ en T_0 con $H \hookrightarrow G$, es equivalente a, encontrar relaciones de equivalencia R_κ^H definibles con parámetros tales que:*

 - *$R_{\kappa_2}^H$ refina $R_{\kappa_1}^H$ siempre que $\kappa_1 \leq \kappa_2$.*
 - *Para cada k existe un $\kappa(k)$ tal que $R_{\kappa(k)}^H$ refine la compatibilidad R_k.*

II. *Si $H \hookrightarrow G$ es un grupo pro-definible entonces $\mathfrak{M}_0(H)$ es un subgrupo cerrado.*

III. *Para cada estructura definiblemente cerrada $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ en T, tenemos que $\mathfrak{M}_0(G^{\mathfrak{B}})$ es un subgrupo cerrado de $\mathfrak{M}_0(G)$.*

Demostración. Al recordar la construcción del grupo de enlace hecha en la sección 2.1 observamos que III se sigue fácilmente de I: basta tomar como relaciones de equivalencia las respectivas compatibilidades, para κ un conjunto finito de $\mathfrak{B}$-definibles, y elegir $\kappa(k) = k$ pues cada T-definible es $\mathfrak{B}$-definible.

Para demostrar I recuerde que

$$\mathrm{Hom}(H, G) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Pro}\, H_\kappa, \mathrm{Pro}\, G_k) = \varprojlim_k \varinjlim_\kappa \mathrm{Hom}(H_\kappa, G_k).$$

De ahí concluimos que la parte sustancial del enunciado es estudiar los sub-grupos definibles $H_\kappa \hookrightarrow G_k$. El resto del enunciado se sigue de consideraciones categóricas triviales, pero no obvias.

Recapitulemos la descripción de G_k vista en el teorema 2.2, para ello tome Z el definible en T cuyos puntos serán bases de internalidad para la suerte nueva[1]. Como T_0 tiene suficientes constantes, existe una clase de equivalencia $Z_k \hookrightarrow Z$, respecto a la compatibilidad R_k, tal que $\iota G_k = \exists_{q^m} Z_k \times Z_k$; donde $q_m : Z^2 \to \iota Q$ le asocia a cada par de bases $(a, c) \in \mathfrak{M}(Z^2)$ el cambio de base $\psi_{c,a} = \phi_c^{-1}\phi_a$.

En este caso, a partir de $H_\kappa \hookrightarrow G_k$ podemos definir $R_\kappa^H = q_m^* \iota H$ para z_1, z_2 en Z_k. Note que R_κ^H es equivalencia precisamente porque H_κ es sub-grupo. Extendiendo R_κ^H de forma adecuada a todo Z^2 tenemos que esta equivalencia refina a R_k.

Recíprocamente, dada una relación de equivalencia definible con parámetros R_c que refine a R_k tenemos $B_c \hookrightarrow \iota G_k$ definido por $B_c = \exists_{q^m}(R_c \wedge Z_k^2)$ como ι es estable y T_0 tiene suficientes constantes existe $H_k \hookrightarrow G_k$ con $\iota H_k = B_c$. □

El teorema fundamental

Definición 3.1.6. Dado $\mathfrak{M} \models T$ y $H \hookrightarrow G$ tenemos $\mathfrak{M}_0(H) \leq \mathfrak{M}_0(G) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$. Los ***puntos fijos de*** H son la estructura definiblemente cerrada en T, definida mediante

$$\mathfrak{M}_H(Y) = \{m \in \mathfrak{M}(Y) \mid \sigma_Y(m) = m \text{ para todo } \sigma \in \mathfrak{M}_0(H)\}, \tag{3-2}$$

para cualquier Y definible en T.

[1]Si bien T puede tener muchas suertes nuevas respecto a T_0, cada índice k introduce solo una y usa un solo principio de superposición. Ver comentarios al teorema 2.2.

[2]Los casos extremos son unir R_κ^H con la diagonal o con R_k.

Teorema 3.1 (Correspondencia entre estabilizadores y puntos fijos)**.** *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ un cubrimiento interno con suficientes constantes y sea $G = \operatorname{Pro} G_k$ su grupo de enlace. Dado $\mathfrak{M} \models T$ tenemos:*

I. *Para cada estructura definiblemente cerrada $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ definimos $G^{\mathfrak{B}} \hookrightarrow G$, tal que $G^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}_0) = \operatorname{Aut}(\mathfrak{M}/(\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{B}))$ y*

$$\mathfrak{M}_{G^{\mathfrak{B}}} = \operatorname{dcl}_T(\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{B}).$$

II. *Para cada sub-grupo pro-definible $H \hookrightarrow G$ tenemos que*

$$G^{\mathfrak{M}_H}(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_0(H).$$

Demostración. I Tome $\mathbb{H} = \mathfrak{M}_0(G^{\mathfrak{B}})$Es claro que $\operatorname{dcl}_T(\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathbb{H}}$, pues si un automorfismo fija a un conjunto también fija a su clausura definible. La otra contenencia, es resultado de la proposición 2.1 aplicada a la teoría $\mathcal{T}^{\mathfrak{B}}$.

II Como $\mathfrak{M}_0(G^{\mathfrak{M}_H}) = \operatorname{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_H)$ tenemos que $\mathfrak{M}_0(H) \subseteq \mathfrak{M}_0(G^{\mathfrak{M}_H})$. Para mostrar la otra contenencia veamos que para cada automorfismo $\sigma \in \mathfrak{M}_0(G) \setminus \mathfrak{M}_0(H)$ existe un $b \in \mathfrak{M}_H$ con $\sigma(b) \neq b$:

Usando las convenciones del lemma 3.1.5 existe algún k tal que $\sigma_k \in \mathfrak{M}_0(G_k) \setminus \mathfrak{M}_0(H_{\kappa(k)})$. Tomando a una base de internalidad apropiada, es decir $a \in \mathfrak{M}(Z_k)$ tenemos que $(a, \sigma(a)) \in \mathfrak{M}(R_k) \setminus \mathfrak{M}(R^H_{\kappa(k)})$, basta tomar $b = a/R^H_{\kappa(k)}$. □

Corolario 3.2 (Teorema Fundamental)**.** *Sea $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ un cubrimiento interno con suficientes constantes y sea $G = \operatorname{Pro} G_k$ su grupo de enlace. Para cada $\mathfrak{M} \models T$ existe una correspondencia biyectiva entre estructuras definiblemente cerradas $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ y sub-grupos cerrados de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_0(G)$. En particular, todos los sub-grupos cerrados de $\mathfrak{M}_0(G)$ son pro-definibles.*

Reducción a una fibra de internalidad

Tome $\mathfrak{A}$ una fibra de internalidad, es decir $\mathfrak{A} = \operatorname{dcl}_T(\{a_Y\})$ donde cada a_Y es una base de internalidad para el T-definible Y. Es válido suponer $|\mathfrak{A}| \leq |\mathcal{T}| \leq |L_T| + \aleph_0$ pues cada suerte necesita una sola base.

Teorema 3.3 (Teorema Fundamental Reducido)**.** *Sea T un cubrimiento interno de T_0 con fibra de internalidad $\mathfrak{A}$ con reducto constante ($\mathfrak{A}_0 = \operatorname{dcl}_{T_0}(\emptyset)$) y grupo de enlace G. Existe una biyección entre subgrupos pro-definibles de G y estructuras definiblemente cerradas $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.*

Demostración. Note que en la demostración del teorema 3.1, tenemos que $\mathfrak{M}_0(H) = \mathfrak{M}_0(G^{\mathfrak{M}_H}) = \mathfrak{M}_0(G^{\mathfrak{A}_H})$ donde $\mathfrak{A}_H = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}_H$, pues b es definible a partir de una base de internalidad.

El detalle importante es que $\mathfrak{A}_H$ no depende de $\mathfrak{M}$, de hecho depende únicamente de $T^{\mathfrak{A}}$: para $b = f(a)$ con a base de internalidad, tenemos que $b \in \mathfrak{A}_H$ equivale a que exista κ con $T^{\mathfrak{A}} \models \forall_{(z_1,z_2)} z_1 R^H_\kappa z_2 \to f(z_1) = f(z_2)$.

En la otra dirección, cada $\mathfrak{B}$ puede reducirse a

$$\mathfrak{A}|\mathfrak{B} := \mathfrak{A}_{G^{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{M}_{G^{\mathfrak{B}}} \cap \mathfrak{A} = \mathrm{dcl}_T(\mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{B}) \cap \mathfrak{A}.$$

De nuevo $\mathfrak{A}|\mathfrak{B}$ no depende de $\mathfrak{M}$ sino únicamente de $T^{\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}}$, pues $a \in \mathfrak{A}|\mathfrak{B}$ equivale a que exista $b \in \mathfrak{B}$ y un morfismo definible f con $T^{\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}} \models \exists_z a = f(z, b)$. En consecuencia, $G^{\mathfrak{A}|\mathfrak{B}} = G^{\mathfrak{B}}$. □

3.2. El caso finito. Entre Grothendieck y Poizat

En [5, Exposé V. 4.] Grothendieck replantea la teoría de Galois, en forma categórica, unificando así la teoría de extensiones de cuerpos con la teoría de espacios recubridores.[3] Para él la teoría de Galois se resume en la existencia de un funtor fibra, el cual establece una equivalencia con la categoría de acciones finitas y continuas de un grupo pro-finito.

En esta sección, vamos a mostrar no solo que las estructuras finitas son ejemplos naturales de funtores fibra, sino que el teorema categórico subyacente puede ser demostrado usando los resultados modelo teóricos expuestos en este documento. Por último, vamos a verificar que en el caso finito, lo expuesto en este documento coincide con lo expuesto por Poizat en [20] para la parte algebraica de una teoría completa.

En resumen, esta sección argumenta que, al menos en el caso finito, las perspectivas categórica y modelo teórica sobre la teoría de Galois son equivalentes. La siguiente sección irá un paso más adelante, estudiando el caso lineal de dimensión finita.

La categoría de acciones de un grupo

Sea G un grupo, una función $f : X \to Y$ donde G actúa sobre X y sobre Y, es ***equivariante*** si $g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$. Esta ecuación equivale a que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G \times Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\cdot(-)"'] & Y \arrow[d, "g\cdot(-)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

[3] Véase [4] para una explicación más motivada y detallada que la original.

Definimos la ***categoría de acciones*** de un grupo G, denotada $\mathcal{C}\mathrm{onj}^G$, tomando como objetos a los conjuntos sobre los cuales G actúa y como morfismos a las funciones equivariantes.

Ejemplo 3.2.1. Dado $\mathfrak{M} \models T$ es claro que $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ actúa en $\mathfrak{M}(X)$ para todo definible X en $\mathcal{T}$. Además, si $f : X \to Y$ es un morfismo definible en $\mathcal{T}$ entonces $f^{\mathfrak{M}}$ es una función equivariante. Lo anterior significa que visto como funtor $\mathfrak{M}$ se levanta a la categoría de acciones de su grupo de automorfismos.

Cualquier grupo actúa sobre si mismo y de acuerdo con la definición anterior, las funciones equivariantes entre G y X están en correspondencia con los puntos de X:

$$\frac{f : G \to X; f(h) = h \cdot x}{x \in X; x = f(e)}$$

A cada función la evaluamos en la identidad y por cada punto definimos la función mediante la acción en ese punto. Observe que f es equivariante $g \cdot f(h) = f(gh)$ gracias a la asociatividad $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Note que para un punto $x \in X$, su ***órbita*** $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ y su ***estabilizador*** $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ son exactamente la imagen y el núcleo[4] del morfismo correspondiente. En conclusión, cada punto induce un isomorfismo (de acciones) entre su órbita y el cociente del grupo dividido entre su estabilizador. Donde para un subgrupo H, G actúa en el cociente $G/H := \{gH \mid g \in G\}$ mediante multiplicación a izquierda.

Dos versiones para la teoría de Galois finita

Teorema 3.4. *[Grothendieck, [5, Expose V, Théorème 4.1.]] Dada una categoría $\mathcal{C}$ que satisfaga los axiomas* (G1), (G2) *y* (G3) *abajo enunciados, junto con un funtor ω de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}\mathrm{in}$ que cumpla* (G4), (G5) *y* (G6). *El grupo de automorfismos $G = \mathrm{Aut}(\omega)$ es pro-finito. Además, ω induce una equivalencia entre $\mathcal{C}$ y la categoría de acciones continuas[5] de G sobre conjuntos finitos $\mathcal{F}\mathrm{in}^G_{cont}$.*

Teorema 3.5. *[Versión modelo-teórica] Dada una estructura finita[6] $\mathfrak{M}$, su grupo de automorfismos $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ es pro-finito. Además, tomando $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ visto como funtor de $\mathcal{T} = \mathrm{Def}(T)$ en $\mathcal{F}\mathrm{in}$ induce una equivalencia entre la clausura imaginaria $\mathcal{T}^{eq}$ y $\mathcal{F}\mathrm{in}^G_{cont}$.*

Demostración. Suponga que T elimina imaginarios. Por ser $\mathfrak{M}$ finita, T es un cubrimiento interno de la teoría trivial $\mathcal{F} = \mathrm{Def}_\emptyset(\emptyset)$. El corolario 2.3 dice que $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}) = \varprojlim G_k$ siendo G_k grupos finitos.

[4]Estrictamente el núcleo es la relación de equivalencia $g \sim h$ cuando $gG_x = hG_x$.

[5]En un grupo topológico, una acción se dice continua si el estabilizador de todo punto es un subgrupo abierto.

[6]El caso más interesante es cuando el vocabulario incluye infinitas suertes básicas.

Note que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ actúa continuamente sobre $\mathfrak{M}(Y)$ para cada Y en $\mathcal{T}$: si la acción de G en $\mathfrak{M}(Y)$ proviene de G_k entonces para cada $a \in \mathfrak{M}(Y)$ el estabilizador $G_a \leq G$ contiene a $\ker(G \to G_k)$. Si f es un morfismo definible, entonces cualquier automorfismo conmuta con $f^{\mathfrak{M}}$, o sea, $f^{\mathfrak{M}}$ es una función equivariante.

De este modo, $\mathfrak{M}$ es un funtor de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{F}\mathrm{in}^G_{\mathrm{cont}}$. Claramente es fiel y por 1.2 es pleno.

Por último, suponga que G actúa continuamente en X, y tome $x \in X$. Como el estabilizador $G_x \leq G$ es abierto, y también cerrado, por 3.2 existe $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$ tal que $G_x = G^{\mathfrak{B}}$. Por otro lado, existe k tal que $\ker(G \to G_k) \leq G_x$, por tanto la acción de G en $G \cdot x$ proviende de G_k; tome Z_k en $\mathcal{T}$ torsor (acción fiel y transitiva) para G_k y elija $b \in \mathfrak{B}(Z_k)$. Note que $G \cdot b \subseteq \mathfrak{M}(Z_k)$ es definible por 1.2, por tanto $G \cdot x$ es isomorfo a $G \cdot b = \mathfrak{M}(Y)$. Eligiendo un x en cada órbita de X y tomando co-productos, concluimos que $\mathfrak{M}$ es representativo. $\square$

El plan es demostrar que los dos teoremas son equivalentes. Para esto, primero veremos que 3.4 implica 3.5, es decir, verificaremos que $\mathcal{T}^{eq}$ y $\mathfrak{M}^{eq}$ satisfacen los axiomas de Grothendieck. Posteriormente, para mostrar que la implicación reciproca le asociaremos a cada categoría un vocabulario y a cada funtor una teoría, y probaremos que al cumplirse los axiomas de Grothendieck hay una equivalencia natural entre la categoría dada y la categoría de definibles de la teoría asociada al funtor.

Axiomas de Grothendieck

Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un funtor $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}$, llamamos ***axiomas de Grothendieck*** las siguientes condiciones:

(G1) $\mathcal{C}$ tiene objeto final y productos fibrados; en consecuencia, $\mathcal{C}$ es finitamente completa.

(G2) $\mathcal{C}$ tiene co-productos finitos (en particular, objeto inicial) y los objetos en $\mathcal{C}$ admiten cocientes por grupos finitos de automorfismos.

(G3) Todo morfismo $f : X \to Y$ admite una factorización $u = \mu\varrho$ con $\rho : X \to Y'$ un epimorfismo regular y $\mu : Y' \to Y$ una inclusión de co-producto ($Y = Y' \coprod Y''$).

(G4) El funtor ω respeta límites, es decir, preserva el objeto final y conmuta con los productos fibrados.

(G5) ω conmuta con las sumas directas finitas, preserva epimorfismos estrictos y conmuta con los cocientes por grupos finitos.

(G6) Dado un morfismo $f : X \to Y$ tal que ωf es un isomorfismo se tiene que f también es un isomorfismo.

Ejemplo 3.2.2. Dado un grupo topológico G, la categoría de acciones finitas y continuas $\mathcal{F}\mathrm{in}^G_{\mathrm{cont}}$ junto con el funtor olvido $\omega : \mathcal{F}\mathrm{in}^G_{\mathrm{cont}} \to \mathcal{F}\mathrm{in}$ satisfacen los axiomas de

Grothendieck. Observe que existe un homomorfismo canónico de G en $Aut(\omega)$ dado por $g \mapsto \{g \cdot (-) : X \to X\}_X$.

Lema 3.2.3. *Dada una teoría completa que elimina imaginarios T y un (el único) modelo finito $\mathfrak{M} \models T$, la categoría $\mathcal{T} = \mathrm{Def}(T)$ junto con $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{F}\mathrm{in}$ satisfacen los axiomas de Grothendieck.*

Demostración. Los axiomas (G1), (G3) y la primera parte de (G2) son discutidos detalladamente en la sección 1.1. La segunda parte de (G2) es consecuencia la eliminación de imaginarios:

Dado G un grupo finito de automorfismos definibles de un X en $\mathcal{T}$, considere la relación de equivalencia $E_G \hookrightarrow X^2$ definida por la fórmula $\bigvee_{g \in G} \phi_g(x_1, x_2)$ donde, para todo $g \in G$, la fórmula $\phi_g(x_1, x_2)$ define el morfismo $g : X \to X$. Es fácil ver que $q : X \to X/E_G$ es el co-igualador de $\{g : X \to X\}_{g \in G}$.

Teniendo en cuenta lo anterior $\mathfrak{M}$ satisface (G4) y (G5) automáticamente. Por último, si $f^{\mathfrak{M}}$ es un isomorfismo, por ser una teoría completa $T \models f$ `es biyección`. De ahí que f^{-1} sea un morfismo definible, si $f :: \phi(x_1, y_2)$ entonces $f^{-1} :: \phi(x_2, y_1)$. □

La teoría asociada a un funtor finito

Dada una categoría $\mathcal{C}$ definimos su ***teoría libre*** $T_{\mathcal{C}}$:

- El vocabulario de $T_{\mathcal{C}}$ tiene una suerte s_A por cada objeto A en $\mathcal{C}$ y un símbolo de función $s_f : s_A \to s_B$ por cada morfismo $f : A \to B$.
- Los axiomas de $T_{\mathcal{C}}$ son $\forall_x s_{1_A}(x) = x$ para cada objeto A y $\forall_x s_f(s_g(x)) = s_{fg}(x)$ para cada par de morfismos $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$.

Gracias a la anterior definición existe un funtor $s : \mathcal{C} \to \mathrm{Def}(T_{\mathcal{C}})$ al que llamamos funtor de símbolos. A cada funtor $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{F}\mathrm{in}$ le corresponde un modelo finito de $\mathfrak{M}_\omega \models T_{\mathcal{C}}$; así, a ω le asociamos la teoría $T_\omega = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_\omega)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\omega"'] & \mathrm{Def}(T_{\mathcal{C}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{M}_\omega"] & \mathrm{Def}(T_\omega) \arrow[dl] \\
& \mathcal{F}\mathrm{in} &
\end{tikzcd}
$$

Lema 3.2.4. *Si $\mathcal{C}$ y ω satisfacen los axiomas de Grothendieck, entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a $\mathcal{T}_\omega$ y T_ω elimina imaginarios.*

Demostración. Vamos a ver que el funtor $\bar{s} : \mathcal{C} \to \mathcal{T}_\omega$, obtenido como composición entre el funtor de símbolos y el canónico de $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ a $\mathcal{T}_\omega$, es una equivalencia de categorías.

Primero, si X es una suerte en $L_{\mathcal{C}}$ entonces existe un objeto A en $\mathcal{C}$ tal que $X = \bar{s}A$, o equivalentemente, $\mathfrak{M}_\omega(X) = \mathfrak{M}_\omega(\bar{s}A) = \omega(A)$:

Como toda suerte es producto o co-producto de suertes; por inducción, si $\mathfrak{M}_\omega(X_i) = \omega(A_i)$ para $i = 1, 2$ entonces gracias a (G1) y (G4) (o (G2) y (G5)) $\mathfrak{M}_\omega(X_1 \times X_2) = \omega(A_1 \times A_2)$ (o $\mathfrak{M}_\omega(X_1 \sqcup X_2) = \omega(A_1 \sqcup A_2)$).

Segundo, cada $Y \hookrightarrow \bar{s}A$ es de la forma $\bar{s}(m : B \to A)$ siendo m un monomorfismo en $\mathcal{C}$. Esto se demuestra usando inducción sobre la fórmula $\phi(x)$ usada para definir Y: usando (G1) cubrimos el caso de igualdad entre términos y la conjunción de fórmulas, usando (G3) cubrimos la negación y el cuantificador existencial.

Recordando que cada morfismo definible $f : \bar{s}A \to \bar{s}B$ tiene un grafo $\operatorname{gr} f \hookrightarrow \bar{s}(A \times B)$, el anterior punto demuestra que $\bar{s}$ es pleno y representativo.

Tercero, el axioma (G6) garantiza que $\bar{s}$ es fiel: Suponga que $\bar{s}f = \bar{s}g$ esto significa que $\omega f = s_f^{\mathfrak{M}_\omega} = s_g^{\mathfrak{M}_\omega} = \omega g$; así, si h es el igualador de f y g, por (G1) ωh es un isomorfismo, entonces también h es un isomorfismo y $f = g$.

Por último, la segunda parte de (G2) y (G5) aseguran que T_ω elimina imaginarios:

Dada una equivalencia $E \hookrightarrow X^2$ en $\mathcal{T}_\omega$, para cada $k \geq 1$ defina $X_k \hookrightarrow X$ mediante la condición "existen exactamente k elementos equivalentes a x". Como X es finito existe un n tal que $X = \bigsqcup_{k=1}^n X_k$. Considere $A \hookrightarrow X_k^k$ dado por "$(x_1, \cdots, x_k)$ son todos distintos y equivalentes". Note que el grupo de permutaciones, es un grupo finito de automorfismos definibles de A y A/S_k es definiblemente isomorfo a X_k/E. Así $X/E = \bigsqcup_{k=1}^n (X_k/E)$. □

Al unir el lema anterior con el teorema 3.5, obtenemos una demostración completa del teorema 3.4.

El reducto algebraico de una teoría completa

Finalizamos esta sección conectando con la teoría de Galois expuesta por Poizat en [20]. Sea T una teoría completa que elimina imaginarios. Un definible X en $\mathcal{T}$ se dice ***algebraico*** si tiene un número finito de realizaciones, es decir, para algún (y por tanto cualquier) $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{M}(X)$ es finito.

Llamamos ***reducto algebraico*** de T, denotado $\mathcal{T}^{alg}$, a la sub-categoría plena de los definibles algebraicos. Cualquier $\mathfrak{M}$ modelo de T se restringe a un funtor $\mathfrak{M}^{alg} : \mathcal{T}^{alg} \to \mathcal{F}\text{in}$; más aún, $\mathfrak{M}^{alg}$ y $\mathfrak{N}^{alg}$ son naturalmente isomorfos para cualquier otro $\mathfrak{N} \models T$. Note que $\mathcal{T}^{alg}$ es una categoría booleana, extensiva y efectiva, además, el funtor $\mathfrak{M}^{alg}$ preserva toda esa estructura; En otras palabras, $\mathcal{T}^{alg}$ junto con $\mathfrak{M}^{alg}$ satisfacen los axiomas de Grothendieck.

Recordemos la definición de ***clausura algebraica***, dado $A \subseteq \mathfrak{M}$ decimos que $b \in \operatorname{acl}(A)$

si existe X algebraico en T^A, o sea X es definible con parámetros en A, tal que $b \in \mathfrak{M}(X)$.

Corolario 3.6 (Versión Poizat). *Sea T una teoría que elimina imaginarios y $A \subseteq \mathfrak{M} \models T$. El grupo de automorfismos $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(A)/A)$ es pro-finito. Además, existe una correspondencia biyectiva entre subgrupos cerrados de G y estructuras definiblemente cerradas $\mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathrm{acl}(A)$.*

Demostración. Tome $T' = T^A$ y note que $\mathfrak{M}^{alg}$ es igual a $\mathrm{acl}(A)$. En virtud del lema 3.2.4 el reducto algebraico de T' es equivalente a la categoría de definibles de $T_{\mathrm{acl}(A)}$. El enunciado se sigue directamente de 3.5 y 3.2. $\square$

3.3. El caso lineal. Formalismo de Tannaka

Concluimos este trabajo mostrando que es posible reconstruir un (esquema de) grupo afín a partir de su categoría de representaciones lineales. Vamos a demostrar este hecho a partir del formalismo de Tannaka. La idea de cualquier formalismo es cambiar una clase de estructuras por una descripción axiomática de las mismas y mostrar que cualquier otra estructura que se ajuste a los axiomas resulta equivalente a alguna de las estructuras en la clase. En este caso, la clase esta compuesta por categorías de representaciones de grupos afinas y sus dos características principales son ser abelianas y poseer un producto tensorial que codifica morfismos.

Llamaremos categoría tannakiana a una categoría que se ajuste a esas características y funtor fibra a un funtor que asocie a cada objeto un espacio vectorial. A partir de cada categoría tannakiana definiremos una teoría, cuyos modelos se encuentran en correspondencia con los funtores fibra; dicha teoría resultara ser un cubrimiento interno de la teoría de campos algebraícamente cerrados. Por último, usando teoría de Galois, mostraremos que el grupo de enlace es precisamente el grupo afín que necesitamos para probar que esa categoría es equivalente a una categoría de representaciones.

Grupos afines y sus representaciones

Referimos a la primera parte de [25]

Definición 3.3.1. Dado un cuerpo $\Bbbk$, notamos $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ a la categoría de $\Bbbk$-álgebras conmutativas y con unidad. Un ***esquema afín*** sobre $\Bbbk$, es un funtor representable de $S : \mathrm{Alg}_{\Bbbk} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$, esto quiere decir, que existe una $\Bbbk$ notada $\mathcal{O}(S)$ tal que para todo R en $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ tenemos

$$S(R) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(S), R). \tag{3-3}$$

Un ***(esquema de) grupo afín*** sobre $\Bbbk$, es un esquema afín G tal que para todo R en $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ obtenemos naturalmente un grupo $G(R)$. En adelante diremos simplemente grupo afín.

Un ***grupo algebraico afín*** sobre $\Bbbk$, es un grupo afín para el cual $\mathcal{O}(G)$ es un álgebra finitamente generada sobre $\Bbbk$.

Nota 3.3.2. La naturalidad significa que existen transformaciones naturales $m : G \times G \to G$, $e : \{e\} \to G$ y $i : G \to G$ que hacen de G un grupo en la categoría cartesiana (definición 2.2.5) de esquemas afines. Por el lema de Yoneda, lema 1.1.25, G es un esquema de grupo afín, si y solo si, $\mathcal{O}(G)$ es un álgebra de Hopf.

Ejemplos 3.3.3. (I) El grupo aditivo $R \mapsto (R, +)$ y el grupo multiplicativo $R \mapsto (R^{\times}, \cdot)$ para R en $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$, son grupos algebraicos afines representados por las álgebras $\Bbbk[X]$ y $\Bbbk[X, X^{-1}] = \Bbbk[X, Y]/(XY - 1)$ respectivamente.

(II) Los grupos de matrices con determinante 1 (SL_n) y de matrices invertibles (GL_n), son grupos algebraicos afines representados por las álgebras $\Bbbk[X_{11}, \ldots, X_{nn}]/(\det(X_{ij}) - 1)$ y $\Bbbk[X_{11}, \ldots, X_{nn}, Y]/(\det(X_{ij})Y - 1)$ respectivamente.

(III) Para un grupo finito G, podemos construir su ***grupo afín (casi) constante*** $\mathbb{G}$ representado por el álgebra de funciones $\Bbbk^G$. Note que cuando R no tiene divisores de cero $\mathbb{G}(R) = G$.

(IV) Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimension finita GL_V

Representaciones de un grupo

Dado un grupo G y un cuerpo $\Bbbk$ existen tres formas equivalentes para definir lo que es una **representación (finita)**[7] de G en $\Bbbk$:

Definición 3.3.4. Una representación es un homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ siendo $\mathrm{GL}(V)$ el grupo lineal de un espacio k-lineal de dimensión finita V.

Un **morfismo** entre representaciones es una transformación lineal $f : V \to W$ tal que para cualquier $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\varrho(g)"] \\ V \arrow[r, "f"] & W. \end{tikzcd}$$

Lo anterior significa que $f : M \to N$ es un homomorfismo de $\Bbbk G$-módulos y equivale a decir que $f : X \to Y$ es una transformación natural.

[7]En este trabajo siempre nos restringiremos a las representaciones finitas.

En conclusión, hemos definido la categoría de representaciones $\Bbbk$-lineales del grupo G, la cual denominaremos $\mathrm{Rep}_{\Bbbk}\, G$. Nótese que, al mirar las representaciones como módulos verificar que esta categoría es abeliana[8] resulta un simple ejercicio mecánico.

Más aún, al asegurar que la dimensión sobre $\Bbbk$ siempre sea finita, obtenemos que cada módulo es de longitud finita (artiniano y noetheriano) y por tanto se cumple el teorema de Krull-Schmidt, sobre descomposición única en suma directa finita de indescomponibles.[9]

Codificando los morfismos entre representaciones.

En álgebra lineal, dos observaciones elementales nos permiten codificar los morfismos, de acuerdo con lo expuesto en la sección 2.2.1 y especialmente en la página 56: primera, las transformaciones lineales conforman un espacio lineal, en particular podemos definir el espacio dual, la transposición y caracterizar la dimensión finita mediante reflexividad; segunda, las transformaciones bi-lineales se encapsulan en transformaciones lineales del producto tensorial, dando lugar a la ley exponencial

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U \otimes_{\Bbbk} V, W) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)).$$

A continuación, adaptamos esta codificación al caso de representaciones. Para cualquier par de representaciones X, Y el espacio de transformaciones $\Bbbk$-lineales entre V y W, notado $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y) = \Bbbk[X, Y]$ es de nuevo una representación, donde la acción de un elemento $g \in G$ sobre una transformación $f : V \to W$ es la transformación definida por

$$(g \cdot f)(v) = g \cdot f(g^{-1} \cdot v)$$

Note que los morfismos de representaciones entre X y Y, son una sub-representación de $\Bbbk[X, Y]$ donde la acción de G es trivial ($g \cdot f = f$), notamos $\mathrm{Hom}_G(X, Y) = G[X, Y]$ a esta representación.

Por otra parte, la acción

$$g \cdot (x \otimes y) = g \cdot x \otimes g \cdot y$$

hace de el producto tensorial $X \otimes_{\Bbbk} Y$ una nueva representación.

Con estos ingredientes, obtenemos la ley exponencial

$$\mathrm{Hom}_G(X \otimes_{\Bbbk} Y, Z) = \mathrm{Hom}_G(X, \Bbbk[Y, Z])$$

Note que en ella, los homomorfismos externos son $\Bbbk G$-lineales mientras que los internos son simplemente $\Bbbk$-lineales.

[8]Brevemente en una ***categoría abeliana***, los conjuntos de morfismos son grupos abelianos, además, es posible definir las sumas directas, los núcleos y los co-núcleos, de manera tal que son válidos los teoremas de isomorfismo. Detalles en el capítulo VIII de [15]

[9]Un objeto X se dice ***indescomponible (o conexo)*** si, para cualquier descomposición $X = A \oplus B$ tenemos que $A = \mathbf{0}$ o $B = \mathbf{0}$.

Categorías monoidales rígidas

En el inciso anterior mostramos que $(\mathrm{Vec}\,\Bbbk, \otimes_\Bbbk)$ y $(\mathrm{Rep}_\Bbbk\, G, \otimes_\Bbbk)$ son una categorías monoidales cerradas; sin embargo, para capturar las nociones de objeto dual, reflexividad y tener una forma de capturar la dimensión, necesitamos una hipótesis adicional conocida como rigidez. Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \phi, \psi, \mathbb{1}, m)$ una categoría monoidal cerrada, la simetría de $\otimes$ permite construir dos morfismos:

El primero, viene de reorganizar el producto las evaluaciones de $[X, Y]$ y $[X', Y']$

$$([X, Y] \otimes [X', Y']) \otimes (X \otimes X') \xrightarrow{\varphi} ([X, Y] \otimes X) \otimes ([X', Y'] \otimes X') \xrightarrow{\eta\otimes\eta'} Y \otimes Y',$$

donde, φ es una composición de la condiciones asociativa y conmutativa. A $(\eta \otimes \eta')\varphi$ le corresponde un morfismo

$$s : [X, Y] \otimes [X', Y'] \to [X \otimes X', Y \otimes Y'].$$

Decimos que en $\mathcal{C}$ ***las potencias conmutan con el producto*** si s siempre es un isomorfismo.

El segundo morfismo, nace al observar que usando un producto distinto del cartesiano la unidad ya no es objeto final y los morfismos internos de un objeto en ella cobran interés. Concretamente, definimos el objeto ***dual*** como $X^t := [X, \mathbb{1}]$ este viene equipado con una evaluación $\eta_X = \langle , \rangle_X : X^t \otimes X \to \mathbb{1}$; al componer esta con la condición conmutativa tenemos

$$\frac{\eta\psi : X \otimes X^t \to \mathbb{1}}{t : X \to [X^t, \mathbb{1}]}$$

Decimos que X es ***reflexivo*** si t es un isomorfismo.

Una categoría monoidal se dice ***rígida*** si es cerrada, las potencias conmutan con el producto y todos los objetos son reflexivos. Un caso particular de potencias conmutando con productos muestra que

$$X^t \otimes Y \xrightarrow{\simeq} [X, \mathbb{1}] \otimes [\mathbb{1}, Y] \xrightarrow{\simeq} [X, Y].$$

Aún más particular, es que $[X, X] \simeq X^t \otimes X$, al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$ a la composición

$$[X, X] \xrightarrow{\simeq} X^t \otimes X \xrightarrow{\eta_X} \mathbb{1}$$

obtenemos la ***función traza*** $\mathrm{tr}_X : \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(\mathbb{1})$. Definimos el ***rango*** de un objeto como el resultado de aplicar la traza en la identidad $\mathrm{rk}(X) := \mathrm{tr}_X(1_X)$.

Ejemplo 3.3.5. Las categorías $(\mathrm{Vec}\,\Bbbk, \otimes_\Bbbk)$ y $(\mathrm{Rep}_\Bbbk\, G, \otimes_\Bbbk)$ son monoidales rígidas. Cuando $\Bbbk$ tiene caraterística cero, para todo objeto V en ellas $\mathrm{rk}(V) = \dim_\Bbbk V$.

Categorías tannakianas, funtores fibra y automorfismos

Definición 3.3.6. Sea $\Bbbk$ un cuerpo de característica cero, Una ***categoría tannakiana*** sobre $\Bbbk$, es una categoría $\mathcal{C}$ tal que:

- $\mathcal{C}$ es $\Bbbk$-lineal, abeliana y localmente finita. Esto último significa, que cada espacio de morfismos tiene dimensión finita sobre $\Bbbk$ y que cada objeto tiene una serie de descomposición.[10]
- $(\mathcal{C}, \otimes)$ es una categoría monoidal y rígida. El funtor $\otimes$ es bi-lineal y $\mathrm{End}(\mathbb{1}) = \Bbbk$.
- Para todo objeto X, su rango $\mathrm{rk}(X)$ es un número natural.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría tanakiana sobre $\Bbbk$, un funtor tensorial $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}\,\mathbb{K}$ con $\Bbbk \leq \mathbb{K}$ es llamado ***funtor fibra sobre*** $\mathbb{K}$ si es $\Bbbk$-lineal, fiel y exacto.

Si ω es un funtor fibra, llamamos ***automorfismo tensorial*** a un isomorfismo natural $\tau : \omega \to \omega$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\tau_{X\otimes Y}"'] & \omega(X) \otimes \omega(Y) \arrow[d, "\tau_X \otimes \tau_Y"] \\
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\simeq"] & \omega(X) \otimes \omega(Y)
\end{tikzcd}$$

Notamos por $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ al grupo de los automorfismos tensoriales de ω.

Ejemplo 3.3.7. La categoría $\mathrm{Rep}_{\Bbbk} G$ es una categoría tannakiana sobre $\Bbbk$ y el funtor olvido $(V, \rho) \mapsto V$ es un funtor fibra. Note que cada $g \in G$ define un automorfismo tensorial τ^g del funtor olvido; basta tomar $\tau^g_{(V,\rho)} = \rho(g)$. Por tanto, tenemos un homomorfismo de grupos de G en $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$.

La teoría asociada a una categoría tannakiana

Definición 3.3.8. Dada una categoría tannakiana $\mathcal{C}$ sobre un campo de característica cero $\Bbbk$. Definimos las teoría de primer orden $T_{\mathcal{C}}$ de la siguiente manera. El vocabulario consta de:

- Para cada objeto X una suerte V_X junto con símbolos de función $+_X$ y constante 0_X.
- Para cada morfismo $f : X \to Y$ un símbolo de función $V_f : V_X \to V_Y$.
- Para cada par de objetos X, Y un simbolo de función $B_{X,Y} : V_X \times V_Y \to V_{X\otimes Y}$.
- Una constante 1 en la suerte $V_{\mathbb{1}}$.

[10] En una categoría abeliana, una serie de descomposición para X es una secuencia de sub-objetos $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$ tal que todos los cocientes X_{i+1}/X_i son simples.

Abreviemos mediante $\cdot_X$ a la composición de $B_{\mathbb{1},X} : V_{\mathbb{1}} \times V_X \to V_{\mathbb{1}\otimes X}$ y $V_m : V_{\mathbb{1}\otimes X} \to V_X$. Los axiomas de $T_{\mathcal{C}}$ deben asegurar que para cualquier $\mathfrak{M} \models T_{\mathcal{C}}$

- $\mathfrak{M}(V_{\mathbb{1}})$ es un campo algebraicamente cerrado que extiende a $\Bbbk$. En adelante notaremos a este campo $K^{\mathfrak{M}}$.
- $\mathfrak{M}(V_X)$ es un espacio $K^{\mathfrak{M}}$-lineal de dimensión $\mathrm{rk}(X)$. Igualmente, $V_f^{\mathfrak{M}}$ es una transformación $K^{\mathfrak{M}}$-lineal.
- $B_{X,Y}^{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M}(V_X) \times \mathfrak{M}(V_Y) \to \mathfrak{M}(V_{X\otimes Y})$ es una función $K^{\mathfrak{M}}$ bi-lineal, que induce un isomorfismo entre $\mathfrak{M}(V_X) \otimes_{K^{\mathfrak{M}}} \mathfrak{M}(V_Y)$ y $\mathfrak{M}(V_{X\otimes Y})$.
- La asignación $X \mapsto \mathfrak{M}(V_X)$, $f \mapsto V_f^{\mathfrak{M}}$ es un funtor fibra sobre $K^{\mathfrak{M}}$.

Note que todo lo anterior puede expresarse con fórmulas de primer orden gracias a la posibilidad de cuantificar sobre los escalares.

Lema 3.3.9. *La interpretación de $ACF_{\Bbbk}$ en $T_{\mathcal{C}}$ definida a partir de $\iota K = V_{\mathbb{1}}$ es una inmersión estable.*

Demostración. En virtud al lema 2.1.11 basta mostrar que T es inyectiva, para cada suerte V_X en $L_{T^{\mathcal{C}}}$ hay un principio de superposición y que para cada símbolo de función en $L_{T^{\mathcal{C}}}$ el morfismo inducido Lo primero, es consecuencia de que $\mathrm{ACF}_{\Bbbk}$ es completa, vease 1.2.20.

□

Sea $\tilde{T}_{\mathcal{C}}$ la expansión imaginaria de $T_{\mathcal{C}}$ obtenida al agregar el espacio proyectivo P_X para cada objeto X.

Lema 3.3.10. *La teoría $\tilde{T}_{\mathcal{C}}$ elimina imaginarios. [7, prop. 5.2]*

Proposición 3.3.11. *$\tilde{T}_{\mathcal{C}}$ es un cubrimiento interno de $ACF_{\Bbbk}$.*

Fibras de internalidad y funtores fibra.

Proposición 3.3.12. *Si $\mathfrak{A}$ es una fibra de internalidad, entonces $X \mapsto \mathfrak{A}(V_X)$ define un funtor fibra en $K^{\mathfrak{A}}$. En caso que $K^{\mathfrak{A}}$ sea algebraicamente cerrado $\mathfrak{A} \models T_{\mathcal{C}}$.*

Proposición 3.3.13. *Sea $\Bbbk \leq \mathbb{K}$ y $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}\,\mathbb{K}$ un funtor fibra y $\mathbb{K} \leq \bar{\mathbb{K}}$ algebraicamente cerrado. Entonces $V_X \mapsto \omega(X) \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\mathbb{K}}$ determina un $\mathfrak{M}_\omega$ modelo de $T_{\mathcal{C}}$ donde $\mathfrak{A} = \omega \subseteq \mathfrak{M}$ es una fibra de internalidad y $K^{\mathfrak{A}} = \mathbb{K}$.*

El grupo de enlace y los automorfismos tensoriales

Teorema 3.7. *Para toda fibra de internalidad $\mathfrak{A}$ tenemos que $G(K^{\mathfrak{A}}) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega \otimes_{\Bbbk} K^{\mathfrak{A}})$.*

Teorema 3.8. *Si $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_{\Bbbk} H$ y $\mathfrak{A}$ es fibra de internalidad con reducto constante entonces* $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) = G(\Bbbk) = H$*.*

Apéndice

Lenguajes y estructuras con varias suertes

Un vocabulario L está compuesto por tres clases de símbolos: suertes básicas, símbolos de relaciones y símbolos de funciones. Una L-estructura es una asignación $\mathfrak{M}$ que obedece las siguientes reglas:

- A cada ***suerte básica*** X, $\mathfrak{M}$ le asigna un conjunto $X^{\mathfrak{M}}$. Consideraremos ***suerte*** a cualquier producto finito de suertes y extendemos la asignación $\mathfrak{M}$ en forma natural, es decir, si $S = X \times Y$ tendremos $S^{\mathfrak{M}} = X^{\mathfrak{M}} \times Y^{\mathfrak{M}}$; En particular, el producto vacío de suertes $\mathbf{1}$ es una suerte y en cualquier estructura $\mathbf{1}^{\mathfrak{M}}$ será un conjunto con un único elemento.

  También consideraremos como suerte al co-producto finito de suertes y en concordancia extendemos $\mathfrak{M}$, asignando a $X \sqcup Y$ la unión disyunta de $X^{\mathfrak{M}}$ y $Y^{\mathfrak{M}}$. En particular, el co-producto vacío de suertes $\mathbf{0}$ es una suerte y siempre $\mathbf{0}^{\mathfrak{M}}$ será el conjunto vacío.

- A cada ***símbolo de relación*** R en la suerte X, $\mathfrak{M}$ le asigna un subconjunto $R^{\mathfrak{M}} \subseteq X^{\mathfrak{M}}$; en particular, un símbolo de relación P en la suerte $\mathbf{1}$ es llamado ***símbolo proposicional***, pues $P^{\mathfrak{M}}$ solo tiene dos opciones ser verdadero (tener un elemento) o ser falso (no tener elementos).

  Todo vocabulario incluye un símbolo de relación $=_X$ en la suerte X^2 para cualquier X en L, cuya interpretación siempre será la igualdad entre elementos de $X^{\mathfrak{M}}$. Adicionalmente, todo vocabulario incluye los símbolos proposicionales $\top$ y $\bot$ siendo el primero siempre verdadero y el segundo siempre falso.

- A cada ***símbolo de función*** f con ***salida*** en la suerte X y ***llegada*** en la suerte Y, $\mathfrak{M}$ le asigna una función $f^{\mathfrak{M}} : X^{\mathfrak{M}} \to Y^{\mathfrak{M}}$; en particular, un símbolo de función con salida en $\mathbf{1}$ es llamado un ***símbolo de constante*** en la suerte de llegada.

  Todo vocabulario incluye símbolos de función para las proyecciones y para las inclusiones; en detalle, cuando $S = \prod_{i=1}^{n} X_i$ es un producto de suertes, introducimos el símbolo de función $\rho_i : S \to X_i$ cuya interpretación siempre será la proyección; Dualmente, si $S = \coprod_{i=1}^{n} X_i$ es un co-producto de suertes, introducimos el símbolo de función

$\mu_i : X_i \to S$ cuya interpretación siempre será la inclusión. Como casos especiales, tenemos la identidad $\mathtt{id} : X \to X$ la función constante $\rho_0 : X \to \mathbf{1}$ y la función vacía $\mu_0 : \mathbf{0} \to X$.

Notamos una L-estructura como $\mathfrak{M} = (X_i^{\mathfrak{M}}, f_j^{\mathfrak{M}}, R_k^{\mathfrak{M}})_{i\in I, j\in J, k\in K}$ donde $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{f_j\}_{j\in J}$ y $\{R_k\}_{k\in K}$ son todas las suertes básicas, símbolos de función y símbolos de relación en L.

El lenguaje $\mathcal{L} = \mathcal{L}(L)$ es construido en tres etapas inductivas, definiendo primero las variables, luego los términos y por último las formulas. A cada suerte básica X en L le asociamos un símbolo x al que llamaremos su ***variable***[1]; a un producto de suertes $S = \prod_{i=1}^{n} X_i$ le asociamos la variable $(x_1, \dots, x_n)$ y a un co-producto $S = \coprod_{i=1}^{n} X_i$ la variable $(x_1\text{␣}\dots\text{␣}x_n)$. Estas operaciones pueden encadenarse, por ejemplo, si X y Y son suertes básicas entonces la suerte $S = X \sqcup (X \times Y) \sqcup Y$ tiene variable $(x_1\text{␣}(x_1, y_2)_2\text{␣}y_3)$. Formalmente, a las suertes $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ y $\mathbf{n} = \mathbf{1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{1}$ se le asocian las variables $()_0$, $()$ y $(()_1\text{␣}\dots\text{␣}()_n)$; sin embargo, usualmente consideramos que esas suertes tienen variable i con $1 \leq i \leq n$. Siendo $\mathfrak{M}$ una L-estructura es usual denotar a $X^{\mathfrak{M}}$ mediante M_x.

Los ***términos*** del lenguaje $\mathcal{L}$ son construidos inductivamente a partir de las variables, los símbolos de función, la formación de tuplas y la formación de co-tuplas; en consecuencia, cada término se escribe de la forma $t(x) : Y$ tiene variable (salida) x y suerte (llegada) Y. Más específicamente, cada variable es un termino $\mathtt{id}(x) : X$. Dados un término $t(x) : Y$ y un símbolo de función $f : Y \to Z$, construimos el término $ft(x) : Z$. Dados dos términos en la misma variable $t(x) : Y$ y $t'(x) : Z$, construimos el término $(t_1, t_2')(x) : Y \times Z$. Dados dos términos en la misma suerte $t(x) : Z$ y $t'(y) : Z$ construimos el término $(t_1\text{␣}t_2')(x_1\text{␣}y_2) : Z$. Para una L-estructura $\mathfrak{M}$ cada término $t(x) : Y$ permite construir una función $t^{\mathfrak{M}} : X^{\mathfrak{M}} \to Y^{\mathfrak{M}}$; bajo esta perspectiva, las co-tuplas corresponden con las funciones definidas a trozos, de modo que cuando $a \in M_x \sqcup M_y$,

$$(t_1\text{␣}t_2')^{\mathfrak{M}}(a) = \begin{cases} t^{\mathfrak{M}}(a) & \text{si } a \in M_x \\ t'^{\mathfrak{M}}(a) & \text{si } a \in M_y. \end{cases}$$

Por ejemplo, si tenemos dos constantes a y b en la suerte X la tupla (a, b) es una constante en la suerte $X \times X$, por tanto se interpretará como una función $(a, b)^{\mathfrak{M}} : \mathbf{1}^{\mathfrak{M}} \to (X \times X)^{\mathfrak{M}}$; en contraste, la co-tupla $(a\text{␣}b)$ son **dos** constantes en la suerte X, es decir, se interpretará como una función $(a\text{␣}b)^{\mathfrak{M}} : \mathbf{2}^{\mathfrak{M}} \to X^{\mathfrak{M}}$. Dado que hay isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}(1 \sqcup 1, X) \cong \mathrm{Hom}(1, X) \times \mathrm{Hom}(1, X) \cong \mathrm{Hom}(1, X \times X)$$

las co-tuplas de elementos usualmente son ignoradas.

[1] Lo usual en los libros de texto sobre lógica es considerar un conjunto numerable de variables para cada suerte básica; sin embargo, en este trabajo preferimos contar con una única variable para cada suerte y tomar los sub-índices como parte integral del lenguaje, pues así podemos darle un trato unificado a los co-productos.

Las ***fórmulas*** del lenguaje $\mathcal{L}$, son construidas inductivamente a partir de las fórmulas atómicas, las operaciones booleanas y los cuantificadores. Dados un símbolo de relación R en la suerte Y y un término $t(x) : Y$ construimos la ***fórmula atómica*** $Rt(x)$. Dadas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ construimos las fórmulas $(\varphi \wedge \psi)(x)$ y $\neg\varphi(x)$. Dada $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ construimos las fórmulas $(\forall_{x_n}\varphi)(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $(\exists_{x_n}\varphi)(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Hemos elegido la notación anterior para dejar perfectamente claro que cada fórmula esta escrita en una variable bien definida; de esta manera, para cada L-estructura $\mathfrak{M}$ y cada fórmula $\varphi(x)$ definimos inductivamente su ***conjunto solución*** $\varphi(\mathfrak{M}) \subseteq M_x$, o equivalentemente, definimos la relación de satisfacción $\models$: para $a \in M_x$ decir $a \in \varphi(\mathfrak{M})$ equivale a decir $\mathfrak{M} \models \varphi(a)$. A pesar de que oficialmente las fórmulas tienen una estructura muy rígida,[2] a lo largo de este trabajo usaremos las abreviaturas usuales para mejorar la legibilidad, esperando que estas no introduzcan ambigüedades; por ejemplo, escribiremos $x = x$ en lugar de $=_X (\mathtt{id}, \mathtt{id})(x)$.

Llamamos ***sentencia*** a una fórmula en la suerte $\mathbf{1}$, y ***teoría*** a un conjunto de sentencias en el lenguaje L.[3] Cada L-estructura $\mathfrak{M}$ induce un teoría $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) := \{\varphi \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}$; diremos que $\mathfrak{M}$ es modelo de una teoría T cuando $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ y que T satisface una sentencia φ cuando todos sus modelos la satisfacen. El famoso teorema de completitud asegura que $T \models \varphi$, si y solo si, φ puede ser deducida a partir de un subconjunto finito de T en el sistema de deducción natural para la lógica clásica de primer orden.

[2]Hay muchas notaciones equivalentes para formalizar la sintaxis de un lenguaje; sin embargo, desde un punto de vista práctico lo importante de una fórmula (o un término) es el árbol con las operaciones usadas para construirla.

[3]Lo correcto sería decir en el lenguaje $\mathcal{L}(L)$ cuyo vocabulario es L.

Índice alfabético

Índice de símbolos

Lógica

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)$	Grupo de automorfismos de $\mathfrak{M}$ que fijan a $\mathfrak{M}_0$, página 46
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$	L-estructuras. Cuando $\mathfrak{M}$ es modelo de T, lo considermos como funtor $\mathfrak{M} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{onj}$, página 3
$\mathfrak{M}(A)$, $f^{\mathfrak{M}}$	Conjunto y función 0-definibles obtenidos al aplicar el modelo $\mathfrak{M}$ en el definible A y el morfismo definible f, página 3
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$	Estructuras definiblemente cerradas en una teoría T, página 22
$\jmath^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$	Interpretación canónica de los definibles en T a los definibles en T con parámetros en $\mathfrak{A}$, página 23
f_a en $\mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$	Morfismo definible con parámetro a en $\mathfrak{A}$, obtenido al substituir a en el morfismo T-definible f , véase la ecuación (1-14), página 24
$\phi_{c,a}$	Isomorfismo que cambia las bases de internalidad a y c, página 45
$\jmath_E : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$	Interpretación canónica de T en su expansión imaginaria T_E, página 33
$\iota^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$	Reducto a T_0 del modelo $\mathfrak{M} \models T$ via la interpretación $\iota : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$, página 20
$\iota^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}_0^{\mathfrak{A}_0} \to \mathcal{T}^{\mathfrak{A}}$	Levantamiento de la interpretación ι mediante la estructura definiblemente cerrada $\mathfrak{A}$ y su reducto $\mathfrak{A}_0$, véase la ecuación (1-17), página 25
$\mathfrak{M} \models \varphi$	La estructura $\mathfrak{M}$ satisface la sentencia φ, página 82
$f : Z \times_{\iota O} \iota A \to Y$	Principio de superposición para Y, página 39
$\perp$, $\top$	Símbolos proposicionales para la contradicción y la tautología, página 80
$t(x) : Y$	Término de suerte Y en la variable x, página 81
$\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(X)$	Espacio de tipos completos en el definible X de la teoría T, página 17
$\mathrm{tp}_{\mathfrak{M}}(a)$	Tipo de un elemento $a \in \mathfrak{M}(X)$ para $\mathfrak{M} \models T$, página 17
$\mathrm{S}_{\mathcal{T}}(f)$	Función entre tipos asociada al morfismo f definible en T, página 18

Categorías

$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$	Categorías arbitrarias

Teorías

Bibliografía

[1] Michael Barr y Charles Wells, *Toposes, triples and theories*, nº 12, Reprints in Theory and Applications of Categories, 2005, Originally published by: Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] ———, *Category Theory for Computing Science*, nº 22, Reprints in Theory and Applications of Categories, 2012, Originally published: Prentice-Hall International Series in Computer Science, 1995.

[3] Pierre Deligne y James S. Milne, *Tannakian categories*, Hodge cycles, motives, and shimura varieties, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer Verlag, 1982, págs. 101–228.

[4] Eduardo Dubuc y Constanza Sanchez de la Vega, *On the Galois theory of Grothendieck*, Bol. Acad. Nac. Cienc. Cordoba **65** (2000), 111–136.

[5] Alexander Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer, 1971.

[6] Ehud Hrushovski, *Computing the galois group of a linear differential equation*, Banach Center Publications **58** (2002), 97–138.

[7] ———, *Groupoids, imaginaries and internal covers*, Turkish Journal of Mathematics **36** (2012), nº 2, 173–198.

[8] Moshe Kamensky, *Ind-and pro-definable sets*, Annals of Pure and Applied Logic **147** (2007), nº 3, 180–186.

[9] ———, *A categorical approach to internality*, Models, logics, and higher-dimensional categories: a tribute to the work of Mihály Makkai (Bradd Hart y cols., eds.), CRM proceedings & lecture notes, vol. 53, American Mathematical Society, 2011, págs. 139–156.

[10] ———, *Model theory and the tannakian formalism*, Transactions of the American Mathematical Society **367** (2015), nº 2, 1095–1120.

[11] Anders Kock y Gonzalo E. Reyes, *Doctrines in categorical logic*, Handbook of Mathematical Logic (Jon Barwise, ed.), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,

vol. 90, Elsevier, 1977, págs. 283 – 313.

[12] Jochen Koenigsmann, *Defining $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$*, Ann. of Math. (2) **183** (2016), nº 1, 73–93.

[13] Ellis Kolchin, *Selected works of Ellis Kolchin with commentary*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Commentaries by Armand Borel, Michael F. Singer, Bruno Poizat, Alexandru Buium and Phyllis J. Cassidy, Edited and with a preface by Hyman Bass, Buium and Cassidy.

[14] F William Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*.

[15] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[16] Mihály Makkai y Gonzalo E. Reyes, *First order categorical logic*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 611, Springer, 1977.

[17] David Marker, *Model theory : An introduction*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.

[18] David Marker, Margit Messmer y Anand Pillay, *Model theory of fields*, Lecture Notes in Logic, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[19] Anand Pillay, *Differential Galois theory. I*, Illinois J. Math. **42** (1998), nº 4, 678–699.

[20] Bruno Poizat, *Une théorie de Galois imaginaire*, the Journal of Symbolic Logic **48** (1983), nº 4, 1151–1170.

[21] ———, *A course in model theory : An introduction to contemporary mathematical logic*, Universitext, Springer, 2000.

[22] ———, *Stable groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 87, American Mathematical Society, 2001.

[23] Neantro Saavedra Rivano, *Categories Tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 265, Springer, 1972.

[24] Katrin Tent y Martin Ziegler, *A course in model theory*, Lecture Notes in Logic, vol. 40, Cambridge University Press.

[25] William C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Springer, New York, NY, 1979.

[26] Boris Zilber, *Totally categorical theories: Structural properties and the non-finite axiomatizability*, Model Theory of Algebra and Arithmetic (Leszek Pacholski y cols., eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 834, Springer, 1980, págs. 381–410.