La teoría de modelos como expresión de una Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia en la filosofía matemática de Albert Lautman

Oscar Javier Pérez Lora
Maestría en Filosofía
Universidad Nacional de Colombia

Abril de 2020

Índice general

Abreviatura obras de Lautman

Abreviatura	Referencia	Año
MR	*Matemáticas y realidad*	1935
CIFC	*El Congreso Internacional de Filosofía de la Ciencia*	1936
AMD	*La Axiomática y el método de división*	1936
RITM	*De la realidad inherente en las teorías matemáticas*	1937
ESNEEM	*Ensayo sobre las nociones de esencia y existencia en matemáticas*	1937
ESUCMDA	*Ensayo sobre la unidad de las ciencias matemáticas en su desarrollo actual*	1937
NISEDM	*Nuevas investigaciones sobre la estructura dialéctica de las matemáticas*	1938
CSLM	*Consideraciones sobre la lógica matemática*	1934
PM	*El pensamiento matemático*	1939
SDMF	*Simetría y disimetría en matemáticas y en física*	1942
SSFF	*Sesión de la Sociedad Francesa de Filosofía*	1939
PT	*El problema del tiempo*	1943

Introducción

En la historia del pensamiento occidental la matemática ha ejercido una poderosa atracción a filósofos y pensadores. La armonía de sus construcciones, las simetrías entre los objetos y la certeza de verdad absoluta ofrecen al pensamiento un camino a la vez que fascinante, también seguro. No obstante, en los últimos dos siglos la matemática ha sufrido un desarrollo sin precedentes en la historia de esta disciplina. Incluso para el propio matemático resulta imposible seguir el paso a las técnicas, métodos y avances que día a día surgen en la práctica matemática. Una consecuencia natural de esta situación es el extrañamiento de esta disciplina frente al público profano, incluyendo al filósofo. Se percibe como una ciencia difícil, inabarcable y tan abstracta que parece poco probable obtener algún beneficio para la filosofía como rama del saber. ¿Puede la matemática contemporánea ofrecer insumos, ideas o nociones aplicables a la filosofía? ¿Cómo podría el filósofo acercarse a la matemática? ¿Puede platearse una filosofía de la matemática contemporánea? ¿Cómo abordar el estudio filosófico de las matemáticas?

Es nuestro deseo explorar en el presente trabajo caminos alternativos de acercamiento entre la filosofía y la matemática contemporánea. A tal efecto, abordaremos la relación entre la filosofía matemática del filósofo francés Albert Lautman (1908-1944) y la *teoría de modelos*. Esta última es una rama actual de la lógica matemática que estudia las estructuras matemáticas (modelos) a través de la lógica. Sostenemos, en concreto, que el planteamiento filosófico de Lautman acerca de una *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia* (en adelante TGE3) es realizada por la teoría de modelos. El alcance al que nos proponemos llegar consiste en establecer esta conexión de Lautman con la teoría de modelos en lo que denominaremos la *proto-teoría de modelos*. Es decir, los avances de la lógica matemática en las décadas de 1920 y 1930 que posibilitaron el posterior desarrollo de la teoría de modelos en los años cincuenta.

La noción de *estructura* es central en el desarrollo de la matemática moderna desde el siglo XIX a nuestros días. Es sobre este mismo concepto que Lautman elabora en buena medida su filosofía matemática. Por este motivo es necesario pasar revista y comprender la profunda transformación que sufrió la matemática a partir del concepto de estructura, tema del primer capítulo. Es posible establecer tres momentos clave en esta evolución. En primer lugar, Évariste Galois, con apenas 20 años de edad, inició el desarrollo de la *teoría de grupos*, un área de la matemática que ha permitido el desarrollo del álgebra moderna. Así mismo, la *teoría de Galois* que permitió la solución a uno de los problemas más acuciantes de su época, la posibilidad (definición de las propiedades de los coeficientes) de solución para ecuaciones polinómicas de cualquier grado. El segundo momento fue la crisis por los fundamentos de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del XX y la disolución de este problema gracias a los teoremas de incompletitud de Kurt Gödel (1906-1978). No es posible una fundamentación absoluta de la aritmética, y por ende, de la matemática. Entrado el siglo XX, la estructura adquiere todo su desarrollo gracias a los trabajos de Nicolás Bourbaki (tercer momento). Finalmente, Alexander Grothendieck (1928-2014), miembro más destacado de la última generación bourbakiana, se interesó por la estructura oculta que subyace bajo las matemáticas. Gracias a los trabajos de Grothendieck se ha logrado una visión más interrelacionada y orgánica. Su influencia es notoria en la segunda mitad del siglo XX a nuestros días, tal como lo resalta Zalamea (2019), varios de los ganadores de la Medalla Fields trabajan en tópicos propiamente grothendieckianos. La teoría de modelos forma parte de esta evolución, pues su desarrollo se enmarca justamente en el estudio de la estructura matemática.

En el segundo capítulo realizamos un abordaje a los lineamientos esenciales de la filosofía matemática propuesta por Lautman. Podemos caracterizar esta filosofía en tres componentes principales: dialéctica, fenomenología y matemáticas. Lautman define la matemática como encarnación de la dialéctica en los términos de *El Sofista* y *El Filebo* de Platón. A su vez, algunas problemáticas propias de esa dialéctica también son compartidas por la filosofía. Ahora bien, tal encarnación sucede en un tiempo, en un lugar y por sujetos concretos; la matemática es, a su vez, una experiencia fenomenológica. De esta manera se distingue una *concepción estructural* y una *concepción dinámica*. Por una parte, las estructuras estables, fijas y eternas, y por otra parte, el movimiento no acotado, impredecible y plástico de la creatividad matemática. La manera en que se conjugan estas dos concepciones es uno de los tópicos centrales de su filosofía.

En el tercer capítulo entramos de lleno en la propuesta de relacionar la filosofía de Lautman con la teoría de modelos. Para realizar este objetivo establecemos, en primer lugar, coincidencias entre los conceptos filosóficos de Lautman y la técnica propia de la teoría de modelos. En segundo lugar, nos enfocamos en el puente entre las estructuras matemáticas y la noción de satisfacción y verdad en la lógica de primer orden. Encontramos que en ese punto se define la teoría de modelos como expresión de una TGE3. En tercer lugar, analizamos la lectura que hiciera Lautman junto con Jean Cavaillès (1903-1944) de los desarrollos de la lógica matemática de las décadas de 1920 y 1930. Esto nos permite comprender que entendían plenamente la necesidad de una metamatemática a partir del trabajo de Hilbert, pero pasado por el tamiz de los teoremas de incompletitud de Gödel. Por último, exploramos algunas consideraciones finales, incluyendo posibles caminos que se siguen del presente trabajo.

La motivación principal de la presente tesis es la búsqueda de caminos alternativos y más potentes para abordar filosóficamente la matemática contemporánea. En primer lugar, partimos del hecho de considerar que la matemática no puede ser reducida a componentes más simples. Por esto mismo, se exige un abordaje holístico y sintético, buscando relaciones antes que "componentes básicos". Sin embargo, un factor que dificulta tal aspiración es la explosiva producción en la investigación matemática durante el último siglo. Al día de hoy es prácticamente imposible seguir la pista a los avances en las distintas ramas y subramas que proliferan desde el siglo XVII hasta nuestros días (Odifreddi, 2006, pp. 19-21). Este panorama de una alta abstracción junto a una ampliación constante de los horizontes dificulta cualquier abordaje que pretenda concebir la matemática en su conjunto. Es un océano que no solo se expande sino que también se hace más profundo.

Es razonable, en este punto, cuestionar si esta proliferación se da en el desarrollo de un organismo que adquiere con el tiempo mayor cohesión y unidad, o si por el contrario, se está convirtiendo en una torre de Babel de subdisciplinas aisladas. ¿Puede caracterizarse a la matemática como una ciencia con un objeto y un método único? "En una palabra, hoy en día ¿hay *una* matemática o *varias* matemáticas?" (Bourbaki, 1962, p. 37). Esta pregunta, de poco más de medio siglo, condensa muy bien los diferentes caminos al abordaje filosófico de "la(s) matemática(s)".

Un primer camino es asumir que tras la gran variedad de técnicas y problemas la matemática es una sola, y por lo tanto, el cometido es encontrar *aquello* que define y determina su esencia. En otras palabras, el verdadero saber no surge de lo que cambia sino de lo que permanece invariante. De esto se desprende, o que la matemática podría ser reducida a una de sus partes como la teoría de conjuntos o la lógica, o que existe algún tipo de "meta-entidad" que da sentido a todo el conjunto de saberes matemáticos. En buena medida los intentos de fundamentación de las matemáticas surgen de considerar este camino.

Un segundo camino consiste en considerar que no es posible establecer un análisis común a las matemáticas, sino que deben abordarse como islas independientes con sus propios problemas y metodologías. Este camino es sin duda el más pragmático, y quizá sea la elección implícita entre una buena parte de los matemáticos. En el desarrollo de una rama o esfera particular de la matemática no es necesario establecer conexiones con otras áreas de las matemáticas, al menos no en principio. El matemático se concentra en su propia área y es así como ha logado sus principales logros. Si bien es fértil en el desarrollo de la técnica, es estéril en comprender las ideas profundas de la matemática.

Ambos caminos son limitados, a nuestro criterio, por sacrificar un aspecto de la matemática: o bien sacrifica la búsqueda de una unidad intrínseca o bien sacrifica la realidad propia de las diferentes construcciones matemáticas. O bien se asume que la unidad es una ficción, o que las particularidades son simples "ilusiones" o "copias" de lo verdadero. Si se admite como *una*, se parte de algún tipo de unidad última o invariabilidad, en la que todo planteamiento matemático es susceptible de ser reducido o expresado en algún tipo de lenguaje más sencillo. Si se admite como *varias*, se tendría que admitir tantas filosofías de la matemática como ramas de la misma existan, una para cada una.

Los intentos de fundamentacón y/o reducción de la matemática han fracasado. Pero ello no implica, necesariamente, que la matemática carezca de algún tipo de unidad. Así, pues, la cuestión relevante es pensar qué tipo de unidad exhibe la matemática. Un tercer camino surge entre los dos anteriores. Consiste en dotar tanto a la unidad como a la multiplicidad de realidad sin sobreponer una sobre la otra. A primera vista esto puede parecer contradictorio, pues si es múltiple no puede ser uno y viceversa. No obstante, se plantea que esta dualidad *uno-múltiple* constituye un movimiento que da forma a la matemática contemporánea. Tanto la unidad, la multiplicidad como su interrelación deben ser consideradas en el estudio filosófico de la matemática actual. Ahora bien, este movimiento de lo uno-múltiple no es el único a ser considerado, pues también puede pensarse la matemática desde lo discreto-continuo, lo global-local o lo positivo-negativo.

¿Cómo estudiar entonces el movimiento de esta dualidad uno-múltiple? Sin duda hay detrás de esto una dialéctica que evoca en primera instancia a la filosofía de Platón. No obstante, se aleja bastante del platonismo ingenuo que divide la realidad en dos mundos, el de las ideas y el de lo sensible. Albert Lautman constituye en este punto un importante referente a considerar. Baste decir por ahora que es justamente el movimiento (*proceso*) lo que constituye la realidad tanto de lo uno como de lo múltiple y que Lautman supo identificar y caracterizar al interior de la matemática del siglo XX.

Pero este tercer camino exige del filósofo adentrarse seriamente en la matemática actual, entender sus problemas, métodos y alcances. No basta con asumir que una rama en particular condensa todo el conjunto de esta disciplina o que algún ente le brinda su significado. Pero, por otro lado, tampoco requiere conocer por completo todo el andamiaje, ni la totalidad de técnicas ni de resultados. Es un espacio intermedio que demanda esfuerzo, pero también inteligencia para identificar lo filosóficamente relevante. Consideramos que la filosofía de Lautman, junto con la teoría de modelos, podrían señalar algunos avances en esa dirección.

Capítulo 1

Evolución de la noción de "estructura matemática" (1830-hoy)

La noción de *estructura* es fundamental en la comprensión y evolución de la matemática contemporánea, y por extensión, de la teoría de modelos, uno de cuyos principales objetos de estudio es la estructura. Pero el concepto de estructura es relativamente reciente en la historia de las matemáticas. El presente capítulo tiene como fin entender el desarrollo de este concepto en su evolución histórica a partir del trabajo de Galois a principios del siglo XIX. El qué hacer de la teoría de modelos se alinea con las discusiones acerca del estudio y fundamento de las matemáticas a través de la noción de estructura.

En la primera sección analizamos el marco histórico del concepto de estructura en la matemática moderna, desde la génesis del concepto de estructura debida a Évariste Galois (1811-1832), hasta el fracaso de los intentos de fundamentación absoluta de la matemática. En la segunda sección estudiamos la perspectiva *estructuralista* de la primera mitad del siglo XX bajo la figura de Nicolás Bourbaki. En la década de 1950 se agota el modelo estructuralista clásico, y surge una variedad importante de investigaciones que ya no son posibles de categorizar en estructuras predefinidas. Una figura relevante en este nuevo escenario es Alexander Grothendieck (1928-2014), y para algunos autores marca el inicio del periodo de la matemática contemporánea (Zalamea, 2009a). Por último, exponemos la teoría de modelos como una rama independiente de la lógica matemática actual, y cuyo principal objeto es el estudio de las estructuras matemáticas. Entendemos la teoría de modelos como una derivación del proyecto hilbertiano de una metamatemática a inicios del siglo XX.

1.1. Revolución de la matemática (1830-1931)

Se discuten en la presente sección elementos para comprender la génesis del concepto de *estructura matemática*, a partir del planteamiento de la *Teoría de grupos* y *campos* por parte de Évariste Galois (1811-1832) y la revolución que esto conllevó para el desarrollo de la matemática desde el siglo XIX a nuestros días. Esto es, entender la noción de grupo y de campo, la aparición de las geometrías no euclidianas, los posteriores intentos de fundamentación de las matemáticas y el fracaso de estos proyectos evidenciado por los teoremas de incompletitud de Kurt Gödel (1906-1978). En otras palabras, de Galois a Gödel se opera una auténtica revolución en la manera de hacer y de concebir la matemática. En este periodo se consolida la noción de estructura y se pasa de una concepción absoluta y objetiva de la matemática, a una mirada relativa e interrelacionada entre sus diversas contrucciones. Los entes matemáticos pierden su carácter cerrado y terminado, para convertirse en realidades abiertas y en conexión con el resto del universo matemático.

1.1.1. Galois: nueva perspectiva estructural

Galois introduce el término de *grupo*, entendido en su definición más básica como una *estructura matemática* formada por un conjunto no vacío y por una operación, a partir de la cual se combina cualquier par de elementos del conjunto para componer un tercero (Kline, 2016, pp. 992-1016). Pero para comprender el alcance de esta definición, es importante entender el problema al que Galois se enfrenta, la novedad de su solución y la relevancia que tendrá en la matemática posterior.


Évariste Galois (1811-1832)

El álgebra en sus orígenes fue una generalización y extensión de la aritmética. En lugar de usar números para resolver problemas concretos, el álgebra introduce letras para simbolizar números ($a,\ b,\ c$) y variables o valores desconocidos ($x,\ y,\ z$). Pero gracias a René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1607-1655) el álgebra logra un enorme impulso debido al desarrollo de la *geometría analítica*. Su principal alcance fue asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies geométricas. En principio, el interés fue usar el álgebra para la resolución de problemas concretos de la nueva ciencia. Sin embargo, esto constituirá uno de los rasgos más relevantes de la matemática posterior al Renacimiento, pues la geometría dominó hasta ese momento el ambiente matemático desde los griegos, pero gracias a la geometría analítica el álgebra se convirtió en una disciplina matemática básica (Kline, 2016, pp. 401-429).

En términos generales, una ecuación algebraica se define como una igualdad expresada por un polinomio igual a cero, compuesta de términos independientes o constantes (a, b, c) y coeficientes (x, y, z). El *grado de la ecuación* se define por el exponente más grande del coeficiente. Desde el Renacimiento hasta Galois el interés del álgebra se centró en la resolución de ecuaciones. Así, por ejemplo, una ecuación de *grado uno*, definida como $ax+b=0$, tiene una *solución general*, esto es, $x=-b/a$. La ecuación de *segundo grado*, $ax^2+bx+c=0$, tiene dos soluciones (raíces):

$$x_{1,2} = -b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se dice *fórmula algebraica* a esta solución, pues aplica para cualquier valor que tomen las constantes. Importa, por tanto, no los valores de la ecuación sino la *forma* de la misma. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado la solución general de cada una es significativamente más compleja. La primera se conoce desde el siglo XVI y la segunda desde el siglo XVII. En los días de Galois se indagó la existencia de una solución general para las ecuaciones de quinto grado. ¿Y qué hay de las ecuaciones de sexto, séptimo y de grado superior? Todos los esfuerzos se enfocaron en buscar una solución diferente para cada caso particular.

Niels Abel (1802-1829) probó en 1825 que no existe ninguna fórmula general para encontrar los ceros de polinomios de grado igual a 5. Ya en 1770 Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) se había preguntado *por qué* funcionaban las fórmulas encontradas hasta ese momento. En la solución de los polinomios de menor grado, hay un artificio de la ecuación auxiliar que rebaja en un grado el polinomio, pero en el caso de las ecuaciones de *quinto grado* lo aumenta. Esta pregunta por el "por qué" es fundamental en el desarrollo posterior, pues permite indagar la realidad matemática que se esconde tras el velo del mero cálculo.

Galois extendió la conclusión de Abel pero de manera independiente, y con un valor agregado: determinó *qué propiedades* deben tener los coeficientes de cualquier ecuación y de cualquier grado para poder tener una fórmula que permita obtener una solución general. Esta solución se da a través del estudio de las raíces en su conjunto (*campo*) de una ecuación polinomial de cualquier grado, así como el estudio correspondiente de las transformaciones de las raíces (*grupos*). El objetivo consiste en establecer si es posible encontrar una solución por fórmula o no. En resumen, se logra entender la infinitud de los campos a través de la finitud de sus grupos asociados. No interesa, por tanto, el significado atribuido a los elementos y operaciones, solo expresar su *estructura* algebraica interna. En otras palabras, podríamos decir que existen al menos dos niveles o estratos en las construcciones matemáticas. Por una parte, las diferencias superficiales entre ciertas operaciones concretas, particulares, locales; por otra parte, las similitudes, generalizaciones y globalidad a un nivel más profundo.

Niels Abel (1802-1829)

El gran avance de Galois fue observar que los coeficientes de las ecuaciones auxiliares usadas en las fórmulas de solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado eran invariantes bajo ciertos subgrupos del grupo de permutaciones de las raíces[1]. Lo contrario sucede con las ecuaciones de quinto grado en adelante, estos subgrupos no necesariamente existen, es decir, el grupo puede o no poseer los subgrupos requeridos. "Estas son características centrales del *modus operandi* estructuralista: análisis de estructura abstracta e identificación de invariantes. La primera es la metodología en sí; la segunda produce, si es posible, la expresión resolvente o auxiliar y corresponde, por así decirlo, al contenido" (Falk de Losada, 2013, p. 23).

Gracias al desarrollo de la noción de grupo y campo nace el *álgebra abstracta*, la cual se ocupa del estudio de estructuras algebraicas: estudiar el grupo de sus permutaciones sin necesidad de conocer las raíces. Una solución por radicales es posible *si y solo si* el correspondiente grupo de permutaciones de las raíces es soluble. Esto quiere decir que existe una cadena de subgrupos con determinadas características sin importar el grado de la ecuación. (Falk de Losada, 2013, pp. 14-17). Podría plantearse, a manera de síntesis, que se transita de un interés por resolver un problema/objeto particular, concreto y delimitado, a una nueva perspectiva que busca establecer las condiciones de posiblidad de la resolución del problema/objeto matemático. Esto exige investigar las propiedades intrínsecas al objeto y la relación que establece con otros objetos matemáticos.

Los cambios de perspectiva adoptados por Galois fundan el inicio de las

[1]De una *permutación* baste decir que es una función *uno-a-uno* del conjunto A sobre A (el conjunto de las raíces). Producto de esta operación se generan diferentes subgrupos o subconjuntos del conjunto original de todas las posibles permutaciones $(\epsilon, \rho, \pi, \theta, \phi, \psi, ...)$, y cuya operación entre las mismas se define por la composición de funciones $(\phi \circ \pi, \epsilon \circ \psi, \theta \circ \rho, \; ...)$. A partir de aquellas operaciones se conforma la *tabla del grupo de permutaciones*. Lo importante a considerar es que los coeficientes de la ecuación son *invariantes* bajo cada una de las permutaciones de las raíces y bajo el grupo de permutaciones.

> matemáticas modernas, al girar completamente la ontología (campos en vez de raíces), la epistemología (transformaciones en vez de resoluciones) y la metafísica (grupos de Galois en vez de instancias calculatorias aisladas) en el pensamiento algebraico de la época (Zalamea, 2009b, p. 98).

Se plantea a continuación una breve exposición de la noción de grupo, con el propósito de presentar los elementos esenciales para su comprensión. Definimos un *grupo* como sigue.

Sean G un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria definida en G. Las propiedades o *axiomas* del grupo son:

(I) *Propiedad clausurativa:* para todo $a, b \in G$, $a * b \in G$.

(II) *Propiedad asociativa:* para todo $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(III) *Propiedad neutral o identitaria:* existe algún $e \in G$ tal que $(e * a) = (a * e) = a$.

(IV) *Propiedad invertiva:* para todo $a \in G$, existe $x \in G$ tal que $(a * x) = (x * a) = e$.

La primera propiedad se refiere a la *ley de composición interna*, esto es, toda combinación de los elementos del grupo G, por medio de la operación binaria, genera un elemento que también pertenece al grupo G. La segunda propiedad establece que el orden en el que se aplica la operación binaria entre los elementos no afecta el resultado. La tercera propiedad define un elemento *identitario* que al efectuar la operación binaria sobre cualquier elemento de G, da como resultado el mismo elemento. En concordancia con lo anterior, la cuarta propiedad define que para todo elemento de G existe un elemento *inverso* que por medio de la operación binaria resulta en el elemento identitario. Adicional a estos axiomas, cuando cumple la propiedad conmutativa $a * b = b * a$, el grupo pertenece a un tipo particular denominado *grupo abeliano*.

Por ejemplo, sean $\mathbb{Z}$ el conjunto de los número enteros, $(+)$ la operación de suma definida en $\mathbb{Z}$ y el cero como constante. Se verifica en $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ciertas propiedades que lo definen como un grupo abeliano. Pero la relevancia de ello consiste en que con estas mismas propiedades se define un sinnúmero de otros objetos matemáticos. Así pues, objetos que en apariencia son independientes entre sí, comparten en lo profundo un mismo conjunto de propiedades estructurales. Esto permite concebir a la matemática más allá de una mera colección de cálculos, sino como una realidad velada de estructuras profundas que se manifiestan en diferentes construcciones formales. Dos edificios matemáticos, en apariencia diferentes, responden a “estructuras idénticas" e indiscernibles entre sí, siendo cada uno de estos edificios la manifestación o realización concreta de un mismo grupo abstracto G (Lentin, 1962).

¿Qué es entonces una estructura? Básicamente, es un conjunto no vacío con una colección de elementos, operaciones y relaciones. ¿Todo objeto matemático respondería a algún tipo de estructura más básica o *natural*? ¿Cuántas estructuras naturales existen? ¿Existe una sola estructura natural, o familia de estas, a la que es posible reducir toda la matemática? ¿O por el contrario hay un número indefinido de estructuras?

Dos conceptos importantes que se derivan del estudio de los grupos son *homomorfismo* e *isomorfismo*. El primero es un tipo especial de funciones que permite transportar la estructura de grupo. Esto es, los homomorfismos conservan operaciones y con ello la estructura en cuanto tal. Por su parte, el isomorfismo (definido como función biyectiva) se refiere a la representación de teorías matemáticas o de alguna situación fáctica del mundo por medio de un modelo matemático. Mientras que el isomorfismo captura la noción de modelo, el homomorfismo formaliza la noción de *analogía*: identifica las semejanzas y omite las diferencias entre dos situaciones, con el fin de conocer a una de ellas por medio de la otra.

Las nociones de homomorfismo e isomorfismo unifican la metodología de la matemática pura y aplicada. Se puede observar que a pesar de lo aparentemente anodino del problema inicial al que se enfrentó Galois, la solución que desarrolló permite generalizar una metodología estructuralista aplicable a muchos otros problemas, tanto matemáticos como físicos y sociales. "Actually, since Galois, Algebra is not only the solving of equations, or literal calculus, but becomes the science of structures (groups, rings, fields, and so on)" (Marcja and Toffalori, 2003, p. 1).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue quizá el último gran matemático clásico. Su famoso lema "pocas pero maduras" (*pauca sed matura*), recuerda la búsqueda paciente de perfección y elegancia de los griegos. Pero esta misma perfección repelía a los matemáticos más jóvenes e impacientes de su época, quienes buscaron caminos más efectivos para rodear los obstáculos. Por ejemplo, el cambio de enfoque frente a las figuras geométricas es radical. En lugar de desarrollar andamiajes sofisticados para construir estas figuras por regla y compás (la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo o la duplicación del cubo), interesa su *posibilidad* (realidad) matemática a través del estudio de la estructura interna de estas figuras (Bell, 2014, pp. 207-209). Es decir, no es necesario construir el objeto matemático, ni siquiera preocuparse por la factibilidad de su construcción. Conocer ya no consiste en "ver" el objeto; conocer es, pues, determinar si es posible que exista el objeto bajo un ambiente matemático definido: lo posible como real.

No obstante, la adopción de las revolucionarias ideas de Galois por parte de la comunidad matemática no fue inmediata. Su obra fue tachada de "incomprensible" y corrió el riesgo de perderse debido a su trágica y prematura muerte a los 20 años de edad. Sin duda, sus ideas son fundamentales para la comprensión y posterior desarrollo de la matemática moderna y contemporánea. Significan un antes y un después en las matemáticas.

1.1.2. Aparente crisis de la matemática

Posterior a Galois, la matemática experimenta a lo largo del siglo XIX y principios del XX un desarrollo espectacular en todas sus áreas. Uno de los más importantes avances se da en un área que había permanecido casi que inalterada por más de 2000 años y que, como tal, se consideró el fundamento de la verdad matemática y paradigma del conocimiento racional: la geometría. Los *Elementos* de Euclides fue el primer texto matemático en hacer un uso sistemático del método axiomático. Esto es, a partir de cinco principios o axiomas se deducen todas las verdades de la geometría. Sin entrar en el detalle de estos axiomas, podemos decir que todos parecen bastante intuitivos y acordes con la experiencia.

La geometría euclidiana como paradigma ejerció una profunda influencia sobre el pensamiento filosófico. Uno de los pensadores más representativos en ese sentido fue Kant, quien realizó una justificación epistemológica tanto de la matemática como de la física newtonianas, ambas como paradigma del camino seguro de la ciencia. La *Crítica de la razón pura* (1781) intenta decidir la posibilidad o no de una metafísica general, así como de sus alcances y límites. La filosofía kantiana de la matemática y de la física se entiende por la necesidad de decir "esta es la metafísica" como punto de inicio; tal como sí puede hacerse con los *Elementos* respecto a la matemática y con *Principia* respecto a la física (Campos, 2008, pp. 89-95).

> Esta tentativa de transformar el procedimiento hasta ahora empleado por la metafísica, efectuando en ella una completa revolución de acuerdo con el ejemplo de los geómetras y los físicos, constituye la tarea de esta crítica de la razón pura especulativa. Es un tratado sobre el método, no un sistema sobre la ciencia misma. Traza, sin embargo, el perfil entero de ésta, tanto respecto de sus límites como respecto de toda su articulación interna (Kant, 2013, p. 23).

Sin embargo, el quinto axioma, más conocido como el *axioma de las paralelas*, siempre generó cierta inquietud entre filósofos y matemáticos. Su propia formulación resulta más compleja respecto a los demás y es el único que tiene una relación con el infinito. Todos los intentos por derivar este axioma de los cuatro primeros fueron fallidos, aunque difícilmente se llegó a dudar de su veracidad (Gowers, 2008, pp. 141-144). En su formulación original reza:

> Si una recta, al inicidir sobre otras dos, forma ángulos internos, por el mismo lado, menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se las prolonga indefinidamente, se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos.

Del quinto postulado se deduce que la suma de los ángulos de todo triángulo es igual a 180 grados. En 1816 Gauss intentó medir un triángulo cuyos vértices fueron las cimas de tres montes localizados en la región alemana de Hannover. Pero debido a la dificultad inherente de la medición desistió de tal idea. Esta anécdota muestra el estado de inquietud que este postulado siempre había despertado entre los matemáticos.

Ahora bien, después de Gauss se probó una estrategia alternativa para abordar el problema, esto es, asumir que el quinto postulado es falso. Por ejemplo, asumir que el postulado de las paralelas resulta incorrecto en la superficie de una esfera. No parece claro que existan líneas rectas en una esfera, pero eso no implica un problema, pues simplemente se elabora una nueva interpretación de la misma. Así, por tanto, se definió la línea recta como *la distancia más corta recorrida entre dos puntos (x, y)* sobre la superficie de la esfera (Gowers, 2008, p. 144-151). Resulta posible, pues, construir un triángulo sobre la esfera y cuya suma de los ángulos interiores sea mayor que 180^o.

De hecho, con esta definición de línea recta, este nuevo tipo de geometría tiene todas las propiedades de la geometría euclidiana, a excepción de aquellas que dependen del quinto postulado. Básicamente existen tres tipos de geometrías, la *euclidiana* que supone un espacio plano y cuya suma de los ángulos internos del triángulo es igual a 180^o, la *elíptica* que presenta curvatura positiva (esfera) con suma de los ángulos mayor que 180^o y la *hiperbólica* con curvatura negativa y suma de los ángulos menor a 180^o (Penrose, 2014, pp. 81-101).

El desarrollo de estas geometrías significó que, además de la geometría euclidiana, existen otras representaciones del espacio coherentes y bien fundamentadas desde su lógica interna. La intuición que garantizaba en Kant la verdad apriorística de la geometría euclidiana nos había engañado. ¿Cuál de estas representaciones es la verdadera? Todas son coherentes en su razonamiento pero solo una puede corresponderse con el mundo. La matemática, bajo este escenario, ya no compete a la verdad como se había creído por siglos. Hay por ello un profundo cuestionamiento a las filosofías pitagórica y platónica frente a la correspondencia entre leyes matemáticas y leyes del universo.

¿Cómo diferenciar entonces entre conocimiento e imaginación? Esta situación exigió la creación de mecanismos internos de control, así como la búsqueda de la fundamentación de la matemática más allá de la geometría. En este escenario la lógica se desarrolla como instrumento de fiscalización interna de la ciencia. Esto impulsa la profusión de lógicas no clásicas, tales como la lógica simbólica, de proposiciones y de relaciones. El foco ya no se aplica sobre el objeto matemático en sí, sino en el reconocimiento y formulación de relaciones entre estos objetos. Esta nueva perspectiva también impulsa la aparición de la teoría de conjuntos, la cual permite tener en cuenta tanto el individuo (elemento) como la colectividad (conjunto).

Por otra parte, la geometría euclidiana pasa de ser considerada el paradigma de verdad y correcta deducción a ser un simple sistema alterno. Este hecho obligó al replanteamiento de la existencia de los entes matemáticos. Hasta ese momento existían en tanto que se les dotaba de una interpretación geométrica. Empezó así la búsqueda de fundamentos seguros en otros lugares de la matemática. La aritmética fue la primera opcionada para ofrecer una nueva base por medio de la teoría de los números reales, sin embargo, un vacío importante era establecer qué son los números reales. En el siglo XIX la teoría de los reales se empieza a fundamentar sobre la teoría de conjuntos, pero con resultados paradójicos que hacen tambalear sus cimientos, como la *paradoja de Russell* (Väänänen and Villaveces, 2007, p. 7).


David Hilbert (1862-1943)

¿Qué significado tiene entonces la existencia de los entes matemáticos? ¿Existen en cuanto tal e independiente de la mente que los piensa? ¿Son creaciones meramente formales más propias de la imaginación que del conocimiento? Para el *logicismo*, la lógica es la base, niñez y fuente de la matemática, por lo que la existencia de un ente matemático se fundamenta y reduce a las leyes lógicas. El *intuicionismo*, por su parte, establece que un ente matemático existe si ha sido construido o calculado por una inteligencia humana a partir de los números naturales. Por último, el *formalismo* plantea la consistencia absoluta de la matemática, en cuanto que como actividad se restringe a la manipulación (por medio de reglas de transformación explícitas y formales) de símbolos carentes de significado. Algo existe, por tanto, si no implica contradicción (Falk de Losada, 2012, pp. 195-199).

Al final, la disputa entre estas escuelas no brinda un ganador absoluto, pero cada una aporta a su manera fructíferas perspectivas que enriquecerán el desarrollo posterior de la matemática. En el caso del formalismo, la obra de su más importante representante, David Hilbert (1862-1943), implica una continuidad directa de la obra de Euclides. En los *Fundamentos de la geometría* (1899) se continúa el espíritu de axiomatización de la geometría, pero incluyendo las geometrías no euclidianas y respondiendo a los cuestionamientos sobre los *Elementos*. El avance fundamental de Hilbert es una nueva concepción de axiomatización, no como la búsqueda de primeros principios, sino de consistencia interna (no contradicción) sin importar los axiomas u objetos ideales que sean utilizados (Campos, 2008, pp. 239-240). De aquí se entiende su conocida frase: "en lugar de hablar de puntos, rectas y planos, los objetos para los que se postula la validez de los axiomas podrían llamarse mesas, sillas y jarras de cerveza" (Bombal, 2013, p. 13).

El programa de Hilbert parecía conducir a buen puerto. Al otro lado del Canal de la Mancha, Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) avanzaban en su proyecto de fundamentar la aritmética sobre las teorías de clases y relaciones. Su principal obra, *Principia Mathematica*, se publicó en tres volúmenes entre los años de 1910 y 1913. Parecía resolver las inconsistencias del proyecto lógico de Gottlob Frege (1848-1925) por fundamentar las matemáticas en la lógica. No obstante, una nueva figura (*¿fantasma?*) recorre en Europa el escenario matemático del siglo XX. Gödel, a través de sus dos *teoremas de incompletitud* de 1931, echaría por tierra esta y cualquier otra pretensión de fundamentación de las matemáticas.

1.1.3. Gödel: fracaso de una fundamentación absoluta

Hasta principios del siglo XX se consideraba que todo problema o proposión al interior de un sistema tendría alguna solución, solo era cuestión de tiempo y trabajo para descubrirla. La conocida intervención de Hilbert en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas del año 1900 en París revela esta profunda convicción. Treinta años después (1930) en su discurso de retiro afirma:

> Alguna vez el filósofo Comte dijo —con el propósito de mencionar un problema ciertamente irresoluble— que la ciencia nunca podría descubrir el secreto de la composición química de los cuerpos celestes. Unos pocos años más tarde este problema fue resuelto mediante el análisis espectral de Bunsen y Kirchhoff [...]. La verdadera razón por la cual Comte no pudo hallar un problema irresoluble es, en mi opinión, que no hay en absoluto problemas irresolubles. En lugar del necio *ignorabimus*, nuestra respuesta es la contraria: Debemos saber, sabremos [*Wir müssen wissen, wir werden wissen*[2]] (Citado en (Torres, 2007, p. 36)).

[2] Estas últimas palabras de la cita son el epígrafe que se halla sobre la tumba de Hilbert.

Gödel relativiza tal convicción, pues demuestra que todo sistema formal lo suficientemente rico como para contener la aritmética de los números naturales, contiene proposiciones no susceptibles ni de demostración ni de refutación dentro del mismo sistema. La tradicional clasificación de falso y verdadero ya no funciona, pues existen proposiciones que aun siendo verdaderas no podrán demostrarse. Esto obligará al posterior desarrollo de lógicas no tradicionales que serán a la lógica clásica, lo que la topología o la geometría proyectiva son a la geometría euclidiana (Falk de Losada, 2013, p. VIII).

Kurt Gödel (1906-1978)

En una frase, las matemáticas son incompletas. De antaño ya la filosofía había tenido un acercamiento a esta implicación. La conocida frase de Sócrates "solo sé que nada sé" o la famosa paradoja del mentiroso en sus diferentes variantes, evidencian el problema con las proposiciones autorreferenciales. Violan la tradicional dicotomía entre verdadero y falso, pues no es posible clasificarlas en una u otra categoría. Gödel asume por su parte la siguiente proposición: "Esta aseveración no es demostrable". En otras palabras, la aseveración puede ser verdad pero nunca podremos demostrar que es verdadera. "Aquí aparece por primera vez el hecho de que la verdad es más poderosa que la demostrabilidad" (Careaga, 2002, p. 5).

En *Sobre proposiciones formalmente indecibles de Principia Mathematica y sistemas afines* de 1931, Gödel pone a prueba la aparente formulación completa (toda proposición matemática puede demostrarse) y consistente (sin contradicciones ni paradojas) de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, así como de su aspiración de construir cualquier formulación matemática presente y futura. Además de *Principia*, Gödel también se refiere a la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, como los sistemas formales más amplios y sólidos construidos en su época. La aspiración de tales construcciones era la de formular todos los métodos de la matemática en su interior, es decir, reducirlos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia.

El título de la obra de Gödel dice bastante acerca del alcance de la misma. Por "proposición formalmente decidible" se entiende cualquier proposición que puede determinarse como "verdadera" o como "falsa" usando la lógica formal del sistema al que pertenece. En contraposición, una "proposición formalmente indecidible" es una proposición que puede ser verdadera o falsa pero imposible de demostrar con los axiomas del sistema y la deducción lógica de los mismos. Al constatarse que en todo sistema que contenga a la aritmética hay proposiciones tanto decibles como indecibles, se concluye que "no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencias aritméticas" (Gödel 1996, p. 92). Esto último es justamente lo que muestra Gödel para los sistemas formales en el llamado *Teorema de indecidibilidad*.

> Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir todas las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas. En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que, por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas). Este hecho no se debe a la especial naturaleza de los sistemas citados, sino que se da en una clase muy amplia de sistemas formales, a la que en especial pertenecen todos los que resultan de añadir un número finito de axiomas (Gödel 1996, p. 54).

Ahora bien, se puede pensar que la solución a este inconveniente sea añadir nuevos axiomas que cubran aquellas proposiciones no decidibles en el sistema formal. Esto puede solucionar algunas proposiciones puntuales, pero al incluirse nuevos axiomas en el sistema lógico se generan otras proposiciones que no serán decidibles en el sistema formal ampliado, y así sucesivamente. El segundo teorema, *Teorema de incompletitud*, apunta a estas objeciones, pues demuestra que incluso en un sistema lo suficientemente rico y poderoso para demostrar la falsedad o veracidad de toda proposición, siempre existirán proposiciones contradictorias o paradójicas y el sistema será inconsistente. En resumen, todo sistema basado en un conjunto finito de axiomas es incompleto, y si se requiere un sistema completo, este no será consistente (Careaga, 2002, pp. 8-10).

Estos resultados han tenido un profundo impacto en la matemática posterior, así como en la ciencia y la filosofía. En primer lugar, termina con toda pretensión de reducir toda la matemática a un conjunto finito de principios. En otras palabras, la matemática carece de un completo y consistente conjunto de axiomas. El "revés" de este aparente fracaso será una espectacular liberación creativa de la matemática contemporánea, pues al no estar atada a ningún centro de gravedad o punto de referencia absoluto, se desarrolla con entera libertad y autonomía.

> No debe considerarse el teorema de GÖDEL como una invitación a la desesperanza ni como una excusa para la alusión al misterio. El descubrimiento de que existen verdades aritméticas que no pueden ser demostradas formalmente no significa que existan verdades que hayan de

> permanecer en una eterna imposibilidad de ser conocidas ni que una intuición "mística" (de especie y autoridad radicalmente distintas de la habitualmente operativa en los progresos intelectuales) deba reemplazar a la prueba convincente. No significa, como ha pretendido recientemente un autor, que existan "límites ineluctables a la razón humana". Significa que los recursos del intelecto humano no han sido, ni pueden ser, plenamente formalizados, y que subsiste la posibilidad de descubrir nuevos principios de demostración. [...] El teorema indica que la estructura y la potencia de la mente humana son mucho más complejas y sutiles que cualquier máquina inerte existente hasta el momento (Nagel and Newman, 2017, p. 120).

Es necesario, por tanto, replantear tanto la noción de verdad como de realidad del objeto matemático. Al menos, podrían identificarse dos caminos alternativos (no necesariamente excluyentes) en los que puede concebirse la matemática y sus desarrollos posteriores a partir de los teoremas de Gödel. Uno que se denominará por el momento de *pragmático* y otro de *ontológico*. En el primero, no resulta necesario establecer la realidad ontológica de los objetos matemáticos como condición para hacer matemáticas, y el problema simplemente es ignorado. En el segundo, se persiste en considerar problemas relativos a la realidad de los objetos matemáticos como vía para hacer matemáticas.

Este último otorga a los resultados de Gödel algo más profundo respecto a los sistemas formales. En primer lugar, se sigue que no existe una posición por fuera de la matemática ni del lenguaje desde el que se pueda capturar toda su riqueza. No hay un punto de vista desde el que pueda abarcarse la matemática como totalidad. Quizá no sea casualidad la profunda amistad que entabló Gödel con Albert Einstein, pues tanto en los teoremas de incompletitud como en la teoría de la relatividad no existen puntos de referencia absolutos, sino que estos son relativos al observador (en el caso de la física) y al conjunto de axiomas que describen determinada realidad (en el caso de las matemáticas). Así como en la relatividad también en la matemática, no implica una anulación de la objetividad, solamente otra manera de concebir la objetividad.

Hay, por tanto, una "nueva verdad" que se desprende más de la relación entre los objetos matemáticos que de los objetos en sí mismos. En otras palabras, no hay una verdad "en sí" sino una verdad "relativa a". La matemática, bajo esta perspectiva, se constituye en las relaciones establecidas por los objetos, constituidos a su vez por un conjunto de relaciones. Podría afirmarse, de manera preliminar, la presencia de una ontología inmanente al interior de las matemáticas, en la cual los objetos matemáticos emergen de las propias relaciones sin referentes externos o trascendentes, y por ello mismo, es imposible reducir la totalidad de las matemáticas a un conjunto de axiomas o rama particular de la misma.

¿Podría pensarse una filosofía primera u ontología de las matemáticas sobre estos resultados generales de Gödel? ¿Qué características debería exhibir? Como se verá más adelante, prima en el desarrollo de la matemática del siglo XX una perspectiva pragmática representada por Bourbaki y que continúa hasta hoy. El camino ontológico hace presencia efectiva en el qué hacer matemático, aunque pueda que muchas veces sea de manera implícita o no reconocida. Podríamos observar cierta dualidad en el matemático: platonista cuando trabaja y formalista cuando se le interroga. "Most writers on the subject seem to agree that the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays" (Davis and Hersh, 1981, p. 321).

1.2. Matemática estructural y relativa (1931-hoy)

La discusión anterior evidenció los profundos cambios sufridos por la matemática al entrar el siglo XX. Cambios que fueron adoptados por las nuevas generaciones de matemáticos como algo dado y de lo que poco habría que reparar. No obstante, algunos matemáticos y, principalmente, los filósofos se aterraron ante una nueva matemática que rompió con la forma en que esta disciplina había concebido sus métodos, técnicas y resultados. Incluso, algunos se alarmaron ante lo que parecía el "apocalipsis" de la matemática. ¿Ante el intento fallido por sustentar el "edificio" matemático, tenían algún sustento tales preocupaciones? En la presente sección se muestra que la situación es contraria a cualquier riesgo de estancamiento o colapso. Todo lo contrario, posterior a los teoremas de Gödel la matemática experimenta una explosiva producción de nuevo conocimiento sin precedentes en toda su historia.

1.2.1. Bourbaki: perspectiva estructuralista

El periodo entre finales del siglo XIX y principios del XX se conoce como el periodo de la *crisis de los fundamentos*. Sin embargo, algunos autores como Javier DeLorenzo argumentan que tal crisis no existió, sino que por el contrario consistió en un periodo de renovación en la que se pasó de un enfoque constructivista a uno existencial. Esto quiere decir que anteriormente la existencia de un objeto matemático se validaba en tanto que era calculable, mientras que a partir de este periodo la suposición de su existencia es suficiente para considerar la realidad del mismo (De Lorenzo, 2010). Es claro en tal sentido el ejemplo de Hilbert: en cierta habitación sabemos que existe una persona con el menor número de cabellos, aunque esto resulte imposible de medir o calcular.

> El s. XIX también ve un desarrollo espectacular en la Matemática que provoca la aparición de inversiones y rupturas, la creación de nuevos campos que conducen a que a finales de siglo se produzca nueva inversión con su ruptura asociada y aparezca un nuevo modo de Hacer junto al Figurar, el Hacer Global. En el Hacer Global se parte del conjunto y de la función con su argumento, o elemento perteneciente a ese conjunto, que es su dominio y tiene su valor en otro conjunto, su recorrido (De Lorenzo, 2010, p. 13).

Prueba de ese nuevo Hacer es la falta de interés del matemático en estas cuestiones que preocuparon al filósofo y al lógico. La reducción de los objetos matemáticos a la teoría de conjuntos, por ejemplo, no incide en la manera en que el matemático trabaja estos objetos en su quehacer. Por otro lado, las paradojas pasan casi que inadvertidas, pues se considera que no es un problema de las matemáticas mismas sino de sus representaciones formales. Así, por ejemplo, la teoría de Zermelo-Fraenkel se consideró la compleja solución de un problema irrelevante. En otras palabras, la matemática cambió su Hacer y la filosofía no fue capaz de seguir en muchos aspectos el paso.

> La teoría de conjuntos fue, en el siglo XIX, el punto culminante de la concepción reduccionista de la matemática, que a través del análisis lógico redujo precisamente la geometría al análisis, el análisis a la aritmética y la aritmética a la lógica. Pero el análisis lógico de la matemática presenta las mismas limitaciones que la crítica: interesa a los especialistas pero no a los autores ni a los lectores, en este caso, a los lógicos pero no a los matemáticos (Odifreddi, 2006, p. 35).

En los años de la década de 1930 un grupo de matemáticos franceses, conocidos con el nombre colectivo de *Nicolás Bourbaki*, se propuso fundamentar la matemática de manera más significativa para los matemáticos[3], pero retomando a su vez la discusión lógica y filosófica previa: un análisis y ordenamiento de la matemática que ya

[3] Esta situación refuerza lo expuesto anteriormente: es necesario que el filósofo se aventure al terreno de la matemática real, o de lo contrario corre el riesgo de elaborar sistemas cuyo contenido son pálidas imágenes de la matemática. No es una tarea fácil debido a la alta especialización de esta disciplina, pero ello puede redundar en grandes ganancias tanto para la matemática como para la filosofía misma.

no era lógico sino estructural. Esto es: toda la matemática puede construirse sobre la noción de *estructura*, o en otras palabras, la matemática es definida como la ciencia de las estructuras. "Las matemáticas según una concepción primitiva, son la ciencia del número y de la cantidad; con una visión posterior, la ciencia de la regularidad; desde los griegos, la ciencia de lo infinito, y desde Bourbaki, la ciencia de las estructuras" (Hayek, 2000, p. 247). Entre sus miembros fundadores más notables se encuentran André Weil (1906-1998), Jean Dieudonné (1906-1992), Claude Chevalley (1909-1984), Henri Cartan (1904-2008), y muchos otros.

Podría englobarse el pensamiento de Nicolás Bourbaki como la búsqueda de una matemática "objetiva". Un hacer matemático sin sujeto cognoscente e individualizado, tal como se presenta en la novela o la pintura europea de posguerra. Bourbaki es también una reacción a la instrumentalización de la matemática (razón instrumental), principalmente por parte de la industria militar durante la Segunda Guerra Mundial. Muchos matemáticos tuvieron que tomar partido en el conflicto bélico y muchos otros, especialmente franceses, murieron en el frente. Esto dejó un vacío en la academia francesa que debía ser llenado de nuevo. Bourbaki asume este llamado en el reclamo de la neutralidad y pureza de las matemáticas, así como en el trabajo en equipo bajo las directrices de la libre confrontación y la ausencia de jerarquía entre sus miembros (De Lorenzo, 2017, pp. 355-359).


Nicolás Bourbaki

Este llamado a la neutralidad de la matemática implica una oposición ante cualquier manipulación de la disciplina, y no solo en el aspecto instrumental, sino también en la posible justificación de posturas metafísicas que bien podrían incidir en concepciones políticas. Esto se traduce, a la final, en el extrañamiento de cualquier postura ontológica. Adicionalmente, las limitaciones impuestas por los teoremas de Gödel, el fracaso de los proyectos logicista y formalista, el desarrollo de las geometrías no euclidianas y el estructuralismo francés de Saussure[4] (Falk de Losada, 2013), inciden en inclinar la balanza hacia un enfoque epistemológico. ¿Qué es un objeto matemático? ¿Es posible conocerlo y cómo hacerlo? El interés se centra ahora en la segunda cuestión

[4]Frente al estructuralismo de Ferdinand de Saussure (1857-1913) baste decir que sus ideas fueron fundamentales para el desarrollo de la lingüística moderna, así como del posterior movimiento del *estructuralismo francés* de la primera mitad del siglo XX. Sin duda, existe una fuerte influencia del estructuralismo en la nueva visión bourbakiana, pues tal como Piaget afirmara, "el estructuralismo es un método, no una doctrina".

de carácter pragmático, esto es, la organización y comprensión de las matemáticas tal como esta es practicada sin cuestionamiento de su *naturaleza última* (Baldwin, 2018, p. 4).

Si bien Bourbaki pretende marginarse de la discusión ontológica, mantiene cierta ambivalencia entre lo epistemológico y lo ontológico, esto es, "llega a la contradicción de reafirmar la existencia ontológica de unos objetos que se manejan en la matemática: las estructuras de los cuales se afirma, además, que son los únicos objetos de esa matemática" (De Lorenzo, 2017, p. 389). Aún en una concepción estrictamente epistemológica se hace necesario asumir postulados ontológicos respecto a los objetos de conocimiento. Esta "paradoja" responde a la convicción bourbakiana de la unidad de la matemática que se expresa, junto al objeto de la estructura, en su método: la axiomática. El objetivo es lograr la inteligibilidad profunda de las matemáticas, es decir, encontrar ideas comunes a teorías distintas por medio del estudio y caracterización de sus estructuras.

Toda estructura se compone de unos elementos y de unas relaciones entre los mismos. Estas relaciones cumplen una serie de propiedades o condiciones que son caracterizadas por estos axiomas. Así, la *teoría axiomática de una estructura* deduce las consecuencias lógicas de este conjunto inicial de principios. Ahora bien, tales principios no comportan una verdad absoluta ni se refieren a un significado específico. La tarea del matemático consiste en alcanzar una matemática formalizada, en la que no interesa la significación de los signos sino el correcto uso de las reglas de sintaxis. Esta manera de trabajar permite analizar y distinguir las propiedades de los objetos matemáticos para su posterior clasificación y agrupación.

Frente a la pérdida de la noción de verdad absoluta, el enfoque estructuralista no concibe la matemática como un cuerpo de conocimiento, sino como una colección de métodos o metodologías de construcción de conocimientos. Por esta razón, las estructuras implican una economía de pensamiento, pues una vez identificada cierta estructura en determinada situación matemática, los teoremas propios de esta se aplican a todas las estructuras de este tipo. Anterior al enfoque bourbakista, era necesario postular una serie de hipótesis restrictivas que respondieran a las particularidades de cada caso (Falk de Losada, 2013, pp.1-8).

> Mathematics is seen as the investigation, by more or less rigorous deductive means, of "abstract structures", systems of objects fulfilling certain structural relations among themselves and in relation to other systems, without regard to the particular nature of the objects themselves (Hellman 2005, p. 536).

El estructuralismo hereda elementos tanto del logicismo como del formalismo.

Del primero adopta la metodología de construcción de conceptos más generales de naturaleza lógica. También toma del logicismo la generalidad de los conceptos de clase y relación, así como la importancia tanto matemática como filosófica o metodológica atribuida a la noción de relaciones semejantes, base de las nociones de homomorfismo e isomorfismo. Del formalismo retoma el estudio de estructuras abstractas en las que no se identifican los elementos ni las operaciones o relaciones entre estos. Se concentra en los elementos metodológicos y no en la forma pura. Esto ha permitido la extensión del estructuralismo a otros campos de la investigación científica.

¿Qué se entiende por *estructura* en el sentido bourbakista? Es el conjunto de elementos cuya naturaleza no está especificada. Para definir una estructura se da, en primer lugar, una serie de relaciones en las que han de intervenir estos elementos. En segundo lugar, se postula sobre estas relaciones ciertas condiciones (axiomas de la estructura) que deben ser satisfechas. Así, pues, definir la teoría axiomática de una estructura implica deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura con exclusión de cualquier otra hipótesis. En resumen, cada estructura se compone de elementos, relaciones entre ellos y unos axiomas. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos los números reales se definen artificialmente como conjuntos de números enteros. También las operaciones y relaciones basadas en ellos se reducen a operaciones y relaciones entre conjuntos. En contraste, el enfoque de Bourbaki asume los números reales, sus operaciones y relaciones como datos con el fin de aislar sus propiedades de manera abstracta (Odifreddi, 2006, p. 37).

Las propiedades de un objeto matemático específico pueden ser de naturaleza muy variada. Si estas propiedades son "leyes de composición" las correspondientes estructuras son *algebraicas* (por ejemplo la estructura de grupo). Los otros dos tipos de propiedades corresponden a *estructuras topológicas* que formulan matemáticamente las ideas intuitivas de vecindad, límite y continuidad, y las *estructuras de orden* (retículos y otros). Se parte, entonces, de estructuras fundamentales con las que se construyen estructuras cada vez más complejas. En esto consistió el éxito de este enfoque, pues con un reducido número de *estructuras madre*, captura de mejor manera la esencia de los objetos matemáticos sin recurrir a hipótesis restrictivas o reduccionistas. La influencia de Bourbaki en la matemática posterior se evidencia en las divisiones híbridas de la matemática actual, como el *álgebra topológica* o la *geometría algebraica*, en contraste a la clásica división entre aritmética, álgebra o geometría (Odifreddi, 2006, p. 38).

La matemática se presenta, por tanto, como un organismo que adquiere cada vez más cohesión y unidad, gracias a la sistematización de las relaciones existentes entre sus elementos. Las viejas pretensiones filosóficas que partían "siempre de ideas *a priori* sobre las relaciones de la matemática con el doble universo del mundo exterior y del mundo del pensamiento"(Bourbaki, 1962, p. 37) son abandonadas. No importan los objetos con los que se opera ni la naturaleza de la operación. Los axiomas, en este sentido, adquieren un lugar preponderante, pues representan las condiciones que deben cumplir las relaciones entre los objetos. El método axiomático es la manera de intelegir estructuras. Su ontología, si se quiere caracterizar de alguna manera, se restringe a un carácter metodológico.

Ahora bien, este nuevo sentido de la axiomatización es muy diferente al concepto tradicional de la misma. No consiste en la "larga cadena de razonamientos" de la que Descartes hace mención. Los hechos de las matemáticas son verificados y presentados por el método axiomático, pero no es el contenido mismo. En opinión de Gian Carlo Rota (1932-1999), los filósofos confunden el método axiomático como si de un instrumento para descubrir la verdad se tratara. Han perdido la creencia de que el razonamiento filosófico pueda llegar a la verdad y se han esclavizado a una superficial imitación de la verdad matemática (Rota, 1991, pp. 171).

Bourbaki insiste en que el matemático no trabaja mecánicamente como obrero en un cadena de montaje. Por el contrario, cierta *intuición* particular constituye una suerte de "adivinación directa" anterior a todo razonamiento. "Pues cada estructura lleva en sí su lenguaje propio, cargado de resonancias intuitivas particulares, provenientes de las teorías de donde las ha extraído el análisis axiomático descrito anteriormente" (Bourbaki, 1962, p. 44). La intuición reina la génesis de los descubrimientos matemáticos, pero dispone a su vez de la caracterización de los tipos de estructura y la unificación de diferentes campos de las matemáticas, "terrenos en los que antaño parecía reinar el caos más informe" (Bourbaki, 1962, p. 44).

El razonamiento por silogismos es solo un mecanismo *transformador* aplicable a todo tipo de premisas sin caracterizar su naturaleza. Esto es, la *forma* exterior que usa la matemática para hacer su conocimiento comunicable a otros. Pero este es solo uno de los aspectos del método axiomático y el menos interesante. La axiomática se propone justamente lo que el formalismo es incapaz de hacer: la inteligibilidad profunda de las matemáticas. Lo que en apariencia son dos teorías muy distintas entre sí, "el método axiomático enseña a buscar las razones profundas de este descubrimiento, a encontrar las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de cada una de las teorías consideradas, a discernir estas ideas y a llevarlas a la luz" (Bourbaki, 1962, p. 39). Más adelante continúa:

> Es únicamente en este sentido de la palabra "forma" que se puede decir del método axiomático que es un "formalismo"; la unidad que confiere a la matemática no es el armazón de la lógica formal, unidad de esqueleto sin vida; es la savia nutricia de un organismo en pleno desarrollo, el

> instrumento flexible y fecundo de las investigaciones en las que han trabajado conscientemente, desde Gauss, todos los grandes pensadores de las matemáticas, todos los que, según la fórmula de Lejeune-Dirichlet, han tendido siempre a "sustituir el cálculo por las ideas" (Bourbaki, 1962, p. 49).

Bourbaki contrapone el método axiomático al silogismo, el primero es productor de conocimiento mientras que el segundo se refiere a la simple manera de ser comunicado a otros. Por lo tanto, carece de total sentido reducir la matemática a proposiciones lógicas, pues a lo sumo capturan su forma pero no su contenido. Si bien muchos de los postulados de Bourbaki se han ido revaluando a lo largo del siglo XX, lo cierto es que la manera de trabajar del matemático se aleja de la forma silogística y se afianza en el método axiomático. Esta manera de trabajar y de generar conocimiento, exige del filósofo abandonar, al menos en parte, la tradicional silogística y adentrarse en este método axiomático.

Albert Lautman es quizá quien mejor entiende el viraje que significa el estructuralismo en el marco de una filosofía matemática. Al intentar elaborar todas las nociones matemáticas de un reducido número de nociones y proposiciones lógicas primitivas, se pierde el carácter cualitativo e integral de las teorías matemáticas. Así, el filósofo habría de develar la armonía entre sus construcciones teoréticas, con lo que la búsqueda de nociones primitivas debe ceder a un estudio sintético de conjunto. Esto es, reconocer la matemática como el desarrollo de síntesis sucesivas, donde cada etapa es irreductible a la anterior (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 133-140).

> Es, por el contrario, indiscutible que, a partir del desarrollo de las geometrías no euclidianas, las matemáticas no se presentan ya como una extensión indifinidamente progresiva y unificadora; las teorías aparecen más bien como unidades orgánicas, y se prestan a esas consideraciones metamatemáticas globales que anuncia la obra de Hilbert. Poco a poco se afirma el punto de vista de una matemática nueva que substituye los procedimientos infinitísticos del análisis del siglo XIX por los esquemas estructurales del álgebra o de la topología. Hemos descrito en otro lugar esa evolución moderna de las matemáticas y la progresiva penetración de los métodos de lo finito en lo infinito (Lautman, 2011, ESNEEM, p.267).

Como ya se ha mostrado, el enfoque de Bourbaki se aleja conscientemente de las posibles implicaciones ontológicas o metafísicas de la matemática. En términos generales, ha desarrollado un enfoque muy crítico respecto a consideraciones o injerencias más allá de la misma matemática. Este enfoque ha permitido un gran avance en la matemática contemporánea, pues la dinámica de la matemática es dictaminada por la propia matemática. No obstante, rigen en el que hacer del matemático una serie de consideraciones que escapan al terreno técnico. ¿Qué es esa intuición? ¿De dónde proviene? ¿Se corresponde la matemática con el mundo o solo es la manera en que entendemos el mundo? Son problemas que Bourbaki reconoce que surgen en la práctica matemática pero que escapan a su vez de esta.

> En la concepción axiomática, en definitiva, las matemáticas se presentan como un depósito de formas abstractas -las estructuras matemáticas-, y ocurre, *sin que se sepa bien por qué*, que ciertos aspectos de la realidad experimental se amoldan a algunas de estas formas, como por una preadaptación (Fragmento de Bourbaki tomado de Ledesma y Ferreirós 2010, p. 162). [Cursiva propia].

Este "sin saber por qué" evidencia problemáticas que surgen de la práctica matemática, pero cuya razón de ser *escapa* de esta hacia el espacio propio de la reflexión filosófica. Buena parte de los desarrollos de la matemática del siglo XX se deben al enfoque estructuralista de Bourbaki, y estos desarrollos han tenido a su vez un rol relevante en las ciencias de la naturaleza y sociales. ¿Puede pensarse que el estructuralismo no responde únicamente a un enfoque epistemológico de las matemáticas, sino que describe las estructuras profundas de la realidad? ¿El mundo se compone de estructuras y no de cosas? ¿Pueden las estructuras de la matemática coincidir con las estructuras físicas del mundo? ¿De qué manera coinciden si así lo hacen?

Lautman se atrevió a formular algunas consideraciones de la relación entre física y matemáticas. Contaba por un lado, con la sólida formación matemática francesa y alemana del periodo de entreguerras, y por otro lado, la mirada penetrante y global del filósofo. La obra de Lautman trata de evidenciar la armonía del edificio matemático en el concepto de *estructura*, y sobre lo que se ha denominado un "platonismo estructural", indagar las conexiones entre realidad y matemática por medio de la estructura.

> Hay un real físico, y el milagro a explicar consiste en que se requieran las teorías matemáticas más desarrolladas para interpretarlo. Hay, así mismo, un real matemático, y es también motivo de admiración el observar dominios que se resisten a la exploración hasta que se les aborda con nuevos métodos (Lautman, 2011, MR, p. 77)

El desarrollo de la matemática de mediados del siglo XX, a partir del impulso del grupo Bourbaki, significa tanto un nuevo conjunto de problemas filosóficos como una resignificación de los antiguos. Por ejemplo, hay una nueva forma de concebir y construir los objetos matemáticos sobre la noción de estructura que exigen una reflexión propia. Así mismo, el viejo problema realidad-matemática continúa, pero ahora bajo la noción de estructura; ajena a la formulación pitagórica de realidad-número.

Como se ha visto, la estructura conlleva en la matemática moderna la búsqueda de las propiedades intrínsecas *en* los objetos matemáticos. Tales propiedades se encuentran "contaminadas", es decir, no se restrigen a un grupo definido de objetos. Por el contrario, se encuentra que diferentes regiones de la matemática comparten leyes de composición veladas en lo profundo de sus construciones. En otras palabras, identificar en la multiplicidad la unidad de la matemática.

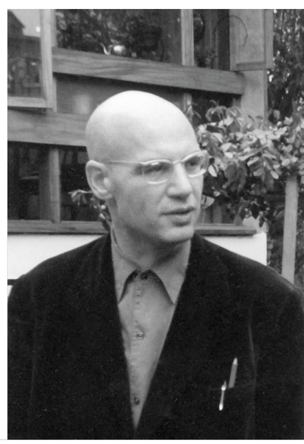
Ahora bien, tal unidad no puede concebirse como una unidad cerrada, delimitada y absoluta. Es una unidad abierta, difuminada y relativa, pues el encuentro de tales propiedades intrínsecas genera a su vez la apertura de nuevas ramas de investigación que generan una nueva multiplicidad de objetos matemáticos que esperan a su vez leyes de composición comunes con otras áreas de la matemática. Surge así una imagen de entramado, más que de "edificio" firme y solidificado. Bien podría pensarse la matemática del último siglo como un bosque denso, en donde los objetos visibles son los árboles que a los ojos del iniciado *aparecen* como objetos separados e independientes entre sí. No obstante, el trabajo del matemático no se limita a las árboles (objetos *en sí*) sino al estudio de aquello que no es visible, en este caso, de las raíces profundas con sus múltiples ramificaciones que establecen innumerables conexiones bajo tierra, así como el flujo de aguas subterráneas y el hábitan de multitud de plantas y animales, todo en constante movimiento.

1.2.2. Grothendieck: Matemática relativa

A medida que evoluciona la matemática de la primera mitad del siglo XX a la actualidad, se hace más difícil seguirle el rastro. A diferencia de la matemática moderna en donde se encuentra una línea argumental más o menos clara, la matemática contemporánea se caracteriza por la explosión creativa y la apertura de innumerables ramificaciones. El presente apartado intenta brindar una panorámica de la matemática actual y evidenciar su riqueza y complejidad en la dualidad uno-múltiple. En la siguiente sección se aborda la teoría de modelos como rama independiente de la lógica que captura esta dualidad en la matemática contemporánea.

Si bien se evidencia la diversidad y sofisticación del hacer matemático actual, hay una base común: la profunda influencia del grupo Bourbaki en el modo de hacer matemáticas en los años de posguerra, así como su posterior agotamiento al ir avanzando el siglo XX. Se expuso de manera breve los puntos más relevantes del pensamiento bourbakista en relación al hacer matemático. Queda por comprender, por una parte, cuál es la influencia efectiva que tiene sobre la matemática de la segunda mitad del siglo pasado y, por otra parte, en qué medida este modelo de hacer matemática se agota.

Los postulados y creencias que dieron su potencia al grupo Bourbaki también fueron los motivos de su decadencia. En primer lugar, la creencia en la unidad de la matemática bajo el método axiomático y la estructura exigió la permanente revisión de su principal obra, *Elementos*, con el fin de ir incorporando los nuevos avances. Sin embargo, a medida que estos avances crecían en cantidad y especificidad, más difícil fue agruparlos bajo unos mismos principios. En segundo lugar, el trabajo anárquico y sin jerarquías entre sus miembros empezó a mostrar rupturas y conflictos. Las sucesivas generaciones de matemáticos jóvenes llegaron con nuevas ideas y perspectivas de trabajo, entre estas la necesidad de abrir el estudio de la matemática a las áreas aplicadas y el uso de diagramas y métodos heurísticos de exposición, alejados de la fría y rigurosa exposición propiamente bourbakista.



Alexander Grothendieck (1928-2014)

Por último, Bourbaki no fue consecuente con los desarrollos de su propio trabajo. La estructura se caracteriza por una definición implícita/axiomática, es decir, importan los axiomas que definen la estructura aplicados a elementos de naturaleza no especificada. De acuerdo a esto, el lenguaje de categorías es el que debería seguirse naturalmente para axiomatizar, por medio de objetos y morfismos, diversas estructuras matemáticas como una sola, sin el uso de las nociones de elemento o pertenencia. Sin embargo, Bourbaki rechaza de plano este camino y continua decisivamente con el lenguaje conjuntista. Aun así muchos de los integrantes del grupo Bourbaki encontraron en la *Teoría de categorías* herramientas más convenientes que en la Teoría de conjuntos para ciertos problemas. Lawvere (1937-), por ejemplo, busca hacer de la Teoría de categorías el fundamento ontológico del hacer matemático en oposición al conjuntista (De Lorenzo, 2017, pp. 390-411).

El grupo de Bourbaki se conformó por cuatro generaciones de matemáticos. Entre sus normativas fundacionales se dictaminó que aquellos matemáticos que cumplieran los 50 años debían "jubilarse" del grupo. Lo curioso es que al cumplirse los cincuenta años de su fundación (década de 1980), la influencia de Bourbaki perdió centralidad en el terreno académico e investigativo (De Lorenzo, 2017). No obstante, ha dejado su impronta no solo en la forma de hacer matemáticas; también en las reformas educativas de las décadas del sesenta y setenta, así como su relación con otras corrientes del pensamiento estructuralista en sentido amplio, como la antropología, el marxismo, la semántica o la pedagogía de Piaget.

> Con todas sus contradicciones internas, la existencia en Bourbaki del método axiomático y la estructura como elementos nucleares implica una inversión epistemológica respecto al hacer global lógico-conjuntista. Frente al concepto de conjunto como punto de partida del hacer global, con su discretización atomista que se refleja en partir de los elementos discretos y separados que lo constituyen, ahora el punto de partida es la estructura y las relaciones entre estructuras, es decir, los morfismos. Insisto, se margina la noción "semi-filosófica" de conjunto y la relación de pertenencia asociada, en beneficio de la estructura y el morfismo, nociones que serán la clave para la noción de categoría y funtor que las incluirán, aunque Bourbaki no da el paso que sí dan alguno de sus miembros (De Lorenzo, 2017, p. 424).

El miembro más descatado de la segunda generación de Bourbaki fue el matemático nacionalizado francés Alexander Grothendieck (1928-2014). Pero su relevancia trasciende el grupo de Bourbaki y se instala en la evolución que tendrá la matemática a partir de la segunda mitad del siglo XX. Fue quien propuso sobrepasar la idea de estructura basada en el concepto de conjunto, y con ello eliminar la noción de pertenencia. Propuesta que no solo incluyó a los miembros de la tercera generación sino a los de la cuarta, quienes en esencia fueron discípulos de Grothendieck (De Lorenzo, 2017, p. 417).

Es difícil caracterizar las aportaciones que realizó Grothendieck a las matemáticas contemporáneas y su influencia al quehacer matemático actual. Zalamea (2009a) resalta los *topos de Grothendieck* y la consecuente práctica de una matemática relativa, entendida incluso en analogía a las modulaciones relativas introducidas por Einstein en la física. Se identifican continuos traslados, traslaciones y traducciones de objeto y conceptos entre áreas aparentemente inconexas de la matemática, a la vez que se buscan los invariantes, proto-conceptos y proto-objetos detrás de ese incesante movimiento. Así, más allá de los objetos matemáticos en sí, subyace una "proto-geometría" que da lugar a estos topos de Grothendieck.

> Puede intuirse desde ya el enorme impacto filosófico que puede tener así una tal *matemática relativa*, una matemática atenta al *desliz* pero con la capacidad de detectar invariantes detrás del flujo, una matemática que va

en contravía de supuestos fundamentos últimos, de verdades absolutas, de estabilidades inamovibles, pero que es capaz de establecer en cambio *redes asintóticas* de verdad (Zalamea, 2009a, p. 82).

Es decir, los objetos matemáticos tienden a situarse sobre ciertas "bases". Pero ya no es la base en sí lo que interesa caracterizar, sino en lo que sucede al cambiar de base, esto es, qué propiedades se trasladan al realizar los cambios de base. Este movimiento de conceptos y objetos matemáticos se da entre lo *uno* (la "forma") y lo *múltiple* (las estructuras). El punto de interés, por lo tanto, será decubrir/inventar estos invariantes de la forma: las cohomologías. No importa la base última sino el movimiento (*desliz*) de esta base (Zalamea, 2009a, pp. 77-84).

El concepto de estructura, que en el pensamiento de Bourbaki se presenta como mero objeto de estudio (Mosterín and Torretti, 2010, p. 224), adquiere plasticidad tanto en su concepción ontológica como epistemológica. Por una parte, se encuentra intrínseca la belleza escondida de las estructuras ("la voz de las cosas") y, por otra parte, la invención extrínseca de lenguajes lo suficientemente expresivos para hacer audible su belleza. Implica ello un vaivén permanente en el pensamiento matemático que se manifiesta en el descenso a lo local y su ascenso al entorno universal global (Zalamea, 2009a, p. 87). En la visión kantiana del conocimiento, por ejemplo, hay una ruptura entre el sujeto que conoce y el objeto conocido, la cosa en sí. Sin embargo, la creación matemática se presenta como el continuo entre "sujeto" y "objeto", hasta tal punto que sus respectivas existencias se difuminan y entrelazan (tejen) continuamente.

Si se deseara visualizar el cambio de perspectiva en términos de la estructura entre la tradición bourbakista y los topos de Grothendieck, podríamos pensar en el primero como una enorme y compleja construcción por bloques que encajan unos en otros. En contraposición, y tomando la imagen del filósofo francés Henri Bergson (1859-1941) respecto del cambio y el movimiento, la matemática actual es análoga a una sinfonía, pues no son las notas discretas lo que da sentido a la melodía, sino el movimiento continuo, el pegamiento, del que emerge la composición. Esto hace a la matemática plástica, movible y mutable, a la vez que guarda, no obstante, invariables profundos en el movimiento mismo.

¿Existe un *en sí* de los objetos matemáticos al que accede el matemático? ¿O, por el contrario, la matemática es un simple juego formal producto de la mente humana? Esta es la conocida disputa filosófica en torno a la realidad de los objetos matemáticos. Generalmente se ha concebido el objeto y su conocimiento como dos problemas independientes hasta cierto punto. No obstante, los trabajos de Grothendieck y su fuerte influencia posterior podrían indicar que ontología y epistemología son las dos caras de una misma moneda, visto a través de lo uno y lo múltiple.

Los *topos* de Grothendieck relativizan el "qué" y el "dónde" de los objetos matemáticos. El quehacer de la matemática busca entonces los invariantes adecuados detrás del movimiento. No existen fundamentos absolutos ni objetos fijos, pero tampoco resulta el punto extremo en que todo resulta equivalente o equiparable; y mucho menos, meras construcciones individuales e independientes de las demás construcciones matemáticas. De igual manera, si estos objetos están en permanente tránsito/evolución la situación de un objeto no es más que *relativa* respecto a un ámbito o geografía, y a un momento de su evolución o historia (Zalamea, 2009a, pp. 153-155).

> El primer punto de importancia en la especificación del "qué" son los objetos matemáticos consiste en *tomarse realmente en serio* la relatividad y el tránsito dentro de la matemática contemporánea. En este ámbito, los objetos dejan de ser fijos, estables, clásicos, bien fundamentados -en suma *unos*- y se acercan, más bien, a lo movible, lo inestable, lo no clásico, lo fundamentado solo contextualmente -en suma lo *múltiple*-. La *multiplicidad* subyace por doquier en el tránsito contemporáneo, y los objetos de la matemática se convierten básicamente en *redes y procesos*. No existen "entes" determinados, sólidamente situados en *un* universo absoluto, firme y rocoso, sino, más bien, *redes sígnicas complejas* que se entrelazan entre sí en *diversos* universos relativos, plásticos y fluidos. Estas "redes sígnicas complejas", en las que se constituyen los objetos matemáticos, contemplan una multitud de niveles, y *ningún nivel fijo determinado agota la riqueza del objeto (red)* [...]. [E]xisten (pluralmente) *redes que evolucionan incesantemente a medida que se conectan* con nuevos universos de interpretación matemática [...]. [L]os progresivos avances y adelantos en las redes van configurando el panorama global, y este *modifica a su vez* los entes localmente internalizados dentro del entorno global (Zalamea, 2009a, p. 154).

El abordaje filosófico de la matemática exige, por lo tanto, capturar este movimiento en la creación matemática. Y es en cuanto movimiento que carece de cualquier tipo de "fundamento" absoluto o de bases inmutables. Es una clase de fundamento movible; en el propio movimiento logra su estabilidad. No queda otro camino que aventurarse a la matemática real e irreductible. Sin embargo: ¿Cómo capturar/caracterizar este movimiento? ¿Qué tipo de invariantes son posibles identificar a través de la explosiva variedad de estructuras matemáticas? Esta idea de movimiento no debe ser extraña al filósofo. Ya desde los griegos Heráclito formuló el *Panta rei* ("Todo fluye") en el que, en contraposición a la Unidad de Parménides, lo real *es* en tanto que movimiento.

Bergson, como autor contemporáneo, expone esta idea claramente con el siguiente ejemplo: el paso de mi mano del punto A_i al punto A_j constituye un movimiento simple, a pesar de la idea que tenemos de que podemos subdividir ese movimiento en infinitas partes. Si bien es cierto que podemos dividir el movimiento de A_i a A_j, en $A_{i+1} \longrightarrow A_{i+2}$ ... $A_{j-2} \longrightarrow A_{j-1}$, ya no es el mismo movimiento simple de un principio, pues ha sido dividido por un momento de detención. El movimiento es, entonces, único e indivisible. Hay, por tanto, una confusión entre movimiento y espacio recorrido, en el sentido de dividir el movimiento en infinitos puntos discretos como si se tratara del espacio. Representar el movimiento *espacializado* conduce a distintas dificultades y aporías. No existe, en sentido estricto, la *inmovilidad* entendida como la ausencia absoluta de movimiento (lo real *es* en tanto que movimiento).

Así, pues, la sustancialidad se encuentra en el movimiento mismo: "Hay cambios, pero no hay, bajo el cambio, cosas que cambian: el cambio no necesita un soporte. Hay movimientos, pero no hay objeto inerte, invariable, que se mueva: el movimiento no implica un móvil" (Bergson, 1972, p. 120). En otras palabras, no hay alguna *cosa* que sustente lo real, lo real es en cuanto movimiento. Es una idea que bien puede ayudar a caracterizar la matemática actual como movimiento, en el que ésta no requiere de alguna base fija para ser estable, sino que tal estabilidad se logra en la plasticidad: en las relaciones entre sus construcciones a medida que estas se inventan/descubren.

1.3. Teoría de modelos: estudio de las estructuras matemáticas

Como hemos visto en las dos primeras secciones del presente capítulo, la matemática en los últimos dos siglos ha evolucionado y diversificado de una manera nunca antes atestiguada en la historia de esta disciplina. El ritmo ha sido tan vertiginoso que resulta imposible seguir el rastro a todos estos cambios, y mucho menos, estar al tanto de todos ellos. La especialización en campos cada vez más acotados dificulta aún más obtener una visión de conjunto y aleja la perspectiva de una filosofía de las matemáticas como totalidad. No obstante, en el programa de Hilbert ya se avizoraba la necesidad de un análisis matemático de la matemática, esto es, la *meta-matemática*.

La lógica en las pretensiones de una metamatemática siempre pareció el instrumento más idóneo, aunque sin desconocer las dificultades de su aplicación. ¿De qué manera puede la lógica decirnos algo de la matemática en su conjunto? Las discusiones entre figuras tales como Frege, Hilbert, Gödel, Herbrand, Gentzen o Bourbaki, configuran distintos acercamientos que se fueron consolidando en diversas propuestas. Asimismo, y como hemos visto, la noción de estructura atraviesa esta serie de cambios, convirtiéndose de esta manera en el punto focal de cualquier proyecto meta-matemático. Por lo tanto, tenemos dos ingredientes fundamentales para la construcción de la metamatemática: lógica y estructura. ¿Cómo relacionarlos en una teoría matemática que nos hable de la matemática?

La relación entre lógica y matemáticas es ya de suyo antigua y dinámica. En su historia, algunos enfoques de la lógica han pretendido asumir un rol de fundamentación absoluta de las matemáticas, como el programa de Russell-Whitehead. Pero los matemáticos parecen despreocupados y poco interesados en cuestiones de fundamentación lógica. La contradicción, la inconsistencia o el fundamento de la verdad es un demonio más propio de los lógicos que de los matemáticos. Estos últimos hacen bastante bien su trabajo sin necesidad de los primeros ni de los filósofos.

Sin embargo, la lógica ha evolucionado lo suficiente y supera este enfoque reduccionista. Desarrolla en esa línea un programa de investigación autónomo con objetos propios de conocimiento (Bell, 2014, pp. 567-591). Desde los inicios de la lógica matemática en el siglo XIX es posible identificar tendencias que han derivado en distintas ramificaciones de la investigación lógica. La tradición filosófica, y en especial la filosofía analítica, es cercana a la tendencia calculista de Frege y Russell. No obstante, y paralela a la anterior, se encuentra una tendencia algebraica que se desarrolla hacia finales del siglo XIX y principios del XX, con lógicos como Boole, De Morgan, Peirce, Schröder y Löwenheim. Esta tendencia conocida como *álgebra de la lógica*, busca comprender la amplia variedad de lógicas desarrolladas durante el siglo XX mediante las álgebras asociadas a las mismas y consideradas como sus modelos o realizaciones. En otras palabras, estudiar las propiedades metalógicas de tales lógicas a través de clases de álgebras asociadas. Por ejemplo, las *álgebras de Boole* funcionan como realización (*modelo*) de la lógica proposicional clásica. En general, una lógica puede ser algebraizable cuando es posible hallar una clase de álgebras que le sirva de semántica de un modo "natural" (Mosterín and Torretti, 2010, p. 346).

En el caso de Bourbaki, la lógica formal es auxiliar al método axiomático, el cual requiere de un lenguaje ideográfico para expresar el contenido del pensamiento matemático. Así, la teoría axiomática de cualquier estructura deduce las consecuencias lógicas de los axiomas definidos para esta. No obstante, la unidad de la matemática no la da la lógica sino el método axiomático. Hay por ello una intuición en la creación matemática que supera la mera formalización. Podría decirse, en resumen, que la lógica *expresa* en lenguaje comunicable el pensamiento matemático, pero sin ser el pensamiento mismo.

> Es, pues, una banalidad decir que este "razonamiento deductivo" es un principio de unidad para la matemática. Una observación tan superficial

> no puede ciertamente dar cuenta de la aparente complejidad de las diversas teorías matemáticas, no más, por ejemplo, que la pretensión de reunir en una ciencia única a la física y a la biología bajo el pretexto de que ambas aplican el método experimental (Bourbaki, 1962, p. 2).

Es importante resaltar que la postura de Bourbaki se entiende en el contexto de la primera mitad del siglo XX. El proyecto del logicismo de fundamentar la matemática en la lógica fracasó tras los teoremas de incompletitud de Gödel. La matemática, en sentido bourbakista, va más allá de la formalización lógica. Pero esta sentencia, contrario a lapidar la lógica, abre un amplio margen de perspectivas que se desarrollarán en el transcurso de la segunda mitad del siglo XX.

Abraham Robinson (1918-1974), por ejemplo, describe la lógica matemática como “metamatemática”, esto es, los argumentos lógicos pueden producir nuevos resultados matemáticos. Por razones que aún no son claras, la lógica tiene algo que decir respecto al mundo matemático sin que ello implique que una sea reducida a la otra (Pillay, 2000, p. 1373). En resumen, la lógica durante el siglo XX transita por tres etapas, de la pretensión del logicismo de fundamentar/reducir la matemática, a mero lenguaje expresivo del pensamiento matemático en Bourbaki, y de este último, a una nueva perspectiva de la lógica como expresión de la matemática y con un objeto de estudio propio. Esta disciplina tiene algo nuevo que decir frente a las matemáticas, bien sea que la consideremos distinta o como una parte integral de la matemática. En todo caso, va más allá de un mero instrumento expresivo, tautológico o reduccionista.

Actualmente la lógica matemática se divide en cuatro subdisciplinas bien definidas: Teoría de la recursión, Teoría de conjuntos, Teoría de la prueba y Teoría de modelos (Manzano and Huertas, 2016, pp. 3-8). Esta última, en la perspectiva más general, se entiende como la rama de la lógica matemática que investiga las estructuras matemáticas (modelos) por medio de lenguajes formales de la lógica. Resulta especialmente importante la clasificación y análisis de sus conjuntos de relaciones definibles. Por ello, uno de sus objetivos es influir en el resto de la matemática con sus propias herramientas en temáticas algebraicas (Casanovas, 2006, p. 137) y topológicas.

Existe una visión propia de los objetos matemáticos por parte de la teoría de modelos. En primer lugar, el uso del término “modelo” es diferente a su uso cotidiano. En este último se refiere a una copia o representación de un objeto real o fenómeno. En el primero, por contraste, modelo significa lo real, esto es, la estructura matemática. La posición de la teoría de modelos le permite discernir patrones y analogías en diversas áreas de las matemáticas, con lo que logra al mismo tiempo nuevos resultados (Pillay, 2000, p. 1373).

La teoría de modelos, en cuanto disciplina, adquiere autonomía en la década del cincuenta con los trabajos del lógico polaco Alfred Tarski (1901-1983). Fue quien dotó a la teoría de modelos de los conceptos fundamentales, además de dirigir un programa de investigación en ese sentido. El papel de Tarski fue en buena medida de catalizador, pues recoge y sistematiza importantes avances previos en la lógica de primer orden, tales como los de Löwenheim (1878-1957), Skolem (1887-1963) y Gödel (1906-1978). El primer antecedente de relevancia son los teoremas de Löwenheim-Skolem. En 1915 Löwenheim demostró que si una fórmula es satisfacible, tiene un modelo numerable. Posteriormente, Skolem prueba que todo conjunto satisfacible de sentencias tiene un modelo numerable (si el vocabulario es numerable).

Esta primera etapa de la teoría de modelos se caracteriza por el uso de la técnica de *Eliminación de cuantificadores*, la cual sirvió de hilo conductor y base programática de la investigación en la teoría de modelos. Introducida por Skolem en 1919, esta técnica permite estudiar las relaciones definibles en determinado sistema. Tarski encontró que esta técnica no solo sirve para determinar tales relaciones, sino también para clasificar estos sistemas por medio de la relación de equivalencia elemental y para su posible axiomatización. Así, una *teoría completa* se define como aquella cuyos modelos son elementamente equivalentes. Robinson en los años sesenta introdujo los conceptos de "modelo-completud", así como el llamado "Análisis no estándar" en los que se realizan los infinitesimales de Leibniz (Manzano, 1989, p. 20).

Michael Morley (1930-) inicia la segunda etapa de la teoría de modelos, o también llamada *Teoría de la estabilidad*, hacia mediados de la década de 1960. Para finales del siglo XX los trabajos de Saharon Shelah (1945-) son fundamentales en el desarrollo de la teoría de modelos actual. Shelah (1974) extiende el teorema de Morley a lenguajes no contables: si el lenguaje tiene cardinalidad κ y una teoría es definida en algún cardinal no contable más grande o igual que κ, entonces este es categórico en todos los cardinales más grandes que κ. De igual manera Boris Zilber (1949-), con la *conjetura de tricotomía* y diversos trabajos, es fundamental en la geometrización de la teoría de modelos.

En un principio la teoría de modelos trabajó la semántica de los lenguajes lógicos sobre cualquier tipo de estructura. Por este motivo se le denominó *álgebra universal* (+) *lógica*. Más tarde, el interés se centró cada vez más en las estructuras naturales de las matemátcas (grupos y cuerpos, principalmente) (Casanovas, 2006, p. 137). Esto se caracterizó con la ecuación *geometría algebraica* (-) *campos*. Una descripción con otro énfasis es la dada por Hrushovski (2007), como el manejo de estabilidad y de estabilidad geométrica para encontrar aplicaciones en geometría algebraica, campos, teoría de números, entre otras ramas de la matemática. En palabras de Hrushovski: "La teoría de modelos es la geografía de la matemática dócil" (Villaveces, 2011, p.

9).

Resultan relevantes a los intereses de la presente tesis las décadas de 1920 y 1930. Por una parte, se consolidan los principales insumos de la lógica matemática para el posterior desarrollo de la teoría de modelos. Esto es, el teorema Löwenheim-Skolem (1920) y los teoremas de completitud y compacidad de Gödel (1930). Nos atreveremos a llamar a este periodo "proto-teoría de modelos". Por otra parte, el trabajo intelectual de Lautman se concentra en este mismo periodo. En la década de 1920 realiza sus principales estudios, mientras que en los años treinta publica y discute sus principales trabajos de filosofía matemática. La Segunda Guerra Mundial inicia en el año 1939, Lautman ingresa a la resistencia francesa y las grandes mentes de la lógica de esa generación se dispersan y buena parte emigra a Estados Unidos.

Por último, es preciso mencionar brevemente la *teoría de categorías*, otra rama de la matemática que plantea, similar a la teoría de modelos, el estudio y categorización de las estructuras matemáticas por medio de axiomatizarlas como una sola. Si bien los destinos son similares, el punto de partida y los métodos implementados son completamente diferentes unos de otros. No obstante, existen al día de hoy convergencias entre la teoría de modelos y la teoría de categorías, como por ejemplo de Makkai y Paré, quienes desarrollan el concepto de "categorical model theory as the study of set-valued models of possibly infinitary first order theories by means of the conceptual tools of category theory" (Makkai and Paré, 1989, p. 1).

Samuel Eilenberg y Saunders MacLane introducen el concepto de *categoría* (1945). Esta noción responde a la necesidad de responder a problemas de topología algebraica, limitado desde la perspectiva de Bourbaki. Al considerar la clase de todos los ejemplos posibles de una estructura de cierto tipo, y al vincularlos respecto a todas las posibles funciones que preservan su estructura, se llega a la idea de categoría. ¿Qué hay de común entre los diferentes ejemplos de categorías derivados de las diversas estructuturas?

> Aunque a primera vista su enorme variedad lleva a pensar que estos ejemplos tienen muy poco en común, el sorprendente descubrimiento de Eilenberg y MacLane reside en que siempre comparten algo esencial: el hecho de estar constituidos por una clase de conjuntos vinculados por funciones que se pueden componer entre sí de manera asociativa, y entre las cuales al menos la función siempre es idéntica (Odifreddi, 2006, p. 40).

Por otra parte, debido a que las funciones traen consigo los conjuntos de sus argumentos y valores, no es necesario caracterizar tales conjuntos. De acuerdo a esto, no se requiere la teoría de conjuntos ni del concepto de pertenencia para el estudio de las estructuras, sino los de función y composición. William Lawvere (1937-) caracterizó de manera categorial las propiedades de la teoría de conjuntos (1964), y de esta manera, redujo aquella a la teoría de categorías. Esta contiene las estructuras de Bourbaki y los conjuntos de Zermelo-Fraenkel como casos particulares. Si los conjuntos pueden vincularse entre sí por *funciones*, y las estructuras de un tipo específico se vinculan a través de funciones que preservan tal estructura (*morfismo*), es posible entonces vincular las categorías por funciones que mantienen las propiedades categoriales (*funtores*).

La teoría de categorías ejerce en la actualidad un papel muy importante en el fundamento de las matemáticas. Pero también ofrece puntos de encuentro con la lógica. Por ejemplo, Lawvere (1969) formuló la *teoría de los topos elementales* en la que se desarrolla una lógica equivalente a la *lógica intuicionista* de Brouwer (1912) y más general que la lógica aristotélica. Grothendieck había llegado antes a la *teoría de lo topos*, pero por el camino de la geometría algebraica. La teoría de categorías resulta entonces ser un punto de encuentro de muchas disciplinas, pero sin necesitar de la noción de conjunto (Odifreddi, 2006, pp. 39-44).

Tanto la teoría de categorías como la teoría de modelos -entre otros enfoques-, buscan caracterizar las matemáticas desde el propio lenguaje matemático. La teoría de modelos, foco de interés en el presente trabajo, usa la *lógica de primer orden*, principalmente, como instrumento para caracterizar las teorías matemáticas, encontrar relaciones estructurales entre estas y obtener nuevos resultados en diversos campos de esta disciplina. Hasta aquí hemos dado un panorama histórico muy general de la teoría de modelos. En el capítulo 3 entraremos de lleno en la evolución de los principales conceptos de la teoría de modelos en relación con una *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia* (TGE3) de la filosofía matemática de Albert Lautman.

Capítulo 2

Lineamientos generales hacia una filosofía matemática

¿Es posible retomar una filosofía primera de la matemática? Esta pregunta surge naturalmente durante los años treinta del siglo XX, pero con un sentido y un enfoque completamente *sui generis*. Durante esta década ya se había consolidado una verdadera revolución; no solo habían surgido un gran número de teorías, conceptos y técnicas matemáticas que atestiguaban una enorme riqueza del pensamiento matemático, sino que también se intuía que tal diversidad escondía tras de sí una unidad subyacente que daría sentido al edificio matemático. "[E]l sentimiento de que, en el desarrollo de las matemáticas, se afirma una realidad que la filosofía matemática tiene como función reconocer y describir" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 133). El propio Lautman es testigo en primera persona de esta revolución, gracias a su excelente formación matemática en la *École Normale Supérieure* (1926-1930) y el Seminario Julia en el *Institut Henri Poincaré* (1935-1939). Buena parte de sus amigos y colegas intelectuales pertenencen a esta extraordinaria generación de matemáticos que dieron forma a la matemática moderna (Zalamea, 2011a, pp.24-27).

Tal sentimiento de una unidad subyacente se apoyó en el hecho de que las matemáticas se habían convertido en más abstractas, pero develando a su vez relaciones más profundas entre objetos matemáticos que en apariencia resultaban independientes y ajenos entre sí. El ejemplo, quizá más significativo, sea la relación entre geometría y aritmética. A lo largo de la historia siempre se concibió el espacio y el número como dos entidades completamente diferentes, el primero inherente a lo empírico, en contraste con el concepto puro *a priori* del segundo (Ledesma and Ferreirós, 2010). Kant, por ejemplo, considera a la geometría euclidiana como una ciencia sintética *a priori*, una teoría de nuestra intuición del mundo externo. El espacio es la forma subjetiva de la intuición externa. En contraste, no es claro el fundamento de la aritmética, si se encuentra en el espacio o en el tiempo (De Lorenzo, 2017, pp.19-57). En apariencia, geometría y aritmética se presentaban al intelecto humano como dos entidades diferenciadas y contrapuestas.


Albert Lautman (1908-1944)

Hilbert en los *Fundamentos de la Geometría* (1899) libera a la geometría de nociones intuitivas o empíricas y plantea un estudio general de las estructuras geométricas. En otras palabras, encuentra en la geometría una serie de estructuras ajenas a cualquier intuición del espacio y que, a su vez, son comunes a estructuras propias de la aritmética. Pero es claro que tales estructuras no se encuentran en la superficie, sino en estratos más profundos (abstractos). ¿Cómo fue posible lograr este encuentro?

El formalismo desarrollado por Hilbert se apoya en dos grandes pilares: el método axiomático y la jerarquía de estructuras abstractas. Hilbert realiza por primera vez una de las aplicaciones más importantes e influyentes del método axiomático formal. Esto implica que no interesa partir de la "verdad" o contenido de los axiomas, pues estos funcionan como un *esquema de conceptos* que tienen como propósito el incluir o representar el conjunto de hechos que constituyen la geometría euclidiana. Lo más significativo a resaltar es que tal esquema no es una descripción directa del espacio físico, sino que este sistema axiomático de la geometría presenta múltiples interpretaciones o realizaciones posibles, incluida la euclidiana (Giovannini, 2014).

> En general debe afirmarse: nuestra teoría proporciona sólo un esquema [Schema] de conceptos, conectados entre sí por las invariables leyes de la lógica. Se deja librado al entendimiento humano cómo aplicar este esquema a los fenómenos, cómo llenarlo de material. Ello puede ocurrir de diversas maneras: pero siempre que los axiomas sean satisfechos, entonces los teoremas son válidos. Cuanto más fácil y más variadas son las aplicaciones, tanto mejor es la teoría. Cada sistema de unidades y axiomas que describe completamente los fenómenos está tan justificado como cualquier otro. Mostrar sin embargo que el sistema axiomático aquí especificado es, respecto de cierto punto de vista, el más simple posible. *Notas manuscritas de las clases impartidas por Hilbert 1893/1894, p. 104,* en (Giovannini, 2014, p. 128).

Así, pues, las teorías geométricas no se evalúan por ser "falsas" o "verdaderas", en tanto representaciones del espacio físico. Por el contrario, el criterio fundamental es la *consistencia*, o en otras palabras, el sistema axiomático no puede llevar a contradicciones. Tal como se observa, hacia la década del 30 se produce un giro radical en la manera de concebir y practicar las matemáticas, giro que se viene gestando desde el siglo XIX con Galois. El interés no se centra en los objetos matemáticos por sí mismos, sino en el estudio de estructuras abstractas que relegan los entes a simples casos particulares o ejemplos.

El concepto fundamental detrás de estos avances es el de *Grupo* (*supra*, capítulo 1). Junto a este, los conceptos de *Cuerpo* y *Anillo* vienen a ocupar el foco en el estudio de las estructuras algebraicas abstractas. En 1930 la matemática alemana Emmy Noether (1882-1935) es quien da su forma definitiva a la noción de estructura en la matemática moderna y contemporánea, tanto en lo esencial como a nivel práctico. Ya en la década de 1890 se dio forma al concepto de Grupo, en 1910 al de Cuerpo y en 1920 al de Anillo. Pero gracias al trabajo de Noether, se dotó de armonía al edificio matemático a través del concepto de estructura. Este avance produjo tanto en Lautman como en el grupo de Bourbaki una fascinación que exigía a su vez una reflexión profunda al respecto (Ledesma and Ferreirós, 2010).

El camino que siguió Bourbaki fue llevar el proceso de axiomatización a la totalidad de las matemáticas. Los *Fundamentos de la geometría* (1899) de Hilbert se convirtió en el modelo de la axiomatización como manera de hacer matemáticas. Para Hilbert el método axiomático entra en lo que denomina la "etapa crítica", es decir, simplifica, sistematiza y depura una teoría matemática que previamente se ha venido gestando (etapa inicial). Esto quiere decir que el método axiomático no es la génesis en sí del conocimiento matemático, sino la manera en que este se organiza, toma forma y se expone de tal manera que sea comprensible y exportado a otras áreas de las matemáticas. Para entender esta idea el propio Hilbert ofrece la siguiente imagen:

> El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, donde primero se asientan firmemente los cimientos y sólo después se procede a edificar y a ampliar las habitaciones. La ciencia prefiere asegurarse, tan pronto como sea posible, espacios confortables donde moverse libremente y sólo después, cuando aquí y allá surgen señales de que los tambaleantes cimientos no son capaces de sostener la expansión de las habitaciones, se pone a fortificarlos y afirmarlos. Esto no es signo de debilidad, sino más bien la forma correcta y saludable de su desarrollo. *Curso que dictó Hilbert en 1905 en la Universidad de Gotinga*, en (Ledesma and Ferreirós, 2010, p. 165).

¿Puede la axiomática fundamentar la matemática? El sueño de Hilbert de formalizar la matemática (traducir teoremas por fórmulas y demostraciones por inferencias deductivas), se derrumba gracias a los teoremas de incompletitud de Gödel. No obstante, Bourbaki no renuncia por completo a la idea lograr una visión unitaria. Por lo tanto, este grupo de matemáticos franceses se concentró en la búsqueda de una organización piramidal de las matemáticas, con la teoría de conjuntos en la cúspide y seguida del álgebra y la topología. Pero lo que parecía un proyecto prometedor, pronto encontró obstáculos y caminos sin salida. Principalmente, la Teoría de categorías (1945) deja de caracterizar las estructuras desde dentro (Dedekind y Noether), para estudiarlas como objetos que no requieren de la noción de "pertenencia", "conjunto" o "ley". Esto derrumba las pretensiones bourbakianas, pues estos esquemas escapan a su enfoque conjuntista. En palabras de Jean Cavaillès (1903-1944), no es posible definir al total de las matemáticas de manera definitiva. Por el contrario, su devenir desborda cualquier tipo de acotación (Ledesma and Ferreirós, 2010). Valga decir que este hecho también expone el carácerter limitado de la filosofía analítica de las matemáticas, soportado sobre la lógica, la teoría de conjuntos y la aritmética de Peano.

Tanto Cavaillès como Lautman, por medio de la reflexión filosófica, comprenden el carácter no acotado de la unidad de las matemáticas. Parece un contrasentido, pues el concepto de *unidad* implica por sí mismo la noción de límite y acotación. Surge entonces la necesidad de un nuevo concepto de *unidad* no acotada, o por lo menos, con límites que no sean de carácter absoluto. En el caso de Cavaillès, presenta una interpretación de la matemática más cercana a la epistemología y a la fenomenología. Por su parte, Lautman se arriesga a una interpretación metafísica y dialéctica de esta. Como intentaremos mostrar en el desarrollo del presente capítulo, ambas perspectivas son convergentes en el planteamiento de una filosofía de la matemática contemporánea.

El carácter original que ofrecen estos dos filósofos franceses es, sin duda, la superación de dos tipos de abordaje en la filosofía de las matemáticas. Por una parte, toman distancia del tema de la fundamentación entre las corrientes "madre" de la filosofía de la matemática: logicismo, intuicionismo y formalismo. Por otra parte, se alejan de la caracterización de pretendidas propiedades psicologicistas. Ambos parten de una idea revolucionaria pero a la vez increíblemente sencilla y hasta obvia: partir de la matemática *efectiva*, esto es, del conjunto de nociones, métodos, teorías, objetos y construcciones a la que el matemático real se enfrenta en su práctica. En ese orden de ideas, la matemática presenta una realidad ideal que se manifiesta y se forja en su devenir. La filosofía de las matemáticas tiene, pues, por tarea la defensa, descripción y desarrollo de esta concepción (Arriaga, 2018, pp. 10-12). Diríamos también que la filosofía de la matemática tiene por encargo el develar, tras el alto nivel técnico y formal, el devenir y constitución de la matemática como pensamiento.

> En definitiva, los escritos de Cavaillès y Lautman sobre filosofía matemática marcan a la vez una renovación y una ruptura. Intentaron captar o comprender cómo se hacía la matemática efectiva; es decir, la que hace el matemático en su trabajo efectivo. Así, Cavaillès y Lautman rompen con las formas usuales de exposición filosófica de su época, que mantenían al filósofo alejado de la matemática real del matemático en activo. Y lo hacen enfatizando la singularidad del pensamiento matemático, su irreductibilidad incluso (Ledesma and Ferreirós, 2010, p. 173).

Desafortunadamente, la prematura muerte de Lautman y Cavaillès durante la segunda guerra mundial no permitió un desarrollo más fino de esta línea de pensamiento. Tampoco pudieron impulsar una escuela de pensamiento que desarrollara estas ideas. No obstante, el material es bastante rico, profundo y pertinente para reflexionar acerca de la eclosión creativa de la matemática del siglo XX y actual. Importantes esfuerzos se están realizando a fin de retomar la filosofía de Lautman y Cavaillès, principalmete en hispanoamérica. Resulta sorprende la ausencia casi absoluta en lengua inglesa de bibliografía secundaria sobre estos autores. Su pensamiento ha sido casi que descartado por la tradición anglosajona y la filosofía analítica (Zalamea, 2011a, pp. 27-35).

Sobre este panorama, el objeto del presente capítulo consiste en retomar y exponer las principales ideas de Lautman y Cavaillès en algunos lineamientos generales para la construcción de una filosofía matemática. Y siguiendo el espíritu intelectual de estos dos filósofos franceses, proponemos la teoría de modelos como esqueleto o soporte de la reflexión filosófica: una simbiosis entre filosofía y matemáticas. En otras palabras, vigorizar y dar continuidad a esta línea de pensamiento como herramienta conceptual de reflexión filosófica de la matemática actual.

En la primera sección abordamos el *platonismo estructural* de Lautman, esto es, cómo la matemática constituye la encarnación de Ideas Dialécticas. Luego, el significado que tiene la lógica respecto a la matemática en la perspectiva de Lautman, respondiendo el interrogante que dejamos en el anterior capítulo: de qué manera relacionamos estructura y lógica en el marco de una teoría metamatemática. Por último exponemos la fenomenología propuesta por Cavaillès, quien establece el punto de referencia en el movimiento mismo de la matemática. Si bien las perspectivas de estos filósofos parece contraponerse, mostramos que son más bien complementarios.

2.1. Dialéctica: unidad y multiplicidad a través de la estructura

La emergencia y consolidación de la noción de la *estructura matemática* en los años treinta del siglo XX significó una revolución en la manera de concebir y de hacer matemáticas. La reflexión filosófica de Lautman, junto a Cavaillès y otras figuras notables de su generación, se encaminó a comprender cabalmente la relevancia de la estructura, no solo respecto a las matemáticas sino también a la filosofía y la ciencia en general. En la primera parte de esta sección se considera la versión *sui generis* del platonismo estructural de Lautman. Las teorías matemáticas encarnan tensiones dialécticas que dotan de realidad objetiva a los entes matemáticos.

> L'examen des théories mathématiques les plus sophistiquées de son temps (surface de Riemann, loi de réciprocité quadratique, théorie du corps de classes) est destinée à montrer l'affinité de la genèse des concepts mathématiques avec une Dialectique supérieure, qui met en jeu les Idées, comprises en un sens dérivé de Platon (Benis-Sinaceur, 2020, p. 27)[1].

En la segunda parte se profundiza en los esquemas de estructura propuestos por Lautman. Nociones entre lo local y lo global, propiedades extrínsecas e intrínsecas y el ascenso hacia lo absoluto dominan el espacio de las matemáticas contemporáneas. Por último, se resalta la nueva mirada que a través de la estructura se obtiene de la unidad. El término "unidad" evoca sin duda alguna el concepto de "uno", el cual implica a su vez nociones como homogeneidad, límite estricto, indivisibilidad o eternidad. La mirada de Lautman ofrece, en contraposición, una nueva mirada de la unidad que nos atraveríamos a llamar de "unidad abierta".

2.1.1. El platonismo estructural de Lautman

Es natural considerar que una filosofía de la matemática apoyada sobre el platonismo incurra en consideraciones erróneas y superadas en la historia del pensamiento. De entrada, esto podría ser un motivo más para que la obra de Lautman no haya tenido una difusión importante dentro de la filosofía. No obstante, el platonismo sobre el que se apoya Lautman toma distancia del "platonismo ingenuo", ofreciendo una

[1] El examen de las teorías matemáticas más sofisticadas de su tiempo (superficie de Riemann, ley cuadrática de reciprocidad, teoría del cuerpo de clase) pretende mostrar la afinidad de la génesis de los conceptos matemáticos con una dialéctica superior, que pone en juego Ideas, entendidas en un sentido derivado de Platón.

nueva mirada sobre la dialéctica. La presente sección tiene por objeto, precisamente, exponer a qué tipo de platonismo responde la filosofía de Lautman. El siguiente fragmento expone con claridad su postura:

> De ahí las críticas que Cavaillès dirige al platonismo en Matemáticas, en el sentido de un platonismo que se identificaría con una teoría de la existencia "en sí" de las Matemáticas.
>
> Reconozco, con Cavaillès, la imposibilidad de una tal concepción de un Universo inmutable de seres matemáticos ideales. Es una visión extremadamente seductora, pero de una consistencia verdaderamente demasiado débil. Las propiedades de un ser matemático dependen esencialmente de los axiomas de la teoría donde esos seres aparecen, y esa dependencia les retira la inmutabilidad que debe caracterizar a un Universo inteligible. No por ello considero que los números y las figuras no tengan una objetividad tan cierta como aquella a la que se enfrenta el espíritu al observar la naturaleza física; pero esa objetividad de los seres matemáticos, que se manifiesta de manera sensible en la complejidad de su naturaleza, no revela su sentido verdadero sino en una teoría de la participación de las Matemáticas en una realidad más alta y oculta, que constituye, a mi parecer, un verdadero mundo de las Ideas (Lautman, 2011, PM, pp. 377-378).

El platonismo en filosofía de las matemáticas, en general, presume que los objetos matemáticos abstractos existen independientemente de nosotros y de nuestro lenguaje, pensamiento y prácticas (Linnebo, 2013). Como se observó en el anterior fragmento de Lautman, este rechaza de plano la existencia "en sí" de los seres matemáticos, aun cuando su objetividad, o independencia, es "tan cierta como aquella a la que se enfrenta el espíritu al observar la naturaleza física". Parece hasta acá un contrasentido; por una parte los seres matemáticos no tienen existencia propia, pero por otra parte son tan objetivos como cualquier objeto de la realidad física. Juega, en tal sentido, entre un platonismo fuerte y un antiplatonismo.

No obstante, es justamente en la aparente contradicción en donde se encuentra el entendimiento de los objetos matemáticos. ¿En dónde radica, pues, la objetividad de los seres matemáticos? Tal objetividad, o independencia, se manifiesta en la "complejidad de su naturaleza". En otras palabras, lo que constituye un ser matemático (existencia y propiedades) no se define en el ser mismo, sino en los axiomas de la teoría en que este aparece. Este hecho despoja de cualquier tipo de inmutabilidad a los objetos matemáticos. Hasta aquí: la existencia e independencia de los seres matemáticos dependen de las teorías en que tales seres aparecen.

En este punto no parece haber diferencia con las líneas generales del formalismo de Hilbert, un mero juego combinatorio de signos. Sin embargo, Lautman aclara que tales signos organizan seres u objetos, aun cuando ya no están considerados en "sí mismos". Los seres u objetos son estudiados por la matemática gracias a que es posible organizarlos en una serie de axiomas que los "enmarcan". Por lo tanto, no hay una lectura realista ni reduccionista de identificar la realidad matemática en sus objetos, ni tampoco en los axiomas por sí mismos. Es en la relación inextricable entre los objetos y los axiomas en la que insiste Lautman (Arriaga, 2018, p. 23).

> La presentación formalista de teorías así axiomatizadas es sólo una cuestión de mayor rigor. El objeto estudiado no es el conjunto de las proposiciones derivadas de los axiomas, sino un conjunto de seres organizados, estructurados, completos, como con una anatomía y una fisiología propias (Lautman, 2011, MR, p. 79)

La objetividad de los seres matemáticos exige, por tanto, que el sentido de cualquier teoría matemática dependa de "la participación de las Matemáticas en una realidad más alta y oculta", es decir, en lo que constituye un "verdadero mundo de las Ideas". En otras palabras, "la realidad de las matemáticas se da en la participación de éstas con respecto de ciertas Ideas que no son ellas mismas matemáticas" (Arriaga, 2018, p. 74). ¿Cómo puede justificarse tal interpretación platónica en el desarrollo de la matemática del siglo XX? Lautman responde que esta interpretación reside en su *aspecto estructural* . Tales Ideas se refieren a *estructuras dialécticas* que se *encarnan* en las teorías matemáticas efectivas, derivando de estas las estructuras matemáticas en cuanto tal. No sin razón Ledesma (2008) denomina al platonismo de Lautman como *platonismo estructural*.

Lautman resalta que en la matemática se aplican ciertas teorías de manera transversal a todas sus ramas: la Teoría de conjuntos de Cantor, la Teoría de Grupos de Galois y la Teoría de cuerpos de números de Dedekind. Estas teorías se denominan "teorías abstractas", es decir, estudian los modos de organización posible de elementos cuya naturaleza es indiferente. Diversos objetos matemáticos, en apariencia distintos entre sí, exhiben propiedades estructurales comunes. Así, por ejemplo, es posible definir propiedades globales, tales como ordenamiento, división de clases, clausura, irreductibilidad, entre otras. Esta nueva manera de trabajar del matemático implica un "nuevo espíritu", en donde los razonamientos más intuitivos de la topología y el álgebra reemplazan a los largos cálculos (Lautman, 2011, PM, pp. 377-379).

Como puede ya intuirse, el objeto matemático no es una entidad cerrada ni mucho menos autocontenida. Aquel se ve atravesado por relaciones estructurales profundas que van más allá del sistema axiomático en el que aparece. Es decir, el objeto va más allá de una mera deducción formal a partir de los axiomas. La existencia de los objetos sobrepasa las relaciones lógicas al interior de los sistemas axiomáticos, o dicho de otra manera, la lógica no es capaz de capturar la riqueza de los sistemas formales, como ya Gödel demostró en 1931. Pero, por otra parte, su naturaleza no es de ninguna manera arbitraria, sino que responde a una serie de *nociones dialécticas* que Lautman identifica: esencia-existencia, forma-materia, todo-parte, contingente-contenido, etc. Estas no son nociones matemáticas, pero son hacia estas que tienden las teorías matemáticas efectivas.

Lautman propone "llamar *Ideas* dialécticas a los problemas de los enlaces posibles entre las nociones dialécticas así definidas" (Lautman, 2011, PM, p. 379). Toma de ejemplo las relaciones entre forma y materia. Es un problema que escapa claramente del ámbito estrictamente matemático, y se instala en el terreno de la filosofía. "[E]n qué medida una forma determina la existencia y las propiedades de la materia a la cual es susceptible de aplicarse" (Lautman, 2011, PM, p. 379). Lo que debe explicarse es, justamente, la relación o mediación entre estos dos polos. A este respecto, las teorías efectivas de la matemática constituyen, por tanto, todo esbozo de solución entre los enlaces de aquellas nociones dialécticas. La teoría de grupos abstractos y la lógica matemática presentan analogías de estructuras dialécticas al ser ambas soluciones particulares del mismo problema dialéctico: "la determinación de la materia a partir de la forma" (Lautman, 2011, PM, p. 380), a pesar de ser dos teorías tan distintas entre sí.

> La razón de las relaciones entre la Dialéctica y las Matemáticas reside entonces en el hecho de que los problemas de la Dialéctica son concebibles y formulables independientemente de las Matemáticas, pero, a la vez, en que todo esbozo de solución aportado a esos problemas se apoya necesariamente en algún ejemplo matemático, destinado a sostener de manera concreta el enlace dialéctico estudiado [...] la Dialéctica, en sí misma, es problemática pura, antitética fundamental, relativa a pares de nociones que parecen oponerse a primera vista, pero a propósito de las que se plantea, no obstante, una síntesis o una conciliación posible. Es así como, por ejemplo, consideré en mi Tesis el problema de las relaciones entre lo local y lo global, lo extrínseco y lo intrínseco, lo continuo y lo discontinuo, etc. (Lautman, 2011, PM, p. 379-381).

Lautman relaciona esta concepción de la dialéctica con el *Sofista* de Platón, en donde los contrarios, en lugar de opornerse, se componen entre sí para generar los mixtos que constituyen la matemática. Tales mixtos generan a su vez nuevos entornos y dominios, en los que se constituyen como entes primarios, y no como mixtos, que generan un nuevo ciclo genético (Zalamea, 1994, p. 276). Confluye de esta manera un movimiento dinámico vs. una estabilidad estructural que ofrecen a la vez una perspectiva unitaria y dinámica. "[L]as teorías matemáticas son susceptibles de una doble caracterización, una sobre el movimiento propio de esas teorías, otra sobre los enlaces de ideas que encarnan en ese movimiento"(Lautman, 2011, ESNEEM, p. 267).

Es, en tal sentido, que se entiende la práctica matemática, como el devenir histórico y contingente de esta disciplina. Por una parte, son las sutilezas, los obstáculos que o bien se superan o bien se rodean, el nacimiento de problemas inesperados o la conexión sorprendente entre distintas teorías entre sí. Pero, por otra parte, "se presenta al metafísico como la prolongación necesaria de una Dialéctica inicial" (Lautman, 2011, PM, p.381). Es decir, evidencia su doble naturaleza, tanto dinámica y hasta cierto punto imprevisible, como su carácter estructural y permanente. La filosofía matemática, concluye Lautman, debe apuntar al reconocimiento del momento en que la Idea da nacimiento a lo real, de la comprensión de un problema dialéctico a la *génesis* del conjunto de nociones matemáticas. "[L]a realidad inherente de las teorías matemáticas proviene de su participación en una realidad ideal, dominante con respecto a la matemática, pero que es sólo cognoscible a través de ella"(Lautman, 2011, RITM, p. 129).

> Los objetos matemáticos modernos aparecen como centros donde convergen las más diversas y sorprendentes combinaciones de estructuras. Un típico artículo matemático moderno se desarrollará de la siguiente manera: se trata de demostrar que un cierto grupo, que interviene en teoría de números (y, con más precisión, en la teoría aritmética de raíces de la unidad) es finito. Se comienza por interpretar este grupo con la ayuda del Álgebra homológica, que reduce el teorema a demostrar un resultado concerniente a la cohomología de ciertos subgrupos discretos de un grupo de Lie; y finalmente, este último es obtenido remitiéndose a la teoría de espacios simétricos de E. Cartan y a las formas armónicas de Hodge. ¡Se partió de la "Aritmética", para después pasar al álgebra, para acabar, a fin de cuentas, en la Geometría y el Análisis! (*Prefacio de Jean Dieudonné a la edición francesa de la obra de Lautman (1977))*, citado en (Arriaga, 2018, p. 118).

Este platonismo *à la* Lautman es todo lo contrario a un armazón rígido, superficial y contemplativo, pues aboga por una dialéctica dinámica y abierta al permanente *devenir* (Zalamea, 2011a, p. 54). La realidad ideal que supera a la matemática pero que encarna con tanta efectividad en su movimiento, encuentra una explicación satisfactoria, a criterio de Lautman, en las interpretaciones más sofisticadas del platonismo de su tiempo (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 270-273). Podemos quizá cerrar con la siguiente imagen: la objetividad no refiere a un "objeto" definido y diferenciado del universo circundante, sino que esta *emerge* de la red de relaciones estructurales que se elabora a medida que se desarrolla la matemática en su movimiento. En otras palabras, es la lava que se solidifica.

2.1.2. Los esquemas de estructura

Puede entonces caracterizarse al platonismo estructural de Lautman en lo que él mismo denomina como los *esquemas de estructura*. Como ya hemos insistido, una acción dialéctica se encuentra en el trasfondo de la matemática. La tarea del filósofo es, pues, develar esa realidad a través del estudio de tres nociones relacionadas con la estructura, a saber: la noción entre "lo local y lo global", las propiedades intrínsecas-inducidas y el ascenso a lo absoluto.

La primera de ellas, lo local y lo global, se refiere a la relación solidaria entre el todo y la parte "que empuja a las partes a organizarse en un todo y al todo a reflejarse en ellas" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 139). Un rasgo característico de la matemática a partir del siglo XIX es el desarrollo de un doble punto de vista al abordar cualquier área o problema matemático. Por una parte, el punto de vista local se enfoca en el elemento; identificar y caracterizar sus propiedades en cuanto tal, para ir poco a poco construyendo relaciones por yuxtaposición hacia una idea de conjunto. En contraposición, lo global parte de caracterizar una totalidad sin importar las particularidades de sus elementos constitutivos, y estos se definen por su funcionalidad y/o relaciones al interior de la totalidad. En el primero se asciende de propiedades puntuales a estructuras en que estas se incluyen, en el segundo se parte de propiedades que los elementos deben cumplir para su inclusión (Lautman, 2011, ESNEEN, pp. 141-162).

La segunda noción se refiere a la conexión entre las propiedades intrínsecas y extrínsecas de un objeto matemático. Las primeras se refieren a las propiedades del objeto en sí mismo, sin considerar el espacio en el que se encuentra ni la relación con otros objetos. Por su parte, las propiedades extrínsecas establecen las relaciones con otros objetos y con el entorno en que se encuentre, el objeto en cuanto tal es una caja negra. En Leibniz, por ejemplo, la mónada individual reduce todas las propiedades extrínsecas en las intrínsecas. Kant, por el contrario, reconoce una serie de propiedades que surgen de las posiciones relativas que ocupa el objeto en el espacio (Lautman, 2011, ESNEEN, pp. 162-165).

Lautman ejemplifica la anterior discusión en la geometría diferencial impulsada por los trabajos de Gauss y Riemann. Las propiedades intrínsecas de una variedad se estudian independientemente del espacio en que se encuentre sumergida. Por lo tanto, "elimina toda referencia a un continente universal o a un centro privilegiado de coordenadas" (Lautman, 2011, ESNEEN, p. 165). Esto, por supuesto, genera una serie de problemas de interpretación filosófica. Por ejemplo, la idea de que el espacio que usa Einstein pueda concebirse como una variedad de Riemann cerrada, lleva a imaginar una superficie cerrada en un espacio tri-dimensional, pero se entiende que carece de todo sentido pues es una construcción del espíritu. Es interesante resaltar en este punto la necesidad de considerar tanto las propiedades intrínsecas como extrínsecas al momento de caracterizar cualquier objeto matemático. "Esta realidad puede, en efecto, ser caracterizada por la manera como se deja aprehender y organizar, pero puede serlo también de manera intrínseca, desde el punto de vista de su estructura propia" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 135).

El *Analysis situs* propuesto por Leibniz parte de la esperanza de determinar las propiedades extrínsecas por las intrínsecas, o en otras palabras, la manera en que un objeto matemático se relaciona con su entorno y con otros objetos (*situación*), se desprende de sus propiedades internas (*análisis*). Lautman utiliza el caso de la cinta de Möbius para resaltar el encuentro entre el punto de vista de la situación (extrínseco) y el de análisis (intrínseco). Propiedades intrínsecas como ser bilateral o unilateral dependen de espacio ambiente en el que habita. Supóngase una flecha perpendicular que se desplaza a lo largo de la cinta. En cuanto propiedad intrínseca se caracteriza por su "unilateralidad", pero una vez recorre el espacio hasta volver al punto de partida pero con orientación inversa. La propiedad de ser unilateral o bilateral depende, pues, del espacio ambiente en que se encuentra la cinta (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 172-173).

> Este ejemplo nos deja presentir el interés filosófico de la topología algebraica (o topología combinatoria): las propiedades geométricas de relación se dejan expresar en muy buena medida por propiedades algebraicas intrínsecas, y, en la medida en que se logra esa intelectualización de las relaciones de una figura y de las figuras circundantes, se ve cómo se desvanece la distinción kantiana entre una estética y una analítica (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 173).

Formulado el problema de otra manera: ¿es posible establecer las propiedades de *situación* a partir del conocimiento de las propiedades estructurales del objeto? Lautman responde que tal reducción solo es válida en situaciones bi-dimensionales, pero no tri-dimensionales. Esto es, una estética diferente a una analítica. Visto así, por una parte pareciera que la topología solo pudiera desarrollarse bajo los planteamientos de Leibniz, pero encontrando configuraciones que validan el planteamiento kantiano. Así, por ejemplo, el orden local determina si en un punto específico o región del espacio este es curvo o plano, mientras que el orden global establece si es cerrado o abierto. Es decir, lo local limita pero no restringe lo global. Es posible definir un espacio plano en lo local y globalmente cerrado sobre sí mismo. Pero no es posible que una superficie esférica en lo local asigne un espacio abierto globalmente.

> La reducción de lo extrínseco a lo intrínseco choca así con hechos que muestran los límites que encuentra la eliminación de toda referencia a un continente universal, y confiere un interés aún mayor a los casos sorprendentes donde esa eliminación se consigue (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 170).

Por último, la tercera noción se refiere al ascenso hacia lo absoluto. Lautman toma como modelo el planteamiento de Descartes que, nosotros, seres imperfectos seamos capaces de concebir ideas perfectas. Aquí, Lautman identifica un proceso dialéctico esencial que va de la imperfección de los seres matemáticos a la perfección de las teorías matemáticas absolutas. Es un proceso que se desarrolla en etapas sucesivas, en las que se van eliminando impurezas a medida que se asciende. Lautman ejemplifica este proceso de ascenso en la teoría de las ecuaciones algebraicas de Galois, la teoría de cuerpos de clase que tiende al Cuerpo de clases absoluto y la teoría de uniformización de las funciones algebraicas (analíticas) sobre la superficie universal de recubrimiento (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 185-195).

> No sólo la imperfección presupone la perfección, sino también, y es este el otro punto sobre el cual queremos insistir, dado que la imperfección no es sino una privación, resulta posible determinar, mediante la mera consideración del ser imperfecto, los atributos del ser perfecto (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 183).

Por otro lado, el paso hacia lo absoluto no se limita al acabamiento[2] final del ser matemático, esto es, la mayor sencillez estructural posible. Tal estado de perfección posibilita la generación de nuevos seres matemáticos. En otras palabras, el proceso de perfeccionamiento dota a las estructuras matemáticas de una potencia creativa no presente en sus fases anteriores, abriendo nuevos caminos de una amplia riqueza y creatividad.

[2]Los términos de "acabado" y "acabamiento" que utiliza Lautman corresponden a las nociones actuales de completo y completitud (Zalamea, 2011a, p. 63).

> La solidaridad del todo y de sus partes, la reducción de propiedades de relación a propiedades intrínsecas, el paso de la imperfección a lo absoluto son ensayos de organización estructural que confieren a los seres matemáticos un movimiento hacia la plenitud por el que puede decirse que existen. Pero esa existencia no se manifiesta sólo cuando la estructura de esos seres imita las estructuras ideales con las que se dejan comparar; resulta que el acabamiento de un ser es, al mismo tiempo, génesis para otros seres, y son esas unas relaciones lógicas entre esencia y existencia donde se inscribe el esquema de creaciones nuevas (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 201).

Tales nociones, por tanto, describen una organización estructural que se constituye en el movimiento. Seres matemáticos existentes posibilitan la génesis de otros seres por medio del reconocimiento de temas estructurales, tales como todo-parte, local-global, discreto-continuo. El reconocimiento de tales temas estructurales tienen de por sí un valor filosófico en la historia de la metafísica. El objetivo de Lautman es mostrar la manera en que la formulación matemática da nueva vida al carácter metafísico de las Ideas, haciéndolas por derecho propio inteligibles al pensamiento humano. Movimiento contrario a simplemente aplicar la metafísica sobre las matemáticas (Ledesma, 2008, p. 248). “No se trata de encontrar viejos problemas de la metafísica en el seno de teorías matemáticas, sino de extraer la dialéctica que esa teoría resuelve esquemáticamente” (Arriaga, 2018, p. 57).

Por último, es importante señalar la triple relación entre metafísica, matemáticas y física, con objeto de entender cuál debería ser la tarea de la *filosofía matemática.* En primer lugar, Lautman plantea que el objetivo principal de la filosofía de la ciencia consiste en explicar la relación entre matemáticas y física. “El problema capital de la filosofía de las ciencias es, sin duda alguna, aquel de las relaciones entre la teoría matemática y la experiencia física”. Más adelante expone con claridad la visión de esta idea: “Quisiéramos un día mostrar cómo las concepciones relativas al universo físico no son más que una representación concreta de nociones definibles únicamente en el seno de una teoría matemática”(Lautman, 2011, RSTF, p. 441).

Al respecto, resulta útil la claridad que ofrece Ledesma (2008) en este punto. Pueden considerarse tres concepciones generales sobre la dialéctica matemática: una de carácter débil, otra intermedia y otra fuerte. La primera de estas plantea que la dialéctica es simplemente un recurso “pedagógico” de aprendizaje que nos ayuda a entender las matemáticas y a movernos por entre sus construcciones. La concepción intermedia, representada por Cavaillès, plantea que el pensamiento en cuanto tal presenta un carácter dialéctico en su propia constitución, con lo cual la construcción de la matemática encarna esta dialéctica. Finalmente, la concepción fuerte corresponde al planteamiento de Lautman, pues sostiene que la esencia tanto del pensamiento como de la realidad es dialéctica. De acuerdo con Zalamea (2011), Lautman insiste en que el acercamiento entre dialéctica, metafísica y matemática no es casualidad, sino una necesidad que incluye también a la cultura.

Si tanto el pensamiento como la realidad encarnan estas Ideas dialécticas, resulta entonces natural considerar que la dialéctica se expresa tanto en el material físico, como en la encarnación que ofrece la matemática de esta. Resulta, pues, necesaria una relación estrecha entre metafísica y matemáticas (Arriaga, 2018, p. 65). En otras palabras, no es posible hablar de lo real con independencia de los modos con que se deja aprehender.

> “[U]na cierta concepción bastante estéril de la vida del espíritu, donde lo racional se identifica con la unidad. Parece más fecundo, por el contrario, preguntarse si la razón en las ciencias no tiene más bien como objeto ver, en la complejidad de lo real, tanto en Matemáticas como en Física, un mixto, cuya naturaleza no podría ser explicada sino al remontarse a las Ideas en las cuales ese real participa (Lautman, 2011, PM, p. 382).

La tarea de la *filosofía matemática* consiste entonces en edificar la *teoría de las Ideas* bajo tres tipos de investigaciones. Primero, la descripción de las “estructuras eidales” encarnadas en las matemáticas. Segundo, determinar una “jerarquía de las Ideas” y la génesis de estas como ya lo había formulado Platón. Por último, “rehacer el *Timeo*” para mostrar en la constitución misma de las Ideas su aplicación al “Universo sensible”(Lautman, 2011, PM, 374-383).

Es claro bajo este panorama que el filósofo adquiere un papel muy relevante y, principalmente, activo. El filósofo, contrario a la resignada posición de espectador o de analista del lenguaje al que lo relegó Wittgenstein, es quien junto al matemático saca a la luz las estructuras profundas de la matemáticas, estructuras que no se restringen al universo formal sino que constituyen la base de la filosofía de la ciencia y del universo sensible.

> (Recuérdese, la matemática seduce al filósofo porque en ella se aprecia la necesidad de los enlaces entre lo real y sus regularidades o necesidad). Por eso, el autor [Lautman] intentará mostrar que se puede encontrar una realidad más cercana a las expectativas del filósofo, y que la tarea de encontrarla recae en especial en él, ya que hay que recorrer los diversos modos de experiencia en los cuales esa realidad aparece y se deja capturar (Arriaga, 2018, p. 33).

2.1.3. La unidad sintética de las matemáticas

Surge así, naturalmente, la cuestión por la unidad de las matemáticas. La concepción tradicional de unidad nos viene en buena medida heredada de Parménides en los albores de la filosofía occidental. "Además, y dado que posee un último límite, el Ser está terminado por todas partes, semejante a la masa de una esfera bien redondeada" (Parménides, 1983, p. 54). En el poema *Sobre la naturaleza*, el filósofo griego insiste en que el Ser es en su integridad "uno y continuo" a la manera de una esfera con un límite perfectamente delimitado y atemporal. Asimismo, "No es igualmente divisible, puesto que todo él es homogéneo. Nada hay de más que llegue a romper su continuidad, ni nada de menos, puesto que todo está lleno de Ser" (Parménides, 1983, p. 53).

Considerar la unidad de las matemáticas puede llevar en un primer momento a concebirla como terminada, perfectamente delimitada, homogénea, continua y ajena al tiempo. Lautman, no obstante, nos presenta una nueva definición de *unidad* opuesta a su concepción tradicional. Podemos aventurarnos a decir que se trata de una unidad que se constituye a través de un proceso dinámico: inacabada, heterogénea y discontinua. La unidad de Parménides es analítica, "el Ser es y el No-Ser no es", mientras que la unidad que presenta Lautman es sintética, esto es, una unidad *perfeccionable* por etapas que se suceden en el tiempo. Dicho de otro modo, la *unidad analítica* parte de la unidad como principio ya constituido, mientras que la *unidad sintética* constituye la unidad por convergencia.

Ahora bien, es importante señalar que no es un movimiento unidireccional lo que constituye la unidad, pues la unidad en sí misma adquiere realidad y genera nuevos seres matemáticos. Es un movimiento pendular, como lo define Zalamea (2011), entre la síntesis y el análisis: "el impulso *exacto*, concreto y diferencial de las matemáticas así consignado se complementa permanentemente con un impulso pendular opuesto hacia la integralidad y la unidad (...) la noción de *estructura matemática* proporciona a Lautman una herramienta muy dúctil para entrelazar lo diverso" (Zalamea, 2011a, p. 41). No es cuestión de privilegiar un tipo de movimiento sobre el otro, sino de entender que es justamente la polaridad entre lo global-local, lo continuo-discreto, lo uno-múltiple, etc., lo que constituye la matemática contemporánea.

Derivado de lo anterior, es claro que la realidad matemática supera la rigurosidad lógico-deductiva de sus propias construcciones. Si bien se profundizará más adelante en el tema de la lógica, valga decir por el momento que las matemáticas no son una extensión tautológica de esta. Por el contrario, su realidad presenta el mismo estatus ontológico que el de la física.

> Las matemáticas se ha constituido como la física: los hechos a explicar

> fueron, todo a lo largo de la historia, paradojas que el progreso de la reflexión tornó inteligibles, gracias a una constante renovación de sentido de las nociones esenciales. Los números irracionales, lo infinitamente pequeño, las funciones continuas sin derivadas, la trascendencia de e y de π, el transfinito, han sido admitidos por una incomprensible necesidad de hecho, antes de que se tuviera de ellos una teoría deductiva (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 135).

Para el caso valga profundizar en alguno de los ejemplos enunciados por Lautman. No existe sistema axiomático ni lógica, por poderosa que esta sea, que logre deducir aquellos dos enteros cuya razón sea igual a $\sqrt{2}$. Esto es así (hecho objetivo) porque no existe un par de números enteros que expresen (conmesuren) el valor de la hipotenusa cuyos catetos tienen longitud de 1. Si bien este triángulo rectángulo se expresa en los Naturales, el resultado de la diagonal *escapa*, por así decirlo, del dominio matemático en el que nace y se expresa. Los Irracionales, pues, no resultan de la deducción formal de los Racionales, sino de un hecho que quiebra las nociones esenciales de los Naturales.

Ahora bien, este "quiebre" de los Irracionales respecto a los Racionales constituye a su vez una unidad propia, la de los números Reales, con sus propias reglas de composición y propiedades no reducibles a sus componentes. Una filosofía sintética de las matemáticas exige, por tanto, una meta-matemática que trascienda la matemática formalizada y muestre tanto su continuidad como su coherencia y consistencia.

> Las matemáticas se presentan así como síntesis sucesivas, donde cada etapa es irreducible a la etapa anterior. Además, y esto es capital, una teoría así formalizada es incapaz de llevar con ella la prueba de su coherencia interna; se le debe superponer una metamatemática que toma como objeto a la matemática formalizada y la estudia desde el punto de vista doble de la no contradicción y del acabamiento (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 137).

Concebido así el desarrollo de la matemática, se constata una doble concepción de la misma: una concepción *estructural* y otra *dinámica*, de las cuales el propio Lautman manifiesta que "parecen oponerse a primera vista". La primera de estas concibe a la matemática como un todo acabado, eterno y perfecto; mientras que la segunda la concibe como proceso que se expresa en etapas temporales sucesivas, una "potencia infinita de expansión fuera de sus límites y de enlace con las demás, afirmándose así la unidad de la inteligencia". El propósito del filósofo es, nos dice Lautman más adelante, desarrollar "una concepción de la realidad matemática donde se entrelazan la fijeza de las nociones lógicas y el movimiento en el cual viven las teorías" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 138).

> Las matemáticas, y sobre todo las matemáticas modernas, álgebra, teoría de grupos, topología, nos ha parecido que relatan así, mezclada con las construcciones que interesan al matemático, otra historia más escondida y hecha para el filósofo. Una acción sintética se juega incesantemente en el trasfondo (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 139).

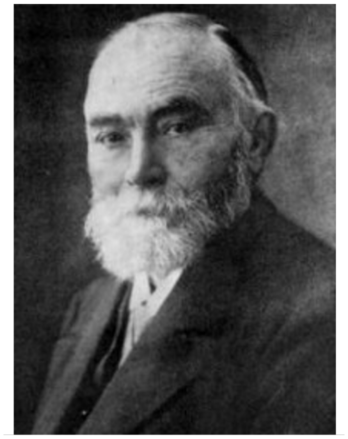
2.2. El lugar de la lógica respecto a la matemática

La discusión previa ha ofrecido algunos elementos de la crítica de Lautman a la filosofía de las matemáticas de carácter analítico. Para profundizar en esta crítica y entender el camino sintético propuesto por este filósofo, es conveniente aclarar, en primera medida, las respectivas posturas de Frege y Hilbert frente a las geometrías no-euclidianas y el método axiomático, intentando mostrar la apertura de dos caminos diferentes respecto a la reflexión filosófica de la matemática. El primer camino es importante aunque limitado, mientras que el segundo es más profundo aunque inconcluso. En segundo lugar, indicar que si bien el camino de la filosofía analítica es válido es insuficiente para abordar la matemática contemporánea, dada la relación que asigna a lógica y matemáticas. En la última parte se expone cuál es el lugar que ocupa la lógica respecto a las matemáticas en Lautman y, en esa medida, cómo podría su filosofía arribar a la teoría de modelos por medio de los esquemas entre *esencia* y *existencia*.

2.2.1. Polémica Frege-Hilbert y la apertura de dos caminos

La diferencia entre proposiciones analíticas y sintéticas tiene su origen en la filosofía crítica de Kant. El valor de verdad de las proposiciones analíticas se determina en los términos involucrados, o en otras palabras, el predicado está contenido en el sujeto. En contraste, las proposiciones sintéticas ofrecen un conocimiento nuevo, pues lo que se dice del sujeto (predicado) no está contenido en aquel.

Frege, siguiendo los lineamientos de Kant, distingue entonces entre disciplinas analíticas y disciplinas sintéticas. Las primeras son aquellas que pueden deducirse enteramente de leyes y definiciones lógicas. Las segundas, por su parte, requieren de otros conocimientos diferentes a la lógica. Las ciencias particulares son ejemplo de este último tipo de disciplinas, pues requieren de la experiencia para la validación de sus postulados. Entre las ciencias analíticas Frege identifica a la aritmética.



Gottlob Frege (1848-1925)

El denominado *proyecto fregeano* consiste, entonces, en deducir de conceptos y leyes lógicas todas las verdades de la aritmética. En otras palabras, reducir esta última bajo los fundamentos sólidos de la primera. ¿Por qué Frege creyó tan firmemente en la analiticidad de la aritmética? Básicamente por dos razones. La primera, es la aplicación universal de la aritmética, todo puede ser contado, desde los pensamientos hasta los planetas. La segunda razón, los teoremas y axiomas de la aritmética no pueden ser negados sin que ello implique la imposibilidad de pensar, tal como si se negara el principio de no contradicción (ya sabemos de sobra que negar este principio ha abierto una amplia gama de posibilidades en el pensamiento y en la matemática).

Para llevar a buen puerto su proyecto, Frege requirió la construcción de todo un nuevo andamiaje conceptual y técnico. En primer lugar, desarrollar el lenguaje adecuado en el cual expresar las leyes y conceptos de la lógica. Luego, establecer los axiomas y definiciones como punto de partida. En tercer lugar, definir las reglas de inferencia para asegurar la consistencia entre los axiomas y definiciones con las proposiciones deducidas. Por último, y consolidación final de su programa, derivar las verdades lógicas a partir del uso del aparato lógico.

En 1893 publicó *Las leyes básicas de la aritmética* en donde presenta una reducción lógica. No obstante, para la publicación del segundo volumen en 1902 su proyecto queda truncado con la hoy conocida *paradoja de Russell*. Pero más allá del fracaso del proyecto de Frege o de las razones del mismo, interesa mostrar que en esta época se abren dos caminos alternativos tanto en lógica y matemática, como en filosofía de las matemáticas. Un camino es bien conocido y es el que se abre gracias a los trabajos de Frege tanto en la filosofía analítica como en la filosofía del lenguaje. Otro camino, menos conocido y hasta cierto punto truncado, se refiere a lo que sostendremos por una filosofía sintética de las matemáticas. De este último Lautman es un importante referente para entender los lineamientos generales. Como ya se ha mencionado, la prematura muerte del filósofo francés, sumado a la preeminencia de la filosofía analítica, han ocultado el potencial que este camino ofrece.

Piénsese estos dos caminos a la manera de una bifurcación que parte de un camino previo y común a ambos. Para comprender esta ruptura valga la pena considerar la polémica entre Frege y Hilbert en torno a una cuestión muy puntual pero al mismo tiempo profunda: las geometrías no-euclidianas y el método axiomático. La relevancia en términos filosóficos de esta discusión se sustenta en la importancia que cada uno de ellos tendrá sobre figuras notorias de la filosofía de las matemáticas; Russell en el caso de Frege y Lautman y Cavaillès en el caso de Hilbert. Siendo el primero más conocido, es importante decir de los segundos que fueron unos grandes admiradores de Hilbert, y que en buena medida su reflexión filosófica está en deuda con su obra matemática.

> No sería descabellado describir la obra de Lautman como un sostenido comentario —a la vez analítico y sintético— de los profundos trabajos de Hilbert. Hilbert es referido veinticinco veces como fuente y mencionado en cuarenta y siete páginas en el cuerpo de la obra de Lautman; pero, más allá de esa enorme cantidad de referencias, el espíritu estructural y unitario de la obra hilbertiana, así como su asombrosa elegancia técnica, impregnan plenamente todos los escritos de Lautman (Zalamea, 2011a, p. 26).

La figura de Hilbert es fundamental en el desarrollo de la matemática del siglo XX, empezando por el propio grupo de Bourbaki, el desarrollo del álgebra abstracta, análisis funcional, teoría de números, física matemática, entre otros. Sin duda, Hilbert fue un importante catalizador de la matemática de su tiempo y pilar de la matemática actual.

Frente a la naturaleza de la geometría, Kant la definió como un conocimiento sintético, pues la verdad de los axiomas se captan por medio de una intuición pura del espacio. En la historia del pensamiento era un acuerdo casi absoluto desde los griegos considerar que los axiomas se referían a verdades captadas por algún tipo de intuición infalible respecto al mundo. Ahora bien, no hay que perder de vista que Kant no conoce el desarrollo de las geometrías no-euclidianas, desarrolladas en el siguiente siglo. Como ya se ha mencionado, este tipo de geometrías significaron un cisma de la razón que obligó a: o bien aceptar los resultados sin cuestionarse acerca de los mismos; o bien rechazar estos resultados y abogar por la realidad última de la geometría euclidiana. Frege tomó la segunda opción mientras que Hilbert optó por la primera (Mosterín, 1980, p. 292-297).

¿El axioma de las paralelas es verdadero o falso? Entre los geómetras de las nuevas generaciones se empezó a considerar, a fuerza de los resultados encontrados, que los axiomas no son ni verdaderos ni falsos, sino simples esquemas abstractos. Así, ninguna geometría es verdadera ni falsa: cada una describe una estructura abstracta distinta aplicable a un ámbito delimitado de la realidad. Frege, por su parte, se opuso férreamente a esta consideración. Su postura no reconoce los cambios que la matemática venía experimentando durante el siglo XIX.

> Nadie puede servir a la vez a dos señores. No es posible servir a la vez a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euk1ídea es verdadera, entonces la geometría no-euk1ídea es falsa; y si la geometría no-euk1ídea es verdadera, entonces la geometría euk1ídea es falsa. Si por un punto exterior a una recta pasa siempre una paralela a esa recta y sólo una, entonces para cada recta y para cada punto exterior a ella hay una paralela a esa recta que pasa por ese punto y cada paralela a esa recta por ese punto coincide con ella. Quien reconoce la geometría euklídea como verdadera, debe rechazar como falsa la no-euklídea, y quien reconoce la no-euklídea como verdadera, debe rechazar la euklídea ... Ahora se trata de arrojar a una de ellas, a la geometría euklídea o a la no-euklídea, fuera de la lista de las ciencias y colocarIa como momia junto a la alquimia y a la astrología ... ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la geometría euklídea o a la no-euklídea? Esta es la cuestión (Frege, *Sobre geometría euk1ídea* (escrito póstumo)), citado en (Mosterín, 1980, p. 293).

Frege, sin duda, rechazará la geometría no-euclidiana con el fin de conservar la concepción clásica. Pero como lo resalta Mosterín (1980), si bien el trabajo de Frege es la refutación más clara del juicio de Kant respecto a la lógica, los geómetras no-euclídeos y Hilbert fueron la absoluta refutación del juicio de Frege sobre la idea kantiana de geometría.

> En general la actitud de Frege respecto a la geometría es bastante paradójica. Frege, fundador del programa logicista de reducción de la matemática a la lógica, excluye por completo a la geometría de su programa. Y Frege, crítico implacable de la concepción kantiana de la aritmética, acepta sin más y como definitiva 1a concepción kantiana de la geometría (Mosterín, 1980, p. 294)

Ahora bien, el adjetivo de "paradójica" puede entenderse en tanto que la nueva geometría representó una amenaza a los soportes del programa fregeano. Y no solo frente a la añoranza de una vieja concepción, sino a la naturaleza misma de lo que *es* geometría y aritmética. Hasta Frege, estas dos ramas de la matemática se consideraron de naturalezas distintas hasta la publicación de *Los Fundamentos de la Geometría* por parte de Hilbert en 1899. Lo que el matemático alemán encontró fue que geometría y aritmética comparten estructuras comunes y, por tanto, no pueden concebirse como entidades separadas e independientes.

El proyecto de Frege, quien excluyó a la geometría de su proyecto por catalogarla de sintética y se limitó a la aritmética por ser analítica, encuentra un obstáculo insalvable: ¿Qué son entonces la aritmética y la geometría: son analíticas o sintéticas?

¿Cómo podría la aritmética seguir siendo analítica si comparte relaciones estructurales con la geometría que es sintética?

Como ya se ha mencionado, Frege acepta plenamente la concepción kantiana de la geometría. Sin embargo, esta idea de Kant también presentó una fuerte oposición, en especial por parte de los matemáticos. Kant considera que los axiomas son atemporales y constitutivos del sujeto que conoce, y no como caracterizadores del espacio geométrico en cuanto tal. Por lo anterior, solo es posible la existencia de un espacio que coincide con el euclídeo por corresponderse con el constitutivo de la sensibilidad. Solo hay un sujeto epistémico, por tanto, solo un espacio verdadero. Aunque el propio Kant reconoce que es posible la existencia de otro tipo de espacio (sin contradicción lógica en su construcción), aquel no sería conocimiento pues no hay representación intuitiva bajo la forma a priori de la sensibilidad (De Lorenzo, 2010, pp. 49-50). Hilbert, por su parte, acepta plenamente la ruptura epistémica con Kant. Como se intentará mostrar con más detalle en la última sección del presente capítulo, Lautman, junto a Cavaillès (Capítulo 3), asume las consecuencias filosóficas del trabajo de Hilbert y bosqueja nuevos caminos de reflexión.

La disputa por las geometrías no-euclidianas deriva en última instancia en la cuestión acerca de la naturaleza del método axiomático. Frege defiende la concepción clásica de este, y Hilbert, por su parte, el nuevo enfoque abstracto. En términos generales se ha considerado una disputa estéril, pues nunca llegaron a plantear una discusión franca sobre el tema, salvo algunas cartas entre Frege y Hilbert, y posteriormente con Korselt quien defendía la posición de este último. Las misivas y unos pocos artículos se extendieron entre 1899 (con ocasión de la publicación de *Los Fundamentos de la Geometría*) y 1906. De acuerdo con Mosterín (1980), la polémica fue estéril debido a que, por una parte, Hilbert no supo describir con claridad el método axiomático y se limitó a usarlo. Por otra parte, Frege no logró entender el alcance y relevancia del método de Hilbert, en parte, por su defensa tozuda del método axiomático clásico y de las ideas kantianas acerca de la geometría.

En resumen, dos tipos de desarrollos se dieron respecto al método axiomático. Frege dio continuidad y perfección a la lógica clásica de Aristóteles y a la axiomática de Euclídes. Las verdades son deducidas de un conjunto de axiomas evidentes y verdaderos por sí mismos, con lo cual no requieren ser demostrados. El gran aporte de Frege consistió, entonces, en explicitar las reglas de inferencia asociadas a la emergencia de los cuantificadores de su obra (precisión semántica pero sin cambio semántico). Por su parte, Hilbert consolida el método axiomático abstracto, en el cual los axiomas no son falsos ni verdaderos, sino meros esquemas abstractos carentes de contenido.

Frege critica del método de Hilbert que expresiones como “recta”, “línea” o “punto" estén vacíos de contenido con el fin de expresar generalidad. En palabras de Frege, "Me parece que lo que usted en realidad quiere definir son conceptos de segundo orden, pero que usted no los distingue claramente de los de primer orden"[3] (Citado en (Mosterín, 1980, p. 297)). Pero en esta crítica radica justamente la novedad del método axiomático abstracto, pues, Hilbert somete tales conceptos a múltiples interpretaciones. Este punto es importante, pues el propio Frege intuye una primera aproximación al concepto de "modelo" desarrollado por A. Tarski. En la primera parte del siguiente capítulo se desarrollará este primer acercamiento que significa el método axiomático abstracto hacia la teoría de modelos, y de su contraparte filosófica que representa el trabajo de Lautman.

Esta polémica aún permanece parcialmente al día de hoy (Mosterin, 1980). Puede resultar atrevido afirmar que la distancia entre filósofos y matemáticos se deba, en buena medida, a esta polémica que abrió dos caminos paralelos, por lo menos a lo que la filosofía de las matemáticas se refiere. Por un lado, Frege tiene una presencia indiscutible en la filosofía analítica del siglo XX, con influencia directa sobre Russell, Carnap y Wittgenstein. Por otro lado, la presencia de Hilbert en las matemáticas del último siglo es más que fundamental. No sobra recordar que la matemática ha seguido un desarrollo trepidante sin el concurso de la filosofía analítica de las matemáticas, siendo poca, si no inexistente, la comunicación entre estos dos caminos. Podríamos incluso ir más allá en esta bifurcación e identificar dos etapas diferenciadas de la evolución histórica de la lógica.

> La *Lógica simbólica* en cambio tiene su precursor en Leibniz, uno de los creadores del Cálculo Infinitesimal, quien se interesó por el problema de descubrir una "characteristica universalis", es decir un método para simbolizar proposiciones y argumentos de Matemática y Metafísica y "calcular" con las formas simbólicas en orden a averiguar su verdad o validez. Este deseo se cristaliza, apoyado por los progresos del llamado "método axiomático", en el siglo XIX con los trabajos de Boole, De Morgan, Frege, Schröeder, Peirce, y Peano. Puede decirse que esta etapa culmina en 1910 - 1913 con la monumental *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, en donde una gran porción del raciocinio matemático se reduce a un cálculo simbólico. El desarrollo posterior corresponde a la *Lógica matemática*, cuando los sistemas formales mismos se convierten en objetos de estudio por métodos matemáticos (metamatemática). Son Hilbert, Löwenheim, Skolem, Gödel, y Tarski, entre otros, los principales propiciadores en la primer mitad del siglo XX de este desarrollo, el

[3] Frege: Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hamburg 1976, p. 74.

> cual nos ha dado resultados muy profundos en los Fundamentos de la Matemática y en la Teoría de Calculabilidad Efectiva, resultados que inciden radicalmente en áreas que van desde la especulación filosófica hasta las aplicaciones prácticas de la Matemática (Caicedo, 1990, p. 1).

2.2.2. Filosofía analítica de la lógica matemática

¿Cuál fue entonces el camino que siguió la filosofía analítica respecto a la relación lógica-matemáticas? El rumbo que traza Frege fue el de reconstruir la matemática como una extensión de la lógica. Este rumbo encuentra un primer obstáculo cuando Russell le advierte de la paradoja que resulta de suponer que para cada propiedad $\varphi(x)$ existe la clase de todas las cosas que tienen esa propiedad. Russell distingue el tipo de conjuntos que se pertenecen a sí mismos del tipo de los que no se pertenecen a sí mismos. Ahora supóngase un conjunto A cuyos elementos satisfacen la propiedad "no se pertenece a sí mismo". ¿Pertenece A al conjunto A? Si $A \in A$, entonces $A \notin A$. Pero si $A \notin A$, entonces $A \in A$. Por lo tanto resulta la paradoja de que $A \in A$ y $A \notin A$.

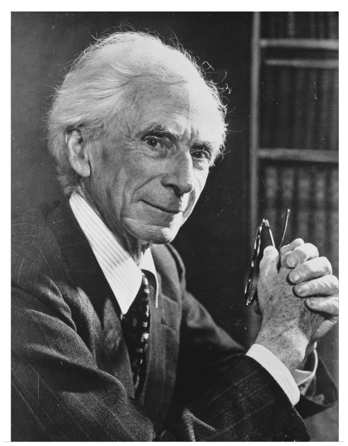
Si bien la *paradoja de Russell* es un obstáculo insalvable al proyecto de Frege, no implica abandonar el postulado principal de que la matemática se deriva exclusivamente de la lógica. Russell y Whitehead adoptan y desarrollan este camino en el que, sin la necesidad de ningún axioma matemático, se deriven todas sus verdades a partir de los conceptos lógicos. Inicialmente Russell planteó las primeras ideas de su proyecto en *Principles of Mathematics* (1903), pero es junto a Whitehead en los tres volúmes de *Principia Mathematica* (1910-193) en donde se desarrolla este tipo de relación entre lógica y matemáticas (Kline, 2016, pp. 1576-1582). En palabras de Russell:

> Mathematics and logic, historically speaking, have been entirely distinct studies. Mathematics has been connected with science, logic with Greek. But both have developed in modern times: logic has become more mathematical and mathematics has become more logical. The consequence is that it has now become wholly impossible to draw a line between the two; in fact, the two are one. They differ as boy and man: logic is the youth of mathematics and mathematics is the manhood of logic (Russell, 1920, p. 194).

A fin de subsanar las antinomias surgidas en el sistema fregeano, Russell desarrolla la *teoría de los tipos lógicos*. Introduce el *principio de círculo vicioso* con objeto de excluir las proposiciones autoreferenciales del cálculo de verdad: no son ni verdaderas ni falsas, simplemente carecen de sentido en el sistema establecido. Este principio establece que el conjunto en cuanto totalidad no puede contener elementos definidos en términos de sus propiedades como conjunto. Se sigue entonces la construcción de una jerarquía de entes en función del siguiente criterio:

- *Tipo 0*: Individuos del Universo sin análisis lógico.
- *Tipo 1*: Las propiedades definidas de los individuos del tipo 0.
- *Tipo 2*: Las propiedades definidas de los individuos del tipo 1.
- ...
- *Tipo n*: Las propiedades definidas de los individuos del tipo *n-1*.

El objetivo de Russell fue entonces excluir la posibilidad de ser una propiedad que no es ejemplo de sí misma, así como excluir la de ser un conjunto que no es elemento de sí mismo. Pero adicional a este principio, Russell introdujo el *Axioma de infinitud* y el *Axioma de elección* con el fin de subsanar fallas en el desarrollo de su sistema. El principal inconveniente de estos axiomas consiste en presuponer la existencia extra-lógica de entes matemáticos, lo que pone en duda el supuesto mismo de que *toda* la matemática se deriva de principios lógicos.


Bertrand Russell (1872-1970)

El *Axioma de infinitud* establece que "si n es un número cardinal cualquiera, existe al menos un conjunto de individuos con n términos". El propósito de este axioma es resolver el problema respecto al infinito que Russell admite frente a la construcción del conjunto de los números cardinales inductivos hasta llegar a $\aleph_0$. Sin este axioma se formaría una clase cuyos subconjuntos superan la cantidad de elementos. Russell admite que si se parte de un número finito de individuos no se puede tratar adecuadamente ni siquiera los números naturales, $\mathbb{N}$. Por su parte, el *axioma de elección* define que "dada una clase de conjuntos no vacíos y disyuntos, existe por lo menos un conjunto que tiene exactamente un elemento en común con cada uno de los conjuntos dados". Gracias a este axioma se garantiza la posibilidad de elección, dada la ausencia de criterios naturales en el sistema (Falk de Losada, 2012, pp. 151-173).

Sin embargo, el *principio del círculo vicioso* generaba resultados contradictorios para ciertas funciones de varias variables. Así, Russell desarrolla la *Teoría ramificada de tipos* que introduce un nuevo axioma, también de naturaleza extra-lógica. El *axioma de reducibilidad* establece que "para toda función proposicional existe una función predicativa que tiene el mismo dominio de significación" (Recalde, 2018, p. 414). Pero este nuevo intento tampoco logra solucionar todos los inconvenientes de reducir la matemática a la lógica. El programa logicista de Russell recibió mucha atención posterior a la publicación de *Principia Mathematica*, pero los teoremas de incompletitud de Gödel marcaron su inviabilidad.

> Pues Gödel demuestra que la lógica de *Principia Mathematica* no es lo suficientemente fuerte para demostrar la consistencia absoluta de la aritmética de los números naturales (aunque fuera capaz de construir dicha aritmética) mucho menos garantizar la consistencia del resto de la matemática que construye con base lógica. Naturalmente, esto resta urgencia a los intentos de subsanar algunas fuentes de inconsistencia de la teoría de Russell y dirige la atención de los más importantes lógicos a nuevos campos de investigación abiertos por los profundos efectos de los teoremas de Gödel (Falk de Losada, 2012, p. 173).

En "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines" (1931), Gödel concluye que en todo sistema formal bien construido existirán proposiciones que no podrán demostrarse ni refutarse (indecidible). Así mismo, la adición de nuevos axiomas para incluir tales proposiciones solo hará que la indecidibilidad suceda con otra fórmula análoga, y así sucesivamente. Este resultado aplica para cualquier teoría matemática tan o más compleja que la aritmética. Por supuesto, este resultado incluye la teoría de conjuntos.

El efecto natural que se esperaría luego de los teoremas de Gödel sería un mayor interés por otro tipo de construcciones matemáticas de gran importancia y de auge en esa época: el álgebra abstracta, topología, análisis, geometría riemanniana, entre otros muchos. Gödel nos derrumbó la enorme torre gris que pretendía ordenar en unos pocos cimientos la realidad de las matemáticas. De la misma forma, una vez derrumbada, Gödel nos mostró que en realidad aquella torre era una obstrucción a la vista. Más allá de esta se encuentra un amplio campo por explorar. Como Nagel y Newman lo expresaran:

> Los descubrimientos de GÖDEL socavaron, así, prejuicios profundamente arraigados y demolieron las antiguas esperanzas que estaban siendo nuevamente alimentadas por la investigación en torno a los fundamentos de

> las matemáticas. Pero su estudio no era totalmente negativo. Introdujo en el examen de las cuestiones plantedas en torno al fundamento de las matemáticas una nueva técnica de análisis, comparable por su naturaleza y fecundidad al método algebraico que RENÉ DESCARTES introdujo en la geometría. Esta técnica sugería y planteaba nuevos problemas para la investigación lógica y matemática. Provocó una nueva valoración, todavía en trance de desarrollo, de una extendida filosofía de la matemática y de la filosofía del conocimiento en general (Nagel and Newman, 2017, p. 20).

Si finalmente la matemática no puede reducirse a un número limitado de proposiciones lógicas, ello implica la exploración de nuevos mundos matemáticos, cada uno de ellos con un interés particular para el matemático y el filósofo (ontologías y epistemologías propias); así como las correlaciones, encuentros y composiciones entre estos mundos. Nos atrevemos a decir sin pudor: una verdadera "mina de oro" filosófica. Pero extrañamente sucedió lo contrario, pues la filosofía tradicional de las matemáticas siguió concentrada en problemas relativos a la lógica de primer orden, la teoría de conjuntos y la aritmética de Peano. Si bien estas son áreas muy importantes, representan solo una fracción de la matemática real. Es probable que esta situación se deba a una cuestión de simple inercia, pues Frege, Russell y Whitehead trazaron unos lineamientos bastantes claros que permiten, de alguna manera, cierto *confort* al momento de abordar las matemáticas. Esta comodidad pudo traer consigo cierta resistencia a nuevos abordajes, y más si provenían más allá del espacio de habla inglesa (recordemos que una cantidad importante de los grandes matemáticos del siglo XX fueron franceses y alemanes). Algunos autores han caracterizado esta actitud de desconocimiento como de "provincialismo anglosajón".

Por ejemplo, Ledesma (2008) comenta la obra *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (1983), editada por P. Benacerraf y H. Putnam por Cambridge University Press, en la que participan 28 de los más importantes "filósofos de las matemáticas". Sin embargo, ninguno de ellos realiza mención alguna a los métodos existentes o contrucciones de la matemática contemporánea. Resulta tan sorprendente como formular una filosofía del arte que considerara las obras del Expresionismo pero que omitiera por completo el arte en el último siglo: cubismo, dadá o *pop art* son simplemente ignorados.

Zalamea (2009a) considera que al menos hay dos razones que explican el desconocimiento de la filosofía analítica respecto al desarrollo matemático de los últimos 50 años. En primer lugar, suponer que los tipos de objetos y métodos permanecen invariables, y por esto mismo, es suficiente la lógica de primer orden y la teoría de conjuntos (*supuesto de invariabilidad ontológico y epistemológica*). En segundo lugar, y relacionado con lo anterior, suponer que el análisis de la matemática elemental equivale al estudio de la matemática avanzada, así que no existe la necesidad de estar al tanto de los nuevos avances y métodos de la matemática real.

Solo en contextos determinados estos supuestos restrictivos adquieren sentido, como es el caso del *Sistema Zermelo-Fraenkel* (ZF), el cual logró demostrar que cualquier construcción matemática puede ser representada dentro de la teoría de conjuntos. Pero es importante señalar que este resultado tiene un valor lógico, mas no matemático, pues la equivalencia tautológica entre proposiciones matemáticas se "derrumba" si se consideran sistemas axiomáticos *intermedios* (Friedman-Simpson). En otras palabras, ZF trivializa las proposiciones e ignora los contextos deductivos, así como las jerarquías y diferencias entre las construcciones matemáticas (Zalamea, 2009b, pp. 21-24).

Ahora bien, no se pretende desconocer el gran aporte de la filosofía analítica de las matemáticas, pero insistiendo en que sus aportes se restringen a temáticas específicas de la matemática sin considerar el conjunto de esta. En otras palabras, el enfoque analítico es limitado. Quizá es tiempo de exigir que se hable de este enfoque como "filosofía analítica de la lógica matemática" (Ledesma, 2008). En el mismo sentido, Zalamea (2009a) identifica cómo en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (2005), se configura una red secundaria de referencias cruzadas hasta el punto de sustituir la matemática real como objeto primario de estudio.

> Sin embargo, parece que se hubiese creado una amplia red de referencias cruzadas entre los trabajos profesionales de los autores y el estrato de lógicas ligados a esos trabajos: una red secundaria que hubiese *substituido* a la matemática primaria subyacente. Una vez asumida esa red interesante y compleja -mediante formas lógicas, problemas asociados de fundamentos, detalladas disquisiciones filosóficas y autorreferenciales entre los especialistas-, muy pocos de los autores incluidos en el *Handbook* resultan, no obstante, suficientemente autocríticos para pensar que, *tal vez*, otras muchas formas de la matemática, *posiblemente aún más interesantes y complejas*, han desaparecido de sus consideraciones. Por supuesto, no se puede (ni debe) pedir al especialista que abarque más allá de su campo de conocimiento; pero tampoco se puede (ni debe) confundir al estudiante o al profesional interesado en el tema, haciéndole creer que el tratado cubre la "filosofía de las matemáticas y la lógica". La *desaparición de las matemáticas* y su reductibilidad a la lógica constituyen la más desafortunada perspectiva global que ha impuesto (consciente o inconscientemente) la filosofía analítica anglosajona (Zalamea, 2009a, pp. 60-61).

En ese orden de ideas, resulta claro que la filosofía analítica es en sí misma insuficiente para capturar la riqueza, variedad y profundidad de la matemática contemporánea, sin desconocer, por supuesto, sus valiosos aportes. Se explora, pues, el camino filosófico abierto por Hilbert y que Lautman reconoce. Es claro que este camino no es fácil, pues exige un involucramiento con la matemática real, además de no contar con una tradición cimentada. "Y esta se junta con la idea expresada en el resumen de la tesis de Cavaillès: «Hablar de las matemáticas no puede ser más que rehacerlas»" (Intervención de Charles Ehresmann en la discusión de la *Sesión de la Sociedad Francesa de Filosofía* del 4 de febrero de 1939), en (Lautman, 2011, PM, p. 521). Hay una cantidad importante de esfuerzos en esa vía, pero hasta ahora tienden a ser dispersos y sin orden claro. Creemos que Lautman ofrece derroteros importantes hacia una filosofía matemática en permanente comunicación con la matemática real. Sin duda, implica también un arduo trabajo de reconstrucción. En palabras de Lautman:

> Se tiende a menudo actualmente a confundir la filosofía matemática con el estudio de diversos formalismos lógicos. Esta actitud conlleva generalmente como consecuencia la afirmación del carácter tautológico de las matemáticas. Los edificios matemáticos que parecen al filósofo tan difíciles de explorar, tan ricos de resultados y tan armoniosos en sus estructuras, no contendrían, de hecho, ninguna otra realidad que la que encierra el principio de identidad. Quisiéramos mostrar cómo es posible para el filósofo apartar unas concepciones tan pobres y encontrar en el seno de las matemáticas una realidad que satisfaga plenamente la expectativa que tiene de ellas (Lautman, 2011, RITM, p. 125).

2.2.3. Los esquemas de génesis: esencia y existencia

Más arriba se dejó en el aire la siguiente pregunta: ¿Cómo podría la aritmética seguir siendo analítica si comparte relaciones estructurales con la geometría que es sintética? La definición kantiana y fregeana de analítico y sintético resulta, por lo menos, insuficiente. Estos autores suponen una diferencia absoluta entre las dos (si es sintética no puede ser analítica, y viceversa), pero lo cierto es que si tomamos en serio los resultados de Hilbert en *Los fundamentos de la geometría*, resulta que existen mixtos entre lo sintético y analítico. Cavaillès resalta de este método la extensión de su aplicación, pues es posible que todo cálculo sea axiomatizado, esto en tanto que ya no interesa la descripción de los objetos en cuanto tal.

> El mérito de los *Grundlagen* es el haber mostrado con toda claridad,

> mediante la fuerza de los razonamientos [...] que el tratamiento en las dos ciencias [geometría y aritmética] debía ser exactamente el mismo puesto que se trataba de los mismos procedimientos de pensamiento. De ahí a la consideración de que sólo el método axiomático puede fundamentar y extender el trabajo matemático, puesto que expresa su esencia, sólo había un paso. Ese fue dado en 1899 (Cavaillès, 1992, p. 76).

¿Cuál es entonces el lugar y el papel de la lógica respecto a las matemáticas para el planteamiento de una filosofía matemática? En primer lugar, Lautman parte de la base de que la lógica no presenta un estatus de preferencia o privilegio respecto a la matemática. Comparada con cualquier rama como el álgebra, la topología o el análisis, la lógica tiene una serie de construcciones similares en génesis, nada fuera de lo ordinario. No obstante, Lautman identifica que ciertas preguntas formuladas en el desarrollo de la lógica matemática se "entrelazan" con la encarnación de la dialéctica en la base matemática: *el paso de la esencia a la existencia*.

Se plantea, entonces, la elaboración de una *metafísica de la lógica*, entendida como "una introducción general de los enlaces que unen las consideraciones estructurales con las afirmaciones de existencia" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 204). Por *consideraciones estructurales* se entiende la definición implícita de un ser matemático en un sistema axiomático no contradictorio. Por su parte, las *afirmaciones de existencia* son la existencia factual de ese ser matemático. ¿Cuál es la relación entre esencia y existencia? ¿Son dos términos equivalentes? ¿Si no: cómo se llega de la primera a la segunda?

Para responder esta pregunta, Lautman habla de dos periodos de la lógica matemática. El primero lo denomina el *Periodo ingenuo*, y se define a partir de los *Principia* de Russell-Whitehead hasta el año 1929. El segundo, *Periodo crítico*, inicia con los avances en metamatemática de Jacques Herbrand (1908-1931) y Gödel. En el primer periodo se identifica la esencia del ser matemático con su existencia, o en otras palabras, la existencia *es* el resultado de su definición en un sistema axiomático; existe en cuanto no hay contradicciones. Esta postura es defendida por los "partidarios del infinito actual", es decir, en el marco de las discusiones derivadas por la Teoría de Conjuntos de Cantor.

Sin embargo, esta apreciación cambia para un ser que requiera para su construcción, o bien un número infinito de pasos, o bien una dependencia de teoremas sin posibilidad de verificación. Nuevamente aparece el problema del infinito. Gracias a Hilbert se introducen elementos transfinitos en matemáticas (*Sobre el infinito*, 1925), es decir, seres que no pueden ser construidos en una serie finita de etapas. Ahora bien, los elementos transfinitos son necesarios "para generalizar la aplicación del tercio excluido. Querer eliminarlos implicaría el abandono de la regla de los contradictorios en lógica" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 205).

Lautman cita una memoria de 1923 que muestra el enlace entre el axioma de elección transfinito y el tercero excluido (para conjunto infinitos). Siguiendo la notación de Lautman,

$$A(\tau A) \rightarrow A(a)$$

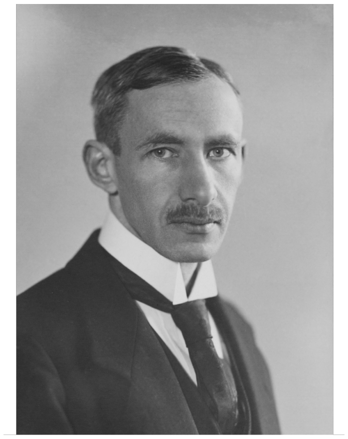
en donde el objeto τA es un ser tal que si tiene la propiedad A, entonces todo objeto a la tiene. Esto es: el objeto τA es el que tiene menos probabilidades de tener dicha propiedad. "Así, por ejemplo, si A es la propiedad de ser corruptible, τA es el más incorruptible de los hombres" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 205). Si el hombre más incorruptible es corrupto, entonces todos los hombres son corruptos. Hilbert junto con Bernays demostraron que el axioma del tercio excluso se deduce del axioma de elección; que afirma que si no todos los a tiene la propiedad A, al menos un a no la tiene:

$$\overline{(a)A(a)} \rightarrow (\exists a)\overline{A}(a)$$

En este caso, el objeto τA no puede construirse en un número finito de etapas, ya que este se daría por comparación uno a uno respecto al número infinito de elementos del conjunto. Concluye entonces Lautman que, formalmente, la admisión del axioma equivale al uso del tercio excluso. Admitiendo esto, resulta que si se demuestra la no contradicción de un sistema de axiomas que incluya este axioma, entonces es lícito considerar el objeto τA tal como se hace con otras construcciones matemáticas que hacen uso del infinito. Lautman coloca de ejemplo la existencia de infinitos puntos en geometría, los números imaginarios y los elementos ideales en un cuerpo de números.

Lautman marca, pues, una distancia con el formalismo de Hilbert. En este periodo ingenuo la formulación de los problemas de la lógica matemática se da en el mismo sentido con respecto a la existencia del transfinito. El formalismo considera que el paso de la esencia a la existencia, "debía consistir únicamente en la demostración de la "composibilidad" de las esencias, de la no contradicción de los axiomas que las definen"(Lautman, 2011, ESNEEM, p. 206).

En el periodo crítico se afirma, nos dice Lautman, una *teoría general de las relaciones entre esencia y existencia*, un desarrollo radicalmente distinto tanto de la lógica de los formalistas como del constructivismo intuicionista. Hay una evolución de la lógica matemática hasta llegar a esta teoría general. Hilbert ya había planteado la necesidad de una metamatemática, es decir, el estudio de la matemática formalizada por medio de las condiciones de no-contradicción y acabamiento, es decir, de consistencia y completitud. Para cumplir este fin, se desarrollaron dos métodos de estudio en la metamatemática: la *concepción estructural* y la *concepción extensiva.*



Paul Bernays (1888-1977)

El método estructural estudia las propiedades estructurales de una teoría matemática a partir de la estructura interna del conjunto de las consecuencias del sistema. La primera propiedad importante es la de no-contradicción. Una teoría matemática se compone de axiomas y del conjunto de proposiciones deducidas a partir de los axiomas. Así, demostrar la no-contradicción del sistema equivale a demostrar que no es posible encontrar $p \wedge \neg p$ en el conjunto de las consecuencias. La segunda propiedad es el acabamiento (más usualmente llamado completitud), en la que toda proposición es, o bien demostrable, o bien refutable.

El método extensivo, por su parte, añade al estudio del sistema de axiomas "los campos de individuos capaces de servir como valores para los argumentos de las funciones lógica de una fórmula de la teoría" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 208). Se desprenden de esta definición algunas nociones metamatemáticas exclusivas de este método, entre otras, la *validez universal* y *posibilidad de realización*. En la primera, para cualquier predicado o individuo que sustituya las variables en las funciones lógicas o variables argumento, siempre se tendrá como resultado una proposición verdadera. Por otro lado, una fórmula es realizable si existe al menos un campo de individuos, así como una forma de sustitución similar, capaz de asignar a la proposición valores de verdad. Ahora bien, estas dos nociones metamatemáticas se definen en dualidad: "una proposición es universalmente válida sólo cuando su negación no es realizable, y, suponiendo el tercio excluido, una fórmula es realizable sólo cuando su negación no es universalmente válida" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 209).

Lautman observa que la dualidad entre estas dos nociones es la que permitirá extraer una filosofía de las génesis matemáticas. Al tomar por un lado la noción estructural de no contradicción y, por el otro, la noción extensiva de "realización en un campo dado"se obtiene que si este campo se compone de un número finito de individuos (podemos evaluar todas las combinaciones posibles), entonces se poseen las condiciones para determinar si existe al menos una combinación (*escogencia*, en palabras de Lautman) de valores de las variables que logre verificar la proposición que se obtuvo mediante la conjunción de los axiomas del sistema evaluado. Decimos, pues, que tal combinación o escogencia realiza el sistema de axiomas. Se demuestra, por lo anterior y asumiendo el principio de tercio excluso para conjuntos finitos, que si una conjunción de axiomas se realiza de esa forma, su negación no es realizable.

Se constata, por tanto, una equivalencia en lo finito de la estructura no contradictoria de un sistema (*esencia*), con respecto a la *existencia* de un campo de individuos tal que el sistema pueda ser realizado en ese campo. Lautman ve, por tanto, en el paso de un método a otro en la evolución de la lógica matemática, una profunda implicación filosófica. "Este resultado, tan simple que parece casi evidente, contiene en germen toda una nueva teoría de las relaciones entre esencia y existencia" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 209).

La consecuencia más importante consiste en abandonar la presunción de que las nociones de esencia y existencia son relativas a los seres matemáticos; no interesa determinar si de una definición se sigue la existencia. Por el contrario, ahora el interés se centra en establecer si la estructura de axiomas es capaz de "dar nacimiento" a algún campo de individuos desde el que se realicen las relaciones definidas por el sistema por medio de los axiomas. La existencia, pues, se ve mediada por los campos que realizan los axiomas, en otras palabras, por medio de las *interpretaciones* del sistema. "La esencia considerada sigue siendo la del sistema de axiomas, pero aquello cuya existencia permite ser afirmada por el estudio interno del sistema son las "interpretaciones" del sistema, los campos donde los axiomas se realizan" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 210). Observamos con total claridad la convergencia de esta nueva teoría de las relaciones entre esencia y existencia con la teoría de modelos. Tal convergencia se examinará con más detalle en el siguiente capítulo.

Ahora bien, es preciso que consideremos el caso de un campo infinito de individuos, pues el principio de exclusión no se aplica necesariamente. Un sistema axiomático puede resultar entonces irrefutable. Por esto mismo, la equivalencia entre la no-contradicción del sistema y la existencia de una interpretación de aquel no se cumple de manera necesaria. Puede darse el caso de un sistema que sea no-contradictorio a la vez que no exista una interpretación de este. La consecuencia más importante, pues, es que la propiedad de posibilidad de realización resulta ser más exigente que la no-contradicción. Surge entonces una disociación entre el punto de vista extensivo respecto al estructural.

Parece entonces factible desarrollar una teoría estrictamente estructural de la no-contradicción, dejando de lado el problema de la interpretación. No obstante, Lautman afirma que no es posible establecer una teoría bajo tales parámetros. La principal razón de esto, consiste en confirmar que el punto de vista extensivo siempre reaparecerá con el desarrollo de los enfoques estructurales. La estructura de un sistema se expresa a través de la existencia de seres matemáticos distintos a los elementos de la propia teoría. En otras palabras, así se construya un sistema netamente estructural, su contraparte existencial siempre emerge en medio de las relaciones internas del conjunto de axiomas.

En este punto entendemos la relevancia que tienen Gödel y Herbrand. Es necesario recordar que una de las características del enfoque puramente estructural de Hilbert es el *acabamiento*, esto es, toda fórmula de la teoría es o bien demostrable o bien refutable. Gödel, sin embargo, demostró en el cálculo de predicados un teorema de acabamiento con implicaciones extensivas: una equivalencia entre la irrefutabilidad (estructural) y la propiedad de realización (extensiva). Por su parte, Herbrand, demuestra que la irrefutabilidad de una proposición se sigue de la existencia de un campo de individuos que realiza aquella proposición. Mediante las propiedades extensivas de $\neg P$ se expresan las propiedades estructurales de P.

Lautman puntualiza, por tanto, el "caso puro de solidaridad" entre un conjunto de axiomas que define una serie de operaciones formales y la existencia de un dominio en que aquellas operaciones son realizables. La génesis, si se establece una apropiación entre el dominio y las operaciones que se definen en aquel, puede entonces determinar tanto las operaciones desde el dominio, como el dominio desde las operaciones.

> [E]l dominio parece ya preparado para dar nacimiento en él a ciertas operaciones abstractas. Dada nuestra intención de mostrar que la plenitud de un ser se afirma con su poder creador, esta concepción debería tal vez implicar lógicamente dos aspectos recíprocos: la esencia de una forma que se realiza en el seno de una materia que ella crea, la esencia de una materia que hace nacer las formas que su estructura dibuja (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 213).

De esta forma es posible buscar, o bien los seres matemáticos que realizan las condiciones que se deducen de los axiomas, o bien los axiomas que permiten definir de manera implícita el dominio. En consecuencia, la concepción tradicional de considerar dominios concretos y operaciones abstractas deja de tener sentido. Este punto es muy importante, pues destaca una característica esencial de la matemática real contemporánea, y marca una pauta para la filosofía matemática. Tal concepción, nos recuerda Lautman, genera una imagen que bien podemos caracterizar de rígida y compartimentada de esta disciplina.

> [T]endería, en efecto, a estabilizar a los seres matemáticos dentro de ciertos papeles inmutables e ignoraría el hecho de que los seres abstractos que nacen de la estructura de un dominio más concreto pueden servir a su vez como dominio de base para la génesis de otros seres (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 214).

Esta génesis interrelacionada de seres matemáticos produce una ontología relativa. Aquello que es "dominio" y aquello que es "creado" depende del ambiente matemático y de la teoría específica que se esté tratando. Por esto mismo se entiende que la creación de estos seres no puede reducirse a sus meros componentes constitutivos, pues también existen en una red de sentido (un punto de vista, si se quiere). En lo que atañe a la lógica matemática, “nos parece más adecuado con el esquema lógico que describimos decir que son los axiomas los que forman el dominio y que las interpretaciones emanan del dominio, como seres que él crea” (Lautman, 2011, ESNEENM, p. 214).

Ahora bien, no todas las génesis matemáticas siguen esta descripción. Algunas construcciones responden a esquemas más complicados. El paso de un género a otro exige la existencia de mixtos que permitan *intermediar* entre el dominio y el ser matemático que se crea sobre aquel. Al respecto, Lautman encuentra en el esquematismo de la *Analítica trascendental* de Kant una mediación comparable a este desarrollo propio de la matemática. Los mixtos que efectúan esta mediación permiten pasar de un “dominio de base a la existencia de seres creados sobre ese dominio gracias al efecto de una dualidad interna similar” (Lautman, 2011, ESNEENM, p. 228), a la dada entre la categoría y la intuición. Este punto se desarrollará con más atención en el capítulo siguiente, pues ofrece un diálogo directo con el desarrollo actual de la teoría de modelos.

En resumen, las diferentes construcciones matemáticas exhiben un estatus ontológico y epistemológico propio: cada construcción es diferente tanto a sus componentes constitutivos como de otras construcciones; y la manera de conocerlos requiere entender el doble universo de los ambientes en los que fueron creados y de sus relaciones internas particulares. Ahora bien, ello no implica concebir a las construcciones matemáticas como islas, pues entre estas mismas se establecen correlaciones, mixturas y generación de nuevas construcciones; un movimiento que le lleva a la unidad.

Podríamos figurarnos esta mirada que nos ofrece Lautman como el paso de una concepción de “panal de abejas” (celdas simétricas, uniformes y compartimentadas) de la matemática, a una concepción de “tejido de raíces”: flexible, mezclado y dinámico. A efectos prácticos, los filósofos nos vemos en la necesidad de adentrarnos en las profundidades de la matemática a fin de dar cuenta de esa otra historia escondida: la acción sintética que se juega en el trasfondo. “Las matemáticas se presentan así como síntesis sucesivas, donde cada etapa es irreducible a la etapa anterior” (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 137).

¿Pero cuál es entonces la relación que se juega entre lo sintético y lo analítico? Como ya hemos dicho, Kant y Frege conciben estos conceptos en contraposición, o se es sintético o se es analítico. Lautman, por su parte, nos evidencia que en la relación del dominio con los seres matemáticos creados sobre aquel, las propiedades estructurales requieren un estudio interno de las consecuencias del conjunto de axiomas (análisis), a la vez que involucra la existencia de seres ajenos a la propia teoría, así como el carácter relativo de las teorías matemáticas: etapas sucesivas no reducibles (síntesis). Una definición más profunda requiere del concurso de los mixtos. Por ahora baste decir, simplemente, que carece de sentido concebir alguna de estas nociones sin el concurso activo de la otra, en otras palabras: la imbricación creativa entre lo analítico y lo sintético.

Ahora bien, es preciso aclarar por último que no se pretende establecer una superioridad de lo sintético sobre lo analítico. Es más, lo que interesa es justamente la mediación entre estos dos polos. No obstante, como el propio Lautman expone, hay otra historia de la que el filósofo tiene que dar cuenta: *la acción sintética de trasfondo*. Es decir, los pegamientos, los encuentros y las interrelaciones entre las teorías matemáticas, todo con el fin de describir y caracterizar la *unidad* que se esconde tras las sofisticadas técnicas matemáticas. Es la "otra historia" que interesa al filósofo, pues el matemático en su quehacer se enfoca, generalmente, en el desarrollo de terrenos acotados de su disciplina.

> Ese trabajo recae tanto más en el filósofo, ya que la realidad inherente en las matemáticas se comporta como toda realidad donde el espíritu se enfrenta con una objetividad que se le impone: deben saber hacerse remontar a la naturaleza intrínseca de esa realidad las modalidades de la experiencia espiritual con que se deja aprehender (Lautman, 2011, RITM, p. 126).

Esperaríamos entonces que la relación entre el matemático y el filósofo sea de complementariedad, y que incluso la reflexión filosófica pueda llegar a servir de inspiración o de contraste al matemático; así como que la matemática contemporánea sirva de inspiración al desarrollo de la filosofía, como ya ha sucedido muchas veces en el pasado.

2.3. Fenomenología de la experiencia matemática

Hemos mencionado la doble naturaleza de la matemática: la concepción estructural y la concepción dinámica. Hasta el momento hemos centrado nuestros esfuerzos en dilucidar el aspecto estructural de la matemática, esto es, la descripción de la manera en que la dialéctica se encarna en las teorías matemáticas, la generación de seres matemáticos, el establecimiento de jerarquías y el estudio estructural/extensivo de la lógica sobre la matemática. Sin duda, el referente más claro en términos matemáticos de esta primera parte es David Hilbert.

Sin embargo, se viene abajo el sueño de Hilbert de capturar la totalidad de las matemáticas en un conjunto finito de axiomas del que se deduzcan todas las proposiciones (*completud*), que de cada una de estas se determine su valor de verdad (*decidibilidad*) y que no exista contradicción alguna (*consistencia*). Como ya se dijo, la génesis matemática supera el dominio de la lógica (las nociones de la dialéctica son *expresadas* pero no *determinadas* por las teorías matemáticas). En la metamatemática de Hilbert, nos dice Lautman, "se examinan las teorías matemáticas desde el punto de vista de las nociones lógicas de no contradicción y de acabamiento, pero ese no es sino un ideal hacia el cual se orientan las investigaciones" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 138); un ideal, afirma más adelante, difícil de alcanzar. En contraposición, la concepción dinámica *desborda* las teorías matemáticas.

No sin razón Gian-Carlo Rota expresa que las "Mathematics is nothing if not a historical subject par excellence" (Rota, 1991, p. 174). El tiempo juega un rol fundamental en la construcción de las teorías matemáticas. La matemática como *corpus* no sigue un patrón predeterminado lógicamente deducible, sino que se va elaborando a medida que esta se expande y genera nuevos enlaces. La matemática se constituye en el tiempo. Por este motivo, tanto para Lautman como para Cavaillès, se hace necesario un *análisis de la experiencia matemática*.

> La concepción estructural y la concepción dinámica de las matemáticas parecen oponerse a primera vista: mientras una tiende a considerar una teoría matemática como un todo acabado, independiente del tiempo, la otra, al contrario, no la separa de las etapas temporales de su elaboración; para la primera, las teorías son como seres cualitativamente distintos unos de otros, mientras que la segunda vez en cada teoría una potencia infinita de expansión fuera de sus límites y de enlace con las demás, afirmándose así la unidad de la inteligencia. Quisiéramos, sin embargo, intentar desarrollar, en las páginas que siguen, una *concepción de la realidad matemática donde se entrelazan la fijeza de las nociones lógicas y el movimiento en el cual viven las teorías* (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 138; énfasis propio).

Si el referente en la concepción estructural es Hilbert, en la dinámica será el filósofo francés León Brunschvicg (1869-1944), quien debido también a la guerra tuvo que abandonar su posición de profesor en la Sorbona de París por su condición de judío. Su idealismo crítico será el tema tratado en la primera sección. Luego, en la segunda sección, se expone la manera en que Cavaillès, principalmente, junto con Lautman y Bachelard trabajan sobre la línea de Brunschvicg, desarrollándola y hasta cierto punto superándola. Por último, se realizan algunos planteamientos que intentan ligar el carácter al mismo tiempo trascendente e inmanente de la matemática. Para este último punto será de especial importancia la filosofía sintética de Fernando Zalamea, así como los trabajos doctorales de Arriaga (2018) y Ledesma (2008).

2.3.1. El idealismo crítico de Brunschvicg

La matemática y la filosofía tienen una larga, fructífera y variada relación a lo largo de la historia del pensamiento occidental. Claro está que a la par que estas disciplinas evolucionan también lo hace la manera en que se relacionan entre sí. No obstante, Brunschvicg identifica cierta tendencia dogmática de la filosofía en fijar una "concepción universal de las cosas" sobre la constitución de alguna de las grandes ramas de las matemáticas, una vez que esta adquiere desarrollo y conciencia de sí. Es el caso del pitagorismo respecto a la aritmética, Spinoza frente a la geometría y Leibniz con el análisis infinitesimal.

> Por causas que el alejamiento en el tiempo nos permite hoy discernir, ninguno logró fijar el equilibrio móvil del pensamiento. Con mayor razón, las tentativas del aritmetismo o de la logística para ligar a la matemática a una forma que expresaría una necesidad permanente, una verdad eterna, estaban destinadas a fracasar (Brunschvicg, 1945, p. 13).

La razón de todos estos fracasos se encuentra en los términos "permanente" y "eterna", que pretende fijar el *equilibrio móvil* de la matemática. En ese orden de ideas, se requiere un cambio de estrategia, por decirlo de algún modo, en donde la "base de la crítica filosófica estaría entonces en la historia del pensamiento matemático" (Brunschvicg, 1945, p. 12). En concepto de Lautman, esta idea de Brunschvicg es fundamental para comprender la concepción dinámica de la matemática. Consiste en abordar el revés de los sistemas axiomatizados, es decir, observar el movimiento que precede a la fijeza de las teorías matemáticas, considerar lo indeterminado tras de lo determinado. Esta visión exige, por tanto, algunas condiciones iniciales. Brunschvicg establece, en primer lugar, la exigencia de analizar los *actos concretos del espítitu*, esto es, enfocarse en los mecanismos concretos en los que las teorías matemáticas se desarrollan. Este análisis regresivo implica, por supuesto, la consideración del tiempo. En otras palabras, el filósofo realiza un proceso *reflexivo* sobre los actos del espíritu que constituyen la matemática en el tiempo (Gex, 1970).

En segundo lugar, y en correspondencia con lo anterior, no es posible llevar a cabo esta reflexión a partir de un sistema deductivo. Se sigue que la reflexión se realiza de manera descriptiva, tanto de los entornos de formación como del desarrollo mismo de las teorías. Esto sucede porque en el desenvolvimiento de la matemática prima la espontaneidad y la libertad, y hasta cierto punto, se constituye como impredecible.

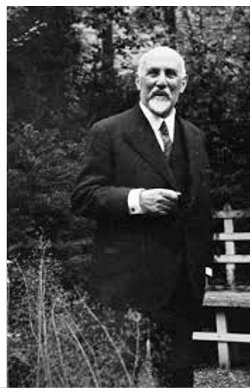
> Hoy lo sabemos: era una ilusión pretender encontrar, por una especie de adivinación, las fuentes en que la ciencia debía alimentarse, y de donde las aguas irían a caer en un canal artificialmente cavado para recibirlas. El curso de la matemática posee espontaneidad, ofrece los mil accidentes de un río natural (Brunschvicg, 1945, p. 14).

En tercer lugar, y por último, la reducción de la filosofía a una *dialéctica del espíritu*. Aquí es importante aclarar lo que Brunschvicg entiende por tal expresión, la cual será retomada a su vez por Lautman y Cavaillès. Tal dialéctica del espíritu tiene al menos dos importantes referentes en la historia de la filosofía: Platón y Kant (Arriaga, 2018, pp. 140-156). De uno y otro ya hemos discutido algunas cuestiones puntuales. Valga la pena destacar algunos puntos de la lectura que hace Brunschvicg de aquellos.

En primera medida, hay una inversión del Platón tradicional sustentado, principalmente, en el diálogo del *Sofista*. Este diálogo junto al *Filebo* y otros se catalogan en el *último periodo*, en donde Platón desarrolla críticas a cuestiones ontológicas y epistemológicas de los diálogos anteriores. Principalmente, la combinación de opuestos que generan los mixtos (Bossi, 2008). Una de las cuestiones tratadas en el *Sofista* es la compatibilidad o no entre ser y no ser. ¿El Ser es algo distinto del No-Ser? En la visión parmenidiana del Ser, el Ser *es* y el no-ser *no es*, y por tanto, nada puede decirse de este último. Sin embargo, la necesidad de definir quién es el Sofista exige abordar la cuestión por el No-Ser de otra manera (Platón, 2011).

¿El No-Ser participa del Ser? ¿Puede decirse del No-Ser lo que le conforma? ¿Hablar del No-Ser permite definir lo falso y distinguirlo de lo verdadero? (Arriaga, 2018, p. 144). Platón toma distancia de Parménides, pues contrario a una concepción estática y antagónica del Ser, se configura una mezcla entre el Ser y el No-Ser, o *symploké*. Puede entonces decirse tanto del Ser como del No-Ser, pues estos son diferentes y el primero no implica la imposibilidad del segundo. La dialéctica se define, entonces, como "la ciencia de la intelección de un ente dado mediante la distinción de las relaciones de las Ideas Dialécticas de las que éste participa" (Arriaga, 2018, p. 145). Así, pues, la intelección de un ente consiste en observar las formas específicas en que las Ideas Dialécticas se mezclan, por medio de una diferencia propia de alguna mixtura.

Resulta, entonces, una nueva visión de las Ideas Dialécticas que puede resumirse en los planos metafísico, ontológico y epistemológico. En el primero, la *symploké* ($\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\omega\kappa\eta'$) presenta a las Ideas Dialécticas como movibles, se llega a estas a través de la *diaíresis* ($\delta\iota\alpha\acute{\iota}\rho\epsilon\sigma\iota\varsigma$), la cual es gradual y discursiva, contrario a la versión inalterada de diálogos anteriores y de su abordaje casi místico. En lo ontológico los entes como resultado de la *symploké* no son meras copias del original, sino que en sí mismo participan de la dialéctica. Por último, en lo epistemológico, para llegar al conocimiento es necesario organizar y jerarquizar la relación entre lo concreto y lo ideal (Arriaga, 2018, pp. 140-149).



León Brunschvicg (1869-1944)

Kant, por su parte, establece las Ideas Dialécticas como un esquema que organiza lo real. El esquematismo trascendental fundamenta las condiciones de posibilidad del conocimiento. Esto, por supuesto, remite en Brunchvicg a la experiencia matemática misma. La subjetividad trascendental gobierna y organiza la participación de lo concreto en el sujeto cognoscente. En la experiencia matemática las Ideas Dialécticas son inmanentes a esta (Brunschvicg, 1945).

Ahora bien, hay una ruptura en lo que se refiere al problema de la matemática pura. Este es un punto importante para subrayar, incluso más que las coincidencias con Kant, con el fin de entender la dirección que abren los filósofos franceses. Kant conoce la matemática antes de la aparición de las geometrías no-euclidianas y la aplicación que de esta hace Newton para la *Teoría de la gravitación universal*. En ese contexto, las matemáticas entran bajo las nociones de tiempo y espacio, es decir, esta se da en el nivel de la estética. Todo aquello que no corresponda con sus intuiciones puras, pertenece entonces al terreno de la imaginación o el error, quedando por fuera de la matemática. Por esto mismo, muchos autores consideran que las geometrías no-euclidianas echan por tierra el proyecto kantiano. El propio Frege, en defensa de esta concepción kantiana de la realidad matemática, se opone a estas geometrías, como ya analizamos más arriba. En conclusión, Kant subyuga la realidad de la matemática a la sensibilidad (Brunschvicg, 1945).

> La aritmética no es más la ciencia de los números en tanto que objetos ideales; es la ciencia de las cosas numeradas, y es la naturaleza de las relaciones entre las cosas mismas la que decide las relaciones entre los números. En realidad, si en la *Dissertation de* 1770: *De mundi sensibilis alque intelligibilis forma et principiis*, Kant presenta al número como "un concepto intelectual en sí", es para agregar inmediatamente que no se actualiza en lo concreto más que mediante la ayuda de las nociones de tiempo y de espacio; doctrina que contiene el germen del esquema trascendental (Brunschvicg, 1945, p. 289).

En la línea de Platón, Brunschvicg toma distancia de Kant en la medida en que las Ideas Dialécticas para este último tienen una mera función *reguladora* respecto a las matemáticas; mientras que para el filósofo francés, la realidad matemática surge de su *participación* directa de las Ideas Dialécticas. Como ya se anotó con anterioridad, las matemáticas formulan esquemas de solución de estas, y de allí reside la realidad que el filósofo tiene por tarea develar.

La dialéctica del espíritu propuesta por Brunschvicg se compone de tres partes. El polo activo del pensamiento, el polo resistente del Ser y el choque entre los dos anteriores. Este movimiento determina el objeto del idealismo crítico, es decir, los *actos del espíritu*. Así, en el caso concreto de la matemática, esta resulta del esfuerzo del espíritu por conectar racionalmente elementos de una materia que se le resiste. Tanto por intelección como por génesis la matemática participa de esa materia, sin que sea reducida ni a la lógica, ni a la psicología ni a ningún tipo de fundamento. La dialéctica, por tanto, se define como el movimiento pendular sujeto/objeto, pensamiento/ser, yo/no yo (Brunschvicg, 1945).

> L' idéalisme affirme l'être et le définit par la pensée. Au lieu de comprendre la pensée par rapport à une détermination déjà donnée de l'être, il cherche dans la pensée le caractère constitutif de l'être. Aussi la pensée ne peut-elle plus être une copie passive des choses, une représentation muette comme un tableau sur une muraille ; elle se pose comme une activité. Cette activité ne saurait être assimilée à un mouvement extérieur dont les conditions se trouvent dans une série de mouvements antérieurs te qui est implicitement contenue en eux ; elle est une activité originale ; la synthèse spirituelle, de quelque ordre qu'elle soit, ne se réduit pas aux éléments dont elle est issue, elle leur ajoute quelque chose, et qui est l' essentiel, un certain genre d' unité par quoi l' aperception d' un rapport devient le germe d' une découverte scientifique[4] (Brunschvicg, 1905, p. 79).

[4] El idealismo afirma ser y lo define por el pensamiento. En lugar de entender el pensamiento en relación con una determinación ya dada del ser, busca en el pensamiento el carácter constitutivo del ser. Así, el pensamiento ya no puede ser una copia pasiva de las cosas, una representación muda como una imagen en una pared ; es una actividad. Esta actividad no puede compararse con un movimiento externo, cuyas condiciones se encuentran en una serie de movimientos anteriores, que está implícitamente contenido en ellos ; es una actividad original ; la síntesis espiritual, cualquiera que sea su orden, no se reduce a los elementos de los que se deriva, les agrega algo, y que es lo esencial, un cierto tipo de unidad por lo cual la percepción de una relación se convierte en el germen de un descubrimiento científico.

Llevando al extremo el concepto de juicio de Kant, Brunschvicg identifica este con el pensamiento, ambos como actividad unificadora del espíritu de pensamiento y ser. Existen tres modalidades de juicio: el *ser del juicio de interioridad*, el *ser del juicio de exterioridad* y el *ser del juicio mixto*. Interesa de estos tres el primero que refiere a la determinación de necesidad (juicios apodícticos). De los otros dos baste decir que se refieren a la determinación de la realidad (juicio asertórico) y el ser posible (juicio problemático), respectivamente (Brunschvicg, 2009a).

Las matemáticas pertenecen a la esfera del juicio de interioridad, pues unifica relaciones del pensamiento consigo mismo. "L'unité qui est im-manente à tout jugement rationnel se caractérise par l'absence de tout rapport avec un autre objet quel qu'il soit[5]" (Brunschvicg, 2009b). Por tanto, el objeto de estudio de la matemática es inmanente al pensamiento y nada diferente a este. Tal interpretación de Brunschvicg ofrece una nueva mirada, pues identifica un espacio pleno para la matemática pura, independiente de sus aplicaciones en el mundo fáctico y yendo más allá de una mera abstracción. En otras palabras, la matemática pura presenta su propia realidad. Lo exterior puede ser una motivación o un detonante, pero nunca determinante de esa realidad.

> s'il y a unjugement mathématique, c'est parce que l'esprit intervient, fonction d'unification et d'intériorisation ; il unit du dedans ces parties séparées les unes des autres, et il opère ainsi une synthèse intellectuelle dont il peut déterminer intégralement la vérité parce qu'il en a lui-même posé les conditions.[6] (Brunschvicg, 2009b).

Se entiende entonces que al interior del espíritu se da una síntesis de "partes separadas", lo cual resulta interesante. La unidad del espíritu no viene dada en cuanto tal, como buena parte de la tradición filosófica ha supuesto: existe *un* espíritu que conoce el mundo que se compone de multiplicidades y las unifica. Ahora bien, Arriaga (2018) plantea una posible paradoja: ¿de dónde proviene el ser externo (no-yo) que determina en el juicio de necesidad la realidad matemática?

> Para Brunschvicg esto no es paradójico, porque ese no-yo es un ser que ha sido interiorizado, es el resultado del choque con lo exterior que cae

[5]La unidad que es irrefutable para cualquier juicio racional se caracteriza por la ausencia de cualquier relación con cualquier otro objeto en absoluto.

[6]Si hay un juicio matemático, es porque interviene el espíritu, una función de unificación e interiorización ; une estas partes, separadas unas de otras, desde dentro, y por lo tanto opera una síntesis intelectual de la cual puede determinar la verdad en su totalidad porque ha postulado sus condiciones.

> exclusivamente del lado de la forma de la interioridad. Esto no es afirmar que lo que da realidad objetiva al juicio matemático sea el objeto externo en sí mismo, y aún menos algunas supuestas condiciones a priori que determinen la forma de darse de dicho objeto; interiorizar significa antes bien algo más cercano a determinar una condición esencial que puede introducir el mínimo de pluralidad para que el pensamiento matemático tenga un objeto inmanente al pensamiento, por más que éste haya sido motivado por lo exterior (Arriaga, 2018, p. 161).

Nos atrevemos a añadir lo siguiente. Brunschvicg nos propone el concepto de una unidad que se constituye en tanto que actividad. En el espíritu también se presenta la multiplicidad del mundo a través de su interiorización. Como se ve, puede entonces plantearse una correlación entre pensamiento y mundo: pluralidades que se unifican en síntesis sucesivas. No resulta entonces extraño, como lo sostiene Brunschvicg, que ciertos avances de la matemática, abstractos en un primer momento, tengan al final un papel determinante en teorías fisicas posteriores. Piénsese, por ejemplo, en las geometrías no euclidianas para la teoría de la relatividad de Einstein o el uso de los números imaginarios en la física o la ingeniería. Ahora bien, también resulta el movimiento en sentido contrario, pues el desarrollo de ciertas teorías físicas han requerido de la construcción de teorías matemáticas no existentes en el momento, y que luego se fundamentan por parte de los matemáticos. Un ejemplo son los diagramas de Feynman para el cálculo de trayectorias de las partículas en la *teoría cuántica de campos.*

2.3.2. Cavaillès: fenomenología de la experiencia matemática

Lautman y Cavaillès fueron en varios sentidos discípulos directos de Brunschvicg. Cada uno de ellos realizó avances sobre la relación entre el desenvolvimiento del espíritu y el desarrollo de las matemáticas. Surge en tal sentido la disputa entre los dos filósofos por el lugar que ocupa la experiencia matemática respecto a la *realidad* propia de los objetos matemáticos. En lo que sigue se consideran las memorias de la Sesión de la Sociedad Francesa de Filosofía sobre el "Pensamiento matemático", realizada en París el 4 de febrero de 1939. En esta sesión tanto Cavaillès como Lautman exponen sus tesis doctorales, con un nutrido y selecto público, entre los que cuentan matemáticos de la talla de Élie Cartan, Charles Ehresmann, entre otros[7] (Lautman, 2011, SSFF, pp. 493-535) y (Lautman, 2011, PM, pp. 375-383).

[7]En el Boletín de la *Société Française de Philosophie, XL (1946), pp. 1-39*, presentan estas memorias de la siguiente manera: "Dos tesis del más alto alcance han sido defendidas recientemente ante la Facultad de Letras de la Universidad de París sobre la filosofía de las Matemáticas, conside-

Interesa seguir, brevemente, esta discusión porque permite postular la manera de integrar las Ideas dialécticas con la experiencia propia de la matemática real en su quehacer. Para este fin será conveniente pasar revista sobre la reflexión que realiza Cavaillès sobre la experiencia matemática, y cómo a partir de esta establece una disputa directa con Lautman; aunque precisando que ambas posiciones son más bien complementarias. En segundo lugar, se abordará otro de los discípulos directos de Brunschvicg, Gaston Bachelard (1884-1962), quien logra englobar el idealismo crítico de su maestro como algunas ideas generales de lo que se esperaría de una filosofía sintética de las matemáticas.

Jean Cavaillès (1903-1944)

El propósito de la filosofía de Cavaillès se centra en la reflexión en torno al alcance y sentido de la *experiencia matemática*. En las primeras décadas del siglo XX se constató la interiorización de preguntas epistemológicas en la técnica misma. Es decir, cuestiones acerca del conocimiento de los objetos matemáticos y de su realidad se incorporaron en el desarrollo mismo de la matemática, esto es, la teoría de conjuntos, la lógica de Frege o la teoría de la prueba. Sin embargo, las paradojas de la teoría de conjuntos, la crisis de los fundamentos y los teoremas de Gödel, constituyeron para Cavaillès el rechazo a todo intento reduccionista de la matemática. "Es imposible insertar todas las Matemáticas en un único sistema formal. Este es el resultado dado por un teorema que aparece en la memoria publicada por Gödel en 1931" (Lautman, 2011, Cavaillès en SSFF, p. 500). Pero a su vez, la concepción hipotético-deductiva que se sigue de la escuela de Hilbert también resulta imposible. Se trata de que en lugar de un único sistema formal, la yuxtaposición de sistemas formales puedan capturar la totalidad de la matemática. "Es absurdo, por consiguiente, definir las Matemáticas como un conjunto de sistemas hipotético-deductivos, puesto que, para caracterizar esos sistemas formales como sistemas deductivos, ya hay que emplear Matemáticas" (Lautman, 2011, Cavaillès en SSFF, p. 500).

Podríamos decir entonces que la posición de Cavaillès es una radicalización de las ideas anteriormente expuestas, a favor de una concepción dinámica de las matemáticas, un devenir *perenne*. En ese sentido, existe entonces la autonomía absoluta de las matemáticas, desenvuelta en su propia historicidad. La matemática es irreductible

radas en el punto de desarrollo actualmente conseguido. La Sociedad de Filosofía ha estimado que existía un interés en discutirlas simultáneamente; agradece a sus autores haber querido prestarse a esta iniciativa" (Lautman, 2011, SSFF, p. 493).

a algo ajeno a ella misma y, por tanto, exige comprenderse en su propia historicidad. "Las Matemáticas son un devenir. Lo único que podemos hacer es intentar comprender su historia, es decir, para situar a las Matemáticas entre otras actividades intelectuales, encontrar ciertas caracterís ticas de ese devenir" (Lautman, 2011, Cavaillès en SSFF, p. 502).

Este es un devenir tanto autónomo como imprevisible. *Autónomo* en cuanto que bajo las nociones y procedimientos surge necesidades específicas que *exigen* nuevas nociones y procedimientos para su solución. Este proceso ocurre al interior de la propia matemática sin necesidad de recurrir a realidades o conceptos ajenos a esta. Por *imprevisible* se entiende que las nuevas nociones no pueden ser previstas, deducidas o esperadas a partir de las nociones anteriores. Su novedad es total. Sin que Cavaillès lo exponga directamente, pero esta posición nos recuerda lo ya discutido frente al carácter analítico o sintético de la matemática. El conocimiento matemático no se encuentra implícito en sus componentes, sino que la novedad *escapa* de sus predicados. Al igual que para Kant los juicios sintéticos se fundamentan en la experiencia, asimismo Cavaillès contempla al trabajo de los matemáticos como una *actividad experimental*.

> Por experiencia, entiendo un sistema de gestos, regido por una regla y sometido a condiciones independientes de esos gestos. Reconozco la vaguedad de una definición semejante, pero creo que es imposible paliarla del todo sin considerar ejemplos efectivos; quiero decir con esto que cada procedimiento matemático se define con respecto a una situación matemática anterior, de la que depende parcialmente, pero con respecto a la cual mantiene también una independencia tal que el resultado del gesto requiera ser constatado en su realización. Creo que es así como puede definirse la experiencia matemática (Lautman, 2011, Cavaillès en SSFF, p. 503).

Cavaillès se cuida de identificar sin más la experiencia matemática con la experiencia entendida en términos generales o físicos. La primera tiene la característica de que los gestos se realizan por una regla, y que el resultado presenta un significado en el propio sistema. "Es decir, dada una situación matemática, el gesto realizado nos proporciona un resultado que, por el hecho mismo de aparecer, encuentra su lugar en un sistema matemático que prolonga el sistema anterior (y le contiene como caso particular)" (Lautman, 2011, SSFF, Cavaillès en 504). Por su parte, el concepto de gesto no se define con claridad, aunque como él mismo anota, lo expone con "ejemplos efectivos". Recurre entonces a la descripción de dos tipos de *procedimientos* que usan los matemáticos: *tematización* e *idealización*.

En lo que respecta al procedimiento de *tematización*, los gestos realizados sobre un campo definido de individuos (o en un modelo), pueden considerarse como un nuevo campo sobre el que el matemático trabajará. El ejemplo que enuncia Cavaillès es el de la topología de las transformaciones topológicas. Frenta a la *idealización*, consiste en liberar a cualquier operación que se vea limitada por "circunstancias extrínsecas a su realización". Esto es posible porque los objetos de la matemática se han liberado de los objetos de la intuición. Así, según Cavaillès, se han realizado las generalizaciones de la noción de número. Al respecto podríamos complementar con el descubrimiento de $\sqrt{2}$ por los pitagóricos. La operación de la hipotenusa sobre los catetos unitarios se vio constreñida por lo que estos esperaban que fuera el resultado. La idealización, justamente libera la creatividad matemática de estas ataduras *a priori*. El matemático sigue la necesidad intrínseca de los entes.

¿Cuál es entonces la noción de objeto matemático que Cavaillès desprende de estas ideas? "El objeto matemático siempre se encuentra, a mi parecer, como correlativo de gestos efectivamente realizados por el matemático en una situación dada" (Lautman, 2011, Cavaillès en SSFF, p. 505). ¿Podrían, entonces, los objetos matemáticos tener una existencia en sí? Lo interesante de la reflexión de Cavaillès es que considera que no es necesario suponer la existencia de objetos matemáticos en sí para el razonamiento matemático. Esta discusión lleva al problema más profundo de la existencia misma de "objetos de pensamiento", en cuanto material autónomo de reflexión. Sobre los propios objetos de pensamiento existe un *desbordamiento* que obliga a formular, a su vez, nuevos objetos o redefinir sus definiciones. "En conclusión, diré, por tanto, que la noción misma de existencia de los objetos matemáticos nos interesa, a los filósofos, porque plantea el problema de la noción misma de objetos del pensamiento" (Lautman, 2011, Cavaillès en SSFF, p. 503).

En resumen, el análisis de Cavaillès ofrece un punto de vista novedoso, pues desarrolla la perspectiva de la matemática desde la experiencia misma. La matemática se constituye en un tipo específico de experiencia, la cual siempre es relativa a una teoría dada. Tanto la experiencia como el sentido de la misma se enmarcan en el ámbito de la teoría que se trate. Así, pues, se trata de una experiencia sobre los signos. El signo refiere a la manera en qué y cómo se emplee para significar de una determinada manera. En otras palabras, la matemática si bien surge de la experiencia común, la sobrepasa y establece su propia evolución de carácter *inmanente*.

Ahora bien, Cavaillès discutirá de Lautman que pretenda atar el desarrollo de las matemáticas a las Ideas dialécticas, las cuales por su propia naturaleza son ajenas a las matemáticas mismas. Como ya se ha mencionado, las Ideas dialécticas también han sido planteadas por la metafísica clásica, pero solo en la matemática tienen un desarrollo esquemático de estas. Para el propio Cavaillès este es un punto irreconciliable. No obstante, coincidimos con Ledesma (2008) y Arriaga (2018), ambas posiciones son más bien complementarias, antes que antagónicas. Las Ideas dialécticas son condiciones necesarias pero no suficientes. Siendo la matemática el esquema de síntesis de estas, no implican que no sean ni autónomas ni imprevisibles. Claro está que queda por aclarar de qué manera la matemática es autónoma aun cuando su realidad se encuentra en algo externo a ella misma (Arriaga, 2018, pp. 173-174), tema del siguiente apartado. Lautman ofrece una síntesis muy clara de esta discusión.

> El punto preciso de nuestro desacuerdo se refiere, no a la naturaleza de la experiencia matemática, sino a su sentido y a su alcance. Que esa experiencia sea la condición *sine qua non* del pensamiento matemático, eso es seguro, pero creo que hay que encontrar en la experiencia algo diferente y algo más que la experiencia; hay que captar, más allá de las circunstancias temporales del descubrimiento, la realidad ideal que es la única capaz de dar sentido y valor a la experiencia matemática. Concibo esa realidad como independiente de la actividad del espíritu, que sólo interviene, a mi parecer, cuando se trata de crear matemáticas efectivas, las matemáticas pertenecen al dominio de la acción, pero la dialéctica es ante todo un universo para contemplar, cuyo admirable espectáculo justifica y recompensa los largos esfuerzos del espíritu (Lautman, 2011, *Apéndice E*, p. 535).

Consideramos que la posición de Lautman integra la de Cavaillès, en cuanto no niega la postura de este último pero encuentra la necesidad de *algo más* que la simple experiencia. Este punto es importante, pues Lautman concibe la doble naturaleza de la matemática: tanto su esencia estructural como su esencia dinámica. Llevando al límite los argumentos de Cavaillès, la matemática se relativiza en su historicidad al punto de perder su carácter objetivo y acumulativo que atestigua la historia de las matemáticas. Es decir, si bien en la matemática se constata cambios autónomos e imprevisibles, también es cierto que aquello que se consolida como conocimiento permanece en cuanto tal y supera, por decirlo de alguna manera, el ámbito local y temporal de su desarrollo. Gaston Bachelard plantea una imagen que permite reflexionar acerca de esta doble naturaleza de las matemáticas.

> Imaginen que se presenta ante ustedes un racionalista endurecido que repite el eterno ejemplo dado en todos los libros de filosofía escolar para todos los filósofos que bloquean el racionalismo en el nivel de la cultura científica elemental: la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. Entonces ustedes le responden tranquilamente: "Depende". En

> efecto, depende de la elección de los axiomas. Con una sonrisa, ustedes desconciertan a esa razón totalmente elemental que se arroga el derecho de propiedad absoluta sobre sus elementos. Ustedes hacen más flexible a esta razón dogmática obligándola a jugar a la axiomática (Bachelard, 2009, p. 10).

La verdad pierde su carácter absoluto y definitivo, pero ello tampoco implica una desvalorización de la verdad. Se trata, simplemente, de considerar el ámbito relativo en que esta verdad se da. El "depende" no se refiere a un enunciado caprichoso (*doxa*); por el contrario, es un "depende" que exige un conocimiento profundo, más allá de los objetos considerados en sí mismos, que posibilita la verdad o falsedad en un contexto determinado y correlacionado con el conjunto de conocimientos ya establecidos. Continuando con Bachelard, entonces, al incorporar nuevos conocimientos se da una *estructuración dialéctica*, esto es, "el movimiento inductivo que reorganiza el saber ampliando sus bases, en el cual la negación de conceptos y axiomas no es más que un aspecto de su generalización" (Canguilhem, 2009, p. 207). En otras palabras, podríamos decir que el *corpus* de conocimientos no es meramente acumulativo, sino que tendría una estructura de red que se reestructura ante cada nuevo concepto incorporado.

Volviendo al ejemplo de la suma de los ángulos de un triángulo, el enunciado "es igual a dos rectos" nunca ha dejado de ser verdadero; al contrario, esta verdad se expande, pues se inscribe en ámbitos más amplios que el del espacio euclidiano. Más allá de los ángulos del triángulo en sí, interesa el ambiente bajo el cual el triángulo existe, esto es, si es un espacio euclídeo, hiperbólico o elíptico. Pero además de expandirse, podríamos aventurarnos a decir que también se fortalece, en la medida en que el enunciado es verdadero en una teoría geométrica más general, en donde la otrora geometría euclidiana pasa de ser el espacio absoluto a un caso particular. Para hacernos una imagen, pasó de ser un pez grande en una pecera a un pez pequeño en el oceáno.

Continuando con Bachelard, el conocimiento científico nunca tiene un acabamiento, pues se presenta un incesante vaivén entre el sujeto que intenta conocer frente al objeto que se le resiste. Jamás alcanza el *noúmeno* aunque en cada nueva etapa se acerca un poco más. Diríamos, a manera de analogía, que describe un movimiento asintótico. "El conocimiento comienza con un diálogo falto de precisión en el que el sujeto y el objeto se comunican mal, pues ambas son diversidades disparejas" (Bachelard, 2004, p. 99). Este vaivén impone de esta manera una historización del conocimiento.

2.3.3. *Trascendencia* e *inmanencia* de la matemática

En el apartado anterior se dejó abierta la cuestión por la manera en que siendo la matemática autónoma, cómo es posible que su realidad dependa a su vez de algo externo, en este caso, de las Ideas Dialécticas. Lautman se esforzará en aclarar este punto, y toma como principal referente a Martin Heidegger (1889-1976). Si bien en la obra de Lautman no se encuentra una copiosa referencia bibliográfica respecto al filósofo alemán, sí hace una profunda discusión en la primera parte de *Nuevas Investigaciones sobre la estructura dialéctica de las matemáticas* (NISEDM), de 1938. Pretendemos en este apartado exponer la manera en que Lautman encuentra un puente entre la experiencia matemática y las Ideas Dialécticas.

Ahora bien, es importante resaltar que la lectura realizada por Lautman de Heidegger se ajusta a resolver un problema muy concreto y específico. Por esta razón no se pretende exponer algún tipo de "atadura" entre los dos autores que exija una consistencia absoluta entre ellos. Esto porque, en primer lugar, se encontrarán evidentes diferencias que harían suponer una incompatibilidad manifiesta e insalvable. Por ejemplo, Heidegger es visto más como un crítico de la ciencia, pues esta dirige su mirada al ente y se olvida del Ser (Heidegger, 2005). En segundo lugar, no limita el posible aporte que otros filósofos, principalmente adscritos a la fenomenología, pudiesen aportar al problema que Lautman intenta dilucidar con Heidegger. Si bien tal trabajo excede con creces los propósitos de la presente tesis, se abre la posibilidad para su realización a futuro.

> [D]esarrollando algunas ideas de nuestra Tesis Principal relativas a la participación de la Matemáticas en una Dialéctica que las domina, intentamos mostrar de manera abstracta cómo el entendimiento de las Ideas de esa Dialéctica se prolonga necesariamente en una génesis de teorías matemáticas efectivas. Nos apoyamos para ello sobre ciertas distinciones esenciales de la filosofía de Heidegger, que nos parecen convenir notablemente con el problema metafísico considerado (Lautman, 2011, NISEDM, p. 333).

Si bien la filosofía de Heidegger presenta unas preocupaciones acerca del Yo, Lautman observa que ello no impide que en ese pensar sobre el *ser arrojado al mundo*, se encuentren nociones muy relevantes que superan el ámbito antropológico y permitan considerar tanto la realidad de las matemáticas, como de otros "dominios de encarnación", bien sea realidad física, social o humana.

> [S]u interés primordial se dirige entonces al problema del Yo, pero esa primacía en su filosofía por preocupaciones antropológicas no impide que

> su concepción de la génesis de las nociones relativas a lo Existente, en el seno del análisis de las Ideas relativas al Ser, tenga un alcance muy general (Lautman, 2011, NISEDM, p. 338).

Sobre tal alcance general Lautman realiza una interesante lectura de Heidegger, en especial de *Vom Wesen des Grundes* (Los Principios de la Razón). Toma en primer lugar la distinción que el filósofo alemán establece entre el punto de vista ontológico y el punto de vista óntico, con el fin de explicar el lazo entre, por un lado, la realidad humana y, por el otro, el de la *existencia-en-el-mundo*. Este último siempre se revela en la existencia óntica, mientras que el primero se da en el plano ontológico. "Si el concepto del Mundo se revela como el de un «designio», es propio de la esencia de la realidad humana el ser una «intención» orientada hacia ese designio"(Lautman, 2011, NISEDM, p. 337).

Esta génesis de Mundo como concepto óntico que se constituye a partir de la idea de realidad humana, tiene un alcance que supera con mucho las preocupaciones iniciales. "Heidegger identifica así la motivación, actividad racional de fundamentación (*Begründung*) y conocimiento mediante Ideas, con la actividad creadora de fundación (*Gründung*), que constituye, en la complejidad de sus relaciones internas, el mundo de lo existente" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 338). La pregunta de Leibniz de *por qué* algo existe y no la nada, constituye de por sí la "pre-noción" acerca de la esencia y realidad de las cosas. "El Porqué no es entonces pura interrogación; la noción del ser implicado es ya respuesta y motivación, develación de la verdad ontológica", y más adelante concluye que "la búsqueda del porqué no puede ser separada de la consideración de los posibles" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 339). La develación de la esencia se corresponde, entonces, con las posibles formas de existencia, en la afirmación de la libertad creadora tanto del fundamento como de la fundación.

Ahora bien, en lo que respecta a la matemática, ¿cómo se da la génesis de esta a partir de la Dialéctica? Lautman identifica en este punto un problema metafísico de doble vía: la Dialéctica se *encarna* en la matemática, y esta *participa* de aquella. El lazo entre las dos lo constituye la génesis de las teorías matemáticas efectivas a partir de esta Dialéctica. Pero antes de definir con claridad qué significa esta última definición, Lautman es cuidadoso en aclarar qué tipo de *anterioridad* presenta la Dialéctica frente a las matemáticas. En otras palabras, en qué sentido la Dialéctica precede a la matemática, de tal forma que aun siendo esta última encarnación de la primera, conserva una autonomía propia e independiente que se expresa en su desenvolvimiento histórico *inmanente*.

En primera medida no se refiere a un orden cronológico, ni a un orden de conocimiento, ni tampoco a un orden de la "reconstrucción lógica", pues la dialéctica no forma parte de la matemática y como tal sus nociones básicas no se relacionan con las nociones primitivas de la teoría. Hay en las teorías matemáticas encarnadas, en palabras de Lautman, una "aprehensión global" a las relaciones dialécticas. La anterioridad de la Dialéctica se define entonces "como aquella de la «inquietud» o de la «pregunta» con respecto a la respuesta. Esta es una anterioridad "ontológica", para retomar la expresión de Heidegger, exactamente comparable con la anterioridad de la «intención» con respecto al «designio»" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 340). Podemos entonces concluir que el acabamiento de una teoría matemática responde a una pregunta de la que ignorábamos que estaba planteada. "Es en términos metafísicos como se explica el hecho de que un objeto matemático manifieste su posibilidad de generar más sentido que el que su definición inicial parece implicar" (Ledesma, 2008, p. 308).

Precisando entonces la esencia de las Ideas de la Dialéctica, estas son el movimiento entre pares de nociones contrapuestas: global-local, todo-parte, continuo-discreto, intrínseco-extrínseco, entre otros. "Las *Ideas* examinan algunas relaciones posibles entre *nociones* dialécticas" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 341). En otras palabras, "los pares de nociones dialécticas (todo/parte, extrínseco/intrínseco, sistema/ modelo, etc.) y las ideas dialécticas asociadas, [...] deben comprenderse como resoluciones parciales de oposiciones entre nociones" (Zalamea, 2011a, p. 22). La dialéctica, por tanto, se constituye en "pura problemática", es decir, no se refiere a ningún tipo de existencia óntica ni precisa algún tipo entidad. Por el contrario, es libre de cualquier determinación, y por esto mismo, es libre de cualquier coacción o restricción. Por otra parte, la matemática describe, caracteriza y concretiza estos enlaces dialécticos en un lenguaje que exige precisiones, limitaciones y excepciones; en otras palabras, una realidad óntica.

> Mientras que las relaciones matemáticas describen ciertos enlaces existentes de hecho entre seres matemáticos distintos, las Ideas de relaciones dialécticas no afirman ningún enlace existente de hecho entre nociones cualesquiera. Como «preguntas planteadas», no constituyen sino una problemática, relativa a ciertas situaciones eventuales de lo existente (Lautman, 2011, NISEDM, p. 341).

¿Cuál es entonces el paso que parte de la Dialéctica irrestricta que no afirma y las relaciones concretas entre objetos matemáticos definidos y delimitados? Lautman toma de Heidegger, justamente, el concepto de *trascendencia de las Ideas*. En el sentido original que da Heidegger al término, refiere a "la naturaleza esencial de una cosa el rebasarse a sí misma para ir hacia un existente exterior a ella, sin el cual esa cosa no puede concebirse siquiera como existente, ese *rebasarse del sujeto hacia la existencia es la trascendencia*" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 341. *Cursivas propias*).

La trascendencia constituye, por tanto, un "*acto* de acercamiento" de la realidad humana orientada al mundo. "Heidegger no atenúa para nada la distinción ontológica que separa la develación del ser y la manifestación de lo existente, sino insiste en el hecho de que la génesis y el desarrollo de lo existente son la prolongación necesaria de un esfuerzo de develación del ser" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 341). Lautman identifica en este punto una "situación análoga" entre la matemática y las Ideas de la Dialéctica. "Cabe decir que por estas mismas razones las Ideas Dialécticas son ontológicas respecto de la ciencia óntica que es la matemática" (Arriaga, 2018, p. 184).

> Como problemas planteados, relativos a los enlaces que son susceptibles de sostener ciertas nociones dialécticas, las Ideas de esa Dialéctica son ciertamente trascendentes (en el sentido usual) con respecto a las matemáticas. En cambio, como todo esfuerzo por aportar una respuesta al problema de esos enlaces puede verse, por la naturaleza misma de las cosas, como constitución de teorías matemáticas efectivas, se justifica así el interpretar la estructura de conjunto de esas teorías en términos de *inmanencia* para el esquema lógico de la solución buscada. Existe, entonces, un lazo íntimo entre la trascendencia de las Ideas y la inmanencia de la estructura lógica de la solución de un problema dialéctico en el seno de las matemáticas; ese lazo nos lo proporciona la noción de génesis, al menos tal como hemos intentado asirla, al describir la génesis de las matemáticas a partir de la Dialéctica (Lautman, 2011, NISEDM, p. 343).

En la tradición filosófica occidental el opuesto de la trascendencia es la *inmanencia*. En términos matafísicos si aceptamos la trascendencia de alguna manera limitamos la potencia sobre lo "trascendido", esta es generalmente la crítica al llamado "mundo de las ideas platónico", pues el mundo óntico se reduce a la pálida imagen de una copia. Ya desde Aristóteles es claro los inconvenientes que se derivan de la trascendencia. Por otra parte, la inmanencia es un acto de reafirmación de la realidad del mundo y del hombre, *algo es* en tanto que es y no hay que buscarlo por fuera de este.

No obstante, esta nueva lectura platónica de las Ideas y la trascendencia que Lautman recoge de Heidegger, ofrece un panorama mucho más rico de la metafísica, y en particular de las matemáticas. "Quisiéramos haber mostrado que ese acercamiento de la metafísica y de las matemáticas no es contingente sino necesario" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 333). Retomando la discusión con Cavaillès se observa que ambas posiciones no son para nada contrapuestas, sino que más bien se complementan. La inmanencia no se contrapone a la trascendencia, sino que más bien es una prolongación necesaria, a la vez que autónoma y autocontenida. Tenemos por una parte, pues, el *lazo íntimo* entre una metafísica (trascendencia), y una estructura y una fenomenología (inmanencia) por el otro. "Mientras más se afirman el carácter individual y la estructura propia de las teorías matemáticas particulares, mejor se muestra la fecundidad de las Ideas que, en el sentido de una historia no vivida, el filósofo reconoce en el origen de las teorías" (Lautman, 2011, NISEDM, p. 423). Podríamos pensar junto con Alunni en una metafísica de deconstrucción de esquemas sustancialistas, en la que prime la relación fundamental entre materia y forma (Alunni, 2008).

Llegados a este punto, hay una misión manifiesta del filósofo respecto a las matemáticas: develar su propia génesis así como (sacar a la luz) el lazo íntimo que se encuentra en la estructura misma de las teorías matemáticas con las Ideas de la Dialéctica. ¿Cómo hacerlo? Antes que nada, la génesis es historicidad, desenvolvimiento sin un patrón definido. En segundo lugar, *inmanencia de la estructura lógica* que responde al problema planteado desde la Dialéctica. Por último, el esfuerzo del sujeto por trascender hacia la existencia de las teorías matemáticas efectivas. Por esto mismo, las matemáticas son una creación profundamente humana que trasciende, se rebasa a sí misma, hacia la existencia de las teorías matemáticas efectivas (descubrimiento).

Vista desde la *inmanencia*, la teoría de modelos estudia la estructura lógica de los entes matemáticas (*concepción estructural*). La fenomenología, por su parte, brinda el estudio de aquella historicidad que se manifiesta en la experiencia del matemático (concepción dinámica). ¡A las matemáticas mismas! Finalmente, la metafísica que indaga por la Dialéctica que se encarna en la matemática, y de esta que participa en aquella. En el próximo capítulo se proponen algunos lineamientos generales de cómo podría formularse una filosofía matemática que conjugue estos elementos para *develar*, justamente, el lazo íntimo entre la Dialéctica y las teorías matemáticas, por un lado, así como su propio desenvolvimiento autónomo, por el otro. En cuanto que son simples "lineamientos", es conveniente advertir su imperfección. Su valía, si es que logra tenerla, será construir los cimientos que permitan edificar posteriores desarrollos en esta línea.

Capítulo 3

Filosofía matemática en el lenguaje de la teoría de modelos

El propósito del siguiente capítulo consiste en evidenciar a la teoría de modelos como expresión técnica de los planteamientos filosóficos de Lautman. Está claro que no se trata de una correspondencia exacta, ni tampoco de una relación de exclusividad. Se intenta mostrar que existe una correlación o co-incidencia entre aspectos más matemáticos (teoría de modelos) y aspectos más cercanos a la filosofía (Lautman), con una raíz común en la evolución que tuvo la lógica, principalmente, entre las décadas de 1920 y 1930. Hilbert será en este escenario un referente cardinal para encontrar tal correlación.

La primera parte del capítulo muestra la co-incidencia entre la filosofía de Lautman y los planteamientos técnicos básicos de la teoría de modelos. Luego, en la segunda parte, analizamos la lectura que hace Lautman, junto con Cavaillès, de lo que llamaremos el periodo de la "proto-teoría de modelos". Esto es, los desarrollos de la lógica matemática de las décadas del veinte y el treinta que posibilitaron la posterior consolidación de la teoría de modelos en la década del cincuenta, gracias a los trabajos de Tarski. Por último, enfocamos la teoría de modelos como una posible expresión de la *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia* (TGE3) de Lautman. En otras palabras, sostenemos la tesis central de que la relación entre la filosofía de Lautman y la teoría de modelos está mediada por el planteamiento de una teoría general de los enlaces entre esencia y existencia.

3.1. Co-incidencia entre Lautman y la teoría de modelos

No es fácil relacionar dos tipos de pensamiento tan diferentes, tanto en estilo como propósito, como son la filosofía y las matemáticas. Salvando las evidentes diferencias, partimos de la idea de que son expresiones de un pensamiento más general que incluye tanto una como a otra. En nuestro caso, la "crisis" de la fundamentación de las matemáticas y la lógica de principios del siglo XX constituyen el escenario de un desarrollo matemático que deviene, por una parte, en la teoría de modelos y, por otra parte, en la filosofía matemática de Lautman. Así, pues, analizamos en esta primera parte cómo algunos conceptos técnicos de la teoría de modelos presentan un interesante paralelismo con las ideas de Lautman.

3.1.1. Expresión matemática de la filosofía de Lautman

¿Por qué considerar la teoría de modelos clásica como expresión técnica de la filosofía lautmaniana? ¿En qué medida lo logra? ¿En qué sentido puede constituirse en un programa de investigación filosófica con pleno derecho? Estos son los temas tratados en la primera sección de este capítulo. Es claro que Lautman no conoció la teoría de modelos como rama de la lógica matemática, pues esta se consolida en la década del 50 y él muere en 1944. No obstante, en la primera mitad del siglo XX se fue gestando una "proto-teoría de modelos" (1915-1930) de la que Lautman sí estuvo al tanto. "En la ciencia de los años treinta, la emergencia imparable de la noción de estructura matemática proporciona a Lautman una herramienta muy dúctil para entrelazar lo diverso. Aún incipientes cuando Lautman escribe, y todavía no definidas en toda su generalidad (Bourbaki)" (Zalamea, 2011a, p. 41). Recordemos que Lautman mantuvo una estrecha relación con la Universidad de Gotinga, estudió en la *École Normale Supérieure* (1926-1930), luego en el Seminario Julia del Instituto Henri Poincaré (1935-1939) y siempre se relacionó con algunos de los matemáticos más importantes de su generación. En particular, su estrecha amistad con Herbrand, quien puede ser considerado como uno de los precursores de la posterior teoría de modelos. Los principales escritos de Lautman se producen justamente entre los años 1935 y 1939, momento en el que buena parte de las bases de la lógica matemática contemporánea estaban ya cimentadas (Goldfarb, 1979).

En tiempos de Lautman fue patente la necesidad de construir una metamatemática, pero a efectos prácticos esta no se había consolidado aún. La obra de Lautman expone un número importante de ejemplos de la matemática real de su tiempo: nuevas construcciones, relación entre entes matemáticos, técnicas novedosas para tratar viejos problemas, así como nuevas problemáticas. No obstante, consideramos que justamente una metamatemática permite trascender los ejemplos individuales para estudiar matemáticamente la estructura de las teorías efectivas. Partiendo de esta situación, no es difícil considerar que los desarrollos de la metamatemática en el último siglo constituyen una excelente expresión matemática de la filosofía lautmaniana.

Hasta el momento se evidencian algunos esfuerzos en ese sentido. Cabe resaltar el trabajo de Zalamea (2011), para quien Lautman "intuye una matemática de relaciones estructurales *más allá de los objetos*, es decir, prefigura el camino de la teoría de categorías" (Zalamea, 2011a, p. 59). Arriaga (2018), por su parte, continúa el planteamiento de Zalamea y desarrolla algunas definiciones en esa dirección. La fortaleza de la teoría de categorías consiste en que esta hace "comprensibles, al tratarlas con rigor formal, ciertas relaciones entre estructuras matemáticas, e.g., entre campos (como lo es $\mathbb{R}$) y grupos, o entre estos últimos y los espacios topológicos" (Arriaga, 2018, p. 128). La teoría de categorías, entonces, sería el punto de vista de un ave respecto a las matemáticas. Encuentra desde las alturas *patrones* que desde el nivel de las teorías matemáticas no pueden apreciarse (Arriaga, 2018, p. 127-137).

Ahora bien, tenemos como propósito realizar un esfuerzo análogo: expresar en términos matemáticos la filosofía de Lautman, pero con la diferencia de afirmarse sobre la teoría de modelos y no sobre la teoría de categorías. Una posible ventaja de la teoría de modelos es el uso de la lógica de primer orden, la cual ya es familiar a los filósofos y ello permitiría un acercamiento quizá más efectivo entre estas dos orillas.

Si bien ya se han adelantado algunos esfuerzos por evidenciar el potencial filosófico de la teoría de modelos, no han tenido en cuenta el pensamiento de Lautman de una manera sistemática. John Baldwin, profesor emérito de la Universidad de Illinois en Chicago, ha realizado probablemente el esfuerzo más completo en llamar la atención del potencial de la teoría de modelos para la filosofía de las matemáticas. "Contemporary model theory makes formalization of *specific mathematical areas* a powerful tool to investigate both mathematical problems and issues in the philosophy of mathematics (e.g. methodology, axiomatization, purity, categoricity, and completeness)" (Baldwin, 2018, p. 3).

Consideramos que tanto la teoría de modelos como la de categorías son caminos alternativos para revelar una filosofía que dé cuenta de la matemática real. No sabemos de antemano si alguna es mejor que la otra, pero por lo pronto existen elementos que permiten pensar que ambos caminos pueden ser, en última instancia, convergentes. Este optimismo se soporta en las recientes investigaciones matemáticas que ponen de relieve las conexiones entre ambas teorías. Es un campo de investigación aún en gestación, pero que por lo pronto nos permite confiar en tal convergencia.

Interesa, por ahora, establecer que ambos caminos tienen el mismo punto de partida. Zalamea (2011) recuerda al matemático francés Charles Ehresmann (1905-1979), colega y amigo de Lautman, en la intervención que realizara en 1939 con ocasión de la Sesión de la Sociedad Francesa de Filosofía (Lautman, 2011, SSFF, pp. 493-535):

> Podrían multiplicarse los ejemplos. Creo que los problemas generales planteados por Lautman pueden enunciarse en términos matemáticos, y añadiría que no se puede evitar enunciarlos en términos matemáticos. Y esto se junta con la idea expresada en el resumen de la tesis de Cavaillès: «Hablar de las Matemáticas no puede ser más que rehacerlas» (Lautman, 2011, *Intervención de Charles Ehresmann en* SSFF, p. 519).

Ehresmann aboga, claramente, por que las concepciones filosóficas de Lautman respecto a la matemática se enuncien en la matemática, y logren incorporarse a la misma. Lo interesante de este punto consiste en la novedosa idea de reflexionar acerca de las matemáticas dentro de esta misma, tarea acometida por cualquier metamatemática. Visto así, no parece descabellado un proyecto filosófico de la matemática que use como lenguaje de estudio a la propia matemática. Así, pues, notamos que la teoría de modelos cumple un importante papel en la dirección de enunciar en términos matemáticos los planteamientos de Lautman. Así mismo, esperaríamos que sea una base a futuro para que la teoría de modelos haga avanzar las ideas de Lautman (truncadas por la guerra), y por qué no, que estas reflexiones puedan servir como campo de reflexión e incitación a la actual teoría de modelos.

Razón tenía Wittgenstein cuando afirmaba los límites del lenguaje natural. Estos límites son patentes en los problemas filosóficos, trátese de ética, política o ciencia. Ahora bien, por qué no pensar que aquellos límites son propios del lenguaje, mas no del pensamiento. El lenguaje matemático es expresión del pensamiento pero a un nivel más sofisticado, nivel que bien podría retomar algunos problemas filosóficos que desde el lenguaje natural han resultado irresolubles o carentes de sentido, y darles así otro tipo de tratamiento. Esta consideración impregna la filosofía de Lautman, y por ello mismo no denomina a su proyecto "filosofía *de* las matemáticas", sino simplemente *filosofía matemática*. Ahondar en esta idea rebasa los alcances de la presente tesis, pero abre nuevas perspectivas a futuro.

Por lo pronto, intentaremos mostrar que los problemas filosóficos de la matemática planteados por Lautman ya han sido enunciados en términos matemáticos por la teoría de modelos, al menos parcialmente. Para mostrar este punto indagaremos en los encuentros y *co-incidencias* de Lautman con las teorías matemáticas de principios del siglo XX que permitieron la posterior consolidación de la teoría de modelos en la década de 1950. En otras palabras, nos permitirá observar si los planteamientos filosóficos de Lautman tienen alguna contrapartida matemática o co-incidencia. Nos centraremos en la formulación de tres importantes teoremas, fundamentales para el posterior desarrollo de la teoría de modelos: el teorema de Löwenheim-Skolem (1919), el de compacidad (1930) y el de completitud (1930). “Thus, in 1930, three of the basic tools of model theory (the method of quantifier elimination, as well as Löwenheim-Skolem theorems and the compactness theorem) were already available” (Manzano, 1999, *Prefacio*, p. X).

Es importante aclarar brevemente qué entendemos por el término *co-incidencia*. Es claro que no pretendemos afirmar que la teoría de modelos responde o se reduce a la filosofía de Lautman, ni que esta última es una extensión de aquella. Al contrario, partimos de la certeza de que son desarrollos independientes, con premisas y objetivos propios. Ahora bien, tanto los matemáticos como los filósofos de la Europa continental de principios del siglo XX (Lautman, Skolem, Cavaillès, Löwenheim, Tarski, Brunschvicg, Gödel, Bachelard, entre otros) compartieron un entorno cultural y científico cuyo principal catalizador fue el trabajo de David Hilbert. Diríamos que forman parte de un mismo clima cultural e intelectual. Siendo esto así, resulta por lo menos plausible que aún siendo pensamientos independientes, se nutran de fuentes similares y busquen objetivos comparables, bien sea desde la filosofía matemática, bien sea desde la matemática. Y ¿por qué no?, que resulten complementarios entre sí. El término co-incidencia no se refiere entonces a una coincidencia fortuita, sino que ambos lados *inciden* sobre problemáticas comunes de manera independiente. El prefijo “co-” denota, en consecuencia, el esfuerzo de nuestra parte por mostrar este encuentro en lo que les es común. Entendemos de esta manera “co-incidencia”.

3.1.2. Álgebra abstracta y lógica matemática

Un primer indicio para encontrar las posibles co-incidencias entre Lautman y la teoría de modelos, nos remite a una de las primeras descripciones que recibió la teoría de modelos (Chang and Keisler, 1973).

Álgebra universal + Lógica

Al igual que el álgebra, la teoría de modelos como rama de la lógica matemática estudia las estructuras matemáticas: identificar, caracterizar y definir relaciones entre estas. No obstante, la diferencia fundamental de la teoría de modelos respecto al álgebra es el uso de lenguajes formales.

> Model theory is the part of logic that studies structures (in Bourbaki’s sense) in relation to their descriptions in formal languages, usually first-order ones. The study of structures and classes of structures is essentially

> a subject of algebra or universal algebra, but model theory is different in its approach in that it places a special emphasis on the question of language and definability in the structures. This approach has paid off with applications in various parts of concrete mathematics (Zilber, 2010a, p. 331).

¿Cuál sería el valor agregado de incorporar la lógica en el estudio de las estructuras matemáticas? ¿Por qué no simplemente quedarse con el álgebra universal? Como lo anota Zilber, la teoría de modelos hace énfasis en el lenguaje y definibilidad de la estructura matemática en lógica de primer orden (lenguaje formal)[1]. Así, tenemos como objeto de estudio la relación entre estructuras por medio de los enunciados del lenguaje (Casanovas, 2006, p. 138). El lenguaje por sí mismo no tiene significado, sin embargo la elección del lenguaje reflejará la naturaleza de los objetos de estudio. O lo que es lo mismo, el lenguaje adquiere su significado solo cuando es interpretado en una estructura apropiada (Tent and Ziegler, 2012, pp. 5-6). Este es el valor agregado que ofrece la lógica al permitir analizar las relaciones internas, clasificar estructuras y clases de estructuras de acuerdo a los enunciados que satisfacen, pues en algunos casos permitirá descubrir propiedades que la mera álgebra es incapaz de evidenciar.

Recordemos que Lautman (Sección 2.2.3), por su parte, identifica que algunos problemas planteados por la lógica se relacionan con las nociones de esencia y existencia. Por lo tanto, la formulación de una teoría general de los enlaces entre *consideraciones estructurales* (esencia) y *afirmaciones de existencia* puede pasar de manera natural por la lógica matemática[2]. Equivalente al enfoque de la teoría de modelos, Lautman aboga por que el filósofo *devele* una verdad a través del concepto de estructura y de clases de modelos con el fin de lograr una visión sintética de conjunto. "[C]reemos [...] que la idea de la acción organizativa de una estructura sobre los elementos de un conjunto es plenamente inteligible en matemáticas" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 151). Resulta entonces razonable denominar el planteamiento de Lautman *realismo estructural*, toda vez que Lautman conoce la importancia del álgebra abstracta y su desarrollo por Hilbert y Noether en Gotinga (Ledesma, 2008, p. 376).

Pero la lógica matemática ha tenido que desarrollarse con el fin de servir de teoría general de los enlaces entre esencia y existencia por medio de este concepto de estructura. Como ya se dijo en el Capítulo 2, Lautman identifica dos periodos de la

[1] La lógica de primer orden es usada principalmente en los inicios de la teoría de modelos, y al día de hoy sigue siendo fundamental. A medida que la teoría de modelos sigue desarrollándose, también ha incorporado otras lógicas, principalmente lógicas infinitarias y el giro hacia *clases elementales abstractas* introducidas por Shelah en la década de 1980.

[2] Esta teoría general también puede realizarse en teoría de categorías. Zalamea (2009), Arriaga (2018).

lógica matemática: *periodo ingenuo* y *periodo crítico*. En el primero la existencia de los seres matemáticos se derivaba simplemente de la no-contradicción de los axiomas que los definen

$$esencia \equiv existencia.$$

Sin embargo, a partir del *periodo crítico* (Gödel, Herbrand, Bernays y Gentzen, principalmente), se rompe la identidad esencia-existencia, siendo la oposición entre el punto de vista *estructural* y el *extensivo* el que da lugar a las interpretaciones del sistema de axiomas.

La concepción estructural (no-contradicción de los axiomas que define una teoría), es insuficiente para resolver el problema de la existencia de los seres matemáticos. Cuando el sistema de axiomas se realiza en un campo infinito de individuos, es posible no encontrar equivalencia entre la no-contradicción y la existencia de una interpretación de aquel sistema. "En suma, la posibilidad de realización es una exigencia más fuerte que la no contradicción; una disociación se establece entre el punto de vista extensivo y el punto de vista estructural" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 210). Esto se explica por el principio del tercio excluido, pues no se aplica de la misma manera como en el caso finitario. "Al igual que la consideración de los números ideales es indispensable para generalizar el teorema de la descomposición en factores primos, la consideración de elementos transfinitos es necesaria para generalizar la aplicación del tercio excluso" (Ledesma, 2008, p. 251).

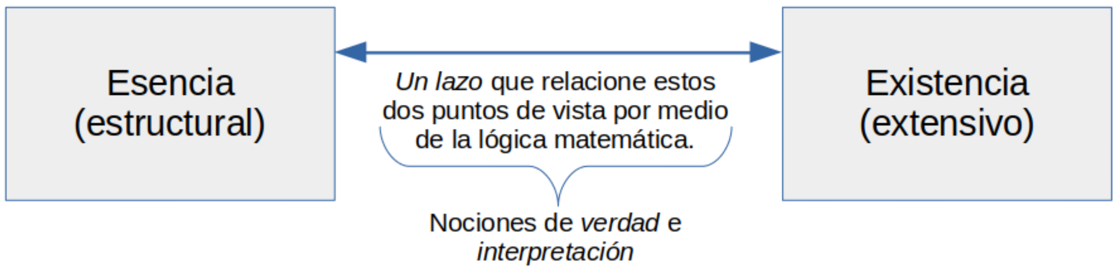
Un conjunto definido de axiomas podría ser no refutable (no-contradictorio) sin tener a la vez una interpretación de los axiomas. Lautman cita en ese sentido el aporte de Paul Bernays (1888-1977), al demostrar que en el cálculo de predicados "existía rigurosamente una equivalencia entre la no contradicción y la irrefutabilidad de la conjunción de los axiomas, sin que eso implicara para nada la existencia de una interpretación del sistema" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 210). Es entonces importante resaltar la *disociación* del punto de vista estructural (esencia) con el extensivo (existencia), y la necesidad de encontrar un *lazo* por medio de la lógica matemática entre estos dos tipos de propiedades (Figura 3.1).

$$esencia \neq existencia$$

Debemos, pues, analizar primero cada una de estas dos orillas y luego lo que constituye el puente entre estas: las nociones de *verdad* e *interpretación*.

> El punto de vista extensivo es el de la existencia de las interpretaciones de un sistema de axiomas, de los campos de individuos que lo realizan, y casi todas las demostraciones metamatemáticas intentan establecer un lazo entre las propiedades estructurales de las proposiciones de un sistema

Figura 3.1: Lazo entre esencia y existencia



> y la existencia de campos donde esas proposiciones puedan verificarse. El paso de la esencia a la existencia se debe así a que la estructura o esencia del sistema de axiomas es apta para dar origen a las interpretaciones del sistema (Lautman, 2011, RITM, p. 127).

Aclarando algunos términos en la cita anterior, "sistema de axiomas" es lo que actualmente entendemos por teoría en términos de la sintaxis. En su expresión semántica, hoy se entiende propiamente la noción de "estructura". Es importante aclarar tal diferencia entre la semántica (interpretaciones del sistema) y la sintaxis (sistema de axiomas), toda vez que se mantendrá en la presente tesis. "Since the end of last century, algebraists and geometers have often found themselves studying certain objects which we now call *structures*, or more loosely *models*. For the first fifty years of this century they were usually known as [...] *system*" (Hodges, 1986, p. 135). Por "campo", a su vez, Lautman se está refiriendo a la noción actual de *modelo* (Ledesma, 2008).

3.1.3. El lenguaje de la teoría de modelos

En lo que respecta a la teoría de modelos, "[t]he abstract scheme of Model Theory is as follows: we have a lenguage L and a class of objects $\mathfrak{M}$ which are structures, and between those two types of realities we have a bridge -the notion of truth" (Manzano, 1999, p. 1). Intentaremos mostrar, en lo que sigue, que esta afirmación es equivalente a la disociación y al lazo necesario planteado por Lautman (entre las propiedades estructurales y la existencia del campo de individuos). Para este fin debemos iniciar por la definición misma de estructura[3].

[3]En adelante se sigue principalmente la notación de María Manzano. *Model Theory*, Oxford University Press (2009).

Definición 1. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una estructura, si y solo si $\mathfrak{A} = \langle A, (f_i)_{i\epsilon I}, (R_j)_{j\epsilon J}\rangle$, con dos funciones asociadas $\mu : I \to \mathbb{N}$ y $\delta : J \to \mathbb{N} - \{0\}$, tal que

1. El dominio o universo de $\mathfrak{A}$, dom($\mathfrak{A}$), se define por un conjunto no vacío A. La cardinalidad de la estructura es igual a la cardinalidad del conjunto A, $|\mathfrak{A}| = |A|$.

2. I es un conjunto de índices que puede ser $\varnothing$. Para cada $i\epsilon I$, $\mu(i)\epsilon\mathbb{N}$, tenemos que f_i es una función $\mu(i)$-aria definida en A, es decir $f_i : A^{\mu(i)} \to A$.

3. J es un conjunto de índices que también puede ser $\varnothing$. Para cada $j\epsilon J$, $\delta(j)\epsilon\mathbb{N} - \{0\}$, tenemos que R_j es una relación $\delta(j)$-aria definida en A. Tal que, $R_j \subseteq A^{\delta(j)}$.

4. Si $\mu(i) = 0$, f_i es un elemento distinguido o constante de A.

5. Se denomina el *tipo* de la estructura como (μ, δ).

De igual manera a como lo expresara Lautman, la estructura (*esencia*) permite caracterizar la realidad matemática de manera intrínseca. Cualquier teoría matemática se presenta entonces como una totalidad plena independiente del tiempo, seres que son cualitativamente distintos entre sí (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 135-138), compuesta de un conjunto de dominio, unas funciones de transformación y unas relaciones definidas entre sus elementos. No es difícil encontrar la equivalencia en este punto, toda vez que estas cualidades vistas en la definición del álgebra contemporánea tienen sus raíces en los trabajos de Noether de los años 30 del siglo XX. Pasemos ahora a definir el lenguaje formal y el puente que establece con la estructura: la noción de verdad.

Definición 2. Un lenguaje L se define como un conjunto de constantes, variables, símbolos lógicos, de funciones y de relaciones.

Por sí mismo el lenguaje carece de cualquier significado o interpretación, es simplemente una sucesión cualquiera de símbolos. En el lenguaje de primer orden el alfabeto se divide entre símbolos lógicos $[\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists =]$, variables individuales $[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n]$, símbolos de función $[(f_i)_{i\epsilon I}$ con $\mu(i)$-aridad] y símbolos de relación $[(R_j)_{j\epsilon J}$ con $\delta(j)$-aridad]. Pero no todos los símbolos interesan, solo aquellos que son *términos* y que conforman *fórmulas*. Los primeros tienen el propósito de nombrar objetos y son los símbolos y variables, así como las aplicaciones iteradas de los f_i. Las fórmulas, por su parte, son el conjunto de símbolos obtenidos al aplicar reglas (por un número finito de veces) sobre términos y otras fórmulas.

La utilidad, en este caso, del lenguaje de primer orden radica en que nos permite caracterizar una estructura en términos lógicos, $L(\mathfrak{A})$. En $L(\mathfrak{A})$ se definen tantos símbolos en correspondencia con cada uno de los componentes de la estructura y manteniendo igual rango (μ, δ). Por ejemplo, para hablar de estructuras tales como $(\mathbb{R}, 1, \leqslant)$ o $(\mathbb{N}, 0, \subseteq)$, requerimos de un lenguaje (L) de tipo $(0, 2)$. Este lenguaje nos permitirá hablar de cualquier otra estructura que sea del mismo tipo. Decimos entonces que L es un lenguaje de primer orden *adecuado* a $\mathfrak{A}$.

La interpretación consiste, pues, en aplicar una asignación uno-a-uno, $\mathfrak{J}$, entre los símbolos del lenguaje y las funciones y relaciones de la estructura. Tenemos, por ejemplo, el siguiente lenguaje

$$L = (c, d, f^2, g^2, R^2)$$

y una estructura

$$\mathfrak{C} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leqslant)$$

Se dice entonces "interpretación" a la forma de interpretar los símbolos en el lenguaje. En otras palabras, el puente entre la sintaxis (L) y la estructura $(\mathfrak{C})$ se obtiene por medio de la siguiente asignación:

$$\mathfrak{J} = (c \to 0; d \to 1; f^2 \to +; g^2 \to *; R^2 \to \leqslant)$$

Otra interpretación completamente diferente sería, por ejemplo,

$$\mathfrak{J}' = (c \to 1; d \to 0; f^2 \to *; g^2 \to +; R^2 \to \leqslant)$$

y así sucesivamente.

Sea $L = (c, R^2)$ y $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, 0, \leqslant)$, tenemos que $\forall x R(x, c)$ es verdadera si y solo si $R(x, c)$ es verdad con cualquier asignación que tenga x. Vemos aquí, formulado matemáticamente, el *método extensivo* de Lautman "que añade, a los sistemas de axiomas estudiados, la consideración de los campos de individuos capaces de servir como valores para los argumentos de las funciones lógicas de una fórmula de la teoría" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 208).

3.2. La relación de satisfacción y la definición de verdad de Tarski

Como hemos visto, Hilbert constituye la referencia fundamental que conecta a Lautman con la proto-teoría de modelos. Ahora bien, el otro referente para conectar la teoría de modelos actual y Lautman, lo constituye Alfred Tarski (1901-1983). Concretamente, el desarrollo del concepto de verdad que inaugura la teoría de modelos como rama con derecho propio de la lógica matemática en la década del cincuenta. No obstante, Tarski ya tenía algunos trabajos en las décadas precedentes que anteceden a su artículo de 1954, y de los que Lautman tuvo noticia.

En la presente parte analizaremos la relevancia de la noción de satisfacción de adelante hacia atrás. Esto es, en primer lugar comprender cuál es su uso actual en la teoría de modelos. Luego, trazar el camino por el que Tarski llega a la definición de verdad entre las décadas de 1930 y 1950. Por último, evidenciar de qué manera Lautman ya preveía en los años 30 del siglo pasado, el surgimiento y perfeccionamiento de las nociones de verdad e interpretación en el marco de una *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia.*

3.2.1. Verdad lógica: mediación estructura ($\mathfrak{A}$) - lenguaje ($\boldsymbol{L}$)

Tenemos entonces una estructura ($\mathfrak{A}$) que es interpretada en el lenguaje formal de primer orden, L($\mathfrak{A}$), a través de una función de asignación uno-a-uno ($\mathfrak{J}$). Ahora, el paso a seguir consiste en asociar una fórmula en lógica de primer orden (φ) o conjunto de estas (Γ) a una estructura ($\mathfrak{A}$). "Following Tarski, we shall say that a sentence φ is true in a structure $\mathfrak{A}$, or -which amounts to the same thing- that $\mathfrak{A}$ is a model of φ, if it is actually the case that φ holds in $\mathfrak{A}$"(Manzano, 1999, p. 35). Se sigue, por tanto, que la noción de *satisfacción* es una de las más importantes en teoría de modelos, pues establece la mediación entre la estructura y el lenguaje a través de la noción de verdad (Casanovas, 2006, p. 138). Se dice, entonces, que cualquier estructura $\mathfrak{A}$ es un *modelo* de un enunciado del lenguaje L($\mathfrak{A}$), cuando φ es verdadero en $\mathfrak{A}$.

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

Formalmente la teoría de modelos tiene por cometido, en primer lugar, clasificar estructuras y clases de estructuras de acuerdo a los enunciados que estas satisfacen. En segundo lugar, la teoría de modelos busca analizar las relaciones que son definibles al interior de una estructura dada (Casanovas, 2006), para lo cual definimos

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, ..., x_n)$$

en donde una fórmula φ es satisfacible si y solo si existe al menos una interpretación $Mod(\varphi)$ que es un modelo de φ (interpretando adecuadamente las variables $x_1, ..., x_n$). Al respecto, Lautman afirma:

> Una fórmula se dice universalmente válida si, cualesquiera que sean los predicados con los que se substituyen las variables que representan funciones lógicas y cualesquiera que sean los individuos que se substituyen por las variables argumento, se obtiene siempre una proposición verdadera; una fórmula se dice realizable si existe al menos un campo de individuos y un modo de substituciones similares, capaces de convertir a la fórmula en una proposición verdadera (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 208).

Ahora bien, la noción de satisfacción que parece evidente para nosotros no siempre fue clara. Antes de la década del 1930 reinó un esceptismo alrededor de conceptos semánticos como verdad, denotación o definición. Las paradojas lógicas y anomalías derivadas de estos conceptos reforzaron aún más la desconfianza entre filósofos y matemáticos. Tarski cambió por completo este panorama al demostrar que, si suponemos que la sintaxis del lenguaje se especifica con exactitud y la metateoría tiene poder teórico, entonces es posible definir la verdad en el lenguaje objeto (y aquello que se puede definir explícitamente puede eliminarse). "It follows that the defined concept cannot give rise to any inconsistencies (that is, paradoxes). This gave new respectability to the concept of truth and related notions" (Raatikainen, 2006, p. 1).

Alfred Tarski (1901-1983)

Si bien es claro que Lautman no conocerá la definición formal de verdad y consecuencia que es usada en la teoría de modelos, estas ya venían siendo usadas y entendidas correctamente desde la década de 1920. Tarski y Vaught (1957) definen formalmente por primera vez la noción de verdad en una estructura, pero su concepción primitiva ya está presente en el desarrollo de la lógica de Gödel. A principios del siglo XX ya se definía una clase de estructuras dado el conjunto de *leyes* que estas deben cumplir (los axiomas definidos para una clase de estructuras). En tal sentido, los lógicos trabajaban en un lenguaje formal que pudiera ser usado para expresar dichas leyes, especialmente en el lenguaje de primer orden (Hodges, 1986).

El concepto de verdad en los lenguajes formalizados de 1935, representa una de las mayores contribuciones a la filosofía del siglo XX (Smid, 2014). Tarski trabaja en este artículo la semántica de los sistemas formales y define el concepto de verdad como un acuerdo entre aserciones y hechos ("la nieve es blanca" si y solo si la nieve es blanca). Si solo tenemos una definición de verdad aserciones-hechos no hay en realidad un criterio de verdad, pues podríamos errar al afirmar que una teoría es verdadera. Así, Tarski indaga por las relaciones entre los lenguajes formalizados y aquellos objetos respecto de los cuales estos lenguajes pueden ser interpretados con el fin de producir proposiciones verdaderas sobre tales objetos. Posterior a Gödel la semántica lógica adquiere una relevancia fundamental, pues demuestra que si un determinado cálculo permite un modelo, este es coherente. Se da entonces la prueba de coherencia de carácter semántico (Reale and Antiseri, 2012, Tomo III, p. 848).

Así, la noción clave de la teoría de modelos, la satisfacción en una estructura o la verdad en un modelo, se encuentra de manera seminal en *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados* (Raatikainen, 2006). Sabemos, por otra parte, que Lautman acudió directamente al artículo *Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit*, también de 1935 (Zalamea, 2011b, p. 547) y es muy posible que también conociera *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados.* En la presentación que realizara Lautman en el VIII Congreso Internacional de Filosofía de las Ciencias en Praga (1935), reconoce el alcance de los planteamientos de Tarski.

> Tarski no sólo introduce en su metalógica las nociones de la metamatemática hilbertiana; intenta elaborar con ellas una «semántica», o teoría general de las correspondencias entre los signos y las cosas significadas, y emprende el estudio de nociones como la verdad o la definición, que tocan de cerca la esencia misma del formalismo y su valor filosófico (Lautman, 2011, CIFC, p. 92).

No resulta entonces difícil, o por lo menos no es extraño, encontrar una profunda relación entre la filosofía de Lautman y la presentación formalizada de la posterior teoría de modelos. No sobra recordar que este concepto de verdad desarrollado por Tarski es fundamental para el posterior desarrollo y consolidación de la teoría de modelos como rama de la lógica matemática.

> Existe, entonces, una equivalencia, dentro de lo finito, entre la estructura no contradictoria de un sistema de axiomas y la existencia de un campo [*modelo*] con un número determinado de individuos tal que el sistema sea realizable en ese campo [*modelo*]. Este resultado, tan simple que parece casi evidente, contiene en germen toda una nueva teoría de las relaciones entre esencia y existencia (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 209).

Como lo resalta Ledesma (2008), Lautman cita este resultado de Hilbert-Bernays para mostrar que el interés se centra ahora en determinar si la estructura de un sistema de axiomas permite realizar un campo o modelo de individuos en el que se mantienen las relaciones establecidas en los axiomas. Esencia y existencia ya no son, por tanto, propiedades referidas a los seres matemáticos en sí mismos, pues ya no interesa establecer si una definición implica la existencia. "De esta forma, la esencia considerada sigue siendo la del sistema de axiomas, pero aquello cuya existencia permite ser afirmada por el estudio interno del sistema, son las "interpretaciones" del sistema, o sea, los modelos donde los axiomas se realizan" (Ledesma, 2008, pp. 251-252). Nos arriesgamos entonces a concluir que el *germen* de una nueva *teoría de las relaciones entre esencia y existencia*, florece efectivamente en lo que más adelante se constituirá como la teoría de modelos.

> Lejos de centrarse en discusiones gramaticales o en juegos de lenguaje, los trabajos de Lautman apuestan, en cambio, por un entrevero semántico y pragmático —irreducible a meras consideraciones sintácticas— entre niveles distintos de génesis matemáticas, jerarquías de nociones y escalas de hechos, precisamente contrastables sobre objetos físicos y susceptibles de ser parcialmente modelados por construcciones ideales (Zalamea, 2011a, p. 28).

Revisemos, por último, la noción misma de *modelo*. En la teoría de modelos se refiere a aquello que es *real*, mientras que las teorías matemáticas efectivas son las representaciones de ese modelo. "A model in the sense of model theory [...] is supposed to be the real thing. It is a mathematical structure, and that which it is a model of (a set of axioms, say) plays the role of the idealization" (Pillay, 2000, p. 1373). Esta distinción entre lo real y lo representado tiene en Lautman una distinción equivalente. Existen ciertas estructuras perfectas que son realizables en determinadas teorías matemáticas a partir de enunciados lógicos.

> La metamatemática puede así considerar la idea de ciertas estructuras perfectas [modelo], eventualmente realizables por teorías matemáticas efectivas, y esto independientemente del hecho de saber si existen teorías con esas propiedades; pero sólo se posee entonces un enunciado de un problema lógico, sin tener en modo alguno los medios matemáticos para resolverlo. Esta distinción entre la posición de un problema lógico y su solución matemática ha parecido a veces poco fecunda, puesto que lo que importa no es saber si una teoría podría ser no contradictoria, sino poder decidir efectivamente si lo es o si no lo es (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 138-139).

Resulta por demás sorprendente que Lautman indique la posibilidad de establecer teorías matemáticas efectivas desde la metamatemática aun si no se cuenta con tal teoría. La teoría de modelos no se limita a la clasificación y estudio de las estructuras, sino que uno de sus campos de aplicación más fructíferos consiste en llegar a nuevos resultados matemáticos en distintas ramas, incluso, solucionar algunos teoremas o problemas que no habían sido posible solucionar desde su base estrictamente matemática. "The modern era has seen, often for unexpected reasons and sometimes because of the internal development of the subject, that model theory is in a position to discern amazing patterns and analogies in tame mathematics [...] and in the process to obtain new results" (Pillay, 2000, 1373).

Las principales áreas de aplicación matemática de la teoría de modelos son la geometría no-conmutativa, la teoría de números, la geometría algebraica y analítica, el análisis funcional, entre otras. Insistimos en el apelativo de sorprendente, pues Lautman planteó estas aplicaciones décadas antes de que la teoría de modelos las realizara. Como lo señala Pillay (2000), por razones que no comprendemos muy bien, la teoría de modelos tiene algo que decir respecto a la matemática. ¿Por qué la teoría de modelos es capaz de lograr resultados novedosos en diversas áreas de la matemática? Cuando abordemos la TGE3 (última sección del presente capítulo) daremos una interpretación lautmaniana a esta cuestión.

> Lautman anticipa así una de las grandes conquistas de la lógica matemática a partir de los años 1950: el haber adaptado sintaxis, cálculos, semánticas, metodologías, al entorno de los conceptos a estudiarse, detectando, gracias a los avances en teoría de modelos, un sustrato lógico natural para cada clase de problemas o cada clase de estructuras semánticas, sustrato que de ninguna manera puede asumirse a priori (Zalamea, 1994, p. 277).

3.2.2. Tarski y la oposición lógica a Carnap

Las referencias de Lautman en relación a los trabajos de Tarski no son muy abundantes. No obstante, el análisis del filósofo francés que hemos expuesto respecto a los avances de Tarski en la metamatemática es bastante acertado a la luz del desarrollo que tendría décadas más tarde. En 1934 tiene lugar el *VIII Congreso Internacional de Filosofía de la Ciencia en Praga* (Lautman, 2011, CIFC, pp. 84-103). Lautman anota que los conferencistas tendieron a agruparse en dos bandos, uno a favor de la Escuela de Viena con Carnap a la cabeza, y el resto en posiciones bastante heterogéneas. La conferencia de Carnap giró en torno a la relación entre filosofía y ciencia, específicamente, formalizar el lenguaje científico como la tarea más relevante.

Carnap expone que una ciencia experimental no se refiere al estudio de un determinado dominio de la realidad, sino a "un conjunto coherente de proposiciones donde intervienen algunas palabras y algunos atributos, correspondientes a los objetos de la experiencia y a sus propiedades observables" (Lautman, 2011, CIFC, p. 86). Las proposiciones corresponden a un experimento determinado (o *protocolo*). Así, continúa Lautman, el lenguaje científico consta de dos clases de signos: unos refieren a descriptores de las propiedades empíricas de los objetos, y otros son tomados de la lógica y la matemática. En ese orden de ideas los problemas que se plantean giran en torno a los signos en sí mismos, independiente del sentido que puedan tener. "¿Cuáles son las reglas que permiten reconocer que un ensamblaje de signos constituye una proposición de la ciencia estudiada? ¿Cuáles son las reglas que permiten deducir, a partir de ciertas premisas aceptadas otras proposiciones?" (Lautman, 2011, CIFC, p. 87). Carnap llamó a estas reglas la *sintaxis del lenguaje científico*.

La crítica que realizara Lautman al neopositivismo lógico tanto de Wittgenstein como de Carnap, "es la reducción de la filosofía al estudio sintáctico de los enunciados científicos. El papel de la filosofía es así un papel de clarificación de las proposiciones que intervienen en lo que generalmente se llama teoría del conocimiento" (Lautman, 2011, CIFC, p. 87). La limitación de este formalismo se encuentra en los teoremas de Gödel, al establecer que nunca podrá demostrarse la no contradicción de cualquier teoría formalizada que contenga la aritmética. La limitación surge del simbolismo mismo de la teoría, tal como ocurre con el principio de incertidumbre de Heisenberg, pues "las relaciones de incertidumbre pueden demostrarse a partir de las propiedades formales de los operadores matemáticos que corresponden a las magnitudes físicas estudiadas" (Lautman, 2011, CIFC, p. 90).

En este punto Lautman marca la diferencia principal entre Carnap y los metamatemáticos de la escuela de Hilbert. La metamatemática constituye para estos últimos el espacio en donde se trasladan los problemas de los sistemas formales en sí mismos a un lenguaje de *tipo superior*, en el sentido de Russell. Lautman llama la atención que ninguno de los alumnos de Hilbert presentara una defensa de esta metamatemática en oposición a la sintaxis de Carnap. Solo Tarski expone una oposición efectiva desde la idea de sintaxis a los planteamientos de aquél.

> La oposición a la lógica de Carnap sólo se manifestó, en el terreno técnico de la sintaxis lógica, con Tarski y los metalógicos polacos. Tarski parece preocuparse más que Carnap por las demostraciones efectivas en metamatemática. Carnap no razona, en efecto, sobre los axiomas de verdaderas teorías matemáticas determinadas, sino sobre modelos esquemáticos de sistemas de axiomas posibles [...] Abandonando el punto de vista puro

> de la comprensión, que es el de Carnap, Tarski reintroduce en metamatemática la consideración en extensión de los campos de individuos cuya construcción es necesaria para el estudio de las proposiciones (Lautman, 2011, CIFC, p. 91).

Así, toda definición tiene por cometido la búsqueda de las clases de individuos capaces de establecer entre ellos las relaciones establecidas por los axiomas (*interpretaciones del sistema*). De lo contrario, la definición se limita a una simple cuestión nominal. En consecuencia, Tarski establece que un sistema de axiomas es "completo" (*Vollständigkeit*), si y solo si, las relaciones matemáticas son encontradas entre los individuos de los campos asociados al sistema de axiomas. Ahora bien, la noción de "completo" ya no hace parte de la matemática, sino que pertenece a un tipo superior al sistema estudiado.

> La proposición: "este sistema de axiomas es completo", o, lo que es lo mismo: "este x es completo", no tiene sentido, en efecto, sino en una "metalógica" donde la variable sujeto x, así como las propiedades susceptibles de serle atribuidas, son de un tipo superior a las variables y a las propiedades que se refieren a los individuos de los campos vinculados a las proposiciones del sistema estudiado. Tarski no solo introduce en su metalógica las nociones de la metamatemática hilbertiana; intenta elaborar con ellas una "semántica", o teoría general de las correspondencias entre los signos y las cosas significadas, y emprende el estudio de nociones como la verdad o la definición, que tocan de cerca la esencia misma del formalismo y su valor filosófico (Lautman, 2011, CIFC, p. 92).

En el escenario del formalismo tradicional, el signo está despojado de toda relevancia o relación a una realidad por fuera del mismo. Así, entonces, la verdad de una proposición se establece al interior del formalismo. Lautman considera que tanto Wittgenstein como Carnap, asumen una concepción tautológica del *formalismo lógico-matemático*, en la que se confunde "verdadero" con "analítico" y "falso" con "contradictorio". "Tarski, en cambio, restituye al formalismo su carácter de lenguaje orientado a expresar una realidad e intenta proporcionar en ese formalismo una definición de la verdad que asegure una correspondencia entre los resultados del cálculo y lo real" (Lautman, 2011, CIFC, p. 93). Tarski muestra que gracias a la teoría de tipos de Russell, existe en el formalismo la manera de ir más allá del cálculo puro (sintaxis) a una "ciencia de los significados" (semántica). Ahí radica, justamente, el valor filosófico de los sistemas axiomáticos y del formalismo. "Tarski abre la visión semántica y se acerca en esto, en cierto sentido, a Lautman al dotar al formalismo de una referencia a lo real" (Arriaga, 2018, p. 29).

Nos interesa remarcar, por último, la imagen propia que Tarski desarrolla en referencia a lo que él mismo denominó como "lo matemático", esto es, la mayor relevancia de conceptos semánticos sobre la sintaxis. Esta imagen de Tarski persiste desde los inicios de la teoría de modelos hasta el día de hoy, si bien no siempre de manera explícita (Kennedy, 2019).

> Our interest here is in Tarski's conceptualization of "the mathematical", as he called it, a conceptualisation which grew out of a certain picture of mathematics, and which in turn would contribute mightily to a stream of thought that persisted in model theory from its emergence in the algebraic school in the nineteenth century to the work of present day model theorists such as S. Shelah and B. Zilber: work which prioritises the suppression of syntax and logic in one form or another, and the forefronting of semantic concepts. And although "the mathematical" has not figured in the work of Shelah and Zilber in the very explicit way it did for Tarski, interestingly enough the concept has reemerged in present day model theoretic practice —albeit in a more polemic form— especially among model theorists who are committed to first order methodology (Kennedy, 2019, p. 97).

Siguiendo a Kennedy (2019), se da entonces un movimiento que podríamos llamar "subterráneo", el cual atraviesa la práctica de la teoría de modelos desde la escuela algebraica en el siglo XIX hasta hoy. Este movimiento prioriza la supresión de la sintaxis a favor de conceptos semánticos. Se instaura un nuevo paradigma en la práctica de la teoría de modelos. Las diferentes lógicas se utilizan de manera dinámica, local y oportunista (Kennedy, 2019, pp. 102-140). Pero este movimiento no se limita a la lógica, pues en el conjunto de la matemática contemporánea, los matemáticos estudian aquellos sistemas que consideran "interesantes" y en conexión con el conocimiento matemático pre-existente. En otras palabras, la práctica matemática surge de los intereses del matemático, haciendo uso de las herramientas que tiene a mano y el avance en un campo determinado se da por prueba y error (Ferreirós, 1999).

A partir de los conceptos metamatemáticos construidos por Tarski en el lenguaje matemático, la teoría de modelos se permitió usar los métodos sintácticos y semánticos de manera libre, pragmática y dinámica con el fin de probar distintos teoremas. La distinción entre sintaxis y semántica se hizo más rica y compleja. En contraste, las preguntas de carácter fundamental perdieron cada vez más relevancia, si es que algún día la tuvieron al interior de la práctica de la teoría de modelos (Kennedy, 2019, p. 101).

Esta nueva manera de proceder entre la sintaxis y la semántica (dinámica, libre y oportunista), se expresa en la filosofía de Lautman en el interés dinámico del mixto. Los entes matemáticos no se conciben como entidades cerradas y terminadas en sí mismas. Por el contrario, la matemática produce un movimiento permanente (dialéctica) de *liberación* y *composición*.

> En términos ajenos a Lautman, pero que sitúan su posición en un terreno más conocido, el hacer matemático, por un lado, divide el contenido de un concepto mediante definiciones (sintaxis) y derivaciones (gramática), y libera sus componentes simples; por otro lado, mediante modelos (semántica) y traslados (pragmática), construye entes intermedios que relanzan la existencia de esos filamentos simples, recomponiéndolos dentro de nuevos conceptos. Cuando el mixto consigue combinar, a la vez, una gran sencillez y un fuerte poder reflector en sus componentes -como es el caso de las superficies de Riemann o de los espacios de Hilbert, tan admirados y ejemplarmente estudiados por Lautman-, la creación matemática alcanza tal vez su mayor altura (Zalamea, 2011a, p. 49).

Hemos visto, hasta aquí, conexiones entre los desarrollos de la metamatemática de Tarski y el planteamiento de la TGE3 de Lautman. La discusión con Carnap permite evidenciar, por una parte, el alcance filosófico que adquiere el formalismo en el desdoblar de los objetos matemáticos entre sintaxis y semántica. Por otra parte, la necesidad de elaborar conceptos en niveles superiores al del sistema en estudio (metalenguaje). Lautman reconoce en este último el aporte fundamental de Russell con la teoría de tipos. Ahora bien, resulta interesante este reconocimiento de Lautman (Lautman, 2011, CIFC, p. 93), pues en la historografía tradicional se ha marginado el aporte de la teoría de tipos a la teoría de modelos, restringiendo su desarrollo al terreno de la lógica de primer orden (Schiemer and Reck, 2013).

> La semántica de Tarski no deja de ser por ello un muy serio esfuerzo, que justifica su apelativo de ciencia de los significados y posee el gran mérito de mostrar que en el seno del formalismo existe, gracias a la maravillosa teoría de tipos de Russell, una manera de salir del cálculo puro y volver a entrar en contacto con la física (Lautman, 2011, CIFC, p. 93)

En resumen, hemos mostrado hasta aquí la importante co-incidencia entre la filosofía de Lautman y la teoría de modelos en su versión clásica. Pero más allá de esto, afirmamos que la germinación de la teoría general de los enlaces entre esencia y existencia se da en el desarrollo de la teoría de modelos. Dicho esto en el marco de la filosofía lautmaniana, la teoría de modelos presenta a nuestra consideración un extraordinario potencial para el desarrollo de la filosofía matemática. Claro está, el desarrollo de esta idea supera con creces los alcances de la presente tesis. No obstante, en lo que sigue del capítulo nos arriesgaremos a ofrecer algunos lineamientos para el avance de esta filosofía a futuro. En el cuarto y último capítulo, tomaremos la *conjetura de tricotomía* de Zilber como ejemplo expositivo de estas ideas.

3.3. Lectura *à la Lautman-Cavaillès* de la teoría de modelos

Hemos evidenciado en términos globales la co-incidencia entre la teoría de modelos claśica en su periodo de formación y la filosofía de Lautman. En la presente sección se pretende ir un poco más allá y realizar una lectura *à la Lautman* de tres teoremas fundamentales de la teoría de modelos: Löwenheim-Skolem (1919), Completitud (1930) y Compacidad (1930). Este último es un corolario de Completitud, así que se hará mayor énfasis en este. Estos teoremas no solo son importantes al inicio de la teoría de modelos, sino que constituyen en buena medida la columna vertebral de su desarrollo durante la segunda mitad del siglo XX y hasta nuestros días. Tarski (1957), junto con Vaught, es el catalizador de todos estos avances y quien permite el surgimiento de la teoría de modelos como rama de la lógica matemática. Pretendemos, por tanto, trazar el encuentro entre la filosofía matemática de Lautman y la teoría de modelos clásica. En otras palabras, de qué manera se desarrolla en la teoría de modelos una teoría general de los enlaces entre esencia y existencia.

Pero valga advertir que para ello nos apoyaremos de manera importante en la tesis de doctorado de su amigo Jean Cavaillès, *Método axiomático y formalismo* (1937). La razón de esto son las referencias que el propio Lautman da a su obra. En varios puntos de su exposición remite al trabajo de Cavaillès para precisar discusiones lógicas propias de su generación (Ledesma, 2008, p. 250). Asumimos, por tanto, el completo acuerdo entre estos dos filósofos en lo que respecta a la presente sección. Por tanto, sería más preciso decir que realizaremos una lectura *à la Lautman-Cavaillès* de los teoremas de Löwenheim-Skolem, Completitud, Compacidad y del concepto de verdad de Tarski.

En la primera parte de esta sección analizaremos cuál es el problema filosófico y matemático que Lautman y Cavaillès identifican respecto a la cuestión por la fundamentación de las matemáticas, así como de su relación con la naciente lógica matemática de las décadas del veinte y el treinta. Posteriormente, estudiaremos la interpretación que realizan de aquellos teoremas y en qué medida dan respuesta a los problemas matemáticos y filosóficos anteriormente planteados. Por último, formulamos la siguiente tesis: la teoría de modelos constituye una expresión o manifestación de aquello que Lautman entendió por *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia* (TGE3).

3.3.1. Método axiomático y formalismo: la metamatemática de Hilbert

En la sección 2.2.1. discutimos la polémica entre Frege y Hilbert, así como la manera en que se abrieron dos caminos bien diferenciados en la lógica matemática. En lo que respecta al camino de Hilbert, este tiene un antecedente muy importante en George Boole (1815-1864), Charles Peirce (1839-1914), Ernst Schröder (1841-1902) y Leopold Löwenheim (1878-1957) en lo que se denominó el álgebra de la lógica, y que denominaremos BPSL. Esta tradición tiene una relevancia importante al concebir la lógica como cálculo, en oposición a la noción de lógica como *lenguaje universal*. Los resultados del álgebra de la lógica han tenido una influencia importante en el desarrollo posterior de la lógica matemática. Ahora bien, es importante resaltar que esta tradición tiene un eco significativo en los matemáticos y menos en los filosófos; de la misma manera en que la lógica de Frege-Russell-Whitehead-Wittgenstein (FRWW) resulto más atractiva para los filósofos pero no así para los matemáticos.

No obstante, ambas tradiciones al llegar los años 20 del siglo pasado exhibían serias deficiencias en lo que respecta a las nociones de los sistemas lógicos de la metamatemática. Por una parte, a FRWW le faltó el “meta”, es decir, la posibilidad de examinar los sistemas lógicos desde un punto de vista externo. Como se discutió, existe un *predicamento logocéntrico* reduccionista que impide salir del propio sistema, lo cual deviene básicamente en intentar tautologizar la matemática. Por otra parte, falta en BPSL la “matemática”, es decir, un entendimiento completo del significado de una representación formal en el que pueda exponerse cabalmente el contenido del discurso matemático y las relaciones inferenciales entre sentencias matemáticas. Pero fue gracias a la discusión entre estas dos tradiciones que los lógicos de los años veinte culminaron la visión moderna de la lógica (Goldfarb, 1979, pp. 351-356).

Podemos entonces afirmar que Hilbert es quien da un salto cualitativamente importante del álgebra de la lógica hacia una efectiva metamatemática. La teoría de modelos nace justamente de esta nueva vía abierta por Hilbert. “Model theory can be regarded as the product of Hilbert's methodology of metamathematics and the algebra of logic tradition, represented specifically by the results due to Löwenheim and

Skolem. But it was Tarski who gave the discipline its classical foundation" (Burris and Legris, 2018). El proyecto hilbertiano fue desplegado en todas sus consecuencias gracias al trabajo de importantes matemáticos como Thoralf Skolem (1887-1963), Jacques Herbrand (1908-1931), Gerhard Gentzen (1909-1945) y Kurt Gödel, o podríamos decir HSHGG. Lautman y Cavaillès, conocedores de tales avances en el álgebra y la lógica matemática, adscriben su reflexión filosófica en esta línea[4].

> Es sabido que el interés de la lógica matemática surge de la unión de dos series de investigaciones independientes. Los lógicos, con Boole y Schröder, habían querido que la deducción lógica se beneficiara de las ventajas del cálculo algebraico. Habían llegado a un cálculo de clases, de proposiciones y de relaciones, y habían abierto así, para el *calculus ratiocinator* requerido por Leibniz, un dominio que se extendía hasta incluir las matemáticas. Independientemente de estos trabajos, los matemáticos habían sido llevados a investigar los fundamentos lógicos de las matemáticas, cuya certeza parecía sacudida por el descubrimiento de las famosas antinomias de la teoría de conjuntos (Lautman, 2011, CSLM, p. 363).

Para Cavaillès, esta crisis de la teoría de conjuntos fue la que dio su importancia al problema de los fundamentos de la matemática. El único remedio plausible fue una reconstrucción lógica rigurosa: por una parte, aislando los principios y, por otra parte, la descripción de los modos de la deducción lógica (Cavaillès, 1992, pp. 49-52). El método axiomático de Hilbert permite, para Cavaillès, una representación completa y lógicamente consolidada del conocimiento matemático. Pues este manifiesta la "unidad orgánica de una teoría, no según los objetos -construidos- de los que se ocupa, sino por la *unidad operatoria de un cierto procedimiento intelectual*, el método axiomático provoca a la vez el reagrupamiento de disciplinas y la redistribución de la economía interior de una disciplina" (Cavaillès, 1992, p. 79. *Cursivas propias*).

Queda abierta la pregunta de si el método axiomático puede fundamentar la matemática, puesto que los axiomas solamente describen los sistemas de los que hacen referencia. Si bien parece un regreso al logicismo, el principal avance respecto a este consiste en considerar la estructura de varios axiomas en vez de uno. Para los logicistas, nos comenta Cavaillès, el valor del axioma se basa en la reducción

[4] Recordemos que Hilbert es el principal referente de Lautman y Cavaillès. Así mismo Herbrand, gracias a su cercana relación intelectual y personal con Lautman, tiene una influencia determinante en este último en lo que respecta a la reflexión filosófica de los trabajos del matemático alemán (Zalamea, 2011a, pp. 24-26). Cavaillès, por su parte, tiene una fuerte influencia tanto de Hilbert como de Husserl, Heidegger, Bachelard y de la matemática Emmy Noether, con quien colaboró directamente.

al principio de identidad. En el caso de Hilbert, el valor de un sistema axiomas se fundamenta en los principios de *no-contradicción*, *independencia* entre los axiomas y *saturación*, siendo el primero el que dota de sentido a los otros dos. Así, la no-contradicción es para la "axiomática moderna", lo que el principio de identidad es para la "axiomática tradicional".

La inflexión que resultó de las paradojas en la teoría de conjuntos (1890-1904) se expresa en dos hechos. Por una lado, la teoría de conjuntos se desarrolla gracias a nociones que son comunes a otras áreas de la matemática. Por otro lado, empieza a tener una influencia cada vez más relevante en dominios cercanos. La dificultad reside en la inviabilidad de aislar tales paradojas sin afectar al conjunto del edificio matemático. En ese orden de ideas, se hizo necesario y urgente revisar los fundamentos mismos.

Pero, nos advierte Cavaillès, la reflexión de estos inconvenientes refiere a problemas de la razón que van más allá de la matemática: "la historia muestra la estrecha vinculación entre conflictos técnicos parecidos y los sistemas edificados por los filósofos. La dificultad actual se encuentra prefigurada en Descartes, Leibniz y Kant, a partir de quienes se puede aprehender mejor su evolución" (Cavaillès, 1992, p. 28). En este caso, precede la discusión acerca de la diferencia entre el número y la extensión.

En Descartes surge la siguiente cuestión: ¿Cuál es la idea de extensión? Dada la separación entre el cuerpo y el alma se constata la separación entre extensión y pensamiento. La imaginación corresponde al cuerpo, mientras que la idea clara y distinta pertenece a la esfera del intelecto. Esto produce un doble peligro. Primero, el "aritemtismo" en el que pareciera la aritmética como única ciencia verdadera, y en donde solo podemos tener una idea de las curvas que son representadas por una ecuación. Segundo, la dificultad de aplicar una ciencia conforme estrictamente al pensamiento a un universo extenso (Cavaillès, 1992, pp. 28-30).

Leibniz, por su parte, avanza la cuestión por la extensión en el marco de una teoría del continuo. Existe una *pluralidad discreta de las sustancias* (mónadas), distinta de una *continuidad fenoménica de sus vínculos espacio-temporales*. "La extensión, la figura y el movimiento encierran algo de imaginario y de aparente aun cuando se les conciba con mayor distinción que el color y el calor, sin embargo, ... encontremos que estas nociones tienen todavía algo de confuso... y sostengo como demostrable que no hay figura exacta en el cuerpo" (Cavaillès, 1992, p. 30, *Carta de Leibniz a Foucher (1688)*).

La realidad se compone de mónadas, puntos metafísicos inextensivos, pero que al juntarse generan cuerpos compuestos extensivos. ¿Cómo puede ser esto posible? Leibniz responde que la extensión no es un atributo intrínseco de las mónadas sino derivado de la substancia. Contrario a los cartesianos, quienes atribuyeron a la extensión el estatus substancial. La extensión es propia del orden fenoménico, es decir, como es percibida la realidad y no como realmente es. Existe una cualidad repetida en nuestra percepción que se refiere a la resistencia pasiva de la materia, expresada en la impenetrabilidad (*antitipia*) y la inercia (resistencia al movimiento).

> [L]as relaciones entre cantidad continua y sistemas discretos se transportan del plano matemático al plano metafísico. La matemática es si no la ciencia de las relaciones ideales; en la voluntad divina todo se afirma de un solo golpe, no hay un número para la totalidad de las mónadas; un número infinito, por otra parte, es contradictorio. No es sino en el entendimiento divino, es decir de manera hipotética, que aparecen las relaciones (Cavaillès, 1992, p. 31).

La matemática como ciencia de las relaciones ideales, resuelve el fundamento de esta por su reducción a la lógica. Recordemos que en la distinción leibniziana entre verdades de razón y verdades de hecho, las primeras son proposiciones necesarias y siempre verdaderas (su negación no es posible). Por los principios de no-contradicción e identidad la lógica y la matemática son ciencias tautológicas (analíticas). "En la medida en que las matemáticas afirman, no hacen sino explicar los axiomas y definiciones: todo se reduce, como fundamento, a combinaciones infinitamente variadas de un sistema primitivo de nociones simples" (Cavaillès, 1992, p. 31).

Comenta entonces Cavaillès, que el problema planteado no recibe solución alguna, toda vez que no se indican aquellas nociones simples ni su combinación, más allá de la relación espacial de sus signos. Así mismo, el postulado de una multiplicidad previa constituida en las mónadas, subordina la cantidad continua a la discreta: la realidad de lo continuo es un resumen de lo discreto. La realidad del conjunto se define como aproximación metafísica (Cavaillès, 1992, pp. 30-32).

Leibniz abona el terreno al esquematismo kantiano: número y espacio como fenómenos. Kant define para el sujeto dos facultades. La primera, de entendimiento, refiere al pensar: elaborar conceptos hacia lo general del que resultan las categorías. La segunda facultad es la sensibilidad de la que es capaz de intuir representaciones de los objetos. La lógica pura dentro de la primera facultad se define como atemporal, terminada y puramente formal. En contraste, la matemática es intuición pura. Así, la mera consistencia formal o ausencia de contradicción es insuficiente para dotar de existencia a un objeto matemático: la matemática no es reducible a la lógica ¿Cómo es entonces posible la construcción del conocimiento matemático mediado por el sujeto?

La matemática hace uso constructivo de la razón pura, es decir, la existencia del objeto matemático se define por su construcción. Kant establece entonces la construcción *ostensiva* que corresponde a la geometría y la *simbólica* que hace lo propio con la aritmética. El conocimiento consiste, pues, en la introducción/construcción de nuevos conceptos que se corresponden con nuevos objetos. Así, entonces, el fundamento de la matemática se encuentra en el propio sujeto epistémico (De Lorenzo, 2010, pp. XX-XX).

¿Cuál de estas construcciones domina sobre la otra? Cavaillès cita a Kant en este punto: "la imagen pura de todas las cantidades (*quantorum*) para el sentido exterior es el espacio, el de todos los objetos de los sentidos en general, el tiempo. Pero el esquema puro de la cantidad (*quantitatis*), considerado como concepto del entendimiento, es el número" (Cavaillès, 1992, p. 37). Para Cavaillès subsisten en la epistemología kantiana tres dificultades, a saber: a) el problema del continuo asociado al tiempo, b) la injustificada independencia del álgebra respecto a la geometría, y c) la carencia de un criterio para reconocer los axiomas y de un orden entre estos. "Su única evidencia proviene de la práctica de la construcción: no se puede hacer otra cosa para unificar los objetos" (Cavaillès, 1992, p. 38).

El intuicionismo de Brouwer lleva a cabo un programa de fundamentación de las matemáticas bajo los temas principales de Kant: "carácter intuitivo inmediato del conocimiento matemático en donde la verdad se constata en una experiencia *sui generis*" (Cavaillès, 1992, p. 38). La matemática se desenvuelve como construcción imprevisible, ajena a la lógica y con primacía del esquema de número por encima de la síntesis del espacio, esto es, subordinación de la contrucción geométrica sobre la aritmética (Cavaillès, 1992, pp. 32-48).

Ahora bien, las paradojas de la teoría de conjuntos y la incorporación de nuevos instrumentos que transforman el edificio matemático, movimiento característico del siglo XIX, obligan a cuestionar el lugar en donde se encuentra el "criterio de certeza". En palabras de Cavaillès, "una reedificación lógica rigurosa aparece como el único remedio". Así, pues, la tarea de fundamentar las matemáticas requiere aislar los principios, por un lado; y establecer las formas de encadenamiento lógico, por el otro. Durante el siglo XIX se identifican dos tendencias contrapuestas en relación a su respectiva incidencia, bien sobre el análisis o bien sobre la geometría.

La primera tendencia se consolida con el logicismo de Frege, Dedekind y Russell. Este efectúa una crítica de los hábitos mismos del pensamiento, y con ello de la lógica misma. Si se define la matemática como encadenamiento de razones, resulta entonces natural intentar incorporarla a la lógica formal. La segunda tendencia no cuestiona la lógica tradicional, sino que se concentra en el análisis de las nociones y principios de partida con los cuales se siguen las reglas ya establecidas para la correcta deducción. Esta tendencia se desarrolla a partir de los trabajo de Gauss, Riemann, la axiomatización de Pasch y se perfecciona en los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert. En criterio de Cavaillès la primera tendencia lleva a un *formalismo* y la segunda al *método axiomático*. Pero, "en la confluencia de ambos el sistema de Hilbert, el formalismo propiamente dicho" (Cavaillès, 1992, p. 52).

Como ya se revisó con más detalle, el mérito fundamental que Hilbert logra en los *Fundamentos de la geometría*, consiste en mostrar la unicidad en el pensamiento de lo que hasta entonces se había considerado como dos ciencias distintas: geometría y análisis. En este punto, se consolida el método axiomático como el único capaz de fundamentar y ampliar el desarrollo matemático (Cavaillès, 1992, pp. 63-76).

> Extensión del campo de aplicación del método. Todo cálculo será susceptible de ser axiomatizado, puesto que no se trata ya de la descripción de objetos dados previamente. Se ha visto que Grassmann y Peano habían comenzado ya por la aritmética, gracias a una desviación de la formalización. El mérito de los *Grundlagen* es el haber mostrado con toda claridad, mediante la fuerza de los razonamientos, -y a propósito del sistema arguesiano y de su relación con el axioma de Arquímedes- que el tratatamiento en las dos ciencias debía ser exactamente el mismo puesto que se trataba de los mismos procedimientos de pensamiento. De ahí la consideración de que sólo el método axiomático puede fundamentar y extender el trabajo matemático, puesto que expresa su esencia, sólo había un paso. Este fue dado en 1899 (Cavaillès, 1992, p. 76).

Pasemos ahora a analizar lo que Cavaillès expone acerca de la potencia del método axiomático desarrollado por Hilbert. Principalmente, su éxito en las primeras décadas del siglo XX manifiesta la "unidad orgánica de una teoría", en tanto que "unidad operatoria de un cierto procedimiento intelectual, el método axiomático provoca a la vez el reagrupamiento de disciplinas y la redistribución de la economía interior de una disciplina" (Cavaillès, 1992, p. 79). ¿Pero puede esta fundamentar realmente la matemática? Por lo pronto, decimos que los axiomas, en cuanto procedimiento operativo, simplemente describen el sistema del que hacen parte.

> Sin embargo, dice Hilbert, una vez formulado, basta una deducción lógica para deducir todos los resultados de la teoría: parece un retorno al antoguo logicismo. La diferencia sería, solamente, que en lugar de un axioma hay varios. La analogía puede continuarse: para los logicistas, el valor apodíctico del axioma viene de su virtual reductibilidad al principio de

> identidad [...]. Para Hilbert, la autoridad de un sistema de axiomas, relativa a las teoría de la que constituye el inevitable prefacio, se funda sobre tres características: *no contradicción, independencia* de los axiomas entre sí y *saturación* (Cavaillès, 1992, p. 80).

De estas características, la primera de *no contradicción* fundamenta a las otras dos. Se entiende que la independencia entre axiomas se verifica cuando el sistema derivado de los axiomas y su negación no es contradictorio; mientras que un sistema es saturado si al añadir un nuevo axioma este se vuelve inconsistente. Así pues, concluye Cavaillès, la no contradicción cumple en la axiomática moderna de Hilbert el mismo papel de la identidad en la axiomática tradicional. Por tanto, la existencia de cualquier objeto matemático se define en ser no contradictorio.

Para que la axiomática pueda fundamentar la matemática debe superar al menos dos obstáculos, uno exterior y otro interior. En primer lugar, la axiomatización no es más que el "aislamiento" de un sistema conceptual previo. Es decir, no se produce en el vacío sino que emerge de nociones previamente constituidas en el exterior. En segundo lugar, y relacionado con lo anterior, el aislamiento de la teoría constituye un "proceso intelectual original" en su interior. En otras palabras, la axiomatización no crea la teoría en cuanto tal, sino que depura y esquematiza un conocimiento ya adquirido. En ese orden de ideas, la fundamentación por la axiomatización debe justificar ambas situaciones o transformarse para no considerarlas. "Hilbert mismo parece haber sido atrapado aquí: el dato exterior se evitará si se demuestra sucesivamente la no contradicción de teorías adosadas unas a otras [categoricidad], el dato interior si se prueba la saturación como garantía de una especie de unidad" (Cavaillès, 1992, p. 89).

Sin embargo, la categoricidad tiene sentido solo en una teoría más amplia. En lo que se refiere a una verdadera saturación, no existe en la lógica actual[5] ningún método que pueda probarla y otorgarle un significado pleno. Claro está, podría hacerse de cada teoría un sistema hipotético deductivo encerrado en sí mismo, y solo agregado arbitrariamente en un conjunto de proposiciones no contradictorias. Ahora bien, advierte Cavaillès que "el problema de los fundamentos de las matemáticas es justamente que se pueda deducir algo y, por otra parte, que una cerradura aparezca tras un cierto número de adjunciones" (Cavaillès, 1992, p. 89). Precisamente es en la noción de demostración (escondida tras la imagen de la deducción lógica), en donde es posible analizar los axiomas desde la perspectiva de la lógica, y no limitarse a la mera deducción. Al respecto, enuncia Cavaillès, se hace necesario una "reedificación

[5]El libro que estamos analizando de Cavaillès, *Método axiomático y formalismo*, es publicado originalmente en 1938.

simultánea de la matemática y la lógica". La noción de demostración solo puede ser entonces precisada en el formalismo y, por tanto, la axiomatización deviene en formalización por medio del signo, único elemento común entre matemáticas y lógica (Cavaillès, 1992, pp. 91-122).

3.3.2. Teoremas de Löwenheim-Skolem, Completitud y Compacidad

Los teoremas que trataremos en esta sección son fundamentales para el posterior desarrollo de la teoría de modelos. Si bien en décadas posteriores estos teoremas se han ampliado o reformulado, las ideas esenciales de cada uno ya están presentes en su formulación original. Estos tres teoremas se ven atravesados por la nueva relación que se establece entre infinito y finito en la matemática de principios del siglo XX. Lautman es consciente de este giro y apuntala en tal sentido la base para la formulación de una TGE3.

Leopold Löwenheim (1878-1957)

En orden de aparición se encuentra el teorema de Löwenheim-Skolem (1920) y los teoremas de completitud y compacidad (1930). Tanto Lautman como Cavaillès estuvieron al tanto de estos trabajos y realizaron algunos análisis al respecto. A continuación abordaremos cada teorema, a qué problema responde y la interpretación que realizara Lautman en el marco de la TGE3. Por estrategia de exposición, iniciamos con los teoremas de completitud y compacidad, toda vez que Löwenheim-Skolem puede formularse a partir de los primeros.

El problema de la completitud fue abordado inicialmente por Post y Hilbert, y se mantuvo latente hasta su resolución por Gödel en 1930. Tal como analizamos en la sección 3.2., las relaciones entre sintaxis y semántica (esencia y existencia) adquieren una mayor relevancia en la lógica del periodo crítico. Justamente, la forma más importante del teorema de completitud consiste en demostrar la equivalencia entre estos dos mundos,

$$\Gamma \models \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

en donde Γ denota un conjunto de fórmulas o sentencias del lenguaje en lógica de primer orden (LPO) y φ es otra fórmula de LPO. La parte derecha de la expresión se lee como que Γ es consistente con φ (sintaxis), mientras que la parte izquierda significa que todo modelo de Γ es también modelo de φ (semántica). Definimos la completitud (COMPL) como el paso de la semántica a la sintaxis, mientras que el recorrido contrario se refiere a la validez (VAL).

$$COMP : \Gamma \models \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

$$VAL : \Gamma \models \varphi \Longleftarrow \Gamma \vdash \varphi$$

"When soundness is assumed, the completeness theorem establishes the equivalence between the syntax and the semantics of a certain language" (Manzano, 1999, p. 75). Sin entrar en los detalles técnicos de la prueba (Manzano, 1999, pp. 75-101), tenemos que la validez asegura que el cálculo deductivo no se equivoca. Si tenemos una deducción de φ a partir de Γ, φ es consecuencia de Γ. Dados los axiomas y el conjunto inicial de fórmulas, las propiedades de estos se heredan al momento de aplicar las reglas para el cálculo de nuevas fórmulas. Así, toda fórmula φ deducida de Γ es consecuencia lógica de Γ.

Por otra parte, la completitud implica que del cálculo deductivo podemos conocer todas las consecuencias lógicas del conjunto de fórmulas. Es decir, si Γ es consistente, entonces Γ tiene modelos. La prueba moderna de la completitud consta de dos pasos: *Lema de Lindenbaum* y *Lema de Henkin*.

Lema de Lindenbaum. Si Γ es un conjunto finitamente satisfacible de sentencias en el lenguaje, entonces Γ puede extenderse a un conjunto de sentencias Γ^* maximal respecto a la satisfacibilidad finita.

Este lema consiste en extender el conjunto de fórmulas consistentes Γ al conjunto Γ^* (agregando para cada fórmula existencial un testigo τ), tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Se debe cumplir que Γ^* es consistente, maximal consistente y tiene testigos para las fórmulas existenciales. Aseguramos que si Γ^* es maximal consistente con testigos, entonces existe un modelo de Γ^*.

Lema de Henkin. Si Γ^* es maximal consistente y con testigos, entonces Γ^* tiene un modelo.

Hemos indicado cómo las consecuencias semánticas de un conjunto de fórmulas son los teoremas que son deducibles a partir del mismo conjunto de fórmulas. El teorema de completitud demuestra la coincidencia en LPO entre el conjunto de los teoremas lógicos y las fórmulas lógicamente válidas.

Para Lautman el estudio de la completitud de un sistema establece de manera más clara la relación esencia-existencia en comparación al simple estudio de la no-contradicción del sistema. Para Hilbert la completitud de un sistema equivale a que cualquier fórmula de la teoría pueda ser demostrada o refutada. El teorema de Gödel, por otro lado, establece una "equivalencia entre la propiedad estructural de irrefutabilidad (o no contradicción) y la propiedad extensiva de realización (en un modelo dado)" (Ledesma, 2008, p. 252).

> En lo que concierne al cálculo de predicados, Gödel ha demostrado un teorema de acabamiento que tiene inmediatamente repercusiones extensivas. Ha establecido, en efecto, que toda fórmula del cálculo de predicados es, ya sea refutable, ya sea realizable en el dominio de los números enteros; para el sistema de axiomas considerado, existe entonces una equivalencia entre la propiedad estructural de irrefutabilidad y la propiedad extensiva de realización; de hecho, nos dice Bernays, puede extraerse de la demostración de Gödel un teorema de acabamiento finitista, según el cual existe siempre para una fórmula irrefutable una realización formal en el cuadro de la aritmética (incluyendo el tercio excluido) (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 212).


Thoralf Skolem (1887-1963)

Como observamos en la cita anterior, Lautman fue consciente en su momento de la implicación que tendrá el teorema de completitud. En concreto, el cambio radical en la manera de abordar la esencia y existencia como dos campos diferenciados pero al mismo tiempo íntimamente imbricados, idea central en el desarrollo posterior de la teoría de modelos. "The ability to translate results between syntax and semantic is the essence of model theory" (Baldwin, 2018, p.43). Las interpretaciones, concluye Lautman, emanan de la estructura como seres que ésta crea, mientras que son los axiomas los que forman la estructura o dominio (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 214).

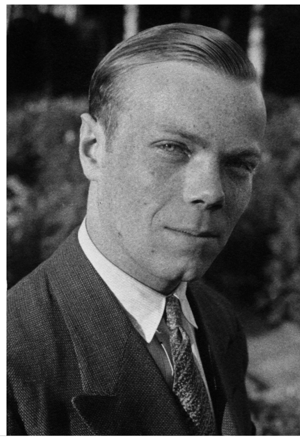
Referente al teorema de compacidad, decimos que Γ es *satisfacible* cuando Γ tiene un modelo y que Γ es *finitamente satisfacible* cuando todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles. Se demuestra de manera trivial que si Γ es satisfacible también es finitamente satisfacible, pues el modelo de Γ sirve como modelo para cada uno de sus submodelos. Ahora bien, ¿si Γ es finitamente satisfacibles, Γ es satisfacible? El teorema de compacidad demuestra que esta relación siempre se da.

La prueba del teorema se realiza en el ámbito semántico y usa los resultados del teorema de completitud, por eso se dice que es una derivación de este último. Por definición, la compacidad permite ligar lo finito (subconjuntos finitos satisfacibles) con lo infinito (conjunto finito satisfacible). La completitud, por su parte, liga modelos (infinito) con las deducciones que son finitas. El teorema de compacidad permite, por tanto, simplificar la búsqueda de un modelo que satisfaga Γ, con tan solo observar todos los subconjuntos finitos y encontrar modelos para estos.

El teorema de compacidad, dada la relación entre finito e infinito, se concibe en la interpretación de Lautman como un *mixto* (Ledesma, 2008, p. 258-265). Algunos objetos matemáticos necesitan de intermediarios o esquemas para su generación. El mixto constituye este intermediario entre realidades heterogéneas entre sí. "El papel mediador de estos mixtos se deriva de una estructura que imita aún aquella del dominio sobre el que se superponen, mientras que sus elementos son ya del género de los objetos que nacerán sobre ese dominio" (Lautman, 2011, ESNEEM p. 227). Lautman considera que la necesidad de esta mediación en la generación de los objetos matemáticos es comparable con el *esquematismo* kantiano de la *Analítica Trascendental*, el cual actúa de intermediario entre la categoría y la intuición.

> [E]l texto en donde Kant define el esquematismo es, para nosotros, de una importancia que supera con mucho el problema especial de la filosofía del entendimiento; contiene una suerte de teoría general de los mixtos que veremos aplicarse perfectamente a las necesidades de la filosofía matemática. [...] El momento esencial de esta definición es aquel donde el esquema se concibe desde dos puntos de vista diferentes, y resulta homogéneo con las naturalezas de dos realidades esencialmente distintas y entre las cuales sirve de intermediario necesario para todo paso entre una y otra. Los mixtos de las teorías matemáticas aseguran el paso de un dominio de base a la existencia de seres creados sobre ese dominio gracias al efecto de una dualidad interna similar (Lautman, 2011, ESNEEM, pp. 227-228).

Lautman prosigue a ejemplarizar este esquematismo en las investigaciones de su amigo Herbrand en el campo de la lógica matemática y su noción finitista de modelo. Los modelos metamatemáticos sirven de intermediarios entre los signos sintácticos y los modelos matemáticos. "Entonces, según Lautman, con estos modelos se produce una mediación de lo finito a lo infinito, mediación que en los casos tratados por Herbrand permite dominar el infinito. Pues bien, he aquí el papel que reconocerá Lautman a los mixtos que va a considerar" (Ledesma, 2008, p. 260). Para Ledesma (2008), los casos tratados por Herbrand y que son abordados por Lautman constituyen lo que hoy conocemos como *Eliminación de cuantificadores* de la teoría de modelos actual. Si bien la teoría de modelos se consolida en 1954, el programa de investigación de la teoría de modelos inicia en los años treinta del siglo XX. Por esta razón Lautman y Cavaillès conocen algunos resultados importantes aunque con la nomenclatura propia de esos años. Así mismo, la visión moderna del teorema de Löwenheim-Skolem procede a su vez de un mixto "crucial": el teorema de compacidad (Ledesma, 2008, p. 261). Esta lectura de Ledesma apoya la co-incidencia que hemos estado exponiendo.



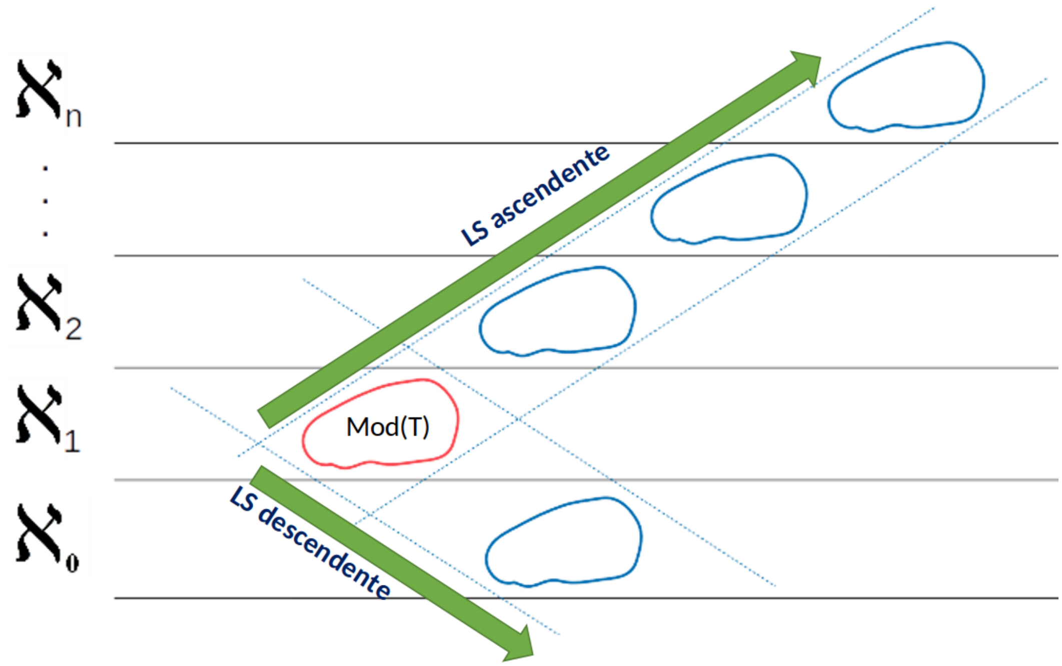
Jacques Herbrand (1908-1931)

Por su parte, el Teorema de Löwenheim-Skolem en su formulación moderna (vista a través de la teoría de modelos) tiene dos componentes: Löwenheim-Skolem ascendente (LS$\upharpoonleft$) y Löwenheim-Skolem descendente (LS$\downharpoonleft$). En el caso de (LS$\upharpoonleft$) si se tiene un modelo infinito para la teoría T -$Mod(T)$- de tamaño $\aleph_i$ (cualquier cardinal infinito), entonces existe un modelo para $\aleph_j$, siendo $j>i$; $i, j \in \mathbb{N}$. Para (LS$\downharpoonleft$) si $Mod(T)$ es infinito, entonces tiene un modelo contable infinito en cualquier cardinalidad menor a la original (Figura 3.2). Uniendo Löwenheim-Skolem ascendente y descendente llegamos al resultado de que si T tiene un modelo infinito, se sigue que tiene modelos en cualquier cardinalidad infinita. Consecuencia de este resultado, la LPO no puede distinguir entre modelos infinitos. "En ambos casos [Löwenheim-Skolem y compacidad] lo que subyace es la incapacidad de los lenguajes de primer orden para expresar la infinitud. Esta incapacidad se convierte, sin embargo, en una virtud a la vista del uso que de ello se hace en teoría de modelos" (Casanovas, 2006, p. 11).

Lautman identifica al menos dos posturas frente a esta relación, en términos filosóficos. Similar a la oposición entre continuo y discontinuo, las posiciones clásicas tienden a dar prioridad a uno sobre el otro. Para unos, lo continuo y lo infinito *emanan* a manera de enriquecimiento progresivo de lo discreto y lo finito, respectivamente. Para otros, lo continuo y lo infinito es lo que prevalece, siendo sus contrapartidas (discontinuidad y finitud) una limitación o acotamiento. Lautman encuentra, por su parte, en el desarrollo de la matemática de principios del siglo XX una tercera forma de concebir estas relaciones.

> Una actitud muy diferente es la de muchos matemáticos contemporáneos, quienes ven en lo finito y en lo infinito, no dos términos extremos de un paso que debe operarse, sino dos géneros de seres distintos, dotados cada uno de una estructura propia, y susceptibles de sostener entre ellos ciertas relaciones de *imitación* o de *expresión* (Lautman, 2011, ESUCMDA, p. 328).

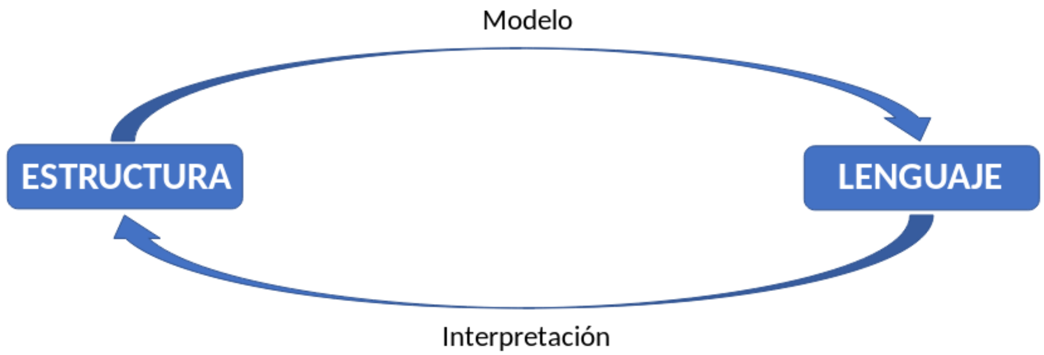
Figura 3.2: Löwenheim-Skolem ascendente y descendente



Por imitación, Lautman entiende los casos en que la "estructura interna del infinito" *imita* la "estructura de lo finito". Por expresión, entiéndase el caso en donde la "estructura de un dominio finito" *envuelve* la "existencia de otro dominio infinito", expresando así la existencia del dominio finito al que se adapta. Esta capacidad de la matemática contemporánea de operacionalizar el infinito por medio de lo finito es uno de los grandes desarrollos de la teoría de modelos. Este punto es relevante para Lautman, en tanto que sirve de fundamento para la elaboración de una TGE3 sobre la suposición de la *unidad* íntima de las matemáticas. Trataremos con más detalle este punto en la siguiente sección del capítulo.

> [S]e descubren entre lo finito y lo infinito analogías de estructuras y adaptaciones recíprocas, de donde se infiere que la unidad de las matemáticas es esencialmente la unidad de los esquemas lógicos que presiden la organización de sus edificios. [...] es posible encontrar, en el seno de las teorías matemáticas, algunas Ideas Lógicas encarnadas en el movimiento mismo de esas teorías. [...] elucidar la existencia, en el seno de las matemáticas, de esquemas lógicos que no son cognoscibles sino a través de las matemáticas mismas y que aseguran a su vez su unidad intelectual y

Figura 3.3: Enlaces entre la estructura y el lenguaje



su interés espiritual (Lautman, 2011, ESUCMDA, p. 328).

3.3.3. La teoría de modelos como TGE3 en el marco de la filosofía matemática de Lautman

Como ya hemos analizado, una *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia* se enmarca en la elaboración de una metafísica de la lógica que enlace consideraciones estructurales (sistema axiomático no contradictorio) con afirmaciones de existencia factual del ser matemático. Mostramos que la teoría de modelos cumple esta condición al estudiar, a través de la noción lógica de satisfacción, estos enlaces entre el lenguaje de *L-estructuras* (esencia) y los modelos en que estas se realizan (existencia). La *interpretación* asocia un conjunto de fórmulas Γ a una estructura $\mathfrak{A}$. Cualquier estructura $\mathfrak{A}$ es un *modelo* de un conjunto de fórmulas del lenguaje Γ, cuando Γ es verdadera en $\mathfrak{A}$ (Figura 3.3).

Ahora bien, una vez establecida la teoría de modelos como TGE3 (*Capítulo 3*), nos interesa indagar por los alcances que en este marco pueda tener la teoría de modelos en el planteamiento holístico de la filosofía matemática lautmaniana. Nos adentramos entonces en terrenos inexplorados, pues la TGE3 no se limita a la simple caracterización de las teorías matemáticas, sino que se enmarca en una concepción filosófica amplia. En otras palabras, la teoría de modelos se ha desarrollado en el espacio de la lógica matemática, y de la mano de Lautman, pretendemos enmarcarla y/o introducirla en una concepción filosófica más amplia. Este objetivo supera el alcance de la presente tesis, así que expondremos en este apartado algunos lineamientos generales para su desarrollo a futuro.

Es precisamente en las investigaciones del periodo crítico, relativas a la

> no contradicción de la aritmética, donde nos parece ver cómo se afirma una teoría de las relaciones entre esencia y existencia tan diferente del logicismo de los formalistas como del constructivismo intuicionista. Vamos a recordar, ante todo, los rasgos principales de esa evolución interna de la lógica, e intentaremos luego extraer de allí una filosofía de la génesis matemáticas, cuyo alcance supera con mucho el dominio de la lógica (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 206).

En primer lugar, ¿cómo compatibilizar la relación entre las concepciones dinámica y estructural de la matemática a través de la teoría de modelos? En segundo lugar, ¿de qué manera puede la teoría de modelos *develar* la encarnación de las Ideas Dialécticas en la matemática? Por último, el problema principal que Lautman considera en la filosofía de las ciencias: la *solidaridad* entre el dominio del real físico y las teorías matemáticas más sofisticadas. ¿Puede la teoría de modelos decir algo de la realidad física a partir del estudio de las estructuras matemáticas? Para iniciar, debemos tener claridad acerca de cuál es el ámbito de la filosofía matemática y del lugar de la lógica.

> La filosofía matemática, tal como la concebimos, no consiste, así, en reconocer un problema lógico de la metafísica clásica en el seno de una teoría matemática, sino en *aprehender globalmente la estructura de esa teoría, para desprender de allí el problema lógico que se encuentra a la vez definido y resuelto por la existencia misma de esa teoría.* Una experiencia espiritual se encuentra así ligada de nuevo con el esfuerzo de la inteligencia por crear o comprender, pero esa experiencia tiene *otro contenido distinto al de la matemática que se hace al mismo tiempo ella* [*Cursivas propias*] (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 270).

Lautman insiste en que la realidad matemática no reside ni en los hechos ni en los seres, sino en las *teorías matemáticas* (*Sección 2.2.3*). Éstas son, a su vez, "susceptibles de una doble caracterización, una sobre el movimiento propio de esas teorías, otra sobre los enlaces de ideas que encarnan en ese movimiento" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 267). La "aprehensión global" intenta, pues, capturar la realidad inherente de las matemáticas en su doble naturaleza: el movimiento propio de las teorías y los enlaces de Ideas que encarnan en ese movimiento. El punto de interés consiste, por tanto, en conciliar esta doble naturaleza a través de lo que Lautman denomina *urgencia de un problema lógico.* "Nuestra tarea consiste, entonces, en conciliar la irreductibilidad de las matemáticas a una lógica a priori con su organización alrededor de semejantes esquemas lógicos" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 268).

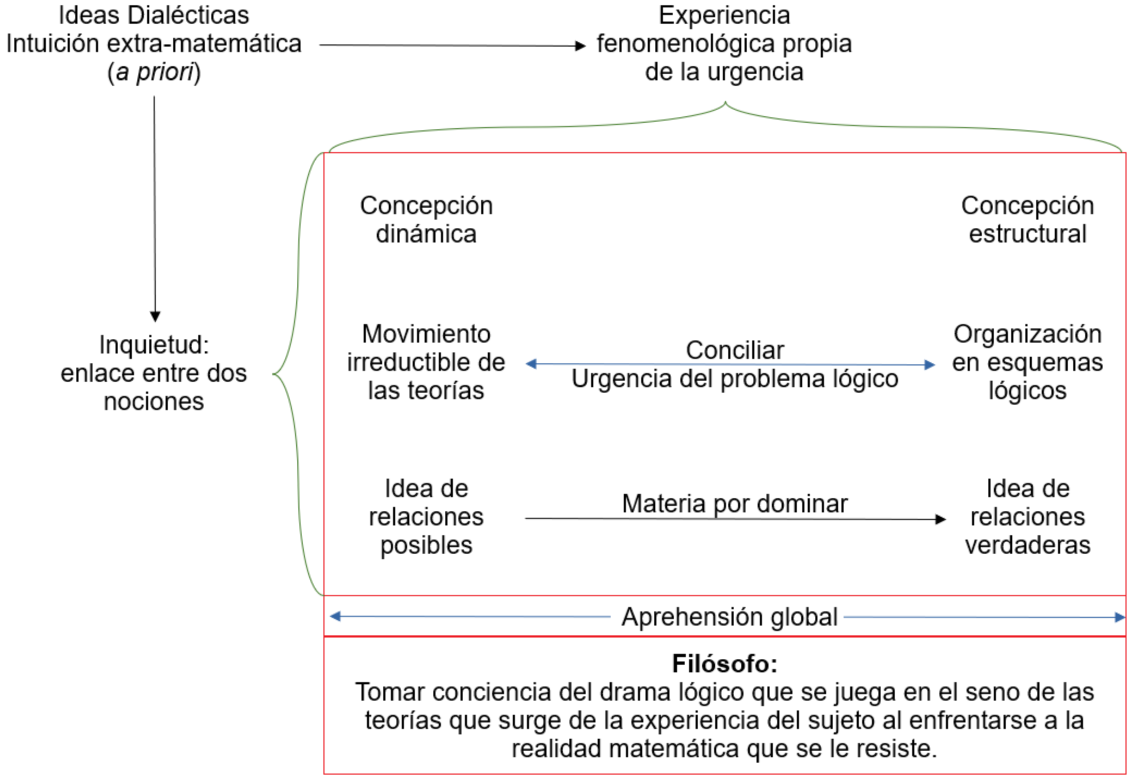
Este elemento *a priori* introducido en la filosofía matemática se entiende de manera relativa y exclusiva de las matemáticas. Consiste en identificar la *inquietud* del enlace entre dos nociones y la experiencia fenomenológica de aquella, más allá de si el enlace es operable o no. Lautman recuerda que estas inquietudes también se encuentran en la historia de la filosofía, como son los enlaces mismo/otro, todo/parte, continuo/discontinuo, esencia/existencia, entre otros. La urgencia de un problema lógico nace de la "intuición extramatemática" que exige a esa inquietud una materia por dominar. Es decir, "para que una idea de relaciones posibles dé nacimiento a un esquema de relaciones verdaderas" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 269).

El *a priori* refiere únicamente a la experiencia propia de la urgencia de los problemas (*anterior* al descubrimiento de su solución). Así, "el filósofo no tiene que extraer leyes ni prever una evolución futura; su papel consiste únicamente en tomar conciencia del drama lógico que se juega en el seno de las teorías" (Lautman, 2011, ESNEEM, p. 269). Siguiendo a Arriaga (2018), "[h]abría unas ciertas nociones lógicas (dialécticas) susceptibles de ser entrelazadas, en distinto grado, en teorías matemáticas concretas. Estas nociones se asemejan a las propiedades metamatemáticas de Hilbert y a la realidad matemática a la que el sujeto se enfrenta según Brunschvicg" (Arriaga, 2018, p. 37).

Las propiedades metamatemáticas de una teoría son la no contradicción y la completitud, mientras que la realidad matemática es aquello que se *resiste* a la cognición del sujeto. La teoría de modelos captura muy bien, por su parte, las propiedades metamatemáticas de las teorías. La cuestión pasa entonces por establecer el vínculo que hay desde los esquemas lógicos de la teoría con su revés irreductible del movimiento de la misma teoría. ¿Cómo lograrlo? La Figura 3.4. resume las ideas de Lautman al respecto y nos dará algunas pistas del camino a seguir. El cuadro rojo enmarca la realidad matemática como unidad. La *aprehensión global* transita entre la concepción dinámica y estructural, entre el movimiento irreductible y los esquemas lógicos y entre lo posible y lo verdadero. Si bien la matemática constituye una realidad en sí misma, es también *encarnación* de las Ideas Dialécticas (*Sección 2.1.*) que se expresa en la inquietud de los enlaces entre ideas y de la experiencia matemática (*Sección 2.3*).

Definimos cinco elementos o principios que combinados entre sí, nos permitirán realizar la tarea del filósofo, es decir, tomar conciencia del "drama lógico" implicado al interior de las teorías y surgido de la experiencia del sujeto al enfrentarse a la realidad matemática que se le resiste. No se espera una aplicación secuencial de estos principios, sino que en un ánimo de síntesis, se espera que *atraviesen* el estudio de las teorías matemáticas a manera de un tejido con cruces, repeticiones, mixtos, bucles e interacciones. Sirve de apoyo a nuestra propuesta el libro de John Baldwin (2018),

Figura 3.4: Esquema general filosofía matemática



Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice, quien argumenta una fundamentación local, antes que global, con importantes implicaciones filosóficas de la práctica matemática.

> Contemporary model theory makes formalization of *specific mathematical areas* a powerful tool to investigate both mathematical problems and issues in the philosophy of mathematics (e.g. methodology, axiomatization, purity, categoricity, and completeness) (Baldwin, 2018, p. 3).

El primer elemento consiste en *dar vuelta* a la matemática y considerarla como una ciencia histórica antes que una ciencia formal. Para este punto recordamos la idea de Gian Carlo-Rota: "Mathematics is nothing if not a historical subject par excellence" (Rota, 1991, p. 174). La matemática suele presentarse en su forma estructurada y axiomatizada (lado derecho del cuadro de la Figura 3.4), y generalmente se omite el movimiento propio de la creatividad matemática que se esconde tras sus resultados. En ese orden de ideas, *dar vuelta* a las matemáticas consiste en tomar tal teoría u objeto matemático y descubrir/develar su otra naturaleza dinámica, temporal y creativa, en otras palabras, su realidad como producto humano e histórico (lado izquierdo del cuadro en la Figura 3.4). Quizá podamos entender el "dar vuelta" en analogía con un proceso de "ingeniería inversa": a partir de un producto final (completo, funcional y autocontenido), se busca establecer cuál es la relación entre sus componentes y develar cuál fue su proceso de fabricación o génesis.

Ahora bien, es importante realizar dos aclaraciones respecto a este primer punto. El "dar la vuelta" no presupone una superioridad o preeminencia de la concepción dinámica sobre la estructural, ni mucho menos que exista una relación unidireccional de la primera respecto de la segunda. Ambas concepciones hacen parte con igual derecho de la realidad matemática y ambas se influyen mutuamente en su proceso evolutivo. Las nociones dinámicas se organizan en esquemas lógicos, pero a su vez, estos esquemas ingresan al movimiento propio de la creatividad matemática. De aquí se entiende el carácter lautmaniano de *síntesis sucesivas* y la génesis de nuevos objetos matemáticos a partir de otros precedentes (*Sección 2.2.3*).

La segunda aclaración es muy importante, ya que marca el carácter diferencial que nos puede ofrecer el punto de vista de Lautman. El "dar vuelta" no se debe entender como la mera colección de anécdotas históricas que ilustran las dificultades, discusiones entre matemáticos y curiosidades respecto a los principales resultados de la matemática. Este enfoque es valioso y común en diversas publicaciones de divulgación científica. No obstante, el gran aporte de Lautman consiste en identificar el sentido que se expresa en el movimiento de la matemática misma; en respuesta a una realidad más allá de sí misma, esto es, a las Ideas Dialécticas. Por esta razón es tan importante el planteamiento de una *Teoría general de los enlaces entre esencia y existencia*. Miremos brevemente el caso de los números complejos para ilustrar esta aclaración.

Los números complejos suelen presentarse como representación en un plano cartesiano en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, esta representación moderna de los complejos dista significativamente del proceso histórico (génesis) que tuvo lugar al menos desde el siglo XVI con la publicación de *Ars Magna* por parte de Cardano (1501-1576). Aprehender globalmente los números complejos implica ligar su presentación moderna y estructurada con el proceso mismo de generación temporal, en una sola realidad matemática. Generalmente se estudia la definición y propiedades, y por aparte, su desarrollo histórico casi como dos naturalezas distintas. La filosofía matemática lautmaniana sugiere abordarlos como una única realidad (cuadro de la Figura 3.4).

El segundo elemento consiste en identificar las características metamatemáticas de la teoría (clasificación) y su relación estructural con otras teorías. Como se ve, trasciende de una simple descripción o enumeración de teorías, al estudio de las mismas en el marco de la teoría de modelos (TGE3). "Contemporary model theory enables systematic comparison of local formalizations for distinct mathematical areas in order to organize and do mathematics" (Baldwin, 2018, p. 3). Este elemento es perfectamente identificado en el programa de investigación de la teoría de modelos, como ya hemos analizado en este capítulo. En ese orden de ideas, una filosofía de la génesis busca comprender estos elementos de la teoría de modelos como TGE3 en conjunción con el movimiento de creación y conceptualización de las matemáticas en el tiempo.

En otras palabras, bajo qué ambientes son creados los objetos matemáticos (*Sección 2.2.3*). La TGE3 constituye, por tanto, el punto de encuentro entre la concepción estructural y la concepción dinámica (*Sección 2.3*) de las matemáticas. Lejos de ser un campo de conocimiento estático y eterno, la matemática se define en un *devenir*. La cuestión pasa por caracterizar de qué manera ese devenir se consolida en relaciones estructurales (*Sección 2.1.2*). Media en el proceso de estructuración de la matemática la encarnación de Ideas Dialécticas que fijan la creatividad no-limitada (*Sección 2.1*). A su vez, tal estructuración brinda el suelo propicio para la generación creativa de nuevos objetos. La unidad en sí misma se define como un proceso dialéctico de la suma de síntesis sucesivas (*Sección 2.1.3*).

Luego, el tercer elemento es la conciliación entre una idea de relaciones posibles con un esquema de relaciones verdaderas (urgencia del problema lógico que exige de la inquietud una materia para dominar), a través de la experiencia fenomenológica del sujeto enfrentado a esa realidad que se le opone. Como se ve, este tercer elemento es un mixto entre la técnica de la teoría y el nacimiento de la misma. En otras palabras, se define en el estudio de la *práctica matemática* las relaciones entre las concepciones estructural y dinámica.

> I hope to convince the reader that the more technically sophisticated model theory of the last half century introduces new philosophical insights about mathematical practice that reveal how this recent model theory resonates philosophically, impacting in particular such basic notions as syntax and semantics, structure, completeness, categoricity, and axiomatization (Baldwin, 2018, p. 1).

El cuarto elemento busca extraer y evidenciar cuáles son aquellas inquietudes iniciales (enlace entre dos ideas o nociones) que motiva el movimiento creativo de la matemática en el tiempo. Es decir, cuáles son los problemas que una específica generación de matemáticos en un espacio geográfico determinado considera importantes y por qué. Solo ciertos problemas adquieren relevancia y otros tantos caen en desuso.

El quinto y último elemento consiste en trascender las inquietudes del terreno estrictamente matemático y enlazarlas con las Ideas Dialécticas (intuición extra-matemática). Como tales inquietudes también se encuentran en el terreno de la filosofía y de la ciencia, se busca establecer los puentes y puntos de conexión entre filosofía, matemáticas y ciencia. "Este acuerdo entre geometría y física es la prueba de la inteligibilidad del universo. Resulta de la puesta a punto, por el espíritu, de una manera de estructurar el universo en profunda armonía con la naturaleza de ese universo" (Lautman, 2011, MR, p. 80). Y más adelante, Lautman comenta que aquella penetración de lo real por la inteligencia humana es un sin sentido para el formalismo más radical. Este platonismo es asumido por los matemáticos, pero actúa muchas veces a la manera de un "secreto de familia": todos saben pero nadie se atreve a reconocerlo. Bien lo expresó Dieudonné: "el matemático en activo es platónico en días de trabajo y formalista los domingos" (Citado en (Ferreirós, 1999, p. 452)).

Como podemos observar, los principios enunciados responden de una u otra manera a problemas filosóficos de orden metafísico, ontológico, epistemológico, histórico y social. El Cuadro 3.1 evidencia el tránsito matemático en sus dimensiones filosóficas, históricas y culturales (Zalamea, 2009b, p. 3).

qué	cómo	por qué	cuándo	dónde
objetos	modos	razones	momentos	lugares
ejemplos *problemas*	*transformaciones* *regulaciones*	*obstrucciones* *singularizaciones*	*diagramas* *temporales*	*diagramas* *culturales*
ontología	epistemología	metafísica	historia	geografía

Cuadro 3.1: Perspectiva del tránsito filosófico, matemático y cultural

A nuestro criterio este esquema es consecuente con la filosofía de Lautman. Sin embargo, replanteamos a nuestros fines el Cuadro 3.2, incluyendo la fenomenología de la experiencia matemática (*Sección 2.3*) y subsumiendo el *dónde* en el *cuándo* para formar una sola categoría. Nos interesa ahora ubicar los cinco elementos que hemos descrito, en función de los tránsitos que representan en el nuevo esquema (Cuadro 3.3). Cada celda marcada con la "X" representa los tránsitos en los que cada uno de los elementos enunciados tiene incidencia. A continuación, enunciamos brevemente el significado que tiene cada uno de estos cruces en el marco de la filosofía matemática de Lautman.

En este punto hemos enunciado algunos lineamientos de lo que entendemos por *filosofía matemática lautmaniana*, en la que la teoría de modelos (TGE3) es un elemento en interacción con otros cuatro. Como ya hemos advertido, estos lineamientos

qué	cómo	por qué	de qué manera	cuándo
objetos	modos	razones	experiencias	tiempo
ejemplos *problemas* *teorías*	*transformaciones* *regulaciones* *interpretaciones*	*obstrucciones* *singularizaciones* *modelos*	*intuiciones* *intencionalidades* *signos*	*diagramas* *temporales* *geográficos*
ontología	epistemología	metafísica	fenomenología	historia

Cuadro 3.2: Perspectiva del tránsito filosófico, matemático y cultural

	Ontología	Epistemología	Metafísica	Fenomenología	Historia
Revés				X	X
TGE3	X	X			
Conciliación		X	X		
Inquietudes			X	X	
Dialéctica		X	X	X	

Cuadro 3.3: Perspectiva del tránsito filosófico, matemático y cultural

deben tomarse como una propuesta de investigación a desarrollar en el futuro. Los cruces del Cuadro 3.3 y la interacción entre los mismos constituyen un interés investigativo de mediano y largo plazo. En el siguiente capítulo ofrecemos un esbozo o "piloto" de cómo podríamos aplicar esta concepción filosófica en la matemática real.

Capítulo 4

Consideraciones finales

Consideramos que la presente tesis ha permitido mostrar una co-incidencia entre la filosofía de Lautman y la teoría de modelos como rama de la lógica matemática. Más precisamente, de la relación de Lautman con la que denominamos "proto-teoría de modelos". El propósito de este primer paso es cimentar futuros trabajos que permitan la formulación de una filosofía matemática actual y cuyo centro de análisis sea la teoría de modelos. Tal filosofía matemática bien podría dar cuenta de la matemática actual, asi como plantear nuevos problemas filosóficos. La relación matemática-filosofía ha sido muy fructífera a lo largo de la historia, y esta quizá sea una nueva relación por explorar y consolidar. No obstante, estos posibles desarrollos han quedado, evidentemente, por fuera del alcance del actual trabajo. Nuestro propósito ha sido mucho más modesto, y es esbozar algunos caminos.

A futuro, nos proponemos dos tareas principales. En primer lugar, considerar la actual teoría de modelos bajo la lente de la filosofía lautmaniana. En segundo lugar, abordar casos concretos que muestren esta filosofía matemática en acción. Para la primera tarea es preciso actualizar los conceptos filosóficos de Lautman al desarrollo actual de la teoría de modelos. Esto en la concepción estructural. Por otra parte, en lo que la concepción dinámica se refiere, los desarrollos de la fenomenología durante el siglo XX y principios del XXI son muy importantes. Creemos que pueden ser una fuente filosófica de gran valor para seguir desarrollando las ideas de la experiencia matemática, tanto de Cavaillès como de Lautman.

Frente a la segunda tarea, son numerosos los casos que pueden ser usados. Un caso de interés, por ejemplo, es la *Conjetura de tricotomía*, planteada por Boris Zilber (1949-), matemático ruso y actual profesor emérito de la Universidad de Oxford. En su primera formulación (1983) intenta establecer el conjunto de estructuras "naturales" de la matemática, específicamente de las *teorías fuertemente minimales.*

Sin embargo, este planteamiento inicial falla debido a un contraejemplo formulado por Ehud Hrushovski (1990), quien elabora un tipo de estructura que no puede ser clasificado en ninguna de las tres tipologías definidas por Zilber.


Boris Zilber (1949-)

Posterior a este “fracaso”, Zilber y Hrushovski trabajan en lo que se conoce como la “cuarta parte” de la tricotomía. Esto les conduce a la reducción de su alcance para encontrar una zona en donde sea válida y pueda cubrir un conjunto significativo de casos, esto es, el espacio de las geometrías de Zariski. El contexto de las geometrías de Zariski es *a priori* más geométrico, e incluye tanto los casos fuertemente minimales como los casos que se siguen del contraejemplo. En este punto se resuelve, en el ámbito matemático, el problema de la tricotomía.

No obstante, en la prueba final con Hrushovski uno de los mapas que se pensaba *uno-a-uno* resulta *finito-a-uno* (finite cover). Este resultado que en apariencia es intrascendente lleva a Zilber al estudio de este “pequeño detalle faltante” de la demostración de tricotomía en geometrías de Zariski: las *cubiertas finitas* resultantes del paso final de la prueba (1993). ¿Qué contenido matemático pueden tener los *mapas finito-a-uno*[1] que surgieron en la prueba de la tricotomía para geometrías de Zariski? Estos mapas llevan posteriormente a Zilber al terreno de la *geometría no conmutativa* (2005) y a la teoría de modelos de la física (2006) (Villaveces, 2011, p. 86). Encuentra que las estructuras de orden geométrico no conmutativo son, básicamente, de la misma naturaleza que las estructuras de la física cuántica (Zilber, 2010b, p. 2).

Esto lleva a una reformulación del tercer tipo de la tricotomía, *Isomorfa a la geometría de un campo algebraicamente cerrado*, que redefine como *estructuras cuánticas de Zariski*, o simplemente *estructuras cuánticas* (2015). No es claro en este punto si esta nueva línea tendrá éxito, pues muchas de sus construcciones matemáticas siguen siendo fluctuantes aún. Queda mucho trabajo y exploraciones por realizar en este camino (Villaveces, 2011, p. 87).

El recorrido realizado por Zilber supone un interés filosófico por entender la evolución que ha sufrido el concepto de estructura en las teorías fuertemente minimales, desde la formulación inicial de la tricotomía hasta el encuentro con algunas estructuras de la teoría cuántica de campos. Resaltan algunos puntos de inflexión en los que Zilber se encontró con obstrucciones y la manera en que logra los tránsitos, y

[1]Quizá estos mapas puedan ser tratados como un tema de Superficies de Riemann. Esta idea supera con creces esta tesis, pero podríamos considerarlo hacia adelante.

de este movimiento cómo se constituye el concepto de estructura. De especial interés es entender los mapas *finito-a-uno*, un "pequeño detalle" que se desprende de la demostración de la tricotomía por las geometrías de Zariski. Este detalle en apariencia insignificante condensa el trabajo matemático de Zilber hasta ese momento, y a su vez es un catalizador de los desarrollos posteriores.

¿Por qué insiste Zilber en el desarrollo de los mapas *finito-a-uno* cuando no parecían relevantes y el objetivo de la solución de la tricotomía ya se había cumplido? ¿Por qué Hrushovski está satisfecho con la solución y da por terminado este camino? ¿Zilber lleva a cabo algún tipo de compromiso ontológico y epistemológico previo respecto a la naturaleza de la estructura que le permitió ver más allá de los resultados estrictamente técnicos?

Como podemos ver en el caso de la conjetura de tricotomía, se destilan varias líneas de análisis filosófico. Por una parte la experiencia matemática misma: el planteamiento inicial de la conjetura, las obstrucciones en su desarrollo, la superación de las mismas y la apertura de nuevos campos de análisis. Si analizamos la conjetura desde su desenvolvimiento histórico, este ha sido un proceso no lineal con dos características muy notorias: *impredicibilidad* y *obstrucciones/superaciones*. Frente a la primera característica, es claro que ni Zilber, sus colaboradores o Hrushovski pudieron establecer de antemano cuál sería su evolución. Así mismo, las obstrucciones y luego sus superaciones se presentan al matemático como una realidad objetiva, un hecho con el mismo valor que en el de una teoría física. Es una realidad que se le resiste al matemático.

Por otra parte, la estructuración misma de la conjetura. Generalmente, los matemáticos estudiarán los resultados finales, es decir, la conjetura en cuanto axiomas, teoremas y planteamientos, presentados como una realidad acabada, eterna e inmutable. Si es el caso, se asomarán a la experiencia matemática que ha significado su construcción. Pero la mirada sobre su historia se entenderá de manera más bien anecdótica y no indispensable para comprender la conjetura en cuanto teoría matemática.

Ahora bien, resulta claro desde la perspectiva de Lautman, que tanto la experiencia matemática en el tiempo, como la estructuración de la conjetura, responden a una dinámica interrelacionada. La tarea del filósofo consiste, por tanto, en encontrar la manera en que ambas realidades se imbrican entre sí. Evidenciar cómo la experiencia matemática genera la estructura, a la vez que la estructura impulsa el movimiento hacia nuevas aperturas. Es decir, develar el proceso entre lo sólido y lo líquido, entre la estructura y la creatividad. Pero, por otro lado, otra línea de análisis consiste en valorar la conjetura en su capacidad de indentificar la unidad en la multiplicidad.

Bibliografía

Alunni, C. (2008). Albert Lautman et le souci brisé du mouvement. *Revue de Synthèse*, 126(2):283–301.

Arriaga, P. (2018). *Matemáticas e Ideas Dialéticas. Ensayo sobre algunas aperturas para la ontología de la matemática a partir de la filosofía de Albert Lautman*. PhD thesis, Universidad de Guanajuato.

Bachelard, G. (2004). *Estudios*. Amorrortu editores, Buenos Aires.

Bachelard, G. (2009). *El compromiso racionalista*. Siglo XXI, México D.F., novena edi edition.

Baldwin, J. T. (2018). *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice: Formalization without Foundationalism*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, first ed. edition.

Bell, E. T. (2014). *Historia de las matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, México D.F., segunda ed edition.

Benis-Sinaceur, H. (2020). Idées: le platonisme phénoménologique d Álbert Lautman. *Philosophiques*, 37(1):27–54.

Bergson, H. (1972). La percepción del cambio. In *El pensamiento y lo moviente*, page 188. Editorial Pléyade, Buenos Aires, Argentina.

Bombal, F. (2013). David Hilbert: La búsqueda de la certidumbre. *Revista Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, pages 123–145.

Bossi, B. (2008). *Saber gozar. Estudios sobre el placer en Paltón*. Editorial Trotta, Madrid.

Bourbaki, N. (1962). La arquitectura de las matemáticas. In Le Lionnais, F., editor, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, pages 36–49. Eudeba, Buenos Aires.

Brunschvicg, L. (1905). *Lídealisme contemporain*. F. Alcán, París.

Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Editorial Lautaro, Buenos Aires.

Brunschvicg, L. (2009a). *Écrits philosophiques. Tome second: Lórientation du rationalisme*. Bibliothèque Paul-Émile-Boulet de lÚniversité du Québec à Chicoutimi, Québec.

Brunschvicg, L. (2009b). *La modalité du jugement*. Bibliothèque Paul-Émile-Boulet de lÚniversité du Québec à Chicoutimi, Québec.

Burris, S. and Legris, J. (2018). The Algebra of Logic Tradition. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2018 edition.

Caicedo, X. (1990). *Elementos de lógica y calculabilidad*. Universidad de Los Andes, Bogotá, segunda ed edition.

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Volumen 2. Hacia la formalización en Hilbert y en Bourbaki*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Canguilhem, G. (2009). *Estudios de historia y de filosofía de las ciencias*. Amorrortu Editores, Buenos Aires.

Careaga, A. A. (2002). El teorema de Gödel.

Casanovas, E. (2006). Panorama de cuestiones de teoría de modelos. *Lecturas matemáticas*, Volumen es(27):137–159.

Cavaillès, J. (1992). *Método axiomático y formalismo*. Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., primera ed edition.

Chang, C. C. and Keisler, H. (1973). *Model Theory*. North Holland P.C., Amsterdam.

Davis, P. and Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhäuser Boston, Boston.

De Lorenzo, J. (2010). *Fundamentos y enigmas en la matemática. De Kant a Frege*. Universidad de Valladolid, Valladolid.

De Lorenzo, J. (2017). *Matemática e Ideología. Fundamentalismos matemáticos del siglo XX*. Plaza y Valdés Editores, Madrid, España, primera ed edition.

Falk de Losada, M. (2012). *Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX. Primera parte - Fundamentación*. Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Falk de Losada, M. (2013). *Pensamiento matemático del siglo XX. Segunda parte - Estructuralismo*. Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

Ferreirós, J. (1999). Matemáticas y platonismo(s). *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2:446–473.

Gex, M. (1970). Lídéalisme critique de Léon Brunschvicg. *Revue de théologie et de philosophie*, 20(3):146–164.

Giovannini, E. N. (2014). Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal (1891-1905). *Revista de Filosofía*, 39(2):121–146.

Goldfarb, W. (1979). Logic in the Twenties : The Nature of the Quantifier. *The Journal of Symbolic Logic*, 44(3):351–368.

Gowers, T. (2008). *Matemáticas. Una breve introducción*. Alianza Editorial, Madrid.

Hayek, N. (2000). Nicolas Bourbaki. In *Las matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos*, page 499. Universidad de La Laguna.

Heidegger, M. (2005). *¿Qué significa pensar?* Editorial Trotta, Madrid.

Hodges, W. (1986). Truth in a Structure. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 86(2004):135–151.

Kant, I. (2013). *Crítica de la razón pura*. Editorial Taurus, México D.F.

Kennedy, J. (2019). *Gödel, Tarski and formalism independence: tracking the contours of natural language in foundational practice*.

Kline, M. (2016). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.

Lautman, A. (2011). *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Ledesma, N. (2008). *La matemática moderna: entre el "formalismo modificado"de Cavaillès y el "platonismo estructural"de Lautman*. PhD thesis, Universidad de Guanajuato.

Ledesma, N. and Ferreirós, J. (2010). Cavaillès y Lautman: Repensar las matemáticas en torno a 1935. *La Gaceta de la RSME*, 13(1):153–177.

Lentin, A. (1962). El concepto de grupo. Su potencia y sus límites. In Le Lionnais, F., editor, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, pages 210–216. Eudeba, Buenos Aires.

Linnebo, Ø. (2013). Platonism in the Philosophy of Mathematics. \url{https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/}.

Makkai, M. and Paré, R. (1989). *Accessible Categories: The Foundations of Categorical Model Theory: The Foundations of Categorical Model Theory*. American Mathematical Society, Rhode Island.

Manzano, M. (1989). *Teoría de Modelos*. Alianza Universidad Textos, Madrid.

Manzano, M. (1999). *Model Theory*. Oxford University Press, Oxford, UK.

Manzano, M. and Huertas, A. (2016). *Lógica para principiantes*. Alianza Editorial, Madrid.

Marcja, A. and Toffalori, C. (2003). *A Guide to Classical and Modern Model Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

Mosterín, J. (1980). La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático. *Teorema: Revista Internacional de Filosofía*, 10(4):287–306.

Mosterín, J. and Torretti, R. (2010). *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*. Alianza Editorial, Madrid, España, segunda ed edition.

Nagel, E. and Newman, J. (2017). *El Teorema de Gödel*. Editorial Tecnos, Madrid.

Odifreddi, P. (2006). *La matemática del siglo XX. De los conjuntos a la complejidad*. Katz Editores, Buenos Aires.

Parménides (1983). Sobre la naturaleza. In *Parménides - Zenón - Meliso - Heráclito Fragmentos*, chapter 47-59, page 256. Ediciones Orbis S.A., Barcelona.

Penrose, R. (2014). *El camino a la realidad. Una guía completa de las leyes del universo*. Penguin Random House Grupo Editorial, Barcelona, España, quinta edi edition.

Pillay, A. (2000). Model Theory. *American Mathematical Society*, 47(11):1373–1381.

Platón (2011). Sofista. In *Platón II. Biblioteca Grandes Pensadores*, chapter Sofista, pages 625–634. Editorial Gredos, S.A., Madrid.

Raatikainen, P. (2006). Truth correspondence models and Tarski. In Pihlstrom, S., editor, *Approaching Truth*, pages 1–13. College Press, London.

Reale, G. and Antiseri, D. (2012). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Herder, Barcelona.

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Rota, G.-C. (1991). The Pernicious Influence of Mathematics upon Philosophy. *Synthese*, 88(2):165–178.

Russell, B. (1920). *Introduction to Mathematical Philosophy*. George Allen & Unwin Ltd., second edition.

Schiemer, G. and Reck, E. H. (2013). Logic in the 1930s: Type Theory and Model Theory. *Bulletin of Symbolic Logic*, 19(4):433–472.

Smid, J. (2014). Tarski's one and only concept of truth. *Synthese*, 191(14):3393–3406.

Tent, K. and Ziegler, M. (2012). *A Course In Model Theory*. Cambridge University Press, New York.

Torres, C. (2007). ¿Ignoramus et ignorabimus? *Anuario de filosofía*, 1(1):33–49.

Väänänen, J. and Villaveces, A. (2007). Lógica matemática.

Villaveces, A. (2011). *La tricotomía de Zilber: una breve introducción geométrica*.

Zalamea, F. (1994). La filosofía de la matemática de Albert Lautman. *Mathesis. Filosofía e historia de las ciencias matemáticas*, 10(3):273–289.

Zalamea, F. (2009a). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Zalamea, F. (2009b). Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. I. La matemática de los fundamentos 1900 – 1930. *Boletín de matemáticas*, 16(2):95–114.

Zalamea, F. (2011a). Estudio introductorio. In *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*, pages 13–74. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Zalamea, F. (2011b). Noticia sobre las fuentes de Lautman. In Zalamea, F., editor, *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*, pages 543–559. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Zalamea, F. (2019). *Grothendieck. Una guía a la obra matemática y filosófica*. Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

Zilber, B. (2010a). Model Theory. In Manin, Y. I., editor, *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians*, volume 1, pages 331–377. Springer, New York, second ed. edition.

Zilber, B. (2010b). On model theory, non-commutative geometry and physics. *Topology*, pages 1–21.