CONSTRUCCIONES DE HRUSHOVSKI Y CLASES NO ELEMENTALES

PEDRO HERNÁN ZAMBRANO RAMÍREZ
CÓDIGO: 195973

DIRECTOR: ANDRÉS VILLAVECES N.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
ABRIL DE 2005

CONSTRUCCIONES DE HRUSHOVSKI Y CLASES NO ELEMENTALES

PEDRO HERNÁN ZAMBRANO RAMÍREZ.

Presentado como requisito para optar al título de
Magister en Ciencias Matemáticas.

Director:
ANDRÉS VILLAVECES N.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
ABRIL DE 2005

Índice General

Introducción

Un concepto muy estudiado actualmente en teoría de modelos es la noción de *clase elemental abstracta* (*cea*), cuyo origen se remonta al estudio de las propiedades que tiene la clase de los modelos de una teoría completa en primer orden (tales como la *propiedad de amalgamación*, la *joint embedding property (JEP)*, la categoricidad, entre otras).

De hecho, la noción de clase elemental abstracta corresponde a una generalización del concepto de *clase elemental* (clases cuyos elementos son exactamente las estructuras que modelan una cierta teoría) en primer orden debida a B. Jónsson y S. Shelah ([Jó56, Jó60, Sh88, Sh300]),.

Desde el desarrollo de la teoría de la clasificación, una rama de investigación en teoría de modelos consiste en estudiar algunas propiedades adicionales que las clases elementales abstractas pueden presentar, como por ejemplo la propiedad de amalgamación, la excelencia, la estabilidad, la docilidad (tameness), entre otras.

S. Shelah conjeturó que existe un cardinal $\mu(\kappa)$ tal que para toda clase elemental abstracta $\mathcal{K}$ con número de Löwenheim-Skolem a lo sumo κ, si $\mathcal{K}$ es categórica para un cardinal $\lambda \geq \mu(\kappa)$ entonces $\mathcal{K}$ es categórica para todos los cardinales más grandes. El problema en general ha sido muy difícil de atacar, sin embargo existen respuestas parciales a dicha conjetura en algunos contextos particulares. Uno de ellos es el de las clases elementales abstractas *dóciles* (ver [Sh394, GrVa1]), contexto donde R. Grossberg y M. VanDieren demostraron un teorema de transferencia de categoricidad (ver [GrVa2])

Por otro lado, Hrushovski desarrolló una técnica en [Hr93, Hr92] mediante la cual dio un contraejemplo para la siguiente conjetura debida a Zilber:

todo conjunto fuertemente minimal no trivial es esencialmente un conjunto sin estructura, un espacio vectorial sobre un anillo de división o un cuerpo algebraicamente cerrado. Aunque en algunos desarrollos (como en [BaHo]) de manera implícita se trabaja con ciertas construcciones de Hrushovski como si fueran clases elementales abstractas, no hay en trabajo alguno un desarrollo explícito al respecto. La construcción dada en [Hr92] (*fusiones*), a primera vista no se parece a la presentada inicialmente en [Hr93] (ejemplo *"ab initio"*), aunque en ambos casos es definida una predimensión sobre la que se basa la noción de *autosuficiencia*.

La diferencia radica en que en el segundo caso se tiene en el lenguaje un símbolo de relación de aridad 3 donde la predimensión se define haciendo un conteo sobre dicha relación; mientras en el caso de las fusiones se trabaja sobre dos teorías completas, modelo-completas y fuertemente minimales en lenguajes disyuntos respectivamente donde la predimensión se define a partir de las dimensiones que resultan al considerar las clausuras algebraicas en estos dos lenguajes. En ambos casos, se trabaja solamente sobre la clase de estructuras para las cuales dicha predimensión es no negativa. Dicha predimensión es muy importante, ya que sobre aquella está basada la definición de la relación "ser autosuficiente".

Durante el congreso "Logic and its applications in Algebra and Geometry" (Ann Arbor, 2003), John Baldwin preguntó sobre que tipo de clase elemental abstracta resulta ser la clase de las fusiones junto a la relación *ser autosuficiente*. En este trabajo probamos que la clase de las fusiones junto con la relación *ser autosuficiente* forman una clase elemental abstracta y estudiamos algunas de las propiedades modelo teóricas que esta clase presenta, como por ejemplo la propiedad de 2-amalgamación (la cual es probada en [Hol95] y aquí llenamos los detalles de dicha prueba) y la docilidad (que probamos en esta tesis), respondiendo de manera parcial a la pregunta de Baldwin.

El teorema principal de esta tesis es el siguiente:

Proposición 2.23 La clase de las fusiones es $LS(\mathcal{K}_{fus})$-dócil

La prueba de este hecho es similar a la demostración hecha por R. Grossberg y A. Kolesnikov ([GrKo]) del hecho de que las clases excelentes son dóciles. Pero en nuestro contexto, basta probar una versión débil de 3-amalgamación del cual se sigue como consecuencia la docilidad.

En el capítulo 0 de esta tesis presentamos algunas definiciones preliminares (clase elemental abstracta y pregeometría) y algunos hechos básicos relacionados con estas nociones, que va a ser muy importantes dentro del desarrollo de esta tesis. Uno de los resultados más llamativos de esta parte, es el hecho de que un elemento no pertenezca a la clausura algebraica de un determinado conjunto resulta ser tipo-definible en primer orden (observación 0.11).

En el capítulo 1 presentamos la definición de fusión y de autosuficiencia (basado en el desarrollo dado en [Hol95]), además algunos resultados básicos relativos a estas nociones. En este capítulo, presentamos la prueba del hecho de que la clase de las fusiones junto con la relación de autosuficiencia es una clase elemental abstracta. En [Hol95] ya había algunos pasos en ese sentido (de hecho, la transitividad de la autosuficiencia (proposición 1.16 (3)), la versión fuerte del axioma del triángulo pero con conjuntos (proposición 1.18) y el lema previo a la prueba del axioma de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente (lema 1.28) , son probados en [Hol95], aunque la prueba de 1.28 está incompleta allí y en esta tesis llenamos los detalles y corregimos algunas imprecisiones). Algunos de los axiomas de clase elemental abstracta (como por ejemplo los axiomas de isomorfismo y de uniones de cadenas en la clase) se siguen de manera fácil aunque no se mencionen en algún otro sitio, tal vez el axioma menos trivial de verificar de los probados en este trabajo es el de Löweinheim-Skolem-Tarski descendente (LSTD), pues aunque utiliza fuertemente el lema 1.28 probado en [Hol95] (que es un resultado similar al esperado en fusiones aunque trabaja sobre conjuntos) requiere una iteración de la construcción dada en ese lema con la construcción obtenida al tomar la clausura de Skolem bajo existenciales.

En el capítulo 2 presentamos la prueba dada en [Hol95] del hecho de que la clase de las fusiones satisface la propiedad de amalgamación (proposición 2.5). En esta tesis aclaramos algunas imprecisiones y llenamos algunos de los detalles que presenta la prueba presentada allí. Lo interesante de esa demostración, es que se basa en un resultado previo (proposición 2.4) que permite construir dos torres de tipos (cada uno en uno de los lenguajes disyuntos considerados en la definición de fusión, que involucran condiciones de independencia) de tamaño ω de manera que existe una fusión que realiza la unión de dichas torres y que la subtupla de dicha realización que corres-

ponde al primer paso de dichas torres es autosuficiente en dicha fusión. El primer paso de dichas torres corresponde a un completamiento de los tipos en cada lenguaje, sobre el vacío, de la unión de las fusiones a amalgamar. De esto, una copia isomorfa de dicha unión resulta autosuficiente en la fusión que va a amalgamar. Haciendo un poco de combinatoria es posible probar que cada copia isomorfa de las fusiones a amalgamar es autosuficiente en la copia isomorfa de la unión de dichas fusiones (y aquí juega un papel muy importante una independencia supuesta entre partes disyuntas de la unión de los modelos a amalgamar), y por la transitividad de la autosuficiencia se sigue el resultado.
Pero es posible aprovechar aún más esta herramienta de las torres de tipos. En esta tesis probamos que, siguiendo un argumento similar al empleado en la demostración de la propiedad de amalgamación, se tiene la propiedad *joint embedding property (JEP)* . Además, con esa misma herramienta probamos una versión débil de 3-amalgamación (considerando solamente identidades), y haciendo un renombramiento cuidadoso podemos suponer que dos de esas inmersiones autosuficientes no son inclusiones. Esta segunda versión débil de 3-amalgamación es suficiente para probar la docilidad de la clase de las fusiones junto con la autosuficiencia, usando una técnica derivada de la prueba presentada por R. Grossberg y A. Kolesnivok en [GrKo].

Preguntas que pueden llevar a trabajos posteriores, es estudiar el desarrollo hecho por R. Grossberg y M. VanDieren en clases dóciles ([GrVa1]) en el contexto de las fusiones. En este desarrollo, se demuestra la existencia de Galois-indiscernibles bajo cierta hipótesis de Galois-estabilidad. También se conoce un resultado de transferencia de categoricidad debido a Grossberg y VanDieren en el contexto de las clases dóciles ([GrVa2]), como habíamos mencionado en algún párrafo anterior.

El ejemplo inicial dado por Hrushovski en [Hr93] para refutar la conjetura de Zilber sobre la bi-interpretabilidad de conjuntos fuertemente minimales es el llamado *ejemplo "ab initio"*. El contexto de este ejemplo es el de un lenguaje de primer orden con un símbolo de relación de aridad 3, sobre el cual se define una predimensión haciendo un conteo del número de triplas que pertenecen a la relación. Considerando la clase de estructuras para las cuales dicha predimensión es no negativa (*condición de Schanuel*, nombre debido a su parecido con la famosa *conjetura de Schanuel*, ver observación 4.5), se puede definir de manera análoga a lo expuesto en el caso de las fun-

ciones una noción de autosuficiencia. En el tercer capítulo probamos que la clase de estructuras de este tipo que satisfacen la condición de Schanuel (que denotamos por $\mathcal{K}_{ab}$) junto con la relación de autosuficiencia es una clase elemental abstracta. De hecho, la prueba de este resultado es muy similar a la demostración realizada en el caso de las fusiones.
En [Hr93] es probado el hecho de que estructuras finitas en $\mathcal{K}_{ab}$ satisfacen la propiedad de amalgamación. En esta tesis probamos esta misma afirmación (proposición 3.34) pero en el caso general (considerando posiblemente estructuras infinitas), realizando una adaptación de la prueba expuesta en [Hr93].

Dentro de la prueba del hecho de que la clase de las fusiones y del ejemplo "ab initio" junto con la relación "ser autosuficiente" (definida en cada contexto) es una clase elemental abstracta, juego un papel muy importante el hecho de que dicha relación está definida sobre una predimensión (la cual satisface en particular la propiedad de submodularidad). De hecho, basta esta observación para probar que una construcción de Hrushovski junto con una relación "ser autosuficiente" en dicho contexto, módulo que la clase se "comporte bien" respecto a los isomorfismos (lo que denominamos *compatibilidad con isomorfismos*) y uniones de cadenas, es una clase elemental abstracta. Preguntas que pueden llevar a trabajos posteriores, son sobre que propiedades adicionales satisfacen estas construcciones.

En el cuarto capítulo presentamos un análisis de las condiciones bajos las cuales se puede hacer un análisis similar al expuesto en los casos "ab initio" y fusiones pero en el caso general de las construcciones de Hrushovski.

Considerando una construcción de Hrushovski con las condiciones pedidas en el capítulo 4, tenemos que la clase de dichas estructuras que satisfacen la condición de Schanuel junto con la relación de autosuficiencia forman una clase elemental abstracta (proposición 4.28). La pregunta que surge en ese momento es sobre qué tipo de propiedades cumplen estas construcciones. Lo que se espera es que el análisis realizado en esta tesis sirva como un punto de partida para este tipo de estudio en construcciones de Hrushovski en general (como por ejemplo en los denominados *bad fields*, el ejemplo del cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 con pseudo-exponencial debido a B. Zilber, entre otros).

Capítulo 0

Algunas nociones básicas

En el presente capítulo introductorio presentaremos las definiciones de las nociones básicas de *clase elemental abstracta* y de *pregeometría*, y algunos hechos básicos sobre esta última noción.

0.1 Clase elemental abstracta

Definición 0.1. Sea $\mathcal{K}$ una clase de L-estructuras, donde L es un lenguaje de primer orden, y $\preceq_{\mathcal{K}}$ una relación binaria en $\mathcal{K}$. Decimos que $(\mathcal{K}, \preceq_{\mathcal{K}})$ es una *clase elemental abstracta* (o *c.e.a.*) si y solo si

1. $\preceq_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial en $\mathcal{K}$.
2. Si $\mathfrak{A} \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.
3. (triángulo) Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ son tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{A} \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{C}$, entonces $\mathfrak{A} \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \arrow[dl, "\subseteq"'] \arrow[dr, "\preceq_{\mathcal{K}}"] & \\ \mathfrak{B} \arrow[rr, "\preceq_{\mathcal{K}}"'] & & \mathfrak{C} \end{tikzcd} \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$$

4. (isomorfismo (1)) Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

5. (isomorfismo (2)) Si $\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{B}_i$ son estructuras en $\mathcal{K}$ tales que $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{B}_1 \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}_2$ y $f_i : \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2)$ isomorfismos tales que $f_1 \subseteq f_2$, entonces $\mathfrak{A}_1 \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_2$.

$$\begin{tikzcd}
f_1 : \mathfrak{A}_1 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathfrak{B}_1 \arrow[d, "\preceq_{\mathcal{K}} \Rightarrow \mathfrak{A}_1 \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}_2"] \\
f_2 : \mathfrak{A}_2 \arrow[r, "\cong"] & \mathfrak{B}_2
\end{tikzcd}$$

6. (cadenas de Tarski-Vaught(1)) Si $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \lambda\} \subseteq \mathcal{K}$ es una $\preceq_{\mathcal{K}}$-cadena, entonces $\bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i \in \mathcal{K}$ y $\mathfrak{A}_i \preceq_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i$ para todo $i < \lambda$.

7. (cadenas de Tarski-Vaught (2)) Si $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \lambda\} \subseteq \mathcal{K}$ es una $\preceq_{\mathcal{K}}$-cadena y $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ es tal que $\mathfrak{A}_k \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$ para todo $k < \lambda$, entonces $\bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$.

8. (Löwenheim-Skolem-Tarski descendente) Existe un cardinal $LS(\mathcal{K})$ tal que dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ y $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, existe $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ tal que $X \subseteq \mathfrak{B} \preceq_{\mathcal{K}} \mathfrak{A}$, donde $\|\mathfrak{B}\| \leq |X| + LS(\mathcal{K}) + \aleph_0$ (tal cardinal $LS(\mathcal{K})$ es denominado *número de Löwenheim-Skolem* de la clase $\mathcal{K}$).

Esta definición es una axiomatización de algunas propiedades que presentan las clases elementales en primer orden (clases cuyos elementos son exactamente todos los modelos de cierta teoría de primer orden). Aunque toda clase elemental es elemental abstracta, hay ejemplos de clases elementales abstractas que no son elementales. Uno de estos ejemplos clásicos no elementales es la clase $Mod(\psi)$ donde ψ es una fórmula en $L_{\omega_1,\omega}$ junto a la relación $\prec$ (ser submodelo elemental).

Un ejemplo estudiado recientemente es la clase de estructuras $(M, +, \cdot, ex)$ que satisfacen la fórmula $\psi_e x \in L_{\omega_1,\omega}(Q)$, que es la conjunción de las siguientes:

1. $(M, +, \cdot)$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0

2. ex es una función en M tal que $ex(x + y) = ex(x) \cdot ex(y)$

3. $(M, +, \cdot, ex)$ es existencialmente cerrada

4. $(M, +, \cdot, ex)$ es contablemente cerrada cerrada (es decir, dado X finito en esta estructura, $cl(X)$ es a lo sumo contable)
5. El núcleo de ex es estandar (es decir, dicho núcleo es cíclico)
6. $(M, +, \cdot, ex)$ satisface la conjetura de Schanuel.

Las anteriores condiciones son expresables en $L_{\omega_1,\omega}(Q)$

Una referencia muy completa sobre esta definición (sobre lo conocido hasta 2001) es [Gr02].

Adicionalmente, J. Baldwin da una breve perspertiva del trabajo realizado y lo que aún falta por hacer en el estudio de las clases elementales abstractas (ver [Ba]).

0.2 Clausura algebraica

Notación 0.2. Sean A, B conjuntos. La unión $A \cup B$ es denotada por AB. Si a es un elemento de un conjunto C, denotamos por Aa a la unión $A \cup \{a\}$.

Notación 0.3. Sea X un conjunto. Denotamos $[X]^{<\omega} := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid |B| < \aleph_0\}$. Adicionalmente, $A \subseteq_{finito} X$ quiere decir que $A \in [X]^{<\omega}$

La presente sección pretende dar un vistazo a una generalización modelo-teórica de las nociones de clausura algebraica y de dimensión en espacios vectoriales.

Definición 0.4. Sea L un lenguaje de primer orden, $\mathfrak{A}$ una L-estructura y $A \subseteq |\mathfrak{A}|$. Decimos que $a \in acl(A)$ si y solo si existe $\varphi(x, \bar{y})$ L-fórmula, $\bar{b} \in A$ (abusando del lenguaje) y $n < \omega$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a; \bar{b}) \wedge \exists^{\leq n} x \varphi(x; \bar{b})$. El conjunto $acl(A)$ es denominado la *clausura algebraica de* A.

Intuitivamente, un elemento a está en la clausura de A si es “solución” de una fórmula (en espacios vectoriales esto es análogo a ser combinación lineal) con parámetros en A y dicha fórmula solo tiene un número finito de “soluciones”.

Definición 0.5. Sea T una teoría en un lenguaje L de primer orden. Decimos que T es *fuertemente minimal* si y solo si en toda estructura $\mathfrak{A} \models T$ todo definible es finito o cofinito.

Hecho 0.6. *Sea T una teoría de primer orden fuertemente minimal y $\mathfrak{A} \models T$ la función $acl : \mathcal{P}(|\mathfrak{A}|) \to \mathcal{P}(|\mathfrak{A}|)$ definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:*

A1 $acl(X) = \bigcup\{acl(Y) : Y \in [X]^{<\omega}\}$ *(carácter finito)*

A2 $X \subseteq acl(X)$ *(monotonía (1))*

A3 $acl(acl(X)) = acl(X)$ *(idempotencia de $acl(X)$)*

A4 Si $a \in acl(Xb) \backslash acl(X)$ *entonces* $b \in acl(Xa)$ *(intercambio)*

Los lectores interesados en la prueba de este hecho pueden remitirse a [He98] páginas 43-44 y 46 (A1, A2 y A4) y [Ho94] página 135 (A3)

0.3 Pregeometrías

La siguiente definición es una generalización del anterior concepto, pero desde un punto de vista conjuntista.

Definición 0.7. Sean G un conjunto y $cl : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$. Decimos que (G, cl) es una pregeometría si:

A1 $cl(X) = \bigcup\{cl(Y) : Y \in [X]^{<\omega}\}$ (carácter finito)

A2 $X \subseteq cl(X)$ (monotonía (1))

A3 $cl(cl(X)) = cl(X)$ (idempotencia de $cl(X)$)

A4 Si $a \in cl(Xb) \backslash cl(X)$ entonces $b \in cl(Xa)$ (intercambio)

Algunas consecuencias inmediatas que podemos describir son las siguientes.

Lema 0.8 (monotonía (2)). *Sea (G, cl) una pregeometría. Si $A \subseteq B \subseteq G$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.*

Demostración. Sea $a \in cl(A)$, luego existe $A' \in [A]^{<\omega}$ tal que $a \in cl(A')$ en virtud de A1. Como $A' \subseteq A \subseteq B$, entonces tenemos que $a \in cl(B)$ en virtud de A1. Por lo tanto, $cl(A) \subseteq cl(B)$. $\square$

Lema 0.9 (transitividad). *Si (G, cl) es una pregeometría y $X, Y \subseteq G$ son tales que $X \subseteq cl(Y)$ entonces $cl(X) \subseteq cl(Y)$*

Demostración. Sea $a \in cl(X)$, luego existe $X' \in [X]^{<\omega}$ tal que $a \in cl(X')$ (por A1). Como $X' \subseteq X \subseteq cl(Y)$ en virtud de lema 0.8 tenemos que $a \in cl(cl(Y))$. Pero como $cl(cl(Y)) = cl(Y)$ (en virtud de A3), entonces $a \in cl(Y)$. Por lo tanto, $cl(X) \subseteq cl(Y)$. $\square$

A continuación daremos algunos ejemplos de pregeometrías.

Ejemplo 0.10. Sea T una teoría fuertemente minimal y $\mathfrak{A} \models T$. Tenemos que $(|\mathfrak{A}|, acl)$ es una pregeometría (hecho 0.6), donde acl es la clausura algebraica definida en $|\mathfrak{A}|$.

A continuación veremos una pequeña observación, aunque muy sencilla de probar, que va a ser muy útil más adelante cuando trabajemos en el contexto de las fusiones, ya que permitirá definir mediante tipos el hecho de que un elemento no depende algebraicamente de un conjunto específico.

Observación 0.11. Siendo T una teoría fuertemente minimal y $\mathfrak{A} \models T$, notemos que si $B \subseteq \mathfrak{A}$ y $a \in |\mathfrak{A}|$, el hecho de que $a \notin acl(B)$ es tipo-definible, pues esto es equivalente a que para toda tupla $\overline{b} \subseteq B$, toda $L(\mathfrak{A})$-fórmula $\varphi(x, \overline{y})$ (donde $\overline{y}$ y $\overline{b}$ tengan la misma longitud) y todo $n < \omega$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, \overline{b}] \rightarrow \exists^{>n} x \varphi(x; \overline{b})$.
Siendo un poco más explícitos, un elemento $a \in |\mathfrak{A}|$ realiza el tipo
$p(z) := \big\{\varphi(z, \overline{b}) \rightarrow \exists^{>n} x\varphi(x; \overline{b}) \mid \varphi(z, \overline{y}) \in Fmla(L(T)), l(\overline{y}) = l(\overline{b}), \overline{b} \in B,$
$n < \omega\big\}$ si y solo si dicho elemento no está en $acl(B)$.

Ejemplo 0.12. Dado un conjunto X, tenemos que $(X, id_{\mathcal{P}(X)})$ es trivialmente una pregeometría.

Continuamos introduciendo algunos conceptos básicos, correspondientes a algunas generalizaciones de nociones conocidas en el contexto de los espacios vectoriales.

Definición 0.13. Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$. Decimos que X es *cerrado* si $X = cl(X)$.

Definición 0.14. Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$ un cerrado.
Decimos que $Y \subseteq X$ es una *base* para X si es minimal tal que $cl(Y) = X$.
Decimos que $Y \subseteq G$ es *independiente* si es una base para $cl(Y)$.

El siguiente hecho es una caracterización muy útil del concepto de independencia.

Hecho 0.15. *Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$. X es cl-independiente si y solo si para todo $a \in X$ tenemos que $a \notin cl(X \setminus \{a\})$.*

Proposición 0.16. *Sean (G, cl) una pregeometría y $X \subseteq G$ un cerrado. $Y \subseteq X$ es una base para X si y solo si es independiente tal que $cl(Y) = X$.*

Demostración. Supongamos que $Y \subseteq X$ es base para X. Y es independiente puesto que si existiera $Y' \subsetneq Y$ tal que $cl(Y') = cl(Y)$, entonces Y' contradiría la minimalidad de $Y \subseteq X$. Luego Y es independiente tal que $cl(Y) = X$. Recíprocamente, sea $Y \subseteq X$ independiente tal que $cl(Y) = X$. Si existiera $Y' \subsetneq Y$ tal que $cl(Y') = X$, entonces tendríamos que $cl(Y') = X = cl(Y)$, contradiciendo la independencia de Y. $\square$

Las nociones anteriores corresponden a generalizaciones de las nociones de base e independencia usuales en espacios vectoriales.

Hecho 0.17. *Si A y B son bases para $cl(X)$ entonces $|A| = |B|$.*

Notación 0.18. Dada una base para $cl(X)$, su cardinal se denomina *cl-dimensión* de X y se denota por $d(X)$.

El siguiente es un hecho bastante conocido en el contexto de las pregeometrías.

Hecho 0.19. *Sean (G, cl) una pregeometría, $X, Y \subseteq G$ y d la respectiva cl-dimensión. d satisface las siguientes propiedades:*

1. $d(X) \leq |X|$
2. *(submodularidad)* $d(XY) + d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y)$.
3. *(monotonía) Si* $X \subseteq Y$ *entonces* $d(X) \leq d(Y)$.

Definición 0.20. Sean (G, cl) una pregeometría y $Y, W \subseteq G$. Decimos que Y es *cl-independiente* sobre W si y solo si $d(Y'W') = |Y'| + d(W')$ para todo $Y' \in [Y]^{<\omega}$ y todo $W' \in [W]^{<\omega}$. Una *base* para X sobre W es un conjunto $Y \subseteq X$ maximal independiente sobre W.

Si no da lugar a confusiones, se puede omitir el prefijo *cl* en la definición anterior.

Hecho 0.21. *Si* $Y_1, Y_2 \subseteq X$ *son bases para* X *sobre* W*, entonces* $|Y_1| = |Y_2|$.

Notación 0.22. El cardinal de una base para X sobre W se denota por $d(X/W)$.

Dicha notación no es ambigua gracias al hecho anterior.

Dado que estas nociones son análogas a las conocidas en el contexto de los espacios vectoriales y de la teoría de cuerpos, es natural que se tenga el siguiente resultado.

Lema 0.23. *Sean* (G, cl) *una pregeometría,* $W \subseteq G$ *y* $a \in G \backslash cl(W)$*. Entonces* $d(Wa) = d(W) + 1$

Demostración. Sea $X \subseteq W$ base para $cl(W)$, por lo tanto $cl(X) = cl(W)$. Como $Xa \subseteq Wa$, entonces $cl(Xa) \subseteq cl(Wa)$. Sea $B \in [Wa]^{<\omega}$, luego $B \subseteq cl(Xa)$ (sea $x \in B$, si $x = a$ trivialmente $x \in cl(Xa)$, si $x \neq a$ entonces $x \in W \subseteq cl(W) = cl(X) \subseteq cl(Xa)$) y por la transitividad y el carácter finito de cl tenemos que $cl(Wa) \subseteq cl(Xa)$; por lo tanto $cl(Xa) = cl(Wa)$.

Una pequeña observación que tenemos es que $a \notin cl(X)$ (pues de lo contrario $a \in cl(X) \subseteq cl(W)$, lo que es claramente una contradicción) y por consiguiente $a \notin X$.

Si suponemos que Xa no es independiente, en virtud del hecho 0.15 tenemos que existe $b \in Xa$ tal que $b \in cl(Xa \backslash \{b\})$. Si $b = a$, entonces tendríamos que $a = b \in cl(Xa \backslash \{b\}) = cl(X)$ (contradicción). Por lo tanto, $b \neq a$. De esto, podemos decir que existe $b \in X$ tal que $b \in cl(Xa \backslash \{b\}) = cl((X \backslash \{b\})a)$, y como $b \notin cl(X \backslash \{b\})$ (ya que X es independiente por ser base, en virtud del hecho 0.15) entonces por la propiedad de intercambio de cl tenemos que $a \in cl((X \backslash \{b\})b) = cl(X)$ (contradicción). Por lo tanto, Xa es independiente.

Si suponemos que existe $Xa \subsetneq V \subseteq Wa$ independiente tal que $cl(V) = cl(Wa) = cl(Xa)$, esto claramente contradice la independencia de V pues Xa genera a $cl(V)$. Luego Xa es base para $cl(Wa)$. De esto podemos concluir que $d(Wa) = |Xa| = |X| + 1 = d(W) + 1$ ya que $a \notin X$. □

La siguiente proposición provee una caracterización muy útil del concepto de "ser independiente sobre un conjunto", muy similar a la caracterización dada de la noción "ser independiente".

Proposición 0.24. *Sean (G, cl) una pregeometría y $Y, W \subseteq G$. Entonces Y es independiente sobre W si y solo si para todo $a \in Y$ se tiene que $a \notin cl(W(Y \backslash \{a\}))$*

Demostración. Sea $B \subseteq_{finito} W(Y \backslash \{a\})$ y $a \in Y$. Si $a \in cl(B)$, entonces $cl(B) = cl(Ba)$ por lo que $d(B) = d(Ba)$. Definamos $B_1 := B \cap (Y \backslash \{a\})$ y $B_2 := B \cap W$. Como $B_1, B_1a \in [Y]^{<\omega}$, $B_2 \in [W]^{<\omega}$, entonces $|B_1| + d(B_2) = d(B_1B_2) = d(B) = d(Ba) = d((B_1a)B_2) = |B_1a| + d(B_2)$, luego $|B_1| = |B_1a|$ (lo cual es falso puesto que $a \notin B_1$ y B_1 es finito). Por lo tanto $a \notin cl(B)$ y por el carácter finito de cl tenemos que $a \notin cl(W(Y \backslash \{a\}))$
Recíprocamente, supongamos que para todo $a \in Y$ se tiene que $a \notin cl(W(Y \backslash \{a\}))$. Sean $Y' := \{a_1, \cdots, a_n\} \in [Y]^{<\omega}$ y $W' \in [W]^{<\omega}$. Como $a_1 \notin cl(W')$ (pues de lo contario $a_1 \in cl(W(Y \backslash \{a_1\})))$ entonces $d(W'a_1) = d(W') + 1$, en virtud del lema 0.23. Siguiendo un argumento similar podemos probar que $a_i \notin cl(W' \cup \{a_1, \cdots, a_{i-1}\})$ y de este hecho tenemos que $d(W' \cup \{a_1, \cdots, a_i\}) = d(W') + i$ $(i = 2, \cdots, n)$. Por lo tanto, $d(W'Y') = d(W') + |Y'|$. □

Proposición 0.25. *Si $X \subseteq cl(W)$ entonces $d(X/W) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $X \subseteq cl(W)$ y que $Y \subseteq X$ es independiente sobre W. Si $Y \neq \emptyset$, existe $a \in Y$ y como $Y \subseteq X \subseteq cl(W) \subseteq cl(W(Y \backslash \{a\}))$ entonces $a \in cl(W(Y \backslash \{a\}))$ (contradice la proposicion 0.24). Luego $Y = \emptyset$ y por tanto $d(X/W) = 0$. □

Capítulo 1

Las fusiones de Hrushovski

El origen de las construcciones de Hrushovski se remonta a [Hr93] y [Hr92], donde E. Hrushovski refuta la conjetura de Zilber relativa a la tricotomía de la biinterpretabilidad de estructuras fuertemente minimales, construyendo una especie de límite de Fraïssé sobre estructuras finitas que preserva una dimensión relativizada que es definida en ese contexto que no resulta encajar en ninguna de las condiciones dadas por Zilber en dicha tricotomía.

El caso general de las construcciones de Hrushovski parte de una clase de estructuras $\mathcal{K}$ de primer orden (no necesariamente elemental en primer orden) donde hay definida una predimensión d_0 sobre todos los subconjuntos finitos de cada estructura de la clase (es decir, $Im(d_0) \subseteq \mathbb{Z}$, y dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ y $X, Y \in [|\mathfrak{A}|]^{<\omega}$ se tiene que $d_0(X) \leq |X|$ y $d_0(X \cap Y) + d_0(X \cup Y) \leq d_0(X) + d_0(Y)$). Luego consideramos la subclase $\mathcal{K}_0$ de las estructuras $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ para las cuales $d_0(X) \geq 0$ para cada $X \in [|\mathfrak{A}|]^{<\omega}$ (la cual es denominada *condición de Schanuel*, la razón de este nombre es explicada en la observación 4.5). Sobre subconjuntos de estructuras en $\mathcal{K}_0$ es definida una dimensión relativizada $d(\cdot;\cdot)$ donde el segundo conjunto es arbitrario y el primero es subconjunto finito del primero, en la que está basada la definición de la noción de *autosuficiencia* (A es autosuficiente en B ssi $d(\cdot; A) = d(\cdot; B)$ restringiendo a $[A]^{<\omega}$, hecho que se denota por $\leq$). En realidad, la mayoría de desarrollos en este tema se interesan en la construcción de la especie de $\leq$-límite de Fraïssé sobre el cual está basado el contrajemplo de la conjetura de Zilber comentada atrás. En esta tesis no nos interesamos por estudiar ese límite sino estudiamos la clase $(\mathcal{K}_0, \leq)$ como clase elemental abstracta en dos contextos particulares: *fusiones de Hrushovski* y *ejemplo "ab initio"*. En el presente capítulo estudiamos el caso de las fusiones de Hrushovski.

1.1 Definición de fusión

Sean T_1, T_2 teorías de primer orden completas, fuertemente minimales y modelo completas en lenguajes L_1 y L_2 respectivamente, donde $L_1 \cap L_2 = \{=\}$. Adicionalmente consideramos d_i como la respectiva función dimensión basada en la clausura algebraica relativa al lenguaje L_i $(i = 1, 2)$.

Definición 1.1. Sea $X \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}|$ donde $\mathfrak{A} \models T_1 \cup T_2$. Se define $d_0 : [|\mathfrak{A}|]^{<\omega} \to \mathbb{Z}$ como $d_0(X) := d_1(X) + d_2(X) - |X|$.
Si $\mathfrak{A} \models T_1 \cup T_2$ y adicionalmente $d_0(X) \geq 0$ para todo $X \in [|\mathfrak{A}|]^{<\omega}$ decimos que $\mathfrak{A}$ es una *fusión* de T_1 y T_2.

Hecho 1.2. *Si T es una teoría fuertemente minimal, $\mathfrak{A} \models T$ y $\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq |\mathfrak{A}|$ es tal que $d(\{a_1, \cdots, a_n\}) = k$, entonces existe una $L(T)$-fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ y adicionalmente $\mathfrak{A} \models \varphi[b_1, \cdots, b_n]$ ssi $d(\{b_1, \cdots, b_n\}) \leq k$.*

El siguiente hecho es bastante importante puesto que nos dice que la clase de las fusiones sobre L_1 y L_2 es elemental.

Hecho 1.3. *La clase de las fusiones sobre L_1 y L_2 es elemental, con axiomatización $T_1 \cup T_2$ adicionando axiomas de la forma*

$$\forall \overline{x} \left((\varphi_1(\overline{x}) \wedge \varphi_2(\overline{x})) \to \bigvee_{i \neq j} x_i = x_j \right)$$

donde para k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $k_1 + k_2 < |\overline{x}|$ se tiene que φ_i es una L_i-fórmula tal que si φ_i ocurre en un modelo de T_i entonces $d_i(\overline{x}) \leq k_i$ $(i = 1, 2)$.

Tales fórmulas φ_i $(i = 1, 2)$ existen en virtud del hecho 1.2

La anterior axiomatización la denotamos por T_{fus}

La función d_0 definida anteriormente satisface algunas propiedades muy interesantes, las cuales enunciaremos a continuación.

Hecho 1.4. *Dados $\mathfrak{A} \models T_1 \cup T_2$ y d_0 la función definida anteriormente, definimos $d_0(X/Y) := d_0(XY) - d_0(Y)$. Tenemos que para todo X, $Y \in [|\mathfrak{A}|]^{<\omega}$:*

1. $-|X| \leq d_0(X/Y)$
2. $d_0(X) \leq |X|$.
3. *(submodularidad)* $d_0(XY) + d_0(X \cap Y) \leq d_0(X) + d_0(Y)$

Observación 1.5. Notemos que $d_0(X/Y) = d_0(XY) - d_0(Y) = d_0(X \backslash Y/Y)$ si X, Y son finitos.

Observación 1.6. Si $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}|$ son tales que $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2$, entonces $d_0(Z/Z_2) \leq d_0(Z/Z_1)$ (es decir, $d_0(ZZ_2) + d_0(Z_1) \leq d_0(ZZ_1) + d_0(Z_2)$). Esto se sigue al tomar $X := ZZ_1$ y $Y := Z_2$ en la propiedad 3. del hecho 1.4, dado que $XY = ZZ_2$ y $X \cap Y = Z_1$.

Definición 1.7. Dados $X, Y \subseteq \mathfrak{A}$, donde $\mathfrak{A} \models T_1 \cup T_2$ y X es finito, se define $d_0(X/Y) := \min\{d_0(X/Y') \mid X \cap Y \subseteq Y' \subseteq_{finito} Y\}$.

Observación 1.8. La definición 1.7 extiende la dada en el caso de que Y sea finito, puesto que si denotamos $d'_0(X/Y) := \min\{d_0(X/Y') \mid X \cap Y \subseteq Y' \subseteq_{finito} Y\}$ tenemos que $d'_0(X/Y) \leq d_0(X/Y)$ (pues $X \cap Y \subseteq Y \subseteq_{finito} Y$); y siendo $X \cap Y \subseteq W \subseteq_{finito} Y$ tal que $d'_0(X/Y) = d_0(X/W)$, como $X \cap Y = X \cap W$ y $W \subseteq Y$ de la observación 1.6 tenemos que $d_0(X/Y) \leq d_0(X/W) = d'_0(X/Y)$.

Definición 1.9. Sean $\mathfrak{A} \models T_1 \cup T_2$ fusión de T_1 y T_2, $U \subseteq |\mathfrak{A}|$ y $X \in [|\mathfrak{A}|]^{<\omega}$. Definimos $d(X; U) := \min\{d_0(X') \mid X \subseteq X' \subseteq_{finito} U\}$

Aquí es fundamental pedir que $\mathfrak{A}$ sea una fusión para que $d(X; U)$ exista, pues de esa manera sería el mínimo de cierto conjunto no vacío de números naturales.

Observación 1.10. Es relativamente fácil demostrar que la función $d(\cdot) := d(\cdot; U)$ (donde $U \subseteq |\mathfrak{A}|$ es fijo, donde $\mathfrak{A}$ es una fusión) satisface las siguientes propiedades:

1. $d(X) \leq |X|$
2. (submodularidad) $d(XY) + d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y)$

3. (monotonía) Si $X \subseteq Y$ entonces $d(X) \leq d(Y)$

Esto se sigue como consecuencia de que las dimensiones $d_i(\cdot)$ satisfacen estas propiedades (hecho 0.19).
De esta manera, podemos considerar una pregeometría en $\mathfrak{A}$ de una manera natural: $a \in cl(X)$ si y solo si existe $Y \in [X]^{<\omega}$ tal que $d(Ya) = d(Y)$ (intuitivamente, la clausura de Ya es la misma de Y).
Como está definida esta clausura, tenemos garantizado el carácter finito (si $a \in cl(X)$, para cualquier conjunto $Y \in [X]^{<\omega}$ que sirva de testigo de la igualdad $d(Ya) = d(Y)$ tenemos que $a \in cl(Y)$ pues $Y \in [Y]^{<\omega}$).
La monotonía (1) es fácil de verificar, puesto que si $a \in X$, al tomar $Y := \{a\} \in [X]^{<\omega}$ tenemos que $d(\{a\}) = d(\{a\}a)$, luego $a \in cl(X)$.
La idempotencia y la propiedad de intercambio son sencillas pero un poco tediosas de probar, razón por la cual no lo haremos aquí.

En la parte restante de esta sección, supondremos que los conjuntos involucrados son subconjuntos de una fusión.

Proposición 1.11. *Si $X \subseteq X' \subseteq_{finito} U$ es tal que $d_0(X') = d(X;U)$, entonces $d_0(X') = d(X';U)$*

Demostración. De la definición de $d(\cdot;U)$ tenemos que $d(X';U) \leq d_0(X')$ puesto que $X' \subseteq X' \subseteq_{finito} U$. Por otro lado, como $X \subseteq X'$ entonces $d(X;U) \leq d(X';U)$ puesto que $\{A \in [U]^{<\omega} \mid X' \subseteq A\} \subseteq \{A \in [U]^{<\omega} \mid X \subseteq A\}$; es decir, $d_0(X') = d(X;U) \leq d(X';U)$. Por lo tanto, $d_0(X') = d(X';U)$. $\square$

El siguiente hecho es importante, puesto que en este se basa la noción de ser *subconjunto autosuficiente*. Una prueba de este hecho se puede encontrar en [Hol95].

Hecho 1.12. *Para $A \subseteq B$ son equivalentes:*

1. *Para todo $X \in [A]^{<\omega}$, $d(X;A) = d(X;B)$.*

2. *Dado $X \in [A]^{<\omega}$ existe $X \subseteq Y \subseteq_{finito} A$ tal que $d_0(Y) = d(X;B)$.*

3. *Para todo $Y \in [B]^{<\omega}$ $d_0(Y/Y \cap A) \geq 0$.*

Si A es finito, 1., 2. *y* 3. *son equivalentes a*

4. *$d_0(A) = d(A;B)$.*

Definición 1.13. Supongamos que $A \subseteq B$. Decimos que A es *autosuficiente* en B (lo que denotaremos por $A \leq B$) si y solo si alguna de las condiciones del hecho 1.12 ocurre.
Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son fusiones tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, decimos que $\mathfrak{A}$ es *autosuficiente* en $\mathfrak{B}$ (lo que denotaremos por $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$) si y solo si $|\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{B}|$

Los siguientes resultados son bastante útiles, pues permiten demostrar de una manera mas fácil la autosuficiencia.

Proposición 1.14. *Si $A \subseteq B$ y además $d_0(X/A) \geq 0$ para todo $X \in [B]^{<\omega}$, entonces $A \leq B$.*

Demostración. Como $d_0(X/A) := \min\{d_0(X/Y) \mid X \cap A \subseteq Y \subseteq_{finito} A\}$ y $X \cap A \subseteq X \cap A \subseteq_{finito} A$ entonces $d_0(X/A) \leq d_0(X/X \cap A)$. Por hipótesis tenemos que $0 \leq d_0(X/A)$, luego $0 \leq d_0(X/X \cap A)$. En consecuencia, del hecho 1.12 (3) podemos decir que $A \leq B$. □

Corolario 1.15. *Si $A \subseteq B$ y adicionalmente $d_0(X/A) \geq 0$ para todo $X \in [B \backslash A]^{<\omega}$, entonces $A \leq B$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.14 y de la observación 1.5. □

1.2 Fusiones de Hrushovski y clases elementales abstractas

A continuación presentaremos algunos hechos previos que vamos a considerar con el fin de dar una conexión entre las fusiones, la noción de ser autosuficiente en un modelo y las clases elementales abstractas. En adelante denotaremos por $\mathcal{K}_{fus}$ a la clase de las fusiones de dos teorías T_1 y T_2 completas, modelo-completas y fuertemente minimales en lenguajes disyuntos L_1 y L_2 respectivamente. Cuando digamos que $\mathfrak{A}$ es una fusión, sobreentederemos que es una fusión de T_1 y T_2.

Proposición 1.16. *$(\mathcal{K}_{fus}, \leq)$ es un orden parcial.*

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{A}$ una fusión. Como $d(X; |\mathfrak{A}|) = d(X; |\mathfrak{A}|)$ para todo $X \in [|\mathfrak{A}|]^{<\omega}$ entonces $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}$ (en virtud del hecho 1.12 (1)).
2. Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ fusiones tales que $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$. De esto podemos decir que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

3. Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ fusiones tales que $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{C}$. Sea $X \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}|$, como $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ entonces del hecho 1.12 (1) tenemos que $d(X; |\mathfrak{A}|) = d(X; |\mathfrak{B}|)$. Como $X \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ y $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{C}$ entonces por el hecho 1.12 (1) $d(X; |\mathfrak{B}|) = d(X; |\mathfrak{C}|)$. Por lo tanto $d(X; |\mathfrak{A}|) = d(X; |\mathfrak{C}|)$, y en virtud del hecho 1.12 (1) tenemos que $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{C}$.

□

Proposición 1.17. *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fusiones tales que $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.*

Demostración. Se sigue directamente de la definición de $\leq$. □

Lema 1.18. *Sean $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ subconjuntos de una fusión tales que $A_1 \leq A_3$, entonces $A_1 \leq A_2$.*

Demostración. Puesto que $A_1 \leq A_3$, del hecho 1.12 (3) se tiene que para todo $Y \in [A_3]^{<\omega}$ $d_0(Y/Y \cap A_1) \geq 0$. Pero esto en particular se cumple si $Y \in [A_2]^{<\omega}$, luego $A_1 \leq A_2$. □

Corolario 1.19. *Sean $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3$ fusiones tales que $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_3$, entonces $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$.*

Observación 1.20. Este último resultado es mucho más fuerte que el axioma del triángulo exigido dentro de la definición de clase elemental abstracta. Preguntas naturales que surgen en este momento son sobre qué tipo de consecuencias modelo-teóricas trae consigo este resultado, puesto que en algunos desarrollos el axioma de triángulo es fuertemente utilizado. Es posible que se tengan algunos resultados que las clases elementales abstractas en general no tienen.

Corolario 1.21 (axioma del triángulo en fusiones). *Sean $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \leq \mathfrak{A}_3$ fusiones tales que $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_3$, entonces $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior, puesto que $\mathfrak{A}_2 \leq \mathfrak{A}_3$ implica que $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3$ (proposición 1.17) □

Proposición 1.22 (uniones de $\leq$-cadenas (1) en fusiones). *Sea $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \lambda\}$ una $\leq$-cadena de fusiones. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i$ es fusión y $\mathfrak{A}_i \leq \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i$ para todo $i < \lambda$.*

Demostración. Por ser T_1, T_2 teorías modelo completas en sus respectivos lenguajes, entonces tenemos que $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \lambda\}$ es una $\preceq$-cadena en el lenguaje $L_1 \cup L_2$. Por lo tanto tenemos que $\mathfrak{A}_i \preceq \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i$ y por tanto $\bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i$ es una fusión en virtud del hecho 1.3.
Por otro lado, sean $k < \lambda$ fijo y $Y \subseteq_{finito} \bigcup_{i<\lambda} |\mathfrak{A}_i|$. Por lo tanto existe $j < \lambda$ tal que $Y \subseteq |\mathfrak{A}_j|$. Hay que considerar dos casos:

1. Si $k < j$, como por hipótesis $\mathfrak{A}_k \leq \mathfrak{A}_j$ entonces $d_0(Y/Y \cap |\mathfrak{A}_k|) \geq 0$ (por el hecho 1.12 (3)).

2. Si $j \leq k$, por hipótesis tenemos que $\mathfrak{A}_j \leq \mathfrak{A}_k$. Como $Y \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}_j| \subseteq |\mathfrak{A}_k|$ y como $\mathfrak{A}_k \leq \mathfrak{A}_k$ (por la proposición 1.16) entonces $d_0(Y/Y \cap |\mathfrak{A}_k|) \geq 0$.

Luego tenemos que $\mathfrak{A}_k \leq \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i$ para cada $k < \lambda$, en virtud del hecho 1.12 (3). □

Proposición 1.23. *Sea $\{A_i \mid i < \lambda\}$ una $\subseteq$-cadena de subconjuntos de una fusión y B tal que $A_k \leq B$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} A_i \leq B$.*

Demostración. Sea $X \subseteq_{finito} \bigcup_{i<\lambda} A_i$, luego existe $j < \lambda$ tal que $X \subseteq A_j$. Como por hipótesis $A_j \leq B$, entonces existe $X \subseteq Y \subseteq_{finito} A_j$ tal que $d_0(Y) = d(X; B)$ (por el hecho 1.12 (2)). Pero como $X \subseteq Y \subseteq_{finito} A_j \subseteq \bigcup_{i<\lambda} A_i$ entonces en virtud del hecho 1.12 (2) podemos decir que $\bigcup_{i<\lambda} A_i \leq B$. □

Corolario 1.24. *Sea $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \lambda\}$ una $\subseteq$-cadena de fusiones y $\mathfrak{B}$ una fusión tal que $\mathfrak{A}_k \leq \mathfrak{B}$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{B}$.*

El anterior corolario es un poco más fuerte que el axioma correspondiente exigido dentro de la definición de clase elemental abstracta, puesto que la cadena no necesariamente debe ser $\mathcal{K}$-elemental. Una pregunta natural que surge en este momento es qué tipo de consecuencias modelo-teóricas se pueden presentar gracias a esta situación.

Corolario 1.25 (uniones de $\leq$-cadenas (2) en fusiones). *Sea $\{\mathfrak{A}_i \mid i < \lambda\}$ una $\leq$-cadena de fusiones y $\mathfrak{B}$ una fusión tal que $\mathfrak{A}_k \leq \mathfrak{B}$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{B}$.*

Proposición 1.26 (axioma de isomorfismos (1)). *Sea $\mathfrak{A}$ una fusión. Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{B}$ es fusión.*

Demostración. Se sigue trivialmente del hecho 1.3. □

Proposición 1.27 (axioma de isomorfismos (2)). *Sean $\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{B}_i$ ($i = 1,2$) fusiones tales que $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{B}_2$ y $f_i : \mathfrak{A}_i \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}_i$ ($i = 1,2$) $L_1 \cup L_2$-isomorfismos tales que $f_1 \subseteq f_2$. Entonces $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$.*

Demostración. Todo $X \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}_1|$ cumple que $d(X; |\mathfrak{A}_1|) = d(f_1(X), |\mathfrak{B}_1|)$. En efecto, siendo $X \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}_1|$ por definición de $d(\cdot; |\mathfrak{A}_1|)$ existe $X \subseteq X' \subseteq_{finito} |\mathfrak{A}_1|$ tal que $d_0(X') = d(X; |\mathfrak{A}|)$. Pero como $d_0(X') = d_1(X') + d_2(X') - |X'| = d_1(f_1(X')) + d_2(f_1(X')) - |f_1(X')| = d_0(f_1(X'))$ y puesto que $f_1(X) \subseteq f_1(X') \subseteq_{finito} |\mathfrak{B}_1|$ entonces $d(f_1(X); |\mathfrak{B}_1|) \leq d_0(f_1(X')) = d_0(X') = d(X; |\mathfrak{A}_1|)$. Análogamente se puede probar que $d(f_1(X); |\mathfrak{B}_1|) \geq d(X; |\mathfrak{A}_1|)$, luego $d(f_1(X); |\mathfrak{B}_1|) = d(X; |\mathfrak{A}_1|)$. Como $f_1(X) \subseteq |\mathfrak{B}_1|$ y $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{B}_2$ entonces $d(f_1(X); |\mathfrak{B}_1|) = d(f_1(X); |\mathfrak{B}_2|)$ (en virtud del hecho 1.12 (1)). Haciendo un argumento similar al que hicimos anteriormente, podemos ver que $d(f_2(X); |\mathfrak{B}_2|) = d(X; |\mathfrak{A}_2|)$. Por lo tanto, como $f_1 \subseteq f_2$ tenemos que $f_1(X) = f_2(X)$. De esto podemos concluir que $d(X; |\mathfrak{A}_1|) = d(f_1(X); |\mathfrak{B}_1|) = d(f_1(X); |\mathfrak{B}_2|) = d(f_2(X); |\mathfrak{B}_2|) = d(X; |\mathfrak{A}_2|)$, luego en virtud del hecho 1.12 (1) podemos concluir que $\mathfrak{A}_1 \leq \mathfrak{A}_2$. □

La primera parte del siguiente lema es probado el [Hol95] (la existencia del subconjunto autosuficiente), pero no llena los detalles en el caso infinito aunque sí lo menciona. A continuación llenamos dichos detalles, y probamos la cota que tiene el cardinal de dicho subconjunto autosuficiente.

Lema 1.28. *Dados una fusión $\mathfrak{B}$ y $X \subseteq A \subseteq |\mathfrak{B}|$, existe X' tal que $X \subseteq X' \leq A$, donde $|X'| \leq |X| + \aleph_0$*

Demostración. Supongamos que X es finito. Sean X' tal que $d_0(X') = d(X; A)$. De la proposición 1.11 podemos decir que $d_0(X') = d(X'; A)$. Luego del hecho 1.12 (4) podemos decir que $X' \leq A$, donde trivialmente tenemos que $|X'| \leq \aleph_0 = |X| + \aleph_0$ (pues X' es finito).
Si X es infinito definimos $X_0 := X$, $X_{n+1} := \bigcup_{Y \in [X_n]^{<\omega}} Y'$ (donde $n < \omega$ y Y' es tal que $Y \subseteq Y' \leq A$) y $X' := \bigcup_{n<\omega} X_n$. Veamos que $\{X_n \mid n < \omega\}$ es una $\subseteq$-cadena; en efecto sean $n < \omega$ y $a \in X_n$, como $Z := \{a\} \in [X_n]^{<\omega}$ sabemos que existe Z' tal que $Z \subseteq Z' \leq A$, por lo tanto $a \in Z \subseteq Z' \subseteq \bigcup_{Y \in [X_n]^{<\omega}} Y' = X_{n+1}$; luego $X_n \subseteq X_{n+1}$. Sean $F \in [X']^{<\omega}$ y $m < \omega$ mínimo tal que $F \subseteq X_m$. Sabemos que existe $F' \leq A$ tal que $F \subseteq F'$ (hecho en el párrafo anterior). Como $F \in [X_m]^{<\omega}$ entonces $F' \subseteq X_{m+1} \subseteq X'$. Puesto

que $F' \leq A$ del hecho 1.12 (2) tenemos que existe $F \subseteq G \subseteq_{finito} F'$ tal que $d_0(G) = d(F; A)$, pero como $F' \subseteq X'$ entonces tenemos que $F \subseteq G \subseteq X'$. Luego en virtud del hecho 1.12 (2) podemos decir que $X \subseteq X' \leq A$.

Veamos ahora que para todo $n < \omega$ se tiene que $|X_n| \leq |X| + \aleph_0$. En efecto, para $n = 0$ se tiene trivialmente puesto que $X_0 := X$.
Supongamos que $|X_n| \leq |X| + \aleph_0$. Por lo tanto $|X_{n+1}| = \left|\bigcup_{Y \in [X_n]^{<\omega}} Y'\right| \leq \aleph_0 \cdot |X_n|$ (pues cada Y' es finito). Como $|X_n| \leq |X| + \aleph_0$ (hipótesis de inducción) entonces $|X_{n+1}| \leq \aleph_0 \cdot |X_n| \leq \aleph_0 \cdot (|X| + \aleph_0) = |X| + \aleph_0$.
De esto podemos decir que $|X'| = \left|\bigcup_{n<\omega} X_n\right| \leq (|X| + \aleph_0) \cdot \aleph_0 = |X| + \aleph_0$. $\square$

Nótese el gran parecido que tiene el lema anterior con el axioma de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, aunque no se está trabajando con estructuras todavía.

Notación 1.29. Sean $\mathfrak{A}$ una L-estructura de primer orden y $B \subseteq |\mathfrak{A}|$. Denotamos por $Sk(B)$ a la clausura de Skolem bajo existenciales. Informalmente, dicha clausura se construye al tomar una solución en $\mathfrak{A}$ (si la hay) por cada fórmula que tenga parámetros en B. No sobra aclarar que tenemos que $B \subseteq Sk(B)$.

Proposición 1.30 (LSTD en fusiones).
Dados $\mathfrak{A}$ una fusión sobre lenguajes L_1 y L_2 y $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, existe una fusión $\mathfrak{B}$ tal que $X \subseteq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$, donde $\|\mathfrak{B}\| \leq |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$

Demostración. Definimos $X_0 := X'$ (donde X' es tal que $X \subseteq X' \leq |\mathfrak{A}|$ y $|X'| \leq |X| + \aleph_0$), $Y_0 := Sk(X_0)$, $X_{n+1} := (Y_n)'$ (donde $(Y_n)'$ es tal que $Y_n \subseteq (Y_n)' \leq |\mathfrak{A}|$ y $|(Y_n)'| \leq |Y_n| + \aleph_0$) y $Y_{n+1} := Sk(X_{n+1})$ $(n < \omega)$. Definamos $B := \bigcup_{n<\omega} X_n$. Tenemos que B es un $L_1 \cup L_2$ modelo, puesto que si $F \in L_1 \cup L_2$ es símbolo de función de aridad m y $a_1, \cdots, a_m \in B$, sabemos que existe $k < \omega$ tal que $a_1, \cdots, a_m \in X_k$, luego $F^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_m) \in Sk(X_k) = Y_k \subseteq (Y_k)' = X_{k+1} \subseteq B$. Denotemos por $\mathfrak{B}$ a este $L_1 \cup L_2$-modelo.
Por otro lado, por la manera como se ha construido $\mathfrak{B}$ tenemos que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ (gracias al test de Tarski-Vaught); como en particular tenemos que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ y como $\mathfrak{A}$ es fusión entonces $\mathfrak{B}$ es también fusión, puesto que la clase de las fusiones es elemental en primer orden (proposición 1.3).
Adicionalmente, como $X_n \leq |\mathfrak{A}|$ para todo $n < \omega$, en virtud de la proposición 1.23 tenemos que $B = \bigcup_{n<\omega} X_n \leq |\mathfrak{A}|$, es decir, $X \subseteq X' \subseteq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$.
Por otro lado, tenemos que $|X_n| \leq |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$ para todo $n < \omega$. En efecto, $|X_0| = |X'| \leq |X| + \aleph_0 \leq |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$ en virtud del

lema 1.28. Supongamos que $|X_n| \leq |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$. Como $|Y_{n+1}| = |Sk(X_n)| \leq |X_n| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$ entonces $|Y_{n+1}| \leq |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$ (gracias a la hipótesis de inducción y a la observación anterior) y por lo tanto $|X_{n+1}| = |(Y_{n+1})'| \leq |Y_{n+1}| + \aleph_0 \leq |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$ (en virtud de lo visto anteriormente y del lema 1.28).
De esto, podemos afirmar que $\|\mathfrak{B}\| = \left|\bigcup_{n<\omega} X_n\right| \leq (|X|+|L_1 \cup L_2|+\aleph_0)\cdot\aleph_0 = |X| + |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$. □

Como consecuencia del trabajo realizado en este capítulo, tenemos que $(\mathcal{K}_{fus}, \leq)$ es una clase elemental abstracta.

Proposición 1.31. $(\mathcal{K}_{fus}, \leq)$ *es una clase elemental abstracta con número de Lowënheim-Skolem* $LS(\mathcal{K}_{fus}) = |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$

Capítulo 2

Las fusiones de Hrushovski como clases elementales abstractas

En el capítulo anterior probamos que $(\mathcal{K}_{fus}, \leq)$ es una clase elemental abstracta. En este momento surgen preguntas naturales sobre las propiedades que esta satisface. En el presente capítulo presentamos una adaptación de la prueba del hecho que las fusiones satisfacen la propiedad de amalgamación que presenta K. Holland en [Hol95]. Utilizando la técnica utilizada allí para probar la propiedad de amalgamación, probamos en este capítulo versiones débiles de n-amalgamación para $3 \leq n < \omega$. La versión débil de la 3-amalgamación es muy importante en esta tesis ya que es suficiente para demostrar el hecho de que las fusiones son dóciles, haciendo un argumento similar al empleado por R. Grossberg y A. Kolesnikov en [GrKo] para probar que las clases excelentes son dóciles.

2.1 Algunos resultados previos.

Notación 2.1. Entenderemos por j-independencia la acl_j-independencia ($j = 1, 2$) usual que se había definido anteriormente.

Hecho 2.2. *Dado X finito, $d_0(X/W) = d_1(X/W) + d_2(X/W) - |X \backslash W|$.*

Proposición 2.3. *Para $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, 2\} \backslash \{i\}$, si $acl_i(W) \backslash W$ es j-independiente sobre W entonces $W \leq acl_i(W)$.*

Demostración. Sea $X \subseteq_{finito} acl_i(W) \backslash W$. X es j-independiente sobre W (pues de lo contrario existirían $X' \subseteq_{finito} X$ y $W' \subseteq_{finito} W$ tales que $d_j(X'W') \neq |X'| + d_j(W')$, y como $X \subseteq acl_i(W) \backslash W$ contradiría la j-independencia de $acl_i(W) \backslash W$ sobre W). Como $X \subseteq acl_i(W)$, entonces $d_i(X/W) = 0$ en virtud de la proposicion 0.25. Por lo tanto, $d_0(X/W) = d_j(X/W) - |X|$. Como $d_j(X/W) = |X|$, entonces $d_0(X/W) \geq 0$. Por lo tanto, $W \leq acl_i(W)$ en virtud de la proposición 1.15. $\square$

El siguiente lema es en esencia probado en [Hol95], salvo que allí hay algunos detalles que no son aclarados. Por ejemplo, allí se afirma que el modelo N encontrado es una fusión pero no son llenados los detalles. Allí no es posible probar la no negatividad de d_0 utilizando solamente las torres de tipos armados en la prueba, ya que cada una de estas se arma sobre un solo lenguaje y la función d_0 involucra los dos lenguajes al tiempo. En la prueba que presentamos a continuación llenamos ese detalle al considerar una realización de las torres de tipos en un modelo suficientemente saturado de T_{fus}. Además en [Hol95] no es probada la autosuficiencia de la subtupla de la realización de las torres de tipos correspondiente al primer paso de las torres en cuestión, en la fusión N que es realización de dichas torres, aunque sugiere como debe ser probada esta afirmación.

Proposición 2.4. *Sea $\overline{x}$ una tupla de variables (posiblemente, de longitud infinita) y $p_i(\overline{x})$ L_i-tipos completos sobre $\emptyset$ ($i = 1, 2$) con distintas realizaciones en modelos de T_i respectivamente. Supongamos que para toda subvariable finita $\overline{x}'$ de $\overline{x}$ tenemos que $n_1 + n_2 - l(\overline{x}') \geq 0$; tomando $n_i = d_i(\overline{a}')$ donde $\overline{a}'$ es la subtupla correspondiente a $\overline{x}'$, de una realización de $p_i(\overline{x})$. Entonces existen una fusión N y una realización $\overline{b}$ de $p_1(\overline{x}) \cup p_2(\overline{x})$ en N tal que $\overline{b} \leq N$.*

Demostración. Sean $\overline{x}^0 := \overline{x}$, $p_i^0 := p_i$ ($i = 1, 2$) y $\overline{m}^0$ una realización de $p_1(\overline{x})$ en un modelo de T_1. Extendamos $\overline{m}^0$ a una enumeración $\overline{m}^1$ de $acl_1(\overline{m}^0)$ en este modelo, y tomemos $p_1^1(\overline{x}^1) := tp_{L_1}(\overline{m}^1/\emptyset)$. Extendamos $p_2^0(\overline{x})$ a un L_2-tipo completo $p_2^1(\overline{x}^1)$, tomando las nuevas variables en $\overline{x}^1 \backslash \overline{x}^0$ 2-independientes sobre $\overline{x}^0$. Intercambiando los papeles de L_1 y T_1 por los papeles de L_2 y T_2 en cada paso, obtenemos dos cadenas $p_i^0(\overline{x}^0) \subseteq p_i^1(\overline{x}^1) \subseteq p_i^2(\overline{x}^2) \subseteq \cdots$ de L_i-tipos completos ($i = 1, 2$), donde tomamos $q_i := \bigcup_{n<\omega} p_i^n$ ($i = 1, 2$). Puesto que $L_1 \cap L_2 = \{=\}$, por el teorema de consistencia Robinson tenemos que $q_1 \cup q_2$ es consistente. Tomando $\overline{a}$ una realización de $q_1 \cup q_2$, tenemos que $acl_i(\overline{a}) = \overline{a}$ ($i = 1, 2$) ya que si tomamos $a' \subseteq_{finito} \overline{a}$, esta subtupla ha sido considerada en un paso finito de la construcción de q_1 y q_2, sea $n < \omega$ este paso y $\overline{b}^n$

la respectiva subtupla de $\overline{a}$ que realiza los tipos $p_j^n(\overline{x}^n)$ $(j = 1,2)$, y como $\overline{b}^{n+1} = acl_k(\overline{b}^n)$ para algún $k \in \{1,2\}$ ($p_j(\overline{x}^{n+1})$ $(j = 1,2)$ fue construido de esa manera) entonces $acl_i(a') \subseteq acl_i(acl_k(\overline{b}^n)) = acl_i(\overline{b}^{n+1}) \subseteq \overline{a}$ (si $k = i$ $acl_i(\overline{b}^{n+1}) = \overline{b}^{n+1}$, y si $k \neq i$ $acl_i(\overline{b}^{n+1}) = \overline{b}^{n+2}$), entonces por el carácter finito de acl_i tenemos que $acl_i(\overline{a}) \subseteq \overline{a}$. Además, tenemos que $\overline{a}$ es una $L_1 \cup L_2$-estructura, que denotaremos por N'. Como podemos considerar un modelo $\mathfrak{C} \models T_{fus}$ suficientemente saturado, entonces existe una realización $N \models T_{fus}$ (es decir, N es fusión) de $q_1 \cup q_2$. Por otro lado, si denotamos por $\overline{b}^n$ la subtupla de N que realiza los tipos $p_j^n(\overline{x}^n)$ $(j = 1,2)$, tenemos que $\overline{b} := \overline{b}^0 \leq \overline{b}^n$ para todo $n < \omega$. En efecto, para $n = 0$ este hecho es trivial. Asumiendo que para $n < \omega$ tenemos que $\overline{b} \leq \overline{b}^n$, como por construcción tenemos que $\overline{b}^{n+1} = acl_k(\overline{b}^n)$ para algún $k \in \{1,2\}$ y $\overline{b}^{n+1} \backslash \overline{b}^n$ es j-independiente sobre $\overline{b}^n$ $(j \in \{1,2\} \backslash \{k\})$, entonces $\overline{b}^n \leq acl_k(\overline{b}^n) = \overline{b}^{n+1}$ (proposición 2.3), y gracias a la transitividad de $\leq$ tenemos que $\overline{b} \leq \overline{b}^{n+1}$. Puesto que $N = \bigcup_{n<\omega} \overline{b}^n$, entonces por el hecho 1.12 (3) tenemos que $\overline{b} \leq N$. $\square$

2.2 Propiedad de amalgamación.

A continuación daremos una prueba de la amalgamación en fusiones, basada en la hecha en [Hol95]. La prueba que presenta K. Holland en [Hol95] es un poco fuerte puesto que la amalgamación la está realizando sobre la unión de los modelos a amalgamar. Esta técnica la usaremos más adelante para probar una versión más débil de 3-amalgamación, la cual nos permitirá probar que la clase de las fusiones es dócil.

Proposición 2.5 (amalgamación en fusiones). *Sean $M \leq N_i$ $(i = 1,2)$ fusiones. Entonces existen $N_i' \cong_M N_i$ y K fusiones tales que $N_i' \leq N_1'N_2' \leq K$.*

Demostración. Sean $M \leq N_i$ $(i = 1,2)$ fusiones. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $N_1 \cap N_2 = M$. Consideremos $\overline{m}$ una enumeración de M y $\overline{n}_i$ una enumeración de $N_i \backslash M$ $(i = 1,2)$. Sean $p_j := p_j(\overline{xy}_1\overline{y}_2)$ $(j = 1,2)$ un L_j-tipo completo que extiende los tipos $tp_j(\overline{mn}_1)$ y $tp_j(\overline{mn}_2)$ y tal que p_j asegura que todo elemento de $\overline{y}_1$ no j-depende de $\overline{y}_2\overline{x}$ y todo elemento de $\overline{y}_2$ no j-depende de $\overline{y}_1\overline{x}$ (esto es posible en virtud de la observación 0.11). En virtud de de la proposición 2.4, existen una realización $\overline{b} = N_1'N_2'$ (isomorfa a N_1N_2 sobre M) de $p_1 \cup p_2$ y una fusión K tales que $N_1'N_2' \leq K$. Por otro lado, tomando $X \in [N_1'N_2' \backslash N_2']^{<\omega} = [N_1' \backslash N_2']^{<\omega}$ tenemos que $X \cap N_2' = \emptyset$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} d_0(X/N_2') &= \min\{d_0(X/Y) \mid X \cap N_2' \subseteq Y \subseteq_{finito} N_2'\} \\ &= \min\{d_0(X/Y) \mid \emptyset \subseteq Y \subseteq_{finito} N_2'\} \end{aligned}$$

En consecuencia, existe $Y \in [N_2']^{<\omega}$ tal que $d_0(X/Y) = d_0(X/N_2')$. Podemos decir que $d_j(XY) = d_j(X) + d_j(Y)$ para $j = 1, 2$ (puesto que si tenemos X' una j-base para X y Y' una j-base para Y, X' no j-depende de Y' y Y' no j-depende de X'), entonces

$$\begin{aligned} d_0(X/Y) &= d_0(XY) - d_0(Y) \\ &= (d_1(XY) + d_2(XY) - |XY|) - (d_1(Y) + d_2(Y) - |Y|) \\ &= d_1(X) + d_2(X) - |X| = d_0(X) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $d_0(X/N_2') = d_0(X/Y) \geq 0$. En virtud del corolario 1.15, tenemos que $N_1' \leq N_1'N_2'$. De manera análoga podemos demostrar que $N_2' \leq N_1'N_2'$.

Gracias a la transitividad de $\leq$ (proposición 1.16), tenemos que $N_1' \leq K$ y que $N_2' \leq K$. □

Nosotros podemos aprovechar aún más la técnica usada en [Hol95] para probar que en $\mathcal{K}_{fus}$ vale la propiedad de amalgamación. De hecho, a continuación probaremos usando dicha técnica que en $\mathcal{K}_{fus}$ vale también la propiedad *joint embedding property* (JEP).

Proposición 2.6 (JEP en fusiones). *Sean N_i ($i = 1, 2$) fusiones. Entonces existen $N_i' \cong N_i$ y K fusiones tales que $N_i' \leq N_1'N_2' \leq K$ ($i = 1, 2$).*

Demostración. Sean N_i ($i = 1, 2$) fusiones. Consideremos $\overline{m}$ una enumeración de $M := N_1 \cap N_2$ y $\overline{n}_i$ una enumeración de $N_i \backslash M$ ($i = 1, 2$). Sea $p_j := p_j(\overline{x}\overline{y}_1\overline{y}_2)$ ($j = 1, 2$) un L_j-tipo completo que extiende los tipos $tp_j(\overline{mn_1})$ y $tp_j(\overline{mn_2})$ y tal que p_j asegura que todo elemento de $\overline{y}_1$ no j-depende de $\overline{y}_2\overline{x}$ y todo elemento de $\overline{y}_2$ no j-depende de $\overline{y}_1\overline{x}$ (esto es posible en virtud de la observación 0.11). En virtud de de la proposición 2.4, existen una realización $\overline{b} = N_1'N_2'$ (isomorfa a N_1N_2) de $p_1 \cup p_2$ y una fusión K tales que $N_1'N_2' \leq K$. Por otro lado, tomando $X \in [N_1'N_2' \backslash N_2']^{<\omega} = [N_1' \backslash N_2']^{<\omega}$ tenemos que $X \cap N_2' = \emptyset$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} d_0(X/N_2') &= \min\{d_0(X/Y) \mid X \cap N_2' \subseteq Y \subseteq_{finito} N_2'\} \\ &= \min\{d_0(X/Y) \mid \emptyset \subseteq Y \subseteq_{finito} N_2'\} \end{aligned}$$

En consecuencia, existe $Y \in [N_2']^{<\omega}$ tal que $d_0(X/Y) = d_0(X/N_2')$. Podemos decir que $d_j(XY) = d_j(X) + d_j(Y)$ para $j = 1, 2$ (puesto que si tenemos X' una base para X y Y' una base para Y, X' no j-depende de Y' y Y' no j-depende de X'), entonces

$$\begin{aligned} d_0(X/Y) &= d_0(XY) - d_0(Y) \\ &= (d_1(XY) + d_2(XY) - |XY|) - (d_1(Y) + d_2(Y) - |Y|) \\ &= d_1(X) + d_2(X) - |X| \\ &= d_0(X) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $d_0(X/N_2') = d_0(X/Y) \geq 0$. En virtud del corolario 1.15, tenemos que $N_1' \leq N_1'N_2'$. De manera análoga podemos demostrar que $N_2' \leq N_1'N_2'$.

Gracias a la transitividad de $\leq$ (proposición 1.16), tenemos que $N_1' \leq K$ y que $N_2' \leq K$. $\square$

2.3 Algunas versiones débiles de la propiedad de 3-amalgamación.

El lema 2.4 demostró ser una herramienta bastante útil para probar la propiedad de amalgamación en el contexto de las fusiones. Además, fue bastante útil para probar la propiedad JEP en este caso. Pero todavía podemos sacarle mayor provecho a este resultado. De hecho, realizando una ligera adaptación en la demostración de la propiedad de amalgamación podemos probar una versión débil de 3-amalgamación, donde las $\leq$-inmersiones consideradas son inclusiones. El argumento empleado en dicha prueba es posible generalizarlo para probar la versión débil análoga de n-amalgamación para $4 \leq n < \omega$ (proposición 2.16).

Realizando renombramientos de manera ciudadosa, dos de estas inmersiones pueden suponerse que no sean inclusiones. Esta segunda versión débil de 3-amalgamación es suficiente, como veremos en la sección 2.4, para probar que la clase $(\mathcal{K}, \leq)$ es una clase dócil.

A continuación daremos algunas definiciones preliminares.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{K}$ una clase elemental abstracta. Decimos que $(\mathcal{K}, \downarrow)$ es una *noción de bifurcamiento débil* si $\downarrow$ es una relación ternaria llamada *no bifurcamiento*, de la forma $\overline{a} \downarrow_A B$ para $\overline{a} \in M^\alpha$ para algún $M \in \mathcal{K}$ y $A \subseteq B$ bases de amalgamación en $\mathcal{K}$, tal que

1. (invarianza bajo automorfismos) para cualquier $\overline{a}, A, B$ y $N \in \mathcal{K}$ que los contenga, se tiene que $\overline{a} \downarrow_A B$ ssi $f(\overline{a}) \downarrow_{f(A)} f(B)$ para todo f automorfismo de N.

2. (definibilidad) existe un cardinal κ tal que existe una fórmula en primer orden $\varphi(\overline{x})$ en el lenguaje $L(\mathcal{K}) \cup \{\in, P, Q\}$ tal que

$$\langle H(\kappa), \in, \kappa, A, B, \varphi(\overline{y})\rangle_{\varphi(\overline{y}) \in Fml(L(\mathcal{K}))} \models \varphi[\mathbf{a}] \Leftrightarrow \mathbf{a} \downarrow_A B$$

   para todo $\mathbf{a} \in \overline{a}$ finito.

3. (disyunción) $\overline{a} \downarrow_A B$ implica que $\overline{a} \cap B \subseteq A$

4. (existencia) Dado A base de amalgamación en $\mathcal{K}$, si $\overline{a}$ es tal que existe un modelo N que contiene a A pero es disyunto de $\overline{a}$, entonces $\overline{a} \downarrow_A A$.

5. (propiedad de extensión) si $a \downarrow_A B$ entonces para todo $C \in \mathcal{K}$ base de amalgamación tal que $B \subseteq C$ existe $\overline{a}'$ en algún $M \in \mathcal{K}$ tal que $\overline{a}' \downarrow_A C$ y $ga - tp(\overline{a}/A) = ga - tp(\overline{a}'/A)$ (ver definición 2.20).

6. (simetría) si $\overline{a} \downarrow_A A\overline{b}$, entonces $\overline{b} \downarrow_A A\overline{a}$.

Definición 2.8. Un conjunto atómico A se dice *bueno* ssi para toda fórmula consistente $\varphi(\overline{x}; \overline{a})$ (con $\overline{a} \in A$) existe un tipo aislado $p \in S(A)$ que contiene a $\varphi(\overline{x}; \overline{a})$.

Definición 2.9. Sea I un subconjunto de $\mathcal{P}(n)$ ($n < \omega$ fijo) cerrado bajo subconjuntos (es decir, si $t \in I$ y $s \subseteq t$ entonces $s \in I$). Decimos que $S := \langle M_s \mid s \in I\rangle$ es un *I-sistema* ssi para todo $s, t \in T$

1. $s \subseteq t$ implica que $M_s \preceq_{\mathcal{K}} M_t$

2. $M_{s\cap t} = M_s \cap M_t$.

Denotemos $A_t^S := \bigcup_{s\subset t} M_s$.

Definición 2.10. Sea $\langle \mathcal{K}, \downarrow \rangle$ una noción de bifurcamiento débil. Suponga que $I \subseteq \mathcal{P}^-(n) := \mathcal{P}(n) \setminus \{n\}$ y que $S := \langle M_s \mid s \in I\rangle$ es un I-sistema. Decimos que S es n-estable ssi para toda enumeración $\overline{s} := \{s(i) \mid i < m\}$de I (tal que $s(i_1) \subseteq s(i_2)$ implica que $i_1 < i_2$) se tiene que

1. $A_{s(i)}^S$ es bueno para cada i

2. para cada $\langle \mathbf{b}_i \in |M_{s(i)}| \mid i \leq j \leq m\rangle$ existen $\langle \mathbf{b}'_i \in |M_{s(i)\cap s(j)}| \mid i \leq m\rangle$ tales que

$$ga - tp(\mathbf{b}_0, \cdots /|M_\emptyset|) = ga - tp(\mathbf{b}'_0, \cdots /|M_\emptyset|)$$

   y $s(i) \subseteq s(j)$ implica que $\mathbf{b}'_i = \mathbf{b}_i$.

3.

$$A_{s(j)}^S \downarrow_{|M_{s(j)}|} \bigcup_{i<j} |M_{s(i)}|$$

Definición 2.11 (n-amalgamación). Sea $\langle \mathcal{K}, \downarrow \rangle$ una noción de bifurcamiento débil. Decimos que $\langle \mathcal{K}, \downarrow \rangle$ satisface la *n-propiedad de existencia* ssi para cada sistema estable $\langle M_s \mid s \in \mathcal{P}^-(n)\rangle$ existe un modelo sobre A_n^S.

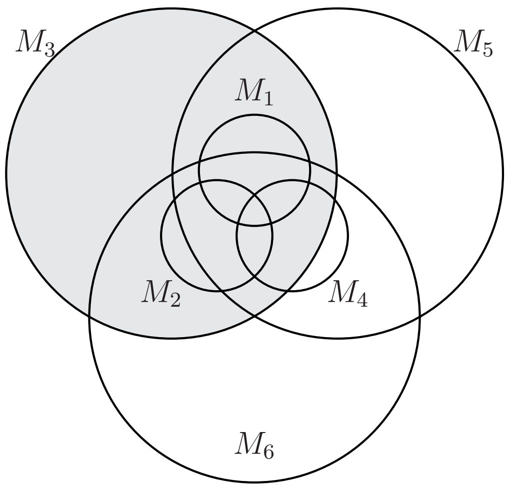
A continuación presentaremos la prueba de una versión débil de 3- amalgamación ya que no necesariamente estamos trabajando sobre sistemas estables. En la versión que probaremos no consideramos directamente una noción de no bifurcamiento $\downarrow$, aunque en la prueba utilizamos la proposición 2.4 que trabaja con la noción de independencia algebraica. Además, utilizamos una nocion de independencia entre partes las disyuntas consideradas en la unión de los modelos a amalgamar, tal como se hizo para probar la propiedad de amalgamación en este contexto (proposición 2.5).

Teorema 2.12. *Considere el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
M_5 & & & \\
& M_4 \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_6 \\
M_1 \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "id"] & & M_3 & \\
& M_0 \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_2 \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"']
\end{tikzcd}$$

donde las $\leq$-inmersiones consideradas son inclusiones y todos los nodos son fusiones en lenguajes disyuntos L_1, L_2. Entonces existen una fusión M_7 y $\leq$-inmersiones $f_{37} : M_3 \to M_7$, $f_{57} : M_5 \to M_7$ y $f_{67} : M_6 \to M_7$ tales que el nuevo diagrama conmuta.

Demostración. Sean $\overline{m}$ una enumeración de $M := M_3 \cap M_5 \cap M_6$, $\overline{m}_{st}$ una enumeración de $M_{st} := (M_s \cap M_t)\backslash M$ para $s, t \in \{3, 5, 6\}$ con $s \neq t$ y $\overline{m}_s$ una enumeración de $M'_s := M_s \backslash (M_{st} \cup M_{su} \cup M)$, con $s, t, u \in \{3, 5, 6\}$ distintos entre si. De esto tenemos que $M_s = M'_s \cup M_{st} \cup M_{su} \cup M$ y que $(M_s \cup M_t \cup M_u)\backslash M_s = M'_t \cup M'_u \cup M_{tu}$. Obsérvese que M, M_{st}, M_{tu}, M_{su}, M'_s, M'_t y M'_u son disyuntos 2 a 2. Sea $\overline{m}_s$ la enumeración de M_s sugerida por la igualdad $M_s = M'_s \cup M_{st} \cup M_{su} \cup M$.



Considere p_0^i un L_i-tipo completo con variables $\overline{y}'_s$, $\overline{y}_{st}$, $\overline{y}_{su}$ y $\overline{y}$ ($s, t, u \in \{3, 5, 6\}$ distintas entre sí) que extienda los tipos $tp_i(\overline{m}_3)$, $tp_i(\overline{m}_5)$ y $tp_i(\overline{m}_6)$, donde p_0^i asegura que todo elemento de $\overline{y}'_s\frown\overline{y}_{st}\frown\overline{y}_{su}\frown\overline{y}$ no i-depende de $\overline{y}'_t\frown\overline{y}'_u\frown\overline{y}_{tu}$ y que todo elemento de $\overline{y}'_t\frown\overline{y}'_u\frown\overline{y}_{tu}$ no i-depende de $\overline{y}'_s\frown\overline{y}_{st}\frown\overline{y}_{su}\frown\overline{y}$, para $s, t, u \in \{3, 5, 6\}$ distintos entre sí (este hecho es tipo-definible por la observación 0.11), para $i = 1, 2$. Por la proposición 2.4, existen fusiones M'_3, M'_5 y M'_6 que son isomorfas a M_3, M_5 y M_6 respectivamente, y una fusión M_7 tal que $M'_3M'_5M'_6 \leq M_7$. Renombrando M'_4, M'_2 y M'_1 (las respectivas imágenes isomorfas de M_4, M_2 y M_1 in $M'_3M'_5M'_6$) podemos suponer que M_4, M_2 y M_1 son subconjuntos de $M'_3M'_5M'_6$.

Tomando $X \in [M'_3M'_5M'_6\backslash M'_3]^{<\omega} = [M'_5M'_6\backslash M'_3]^{<\omega}$, tenemos que $X \cap M'_3 = \emptyset$. Por lo tanto, $d_0(X/M'_3) = \min\{d_0(X/Y) \mid X \cap M'_3 \subseteq Y \subseteq_{finito} M'_3\} = \min\{d_0(X/Y) \mid \emptyset \subseteq Y \subseteq_{finito} M'_3\}$. Entonces, existe $Y \in [M'_3]^{<\omega}$ tal que $d_0(X/Y) = d_0(X/M'_3)$. Pero tenemos que $d_i(XY) = d_i(X) + d_i(Y)$ (puesto que si X' es una i-base para X y Y' es una i-base para Y, ningún elemento de X' i-depende de Y' y ningún elemento de Y' i-depende de X'), por consiguiente $d_0(X/M'_3) = d_0(X/Y) = d_0(XY) - d_0(Y) = (d_1(XY) + d_2(XY) - |XY|) - (d_1(Y) + d_2(Y) - |Y|) = d_1(X) + d_2(X) - |X| = d_0(X) \geq 0$; luego por el corolario 1.15 tenemos que $M'_3 \leq M'_3M'_5M'_6$. Gracias a la transitividad de $\leq$, tenemos que $M'_3 \leq M_7$. De una manera análoga podemos probar que $M'_k \leq M_7$ $(k = 5, 6)$. □

Haciendo un argumento similar al empleado para probar la anterior versión débil de 3-amalgamación, podemos probar que vale una versión débil de n-amalgamación. Antes de hacer dicha prueba, necesitamos definir algunas nuevas nociones.

Notación 2.13. Siendo $0 < n < \omega$, denotamos $\mathcal{P}^-(n) := \mathcal{P}(n)\backslash\{n\}$.

Definición 2.14. Sea $\langle \mathcal{K}, \prec_\mathcal{K}\rangle$ una clase elemental abstracta. Un n-sistema débil en $\mathcal{K}$ es un conjunto $\langle M_S \mid S \in \mathcal{P}^-(n)\rangle$ de modelos en $\mathcal{K}$ tales que si $S \subseteq T \subset n$ entonces $M_S \prec_\mathcal{K} M_T$.

Definición 2.15. Sean $\langle \mathcal{K}, \prec_\mathcal{K}\rangle$ una clase elemental abstracta y $2 \leq n < \omega$. Decimos que $\langle \mathcal{K}, \prec_\mathcal{K}\rangle$ tiene la propiedad de n-amalgamación débil (n-PA débil) si para todo n-sistema débil de modelos en $\mathcal{K}$ existen $M \in \mathcal{K}$ y $\prec_\mathcal{K}$-inmersiones $f_S : M_S \to M$ para cada $S \in [n]^{n-1}$, tales que el nuevo diagrama conmuta.

A continuación generalizamos la construcción dada anteriormente y demostraremos que la clase de las fusiones satisface la propiedad de n-amalgamación débil para todo $4 \leq n < \omega$.

Teorema 2.16. *$\mathcal{K}_{fus}$ tiene la propiedad de n-amalgamación débil para todo $4 \leq n < \omega$.*

Demostración. Sea $\langle M_K \mid K \in \mathcal{P}^-(n)\rangle$ un n-sistema débil. Denotemos $A := [n]^{n-1}$ y $A_T := \{\mathfrak{F} \in \mathcal{P}(A) \mid T \in \mathfrak{F}\}$ (donde $T \in A$).
Tomemos $M := \bigcap_{K\in A} M_K$ y $\overline{m}$ una enumeración de M, para cada $\mathfrak{F} \in [A_T]^{n-1}$ sea $M^*_{\mathfrak{F}} := \left[\bigcap_{K\in\mathfrak{F}} M_K\right] \setminus M$ y para cada $2 \leq k \leq n-1$ y $\mathfrak{F} \in [A_T]^{n-k}$ tomemos $M^*_{\mathfrak{F}} := \left[\bigcap_{K\in\mathfrak{F}} M_K\right] \setminus \left[\bigcup_{1\leq i<k}\left\{\bigcup_{\mathfrak{G}\in[A_T]^{n-i}} M^*_{\mathfrak{G}}\right\} \cup M\right]$.
Nótese que $M_T = \bigcup_{1\leq i<n-1}\left\{\bigcup_{\mathfrak{G}\in[A_T]^{n-i}} M^*_{\mathfrak{G}}\right\} \cup M$.

Sea p^i_0 un L_i-tipo completo que extiende los tipos $tp_i(\overline{m}_K)$ $(K \in [n]^{n-1})$, donde p^i_0 asegura que para cada $T \in A$

cada variable en la tupla de variables asociada a $\left[\bigcup_{K\in A\setminus\{T\}} M_K\right] \setminus M = \left[\bigcup_{1\leq i\leq n-1}\left\{\bigcup_{\mathfrak{G}\in[A\setminus\{T\}]^i} M^*_{\mathfrak{G}}\right\}\right]$ no i-depende de la tupla de variables asociada a $M_T = \bigcup_{1\leq i<n-1}\left\{\bigcup_{\mathfrak{G}\in[A_T]^{n-i}} M^*_{\mathfrak{G}}\right\} \cup M$

y

cada variable en la tupla de variables asociada a $M_T = \bigcup_{1\leq i<n-1}\left\{\bigcup_{\mathfrak{G}\in[A_T]^{n-i}} M^*_{\mathfrak{G}}\right\} \cup M$ no i-depende de la tupla de variables asociada a $\left[\bigcup_{K\in A\setminus\{T\}} M_K\right] \setminus M = \left[\bigcup_{1\leq i\leq n-1}\left\{\bigcup_{\mathfrak{G}\in[A\setminus\{T\}]^i} M^*_{\mathfrak{G}}\right\}\right]$

(este hecho es tipo-definible gracias a la observación 0.11), para $i = 1, 2$. Por la proposición 2.4, existen $M'_K \cong M_K$ $(K \in A)$ y una fusión N tales que $\bigcup_{K\in A} M'_K \leq N$. Renombrando M'_R para cada $R \in [n]^{n-2}$ (la respectiva imagen isomorfa a M_R en $\bigcup_{K\in A} M'_K$) podemos suponer que M_R es subconjunto de $\bigcup_{K\in A} M'_K$.

Sea $T \in A$. Tomando $X \in [\bigcup_{K\in A} M'_K \setminus M'_T]^{<\omega} = [\bigcup_{K\in A\setminus\{T\}} M'_K \setminus M'_T]^{<\omega}$, tenemos que $X \cap M'_T = \emptyset$. Por lo tanto, $d_0(X/M'_T) = \min\{d_0(X/Y) \mid X \cap M'_T \subseteq Y \subseteq_{finito} M'_T\} = \min\{d_0(X/Y) \mid \emptyset \subseteq Y \subseteq_{finito} M'_T\}$. De esa manera, existe $Y \in [M'_T]^{<\omega}$ tal que $d_0(X/Y) = d_0(X/M'_T)$. En consecuencia, tenemos que $d_i(XY) = d_i(X) + d_i(Y)$ (ya que si X' es una i-base para X y Y' es una i-base para Y, X' no i-depende de Y' y Y' no i-depende de X'), entonces $d_0(X/M'_T) = d_0(X/Y) = d_0(XY) - d_0(Y) = (d_1(XY) + d_2(XY) - |XY|) - (d_1(Y) + d_2(Y) - |Y|) = d_1(X) + d_2(X) - |X| \geq 0$; por lo tanto gracias al corolario 1.15 podemos afirmar que $M'_T \leq \bigcup_{K\in A} M'_K$. En virtud de la transitividad de $\leq$, podemos afirmar que $M'_T \leq N$. $\square$

Además, tenemos una versión un poco más fuerte que la anterior, pero aún muy débil, de la propiedad de 3-amalgamación, puesto que todas las $\leq$-inmersiones consideradas, excepto dos ($f_{13} : M_1 \to M_3$ y $f_{23} : M_2 \to M_3$), siguen siendo inclusiones.

Teorema 2.17. *Considere el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M_5 & & & \\
& M_4 \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_6 \\
M_1 \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "f_{13}"] & & M_3 & \\
& M_0 \arrow[uu, "id"'] \arrow[ul, "id"] \arrow[rr, "id"'] & & M_2 \arrow[ul, "f_{23}"'] \arrow[uu, "id"']
\end{tikzcd}$$

donde todas las $\leq$-inmersiones consideradas son inclusiones, posiblemente excepto f_{13} y f_{23}, todos los nodos son fusiones en lenguajes disyuntos L_1, L_2 y además $M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_4 = M_2 \cap M_4 = M_0$. Entonces existen una fusión M_7 y $\leq$-inmersiones $f_{37} : M_3 \to M_7$, $f_{57} : M_5 \to M_7$ y $f_{67} : M_6 \to M_7$ tales que el nuevo diagrama conmuta.

Demostración. Por hipótesis tenemos que $M_0' := f_{13}(M_0) = f_{23}(M_0)$, entonces tomando $M_i' := f_{i3}(M_i)$ $(i = 1, 2)$ tenemos que $M_0' \leq M_i' \leq M_3$ $(i = 1, 2)$. Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M_1' \arrow[rr, "id"] & & M_3 & \\
& M_0' \arrow[ul, "id"] \arrow[rr, "id"'] & & M_2' \arrow[ul, "id"']
\end{tikzcd}$$

Sea M_4' un renombramiento de M_4 tal que $M_0' \leq M_4'$ y $M_4' \cap M_1' = M_4' \cap M_2' = M_0'$. Entonces nuestro gráfico tiene ahora la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
& M_4' & & \\
M_1' \arrow[rr, "id"] & & M_3 & \\
& M_0' \arrow[uu, "id"'] \arrow[ul, "id"] \arrow[rr, "id"'] & & M_2' \arrow[ul, "id"']
\end{tikzcd}$$

Tome M_5' un renombramiento de M_5 tal que $M_4' \leq M_5'$ y $M_1' \leq M_5'$ (podemos hacer este renombramiento porque al renombrar M_4 por M_4' en M_5, solo se necesita renombrar $M_1 - M_0$ por $M_1' - M_0'$ en M_5 para obtener la condición deseada, puesto que $M_4' \cap M_1' = M_0'$); y sea M_6' un renombramiento de M_6 tal que $M_4' \leq M_6'$ y $M_2' \leq M_6'$ (haciendo un argumento similar). De esta manera tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde sus aristas son $\leq$-inclusiones entre fusiones, ya que fue construido de esa manera:

$$\begin{tikzcd}
M_5' & & & \\
& M_4' \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_6' \\
M_1' \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "id"] & & M_3 & \\
& M_0' \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_2' \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por el teorema 2.12 existen una fusión M_7 y $\leq$-inmersines $f_{57}' : M_5' \to M_7$, $f_{67}' : M_6' \to M_7$ y $f_{37} : M_3 \to M_7$ tales que $f_{57}'(M_4') = f_{67}'(M_4')$, $f_{57}'(M_1') = f_{37}(M_1')$ y $f_{37}(M_2') = f_{67}'(M_2')$ (es decir, el nuevo diagrama conmuta). Denotemos por $g_i : M_i \to M_i'$ ($i = 0, 1, 2, 4, 5, 6$) cad uno de los renombramientos hechos anteriormente. Por consiguiente tenemos que $g_0 = f_{13} \restriction M_0 = f_{23} \restriction M_0$ and $g_j = f_{j3} \restriction M_j$ ($j = 1, 2$). Definamos $f_{j7} := f_{j7}' \circ g_j : M_j \to M_7$ ($j = 5, 6$), los cuales son $\leq$-inmersiones.

Tenemos que $f_{57}(M_4) = f_{67}(M_4)$. En efecto, puesto que $f_{57}'(M_4') = f_{67}'(M_4')$ y $g_5(M_4) = g_6(M_4) = M_4'$ (ya que M_5' y M_6' fueron construidos respetando el renombramiento M_4'), entonces $f_{57}(M_4) = (f_{57}' \circ g_5)(M_4) = f_{57}'(g_5(M_4)) = f_{57}'(M_4') = f_{67}'(M_4') = f_{67}'(g_6(M_4)) = (f_{67}' \circ g_6)(M_4) = f_{67}(M_4)$.

Por otro lado, tenemos que $f_{57}(M_1) = (f_{37} \circ f_{13})(M_1)$. En efecto, puesto que $f_{57}'(M_1') = f_{37}(M_1')$ y $g_1(M_1) = f_{13}(M_1) = g_5(M_1) = M_1'$ (ya que M_5' fue construido respetando el renombramiento M_1'), entonces $f_{57}(M_1) = (f_{57}' \circ g_5)(M_1) = f_{57}'(g_5(M_1)) = f_{57}'(M_1') = f_{37}(M_1') = f_{37}(f_{13}(M_1))) = (f_{37} \circ f_{13})(M_1)$.

Además, tenemos que $f_{67}(M_2) = (f_{37} \circ f_{23})(M_2)$, puesto que $f_{67}'(M_2') = f_{37}(M_2')$ y $g_2(M_2) = f_{23}(M_2) = g_6(M_2) = M_2'$ (ya que M_6' fue construido rspetando el renombramiento M_2'), por lo tanto $f_{67}(M_2) = (f_{67}' \circ g_6)(M_2) = f_{67}'(g_6(M_2)) = f_{67}'(M_2') = f_{37}(M_2') = f_{37}(f_{23}(M_2))) = (f_{37} \circ f_{23})(M_2)$.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M_5 \arrow[rr, dotted, "f_{57}"] & & M_7 & \\
& M_4 \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"] & & M_6 \arrow[ul, dotted, "f_{67}"'] \\
M_1 \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "f_{13}"] & & M_3 \arrow[uu, dotted, "f_{37}"] & \\
& M_0 \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "id"'] & & M_2 \arrow[ul, "f_{23}"] \arrow[uu, "id"']
\end{tikzcd}$$

□

2.4 Docilidad.

La noción de docilidad de una clase elemental abstracta es definida inicialmente en el artículo de S. Shelah sobre transferencia de categoricidad en clases elementales abstractas con amalgamación [Sh394]. Durante mucho tiempo no fue estudiada, pero recientemente esta noción volvió a ser tratada por R. Grossberg y M. VanDieren ([GrVa1, GrVa2]), donde es demostrado un teorema de transferencia de categoricidad en este contexto.

Logramos una versión particular de la propiedad de 3-amalgamación, pero que es suficiente para probar el resultado central de esta sección, según la cual la clase de las fusiones sobre lenguajes disyuntos es $|L_1 \cup L_2| + \aleph_0$-dócil. La prueba de este hecho usa un argumento similar al empleado para demostrar que las clases excelentes son dóciles (ver [GrKo]). Antes de comenzar esta prueba, necesitamos dar unas definiciones preliminares, donde se toma $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ como una clase elemental abstracta.

Definición 2.18. Sean M_i, M L-estructuras en $\mathcal{K}$ $(j = 0, 1)$ tales que $M \prec_{\mathcal{K}} M_j$ y $\overline{a}_j \in M_j$ $(j = 0, 1)$ tuplas de la misma longitud. Definimos la relación E como se sigue: $(\overline{a}_0, M, M_0)E(\overline{a}_1, M, M_1)$ ssi existen $N \in \mathcal{K}$ y $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_j : M_j \to N$ $(j = 0, 1)$ tales que $f_0(\overline{a}_0) = f_1(\overline{a}_1)$ y $f_0 \restriction M = f_1 \restriction M = id_M$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] & M_0 \arrow[d, dotted, "f_0"] \\ M_1 \arrow[r, dotted, "f_1"'] & N \end{tikzcd}$$

Observación 2.19. Si $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de amalgamación, es sencillo probar que E es una relación de equivalencia.

Definición 2.20. Sean $M, N \in \mathcal{K}$ (suponiendo que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de amalgamación) y $\overline{a} \in N$, definimos el *tipo de Galois* de una tupla $\overline{a}$ sobre M en N (denotandolo por $ga - tp(\overline{a}/M, N)$) como la clase de equivalencia $(\overline{a}, M, N)/E$. Además, si $\alpha > 0$ es un ordinal, definimos $ga - S^{\alpha}(M) := \{ga - tp(\overline{a}/M, N) \mid M \prec_{\mathcal{K}} N \text{ y } \overline{a} \in N^{\alpha}\}$

Definición 2.21. Sean $N, M_0, M_1 \in \mathcal{K}$ tales que $M_0 \prec_{\mathcal{K}} M_1$. Si $p := ga - tp(\overline{a}/M_1, N)$, definimos $p \restriction M_0 := ga - tp(\overline{a}/M_0, N)$.

Definición 2.22. Sea $\chi \geq LS(\mathcal{K})$ un cardinal. Decimos que la clase $\mathcal{K}$ es χ-dócil ssi tiene la propiedad de amalgamación y además para todo $M \in \mathcal{K}$ de tamaño $> \chi$, si $p, q \in ga - S^{\alpha}(M)$ son diferentes entonces existe $M' \prec_{\mathcal{K}} M$ de tamaño χ tal que $p \restriction M' \neq q \restriction M'$.

Recordemos que habíamos denotado por $\mathcal{K}_{fus}$ a la clase de fusiones de teorías T_1, T_2 completas, modelo completas, fuertemente minimales en lenguajes disyuntos L_1, L_2, donde su número de Löwenheim-Skolem es $LS(\mathcal{K}_{fus}) = |L_1 \cup L_2| + \aleph_0$.

En las siguientes líneas daremos una prueba del hecho de que la clase $\mathcal{K}_{fus}$ de las fusiones es $LS(\mathcal{K}_{fus})$-dócil. Esta prueba usa técnicas derivadas de [GrKo] en su demostración de la docilidad de las clases excelentes. Aquí hacemos algunas correcciones de la demostración en [GrKo], ya que tiene algunas imprecisiones, que detallaremos más adelante.

El argumento central en dicha prueba en realidad se puede lograr usando el caso particular de la propiedad de 3-amalgamación que logramos previamente en $\mathcal{K}_{fus}$.

Proposición 2.23. *La clase de las fusiones es $LS(\mathcal{K}_{fus})$-dócil.*

Demostración. Se tiene que la clase de las fusiones satisface la propiedad de amalgamación (proposición 2.5).
Por otro lado, razonando por reducción al absurdo, sea $\kappa > LS(\mathcal{K}_{fus})$ el menor cardinal tal que existen $M_i, M \in \mathcal{K}_{fus}$ $(i = 0, 1)$ de tamaño κ (sin pérdida de generalidad) y tuplas $\overline{a}_i \in M_i$ $(i = 0, 1)$ de la misma lungitud tales que $ga - tp(\overline{a}_0/M, M_0) \neq ga - tp(\overline{a}_1/M, M_1)$, pero que para todos los modelos $M' \leq M$ de tamaño $LS(\mathcal{K}_{fus})$ se tiene que $ga - tp(\overline{a}_0, M', M_0) = ga - tp(\overline{a}_1, M', M_1)$.
Sea χ un cardinal regular suficientemente grande tales que $M, M_0, M_1 \in H(\chi)$ y que $H(\chi)$ codifica $\mathcal{K}_{fus}$ por medio del conjuntode tipos que omiten ciertas expansiones de los modelos en $\mathcal{K}_{fus}$ (ya que toda clase elemental abstracta es proyectiva con omisión de tipos).
Sea $\{\mathcal{B}_i \prec \langle H(\chi), M, M_0, M_1, \in, \cdots \rangle \mid i < \kappa\}$ tal que

1. $\overline{a}_0, \overline{a}_1 \in B_0$.
2. $\|\mathcal{B}_i\| = |i| + LS(\mathcal{K}_{fus})$ $(i < \kappa)$.
3. $\langle \mathcal{B}_j \mid j \leq i \rangle \in \mathcal{B}_{i+1}$ $(i < \kappa)$.
4. $\mathcal{B}_\delta := \bigcup_{i<\delta} \mathcal{B}_i$ $(\delta \neq 0$ ordinal límite)
5. M^i, M_0^i, M_1^i (las respectivas interpretaciones de los predicados M, M_0 y M_1 en $\mathcal{B}_i$, $i < \kappa$) son $\leq$-cadenas crecientes continuas de $\mathcal{K}_{fus}$-modelos cuyas uniones son respectivamente M, M_0 y M_1.
6. $M_0^i \cap M = M^i$ y $M_1^i \cap M = M^i$
7. $\|M_0^i\| = \|M_1^i\| = |i| + LS(\mathcal{K}_{fus})$ $(i < \kappa)$.
8. Cada $\mathcal{B}_i$ $(i < \kappa)$ tiene la codificación de $\mathcal{K}_{fus}$

Por construcción tenemos que $\mathcal{B}_0 \prec \langle H(\chi), M, M_0, M_1, \in, \cdots \rangle$. Además $H(\chi)$ es capaz de codificar que si M' tiene tamaño $LS(\mathcal{K}_{fus})$, entonces $ga - tp(\overline{a}_0, M', M_0) = ga - tp(\overline{a}_1, M', M_1)$; y además $\mathcal{B}_0$ se da cuenta que $\|M^0\| = LS(\mathcal{K}_{fus})$. Por lo tanto $\mathcal{B}_0$ se da cuenta de que $ga - tp(\overline{a}_0, M^0, M_0^0) = ga - tp(\overline{a}_1, M^0, M_1^0)$. Por lo tanto, existen $N_{01}^0 \in \mathcal{K}_{fus}$ y $\leq$-inmersiones $f_j^0 : M_j^0 \to N_{01}^0$ $(j = 0, 1)$ tales que $f_j^0 \upharpoonright M^0 = id_{M_0}$ y $f_0^0(\overline{a}_0) = f_1^0(\overline{a}_1)$.

$$\begin{tikzcd}
M_0^0 \arrow[rr, "f_0^0"] & & N_{01}^0 & \\
& M^0 \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_1^0 \arrow[ul, "f_1^0"']
\end{tikzcd}$$

Suponga ahora que tenemos ya construido el siguiente $\leq$-diagrama conmutativo para $i < \kappa$

$$\begin{tikzcd}
M_0^{i+1} & & & \\
& M^{i+1} \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_1^{i+1} \\
M_0^i \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "id"] & & N_{01}^i & \\
& M^i \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_1^i \arrow[ul, "id"'] \arrow[uu, "id"']
\end{tikzcd}$$

En virtud del teorema 2.17 (el caso particular de la propiedad de 3-amalgamación probada en páginas anteriores) tenemos que existen $N_{01}^{i+1} \in \mathcal{K}_{fus}$ y $\leq$-inmersiones $f_j^{i+1} : M_j^{i+1} \to N_{01}^{i+1}$ $(j = 0, 1)$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M_0^{i+1} \arrow[rr, dotted, "f_0^{i+1}"] & & N_{01}^{i+1} & \\
& M^{i+1} \arrow[ul, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_1^{i+1} \arrow[ul, dotted, "f_1^{i+1}"'] \\
M_0^i \arrow[uu, "id"] \arrow[rr, "f_0^i"] & & N_{01}^i \arrow[uu, dotted, "id"] & \\
& M^i \arrow[ul, "id"] \arrow[uu, "id"'] \arrow[rr, "id"'] & & M_1^i \arrow[ul, "f_1^i"'] \arrow[uu, "id"']
\end{tikzcd}$$

Sin pérdida de generalidad, renombrando N_{01}^{i+1}, podemos asumir que $N_{01}^{i} \leq N_{01}^{i+1}$. Note que sabemos que $f_0^{i+1} \upharpoonright M^{i+1} = f_1^{i+1} \upharpoonright M^{i+1}$ pero no si $f_0^{i+1} \upharpoonright M^{i+1} = f_1^{i+1} \upharpoonright M^{i+1} = id_{M^{i+1}}$. Podríamos intentar renombrar N_{01}^{i+1} para obtener este hecho, pero no es lícito hacerlo puesto que en este paso ya lo hemos renombrado.

Si $\ell \leq \kappa$ es un ordinal límite, tomamos $N_{01}^{\ell} := \bigcup_{r<\ell} N_{01}^{r}$ y $f_j^{\ell} := \bigcup_{r<\ell} f_j^{r} : M_j^{\ell} \to N_{01}^{\ell}$ $(j = 0, 1)$.
Tenemos que $f_j^{\kappa} : M_j \to N_{01}^{\kappa}$ son $\leq$-inmersiones tales que $f_0^{\kappa}(\overline{a}_0) = f_1^{\kappa}(\overline{a}_1)$ y $f_0^{\kappa} \upharpoonright M = f_1^{\kappa} \upharpoonright M$. Renombrando N_{01}^{κ}, podemos suponer que $f_0^{\kappa} \upharpoonright M = f_1^{\kappa} \upharpoonright M = id_M$, por lo tanto $ga - tp(\overline{a}_0/M, M_0) = ga - tp(\overline{a}_1/M, M_1)$. Este hecho contradice la hipótesis inicial $ga - tp(\overline{a}_0/M, M_0) \neq ga - tp(\overline{a}_1/M, M_1)$. $\square$

En la definición de igualdad entre tipos de Galois, es crucial que se haga la verificación de $f_0^{\kappa} \upharpoonright M = f_1^{\kappa} \upharpoonright M = id_M$. En la prueba original presentada por Grossberg y Kolesnikov, en el paso κ no se verifica que se tenga esa serie de igualdades. De hecho, de lo expuesto por ellos en su trabajo se puede probar fácilmente (gracias a la forma en que fueron construidas) que $f_0^{\kappa} \upharpoonright M = f_1^{\kappa} \upharpoonright M$, pero el argumento expuesto por ellos no garantiza la tercera igualdad, ya que en los pasos sucesores las $\leq$-inmersiones f_0^{i+1} y f_1^{i+1} son obtenidas al aplicar el caso particular de 3-amalgamación expuesto en este trabajo, por lo que a priori no sabemos exactamente cual es su comportamiento. No sería lícito hacer un renombramiento en cada N_{01}^{i+1} ya que esta estructura ya habia sido renombrada para que se tuviera la inclusión $N_{01}^{i} \leq N_{01}^{i+1}$. En la prueba presentada en este escrito, hacemos la verificación de este hecho. Lo que hacemos es un renombramiento de N_{01}^{ℓ} donde $\ell \leq \kappa$ es límite, de manera que $f_0^{\ell} \upharpoonright M^{\ell} = f_1^{\ell} \upharpoonright M^{\ell} = id_{M^{\ell}}$, lo cual es lícito hacer ya que en esos casos no se había hecho renombramiento alguno dentro de la prueba original presentada por Grossberg y Kolesnikov. Pero para no complicar demasiado la prueba, realizamos dicho renombramiento al final de la construcción, es decir, en el modelo N_{01}^{κ}, de igual manera dicha serie de igualdades queda verificada al hacer esta adición a la prueba original.

El contexto de las clase elementales abstractas dóciles ha sido muy ampliamente estudiado por teoristas de modelos como R. Grossberg y M. VanDieren ([GrVa1], [GrVa2]). Uno de los resultados más llamativos presentados en dichos desarrollos, es la existencia de un teorema de transferencia de categoricidad, el cual enunciaremos a continuación:

Teorema 2.24. *Suponga que $\mathcal{K}$ es una clase elemental abstracta χ-dócil* *que satisface la propiedad de amalgamación y la propiedad JEP. Sea* $\mu_0 := Hanf(\mathcal{K})$. *Si* $\chi \leq \beth_{(2^{\mu_0})^+}$ *y* $\mathcal{K}$ *es categórica en algún* $\lambda^+ > \beth_{(2^{\mu_0})^+}$, *entonces* $\mathcal{K}$ *es categórica en* μ *para todo* $\mu > \beth_{(2^{\mu_0})^+}$

2.5 Un ejemplo de fusión de Hrushovski.

He aquí uno de los ejemplos iniciales de fusiones, debido a Hrushovski en su estudio de estructuras fuertemente minimales y su relación con la conjetura de Zilber sobre la tricotomía de la bi-interpretabilidad de estructuras $\aleph_1$-categóricas ([Hr92]).

Notación 2.25. Sea p un natural primo o 0. Denotamos por ACF_p a la $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$-teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p.

Los siguientes son unos hechos bastante conocidos de teoría de modelos básica.

Hecho 2.26 (Teorema de Steinitz). ACF_p *es* λ*-categórica para todo cardinal* $\lambda > \aleph_0$.

Referencia. [Gr] □

Corolario 2.27. ACF_p *es una teoría completa.*

Hecho 2.28. ACF_p *es una teoría modelo completa.*

Referencia. [Gr] □

Hecho 2.29. ACF_p *es una teoría fuertemente minimal.*

Referencia. [Ma00] □

Sean p, q números primos distintos. Así que las teorías $T_p := ACF_p$ y $T_q := ACF_q$ (disyuntando artificialmente los lenguajes) satisfacen las condiciones pedidas en el capítulo 1. Por lo tanto, tiene sentido hablar de la clase de las fusiones de estas dos teorías, la cual denotaremos por $\mathcal{K}_{fus}^{p,q}$. En virtud de lo demostrado en este trabajo, tenemos que $(\mathcal{K}_{fus}^{p,q}, \leq)$ es una clase elemental abstracta con número de Löwenheim-Skolem $LS(\mathcal{K}_{fus}^{p,q}) = \aleph_0$ (proposición 1.31) que satisface la propiedad de amalgamación (proposición 2.5), la propiedad JEP (proposición 2.6) y que es $\aleph_0$-dócil (proposición 2.23). Este ejemplo es muy especial, dado que fue uno de los primeros ejemplos de este tipo de construcción que Hrushovski utilizó inicialmente ([Hr92]) para refutar la conjetura de Zilber sobre la tricotomía de la biinterpretabilidad de conjuntos fuertemente minimales.

Capítulo 3

Ejemplos de construcciones de Hrushovski y clases elementales abstractas.

3.1 Otros tipos de construcciones de Hrushovski.

Las fusiones son un caso particular de las denominadas *construcciones de Hrushovski.* Este tipo de construcciones parte desde una clase de estructuras $\mathcal{K}$ (no necesariamente elemental en primer orden) donde hay definida una predimensión d_0 sobre los subconjuntos finitos de las estructuras de dicha clase; se considera la subclase $\mathcal{K}_0 := \{\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \mid d_0 \upharpoonright [|\mathfrak{A}|]^{<\omega} \geq 0\}$, donde la condición $d_0 \upharpoonright [|\mathfrak{A}|]^{<\omega} \geq 0$ la denominamos *condición de Schanuel* (denominada de esta manera dado a su similitud con la famosa *conjetura de Schanuel*), aunque algunos autores prefieren denominarla *condición de Hrushovski.* En esta subclase, se define dimensiones relativizadas a subconjuntos de estructuras en $\mathcal{K}_0$, sobre las cuales se define la relación *"ser autofuciente"* (la cual usualmente denotamos por $\leq$).

Si $(\mathcal{K}_0, \leq)$ se "comporta bien" bajo isomorfismos, se tiene que $(\mathcal{K}_{fus}, \leq)$ es una *clase elemental abstracta*, donde la prueba de este hecho es similar a la realizada en el caso de las fusiones.

En el caso de las fusiones, se tiene algunas propiedades adicionales como lo son la *propiedad de amalgamación* y *docilidad*. Una pregunta que surge en este momento, es sobre qué propiedades de este tipo se tienen en algunos casos particulares de construcciones de Hrushovski. En el presente capítulo probamos que la clase de estructuras en el ejemplo “ab initio” que satisfacen la condición de Schanuel junto con la relación de autosuficiencia es una clase elemental abstracta, y presentamos una prueba de que esta clase satisface la propiedad de amalgamación (la cual es una generalización de un resultado dado por Hrushovski en [Hr93]).

Lo que se espera es que una ligera modificación de la técnica utilizada en la prueba de la propiedad de amalgamación en este contexto, sirva para probar versiones débiles de 3-amalgamación que permitan realizar una posible demostración de docilidad de esta clase.

3.2 Ejemplo *ab initio*

A continuación presentaremos aspectos básicos del ejemplo “ab initio” de construcciones de Hrushovski, dado inicialmente en [Hr93].

El contexto de este ejemplo es el de la estructuras en un lenguaje fijo L de primer orden, con un símbolo de relacion de aridad 3, el cual denotaremos por R.

Notación 3.1. Sean M una L-estructura y $A \in [|M|]^{<\omega}$. Denotamos por $r(A)$ al número de triplas $\overline{a} \in A^3$ tales que $M \models R[\overline{a}]$.

Definición 3.2. Sean M una L-estructura y $A, B \in [|M|]^{<\omega}$. Definimos $d_0(A) := |A| - r(A)$ y $d_0(A/B) := d_0(A \cup B) - d_0(B)$.

Notación 3.3. Denotamos por $\mathcal{K}_{ab}$ a la clase de L-estructuras M para las cuales $d_0(A) \geq 0$ para todo $A \in [|M|]^{<\omega}$.

La siguiente proposición nos dice que d_0 es una predimensión.

Proposición 3.4. *Tenemos que para todo A, $B \in [|M|]^{<\omega}$:*

1. $d_0(A) \leq |A|$.
2. *(submodularidad)* $d_0(AB) + d_0(A \cap B) \leq d_0(A) + d_0(B)$

Demostración. Se tiene 1. trivialmente de la definición de d_0. Para probar 2., veamos primero que $r(A)+r(B) \leq r(AB)+r(A \cap B)$. Al hacer el conteo de $r(AB)$, dado $\overline{a} \in R^M \cap (AB)^3$ tenemos los siguentes casos:

1. En $\overline{a}$ solo hay elementos de $A \backslash B$.
2. En $\overline{a}$ solo hay elementos de $B \backslash A$.
3. En $\overline{a}$ solo hay elementos de $A \cap B$.
4. En $\overline{a}$ hay simultaneamente elementos de $A \backslash B$ y $A \cap B$.
5. En $\overline{a}$ hay simultaneamente elementos de $B \backslash A$ y $A \cap B$.
6. En $\overline{a}$ hay simultaneamente elementos de $A \backslash B$ y $B \backslash A$.
7. En $\overline{a}$ hay simultaneamente un elemento de $A \backslash B$, uno de $B \backslash A$ y uno de $A \cap B$.

Los siete casos son disyuntos, y describen todas las posibilidades que pueden pasar con los elementos de la tupla $\overline{a}$. Denotando por $r_i(AB)$ el número de tuplas en $R^N \cap (AB)^3$ que están consideradas en el caso i ($i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$), tenemos que $\sum_{i=1}^{7} r_i(AB) = r(AB)$. Por otro lado, tenemos que $r(A) = r_1(AB)+r_3(AB)+r_4(AB)$, $r(B) = r_2(AB)+r_3(AB)+r_5(AB)$ y $r_3(AB) = r(A \cup B)$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
r(A)+r(B) &= r_1(AB)+r_3(AB)+r_4(AB)+r_2(AB)+r_3(AB)+r_5(AB) \\
&= (\sum_{i=1}^{5} r_i(AB)) + r_3(AB) \\
&\leq (\sum_{i=1}^{7} r_i(AB)) + r_3(AB) \\
&= r(AB)+r(A \cap B)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $-r(AB)-r(A \cap B) \leq -r(A)-r(B)$.
Puesto que $|AB|+|A \cap B| = |A|+|B|$ podemos afirmar que $d_0(AB)+d_0(A \cap B) = |AB|-r(AB)+|A \cap B|-r(A \cap B) \leq |A|-r(A)+|B|-r(B) = d_0(A)+d_0(B)$. $\square$

Observación 3.5. Si $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq_{finito} |M|$ son tales que $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2$, entonces $d_0(Z/Z_2) \leq d_0(Z/Z_1)$ (es decir, $d_0(ZZ_2) + d_0(Z_1) \leq d_0(ZZ_1) + d_0(Z_2)$). La prueba de este hecho es idéntica a la presentada en la observación 1.6

Observación 3.6. Notemos que $d_0(A/B) := d_0(AB) - d_0(B) = d_0(A \backslash B/B)$ si A, B son finitos.

Definición 3.7. Dados $X, Y \subseteq M$ (X finito), donde M es una L-estructura donde $d_0(X/\cdot)$ está acotado inferiormente, se define $d_0(X/Y) := \min\{d_0(X/Y') \mid X \cap Y \subseteq Y' \subseteq_{finito} Y\}$.

Observación 3.8. En general la anterior definición no tiene sentido. Consideremos la estructura N con universo $|N| := \{a\} \cup \mathbb{N}^*$ donde $R^N := \{(a, n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$; tomemos $X := \{a\}$ y $Y := \mathbb{N}^*$. Es claro que $N \in \mathcal{K}_{ab}$. Pero notemos que al tomar $Y_n := \{1, \cdots, n+1\}$ tenemos que $d_0(XY_n) - d_0(Y_n) = |XY_n| - r(XY_N) - [|Y_n| - r(Y_n)] = (n+2) - (n+1) - [(n+1) - 0] = 1 - (n+1) = -n$. Luego esto dice que $d_0(X/\cdot)$ no es acotada inferiormente en N.

Pero hay ejemplos donde sí existe tal cota: considere N cuyo universo es $|N| := \{0, 1, 2, 3\}$ y $R^N := \{(i, i, i) \mid i \in 4\}$. Evidentemente $N \in \mathcal{K}_{ab}$, donde $d_0(A) = |A| - r(A) = 0$ para todo $A \in [|N|]^{<\omega}$. Entonces $d_0(X/Y) = d_0(XY) - d_0(Y) = 0$, luego aquí si tendría sentido la anterior definición.

Observación 3.9. La definición 3.7 extiende la dada en el caso de que Y sea finito. La prueba de este hecho es como en la observación 1.8.

Definición 3.10. Sea $M \in \mathcal{K}_{ab}$. Definimos $d(A; B) := \min\{d_0(A') \mid A \subseteq A' \subseteq_{finito} B\}$, siendo $A \subseteq_{finito} B \subseteq |M|$.

Proposición 3.11. *Si $A \subseteq A' \subseteq_{finito} \subseteq B \subseteq |M|$ (donde $M \in \mathcal{K}_{ab}$) son tales que $d_0(A') = d(A; B)$, entonces $d_0(A') = d(A'; B)$*

Demostración. Como en la proposición 1.11. □

La siguiente serie de equivalencias es importante pues es crucial en la definición de *ser autosuficiencia*, en la cual basamos nuestra prueba de que este tipo de construcción de Hrushovski es una clase elemental abstracta (y de hecho su prueba es similar a la que se tiene en el caso de las fusiones, pues aquí ya probamos que d_0 satisface submodularidad, que es el hecho crucial para probar la dirección no trivial 1.⇒3., tal como se muestra en [Hol95]).

Por esa razón, su prueba es idéntica a la presentada en el caso de las fusiones (ver [Hol95]).

Hecho 3.12. *Siendo $M \in \mathcal{K}_{ab}$, para $A \subseteq B \subseteq |M|$ son equivalentes:*

1. *Para todo $X \in [A]^{<\omega}$, $d(X; A) = d(X; B)$.*
2. *Dado $X \in [A]^{<\omega}$ existe $X \subseteq Y \subseteq_{finito} B$ tal que $d_0(Y) = d(X; B)$.*
3. *Para todo $Y \in [B]^{<\omega}$ $d_0(Y/Y \cap A) \geq 0$.*

Si A es finito, 1., 2. *y* 3. *son equivalentes a*

4. *$d_0(A) = d(A; B)$.*

Definición 3.13. Siendo $M \in \mathcal{K}_{ab}$ y $A \subseteq B \subseteq |M|$, decimos que A es *autosuficiente* en B (lo que denotaremos por $A \leq B$) si y solo si alguna de las condiciones del hecho 3.12 ocurre.
En el caso de que $M \subseteq N$ sean estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$, denotamos por $M \leq N$ el hecho de que $|M| \leq |N|$.

Los siguientes resultados son bastante útiles, pues permiten demostrar de una manera mas fácil la autosuficiencia.

Proposición 3.14. *Si $A \subseteq B \subseteq |M|$ (donde $M \in \mathcal{K}_{ab}$) y además $d_0(X/A) \geq 0$ para todo $X \in [B]^{<\omega}$ (en el caso de que tenga sentido), entonces $A \leq B$.*

Demostración. Como en la proposición 1.14. □

Corolario 3.15. *Si $A \subseteq B$ y adicionalmente $d_0(X/A) \geq 0$ para todo $X \in [B \backslash A]^{<\omega}$, entonces $A \leq B$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 3.14 y de la observación 3.6 (de la misma manera como ocurre en el caso de las fusiones). □

3.2.1 Ejemplo "ab initio" como clase elemental abstracta

A continuación presentaremos algunos hechos previos que vamos a considerar con el fin de dar una conexión entre el ejemplo "ab initio", la noción de autosufiencia entre modelos y las clases elementales abstractas.

Lo que pretendemos verificar es que $(\mathcal{K}_{ab}, \leq)$ (donde $\leq$ es la relación "ser autosuficiente") es una clase elemental abstracta. Como veremos a continuación, la gran mayoría de los axiomas de clase elemental abstracta son probados en el ejemplo "ab initio" de manera similar a la forma como se probó en el caso de las fusiones. Los únicos axiomas que requieren una justificación ligeramente diferente son los de las cerraduras bajo isomorfismos, como veremos a continuación.

Una primera observación en este contexto, es que la clase $\mathcal{K}_{ab}$ es elemental en primer orden.

Proposición 3.16. *La clase $\mathcal{K}_{ab}$ es elemental en primer orden.*

Demostración. Siendo $\overline{y}$ una tupla finita (de longitud $0 < n < \omega$) de variables, denotemos por $\mathcal{P}(\overline{y})$ al conjunto de permutaciones de las variables en $\overline{y}$. Siendo $\overline{y}_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ triplas de variables en $\overline{y}$ distintas entre si, si $s \in \mathcal{P}(\overline{y})$ denotamos por $\overline{y}_{s(i)}$ a la nueva tripla formada al reemplazar cada variable en $\overline{y}_i$ por su respectiva imagen por medio de s.

Definamos:

$$\varphi_n^k(\overline{y}) := \bigvee_{s \in \mathcal{P}(\overline{y})} \left(\bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^{k} (\overline{y}_{s(i)} \neq \overline{y}_{s(j)}) \ \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} R(\overline{y}_{s(i)}) \right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\overline{y}' \text{ tripla en } \overline{y}} \left(R(\overline{y}') \to \bigvee_{i=1}^{k} (\overline{y}' = \overline{y}_{s(i)}) \right) \right)$$

De esta manera, siendo $\overline{a}$ una n-tupla en un modelo M en este lenguaje, $M \models \varphi_n^k[\overline{a}]$ ssi $r(\overline{a}) = k$. Claramente

$$T_{ab} := \left\{ \forall \overline{x} \left(\bigwedge_{i,j=1; i \neq j}^{n} (x_i \neq x_j) \to \bigvee_{k=0}^{n} \varphi_n^k(\overline{x}) \right) : 0 < n < \omega \right\}$$

es una axiomatización de $\mathcal{K}_{ab}$ □

Proposición 3.17. $(\mathcal{K}_{ab}, \leq)$ *es un orden parcial.*

Demostración. Como en la proposición 1.16 □

Proposición 3.18. *Si $M, N \in \mathcal{K}_{ab}$ son tales que $M \leq N$, entonces $M \subseteq N$.*

Demostración. Como en la proposición 1.17 □

Lema 3.19. *Sean $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ subconjuntos de una estructura $N \in \mathcal{K}_{ab}$ tales que $A_1 \leq A_3$, entonces $A_1 \leq A_2$.*

Demostración. Como en el lema 1.18. □

Lema 3.20. *Sean $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2$ estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$ tales que $N_0 \leq N_2$, entonces $N_0 \leq N_1$.*

Demostración. Como en el corolario 1.19 □

Observación 3.21. Como en el caso de las fusiones, este último resultado es mucho más fuerte que el axioma del triángulo exigido dentro de la definición de clase elemental abstracta.

Corolario 3.22 (axioma del triángulo en "ab initio"). *Sean $M_0 \subseteq M_1 \leq M_2$ estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$ tales que $M_0 \leq M_2$, entonces $M_0 \leq M_1$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior, puesto que $M_2 \leq M_3$ implica que $M_2 \subseteq M_3$ (proposición 3.18) □

La siguiente proposición es probada de manera similar que en el caso de las fusiones (proposición 1.22), salvo que la prueba de que la unión de una $\leq$-cadena de estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$ está también en $\mathcal{K}_{ab}$ es ligeramente diferente.

Proposición 3.23 (uniones de $\leq$-cadenas (1) en $\mathcal{K}_{ab}$). *Sea $\{M_i \mid i < \lambda\}$ una $\leq$-cadena en $\mathcal{K}_{ab}$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} M_i \in \mathcal{K}_{ab}$ y $M_i \leq \bigcup_{i<\lambda} M_i$ para todo $i < \lambda$.*

Demostración. De la definición de $\bigcup_{i<\lambda} M_i$ tenemos que para todo $j < \lambda$ y toda tripla $\overline{a} \in M_j$ se cumple que $M_j \models R[\overline{a}] \Leftrightarrow \bigcup_{i<\lambda} M_i \models R[\overline{a}]$. Como para todo $A \in [|\bigcup_{i<\lambda} M_i|]^{<\omega}$ existe $j < \lambda$ tal que $A \subseteq M_j$, puesto que $M_j \in \mathcal{K}_{ab}$ tenemos que $d_0(A) \geq 0$; por lo tanto $\bigcup_{i<\lambda} M_i \in \mathcal{K}_{ab}$.
El hecho de que $M_k \leq \bigcup_{i<\lambda} M_i$ para cada $k < \lambda$ es probado como en la proposición 1.22. □

Proposición 3.24. *Sean $\{A_i \mid i < \lambda\}$ una $\subseteq$-cadena de subconjuntos de una estructura $M \in \mathcal{K}_{ab}$ y $B \subseteq M$ tal que $A_k \leq B$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} A_i \leq B$.*

Demostración. Como en la proposición 1.23 □

Corolario 3.25. *Sean $\{M_i \mid i < \lambda\}$ una $\subseteq$-cadena de estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$ y $N \in \mathcal{K}_{ab}$ tal que $M_k \leq N$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} M_i \leq N$.*

El anterior corolario es un poco más fuerte que el axioma correspondiente que es exigido dentro de la definición de clase elemental abstracta, tal cual como ocurre en el caso de las fusiones.

Corolario 3.26 (uniones de $\leq$-cadenas (2) en $\mathcal{K}_{ab}$). *Sean $\{M_i \mid i < \lambda\}$ una $\leq$-cadena de estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$ y $N \in \mathcal{K}_{ab}$ tal que $M_k \leq N$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} M_i \leq N$.*

La demostración de las siguientes dos proposiciones depende fuertemente del contexto en el que estamos trabajando y difierne de las pruebas presentadas en el caso de las fusiones (proposiciones 1.26 y 1.27 respectivamente).

Proposición 3.27 (axioma de isomorfismos (1)). *Sea $M \in \mathcal{K}_{ab}$. Si $M \cong N$ entonces $N \in \mathcal{K}_{ab}$.*

Demostración. Siendo $f : M \cong N$, trivialmente tenemos que $\overline{a} \in R^N \Leftrightarrow f(\overline{a}) \in R^N$, por lo tanto para todo $A \in [|N|]^{<\omega}$ tenemos que $r(A) = r(f^{-1}(A))$. Por lo tanto, dado $A \in [|N|]^{<\omega}$ tenemos que $d_0(A) = |A| - r(A) = |f^{-1}(A)| - r(f^{-1}(A)) = d_0(f^{-1}(A)) \geq 0$. Es decir, $N \in \mathcal{K}_{ab}$ □

Proposición 3.28 (axioma de isomorfismos (2)). *Sean M_i y N_i ($i = 1, 2$) estructuras en $\mathcal{K}_{ab}$ tales que $M_1 \subseteq M_2$ y $N_1 \leq N_2$ y $f_i : M_i \overset{\cong}{\to} N_i$ ($i = 1, 2$) L-isomorfismos tales que $f_1 \subseteq f_2$. Entonces $M_1 \leq M_2$.*

Demostración. Todo $X \subseteq_{finito} |M_1|$ cumple que $d(X; |M_1|) = d(f_1(X), |N_1|)$. En efecto, siendo $X \subseteq_{finito} |M_1|$ por definición de $d(\cdot; |M_1|)$ existe $X \subseteq X' \subseteq_{finito} |M_1|$ tal que $d_0(X') = d(X; |M|)$. Pero como $d_0(X') = |X'| - r(X') = |f_1(X')| - r(f_1(X')) = d_0(f_1(X'))$ y puesto que $f_1(X) \subseteq f_1(X') \subseteq_{finito} |N_1|$ tenemos por lo tanto que $d(f_1(X); |N_1|) \leq d_0(f_1(X')) = d_0(X') = d(X; |M_1|)$. Análogamente se puede probar que $d(f_1(X); |N_1|) \geq d(X; |M_1|)$, luego $d(f_1(X); |N_1|) = d(X; |M_1|)$. Como $f_1(X) \subseteq |N_1|$ y $N_1 \leq N_2$ entonces $d(f_1(X); |N_1|) = d(f_1(X); |N_2|)$ (en virtud del hecho 3.12 (1)). Haciendo un argumento similar al que hicimos anteriormente, podemos ver que $d(f_2(X); |N_2|) = d(X; |M_2|)$. Por lo tanto, como $f_1 \subseteq f_2$ tenemos que $f_1(X) = f_2(X)$. De esto podemos concluir que $d(X; |M_1|) = d(f_1(X); |N_1|) = d(f_1(X); |N_2|) = d(f_2(X); |N_2|) = d(X; |M_2|)$, luego en virtud del hecho 3.12 (1) podemos concluir que $M_1 \leq M_2$. □

Proposición 3.29 (LST. descendente en ejemplo “ab initio”). *Dados $M \in \mathcal{K}_{ab}$ y $X \subseteq |M|$, existe $N \in \mathcal{K}_{ab}$ tal que $X \subseteq N \leq M$, donde $\|N\| \leq |X| + |L| + \aleph_0$*

La prueba del axioma de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente en el ejemplo “ab initio” es practicamente la misma que se tiene en el caso de las fusiones.

Lema 3.30. *Dados $N \in \mathcal{K}_{ab}$ y $X \subseteq A \subseteq |N|$, existe X' tal que $X \subseteq X' \leq A$, donde $|X'| \leq |X| + \aleph_0$*

Demostración. Como en el lema 1.28. □

Demostración de la proposicion 3.29. Definimos $X_0 := X'$ (donde X' es tal que $X \subseteq X' \leq |M|$ y $|X'| \leq |X| + \aleph_0$), $Y_0 := Sk(X_0)$, $X_{n+1} := (Y_n)'$ (donde $(Y_n)'$ es tal que $Y_n \subseteq (Y_n)' \leq |M|$ y $|(Y_n)'| \leq |Y_n| + \aleph_0$) y $Y_{n+1} := Sk(X_{n+1})$ ($n < \omega$). Definamos $B := \bigcup_{n<\omega} X_n$. Tenemos que B es un L-modelo (como en la proposición 1.30). Denotemos por N a este L-modelo.
Por otro lado, por la manera como se ha construido N tenemos que $N \subseteq M$, luego si $A \in [|N|]^{<\omega} \subseteq [|M|]^{<\omega}$ entonces $d_0(A) = |A| - r(A) \geq 0$ en virtud del hecho de que $M \in \mathcal{K}_{ab}$, por lo tanto $N \in \mathcal{K}_{ab}$.
Lo demás se sigue haciendo el mismo argumento presentado en la proposición 1.30. □

De lo visto anteriormente, tenemos que $(\mathcal{K}_{ab}, \leq)$ es una clase elemental abstracta.

Proposición 3.31. $(\mathcal{K}_{ab}, \leq)$ *es una clase elemental abstracta con número de Lowënheim-Skolem $LS(\mathcal{K}) = |L| + \aleph_0$*

Como lo acabamos de ver, para ver que una clase de construcciones de Hrushovski sea clase elemental abstracta, basta ver que la función sobre la cual se está definiendo la relación “ser autosuficiente” es una predimensión, y verificar que dicha relación y dicha clase se comporten bien bajo isomorfismos.

Amalgamación en el ejemplo “ab initio”.

En [Hr93] es probada una versión de la propiedad de amalgamación en el ejemplo “ab initio”, pero considerando solamente estructuras finitas. De hecho, E. Hrushovski trabaja solamente con estructuras finitas pues el objetivo de su trabajo es armar una especie de $\leq$-límite de Fraïssé (que resulta ser contable) de ciertas estructuras finitas donde se preserve la dimensión relativizada. Pero en este trabajo no nos interesa trabajar sobre dicho límite sino considerar la clase de estructuras donde se cumpla la condición de Schanuel.

Comparando con lo hecho en el caso de las fusiones, probar aquí la propiedad de amalgamación es más sencillo puesto que solo estamos trabajando con un símbolo de relación y basta considerar la unión de los modelos a amalgamar, como veremos más adelante; el caso de las fusiones es más complejo puesto que posiblemente el lenguaje tiene operadores, razón por la cual es posible que necesitemos un modelo que contenga propiamente una copia isomorfa de la unión de los modelos a amalgamar.

El siguiente hecho es probado en [Hr93] pero trabajando con estructuras finitas (lema 1 (i)) ya que como comentamos párrafos atrás, el interés de Hrushovski es considerar una especie de límite de Fraïssé de estructuras finitas; pero nosotros ya habíamos aclarado que ese no es nuestro interés. Aquí presentamos una adaptación de dicha prueba, pero haciendo la salvedad que podemos trabajar con estructuras infinitas. Su importancia radica en que es muy útil al hacer la combinatoria en la prueba de la propiedad de amalgamación.

Lo que se espera es que una utilización adecuada de este resultado sirva para probar versiones débiles de 3-amalgamación que permitan probar, como ocurrió en el caso de las fusiones, la docilidad de esta clase.

Lema 3.32 (análogo al lema 1 (i) en [Hr93]). *Si $M, N \in \mathcal{K}_{ab}$ son tales que $M \leq N$, entonces para todo $Z \in [|N|]^{<\omega}$ se tiene que $d_0(Z \cap |M|) \leq d_0(Z)$.*

Demostración. Sean $Z \in [|N|]^{<\omega}$, $A' := Z \cap |M|$ y $A' \subseteq A \subseteq_{finito} |M|$ tal que $d_0(A) = d(A'; N)$ (el cual existe puesto que $M \leq N$). Para dicho $A \subseteq |M|$ tenemos que $d_0(A) = d(A; N)$ (por la proposición 3.11). Definimos $Y := Z \backslash A$ y $r' := |R^N \cap (Z^3 \backslash A^3)|$. Como $d(A; N) \leq d_0(AY) = |AY| - r(AY) \leq |A| + |Y| - r(A) - r'$ (puesto que $r(A) + r' \leq r(AY)$) tenemos que $d(A; N) \leq d_0(A) + |Y| - r'$, como $d_0(A) = d(A; N)$ entonces $|Y| - r' \geq 0$.
Así de esta manera tenemos que $d_0(Z) = d_0((Z \cap A)Y) = |(Z \cap A)Y| - r((Z \cap A)Y) = |X \cap A| + |Y| - r(Z \cap A) - r' = d_0(Z \cap A) + |Y| - r' \geq d_0(Z \cap A)$ (puesto que $|Y| - r' \geq 0$). Pero como $Z \cap A = Z \cap |M|$ (en efecto, como $A \subseteq |M|$

entonces $Z \cap A \subseteq Z \cap |M|$; y además $Z \cap |M| = Z \cap (Z \cap |M|) = Z \cap A' \subseteq Z \cap A$ puesto que $A' \subseteq A$) podemos decir que $d_0(Z) \geq d_0(Z \cap A) = d_0(Z \cap |M|)$. $\square$

Definición 3.33. Sean M, M_0, M_1 L-estructuras tales que $M \subseteq M_i$ ($i = 0, 1$) y $M_0 \cap M_1 = M$. La estructura N cuyo universo es $|M_0| \cup |M_1|$ y tal que $N \models R[\bar{c}]$ ssi existe $i \in \{0, 1\}$ para el cual $M_i \models R[\bar{c}]$ (es decir, en R^N no se está agregando información adicional a la dada en $R^{M_0} \cup R^{M_1}$) se denomina *amalgama libre* de M_0 y M_1 sobre M.

Proposición 3.34 (amalgamación en ejemplo "ab initio"). *Si las estructuras $M, M_0, M_1 \in \mathcal{K}_{ab}$ son tales que $M \leq M_i$ ($i = 0, 1$), entonces existe $N \in \mathcal{K}_{ab}$ tal que $M_i \leq N$ ($i = 0, 1$).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $M_0 \cap M_1 = M$. Sea N la amalgama libre de M_0 y M_1 sobre M. Siendo $X \in [|N|]^{<\omega}$ tenemos que $r(X) = r(X \cap |M_0|) + r(X \cap |M_1|) - r(X \cap |M|)$ y adicionalmente que $|X| = |X \cap |M_0|| + |X \cap |M_1|| - |X \cap |M||$. Por lo tanto tenemos que $d_0(X) = |X| - r(X) = |X \cap |M_0|| + |X \cap |M_1|| - |X \cap |M|| - r(X \cap |M_0|) - r(X \cap |M_1|) + r(X \cap |M|) = d_0(X \cap |M_0|) + d_0(X \cap |M_1|) - d_0(X \cap |M|)$. Puesto que $M \leq M_0$, en virtud del lema 3.32 tenemos que $d_0(X \cap |M|) \leq d_0(X \cap |M_0|)$ (tomando $Z := X \cap |M_0|$), y como $X \cap |M_1| \in [|M_1|]^{<\omega}$ y $M_1 \in \mathcal{K}_{ab}$ tenemos que $d_0(X \cap |M_1|) \geq 0$, por consiguiente $d_0(X) = d_0(X \cap |M_0|) - d_0(X \cap |M|) + d_0(X \cap |M_1|) \geq 0$. Es decir, $N \in \mathcal{K}_{ab}$.
Falta verificar que en efecto $M_i \leq N$ ($i = 0, 1$). En efecto, tomemos $X \in [|M_0|]^{<\omega}$. Por definición tenemos que $d(X; M_0) \geq d(X; N)$ (puesto que $M_0 \subseteq N$). Sea $X \subseteq Y' \subseteq_{finito} |M_0|$ tal que $d_0(Y') = d(X; M_0)$. Basta probar que $d_0(Y') \leq d_0(Y)$ para todo $X \subseteq Y \subseteq_{finito} |N|$. Puesto que $r(Y) = r(Y \cap |M_0|) + r(Y \cap |M_1|) - r(Y \cap |M|)$ y que $|Y| = |Y \cap |M_0|| + |Y \cap |M_1|| - |Y \cap |M||$ tenemos que $d_0(Y) = d_0(Y \cap |M_0|) + d_0(Y \cap |M_1|) - d_0(Y \cap |M|) \geq d_0(Y') + d_0(Y \cap |M_1|) - d_0(Y \cap |M|)$ (ya que $X \subseteq Y \cap |M_0| \subseteq_{finito} |M_0|$). En virtud del lema 3.32 tenemos que $d_0(Y \cap |M|) \leq d_0(Y \cap |M_1|)$ (puesto que $M \leq M_1$, tomando $Z := Y \cap |M_0|$), luego $d_0(Y) \geq d_0(Y') + d_0(Y \cap |M_1|) - d_0(Y \cap |M|) \geq d_0(Y')$; por lo tanto $d(X; N) \geq d_0(Y') = d(X; M_0)$ y en consecuencia $M_0 \leq N$ (hecho 3.12). De manera análoga se prueba que $M_1 \leq N$. $\square$

Capítulo 4

Algunas consideraciones generales

En los capítulos anteriores vimos que en las fusiones y en el ejemplo "ab initio", el hecho de que la clase de estructuras que satisfacen la *condición de Schanuel* junto con la relación "ser autosuficiente" sea una clase elemental abstracta depende fuertemente de que la función d_0 sea una predimensión que se "comporte bien" con respecto a los isomorfismos (compatibilidad con isomorfismos, ver definición 4.2).

En el presente capítulo damos un marco general, considerando algunas de las propiedades que comparten el caso de las fusiones y del ejemplo "ab initio", que permite

Definición 4.1. Una *predimensión* d_0 definida sobre todo subconjunto finito de cualquier L-estructura es una función cuya imagen es subconjunto de $\mathbb{Z}$ y tal que para todo $A \in [|M|]^{<\omega}$, siendo M una L-estructura, se tiene que $d_0(A) \leq |A|$ y para todo $A, B \in [|M|]^{<\omega}$ se tiene que $d_0(AB) + d_0(A \cap B) \leq d_0(A) + d_0(B)$; esta última propiedad es denominada *submodularidad*

Definición 4.2. Una predimensión d_0 se dice *compatible con isomorfismos* si dado $f : M \cong N$ entonces para todo $X \in [|M|]^{<\omega}$ tenemos que $d_0(X) = d_0(f(X))$.

Supuesto 4.3. El contexto general sobre el que vamos a trabajar en este capítulo es el siguiente: dado un lenguaje de primer orden L fijo, consideramos en primera instancia una clase de L-estructuras $\mathcal{K}$ y una predimensión d_0

definida sobre todo subconjunto finito de cualquier estructura en $\mathcal{K}$. Vamos a suponer que d_0 es compatible con isomorfismos.

Notación 4.4. $\mathcal{K}_0$ denota la clase de las L-estructuras M en $\mathcal{K}$ tales que $d_0(X) \geq 0$ para todo $X \in [|M|]^{<\omega}$. La condición $d_0(X) \geq 0$ es denominada *condición de Schanuel*

Observación 4.5. La razón por la cual la condición $d_0(X) \geq 0$ es denominada *condición de Schanuel* radica en el hecho de que uno de los ejemplos de construcción de Hrushovski propuestos por B. Zilber en [Zi01, Zi04a, Zi04b] consiste en considerar la clase de los cuerpos algebraicamente cerrados F de característica 0 que satisfacen la condición $d_0(X) := tr.d_{\mathbb{Q}}(X \cup ex(X)) - lin.d._{\mathbb{Q}}(X) \geq 0$ (donde $tr.d_{\mathbb{Q}}$ denota el grado de trascendencia sobre $\mathbb{Q}$, $lin.d._{\mathbb{Q}}$ denota la dimensión lineal sobre $\mathbb{Q}$ y ex se interpreta como un operador unario tal que para todo $x, y \in F$ se tiene que $ex(x+y) = ex(x) \cdot ex(y)$); en el caso de que F se tome como $\mathbb{C}$ y ex como exp, la condición $d_0(X) \geq 0$ es exactamente la famosa *conjetura de Schanuel*.

Observación 4.6. Si $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq_{finito} |M|$ son tales que $Z \cap Z_1 = Z \cap Z_2$, entonces $d_0(Z/Z_2) \leq d_0(Z/Z_1)$ (es decir, $d_0(ZZ_2) + d_0(Z_1) \leq d_0(ZZ_1) + d_0(Z_2)$). Su demostración es como en la observación 1.6

Definición 4.7. Dados A, B subconjuntos finitos de una L-estructura, definimos $d_0(A/B) := d_0(AB) - d_0(B)$.

Observación 4.8. Notemos que $d_0(A/B) = d_0(AB) - d_0(B) = d_0(A \backslash B/B)$ si A, B son finitos.

Definición 4.9. Sea $M \in \mathcal{K}_0$. Definimos $d(A; B) := \min\{d_0(A') \mid A \subseteq A' \subseteq_{finito} B\}$, siendo $A \subseteq_{finito} B \subseteq |M|$.

La definición anterior tiene sentido, pues $\{d_0(A') \mid A \subseteq A' \subseteq_{finito} B\}$ es un conjunto no vacío de números naturales.

Proposición 4.10. *Si $A \subseteq A' \subseteq_{finito} \subseteq B \subseteq |M|$ (donde $M \in \mathcal{K}_0$) son tales que $d_0(A') = d(A; B)$, entonces $d_0(A') = d(A'; B)$*

Demostración. De la definición de $d(\cdot; B)$ tenemos que $d(A'; B) \leq d_0(A')$ puesto que $A' \subseteq A' \subseteq_{finito} B$. Por otro lado, como $A \subseteq A'$ entonces $d(A; B) \leq d(A'; B)$ puesto que $\{X \in [B]^{<\omega} \mid A' \subseteq X\} \subseteq \{X \in [B]^{<\omega} \mid A \subseteq X\}$; es decir, $d_0(A') = d(A; B) \leq d(A'; B)$. Por lo tanto, $d_0(A') = d(A'; B)$. $\square$

La siguiente serie de equivalencias es importante pues es crucial en la definición de *autosuficiencia*, tal cual como se hizo en el caso de las fusiones y en el ejemplo "ab initio". La prueba de este hecho es similar a la que se tiene en el caso de las fusiones (ver [Hol95]) pues estamos suponiendo que d_0 satisface submodularidad, que es el hecho crucial para probar la dirección no trivial 1.⇒3. Escribiremos la prueba para las direcciones no triviales 1.⇒3. y 3.⇒2.

Hecho 4.11. *Siendo $M \in \mathcal{K}_0$, para $A \subseteq B \subseteq |M|$ son equivalentes:*

1. *Para todo $X \in [A]^{<\omega}$, $d(X; A) = d(X; B)$.*
2. *Dado $X \in [A]^{<\omega}$ existe $X \subseteq Y \subseteq_{finito} B$ tal que $d_0(Y) = d(X; B)$.*
3. *Para todo $Y \in [B]^{<\omega}$ $d_0(Y/Y \cap A) \geq 0$.*

Si A es finito, 1., 2. *y* 3. *son equivalentes a*

4. *$d_0(A) = d(A; B)$.*

Demostración. 1.⇒3.: Vía reducción al absurdo, supongamos que existe $Y \in [B]^{<\omega}$ tal que $d_0(Y/Y \cap A) < 0$, tomando Z tal que $Y \cap A \subseteq Z \subseteq_{finito} A$ y que $d_0(Z) = d(Y \cap A; A)$ tenemos que $Y \cap A = Y \cap Z$ y que $d_0(Z) = d(Z; A)$ (proposición 4.10), y gracias a este hecho y a la submodularidad de d_0 tenemos que $d_0(Y/Z) = d_0(YZ) - d_0(Z) \leq d_0(Y) - d_0(Y \cap A) = d_0(Y/Y \cap A) < 0$; por lo tanto $d_0(YZ) < d_0(Z)$. Pero $Z \subseteq YZ \subseteq_{finito} B$, luego $d(Z; B) \leq d_0(YZ) < d_0(Z) = d_0(Z; A)$ (contradice 1.)
3.⇒2.: Sean $X \in [A]^{<\omega}$ y $X \subseteq Z \subseteq B$ tales que $d_0(Z) = d(X; B)$. Por 3. tenemos que $d_0(X; B) = d_0(Z) \geq d_0(Z \cap A)$ (ya que $d(Z/Z \cap A) = d_0(Z) - d_0(Z \cap A) \geq 0$); pero por otro lado como $X \subseteq Z \cap A \subseteq_{finito} B$ entonces $d(Z; B) \leq d_0(Z \cap A)$. Por lo tanto $d(Z; B) = d_0(Z \cap A)$. □

Definición 4.12. Siendo $M \in \mathcal{K}_0$ y $A \subseteq B \subseteq |M|$, decimos que A es *autosuficiente* en B (lo que denotaremos por $A \leq B$) si y solo si alguna de las condiciones del hecho 4.11 ocurre.
En el caso de que $M \subseteq N$ sean estructuras en $\mathcal{K}_0$, denotamos por $M \leq N$ el hecho de que $|M| \leq |N|$.

A continuación veremos que la clase $\mathcal{K}_0$ junto con la relación $\leq$, bajo las condiciones planteadas en los supuestos 4.3, 4.18 y 4.27, es una clase elemental abstracta.

Proposición 4.13. $(\mathcal{K}_0, \leq)$ *es un orden parcial.*

Demostración. Como en la proposición 1.16 □

Proposición 4.14. *Si $M, N \in \mathcal{K}_0$ son tales que $M \leq N$, entonces $M \subseteq N$.*

Demostración. Como en la proposición 1.17 □

Lema 4.15. *Sean $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2$ estructuras en $\mathcal{K}_0$ tales que $N_0 \leq N_2$, entonces $N_0 \leq N_1$.*

Demostración. Como en la proposición 1.19 □

Observación 4.16. El anterior resultado es mucho más fuerte que el axioma del triángulo exigido dentro de la definición de clase elemental abstracta.

Corolario 4.17 (axioma del triángulo en $\mathcal{K}_0$). *Sean $M_0 \subseteq M_1 \leq M_2$ estructuras en $\mathcal{K}_0$ tales que $M_0 \leq M_2$, entonces $M_0 \leq M_1$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior, puesto que $M_2 \leq M_3$ implica que $M_2 \subseteq M_3$ (proposición 4.14) □

Supuesto 4.18. Vamos a suponer que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo la unión de $\leq$-cadenas en $\mathcal{K}_0$. Los casos particulares de las fusiones y del ejemplo "ab initio" satisfacen esta condición (la clase $\mathcal{K}$ tomada en el primer caso es elemental y en particular cualquier $\leq$-cadena es una $\preceq$-cadena; mientras que el segundo caso la clase tomada es la clase de todas las L-estructuras).

Proposición 4.19 (uniones de $\leq$-cadenas (1) en $\mathcal{K}_0$). *Sea $\{M_i \mid i < \lambda\}$ una $\leq$-cadena en $\mathcal{K}_0$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} M_i \in \mathcal{K}_0$ y $M_i \leq \bigcup_{i<\lambda} M_i$ para todo $i < \lambda$.*

Demostración. En virtud del supuesto 4.18 tenemos que $\bigcup_{i<\lambda} M_i \in \mathcal{K}$. Sea $A \in [\left|\bigcup_{i<\lambda} M_i\right|]^{<\omega}$, luego existe $j < \lambda$ tal que $A \subseteq M_j$, puesto que $M_j \in \mathcal{K}_0$ tenemos que $d_0(A) \geq 0$; por lo tanto $\bigcup_{i<\lambda} M_i \in \mathcal{K}_0$.
Lo demás se sigue como en la proposición 1.22. □

Proposición 4.20. *Sean $\{A_i \mid i < \lambda\}$ una $\subseteq$-cadena de subconjuntos de una estructura $M \in \mathcal{K}_0$ y $B \subseteq M$ tal que $A_k \leq B$ para todo $k < \lambda$. Entonces $\bigcup_{i<\lambda} A_i \leq B$.*

Demostración. Com en la proposición 1.23 □

Corolario 4.21. *Sean* $\{M_i \mid i < \lambda\}$ *una* $\subseteq$*-cadena de estructuras en* $\mathcal{K}_0$ *y* $N \in \mathcal{K}_0$ *tal que* $M_k \leq N$ *para todo* $k < \lambda$*. Entonces* $\bigcup_{i<\lambda} M_i \leq N$*.*

El anterior corolario es un poco más fuerte que el axioma correspondiente que es exigido dentro de la definición de clase elemental abstracta, tal como ocurre en el caso de las fusiones y en el eejmplo "ab initio".

Corolario 4.22 (uniones de $\leq$-cadenas (2) en $\mathcal{K}_0$). *Sean* $\{M_i \mid i < \lambda\}$ *una* $\leq$*-cadena de estructuras en* $\mathcal{K}_0$ *y* $N \in \mathcal{K}_0$ *tal que* $M_k \leq N$ *para todo* $k < \lambda$*. Entonces* $\bigcup_{i<\lambda} M_i \leq N$*.*

Proposición 4.23 (axioma de isomorfismos (1)). *Sea* $M \in \mathcal{K}_0$*. Si* $M \cong N$ *y* $N \in \mathcal{K}$*, entonces* $N \in \mathcal{K}_0$*.*

Demostración. Se sigue del supuesto de que d_0 es compatible con isomorfismos. □

Proposición 4.24 (axioma de isomorfismos (2)). *Sean* M_i *y* N_i *(*$i = 1, 2$*) estructuras en* $\mathcal{K}_0$ *tales que* $M_1 \subseteq M_2$ *y* $N_1 \leq N_2$ *y* $f_i : M_i \overset{\cong}{\to} N_i$ *(*$i = 1, 2$*) L-isomorfismos tales que* $f_1 \subseteq f_2$*. Entonces* $M_1 \leq M_2$*.*

Demostración. Todo $X \subseteq_{finito} |M_1|$ cumple que $d(X; |M_1|) = d(f_1(X), |N_1|)$. En efecto, siendo $X \subseteq_{finito} |M_1|$ por definición de $d(\cdot; |M_1|)$ existe $X \subseteq X' \subseteq_{finito} |M_1|$ tal que $d_0(X') = d(X; |M|)$. Pero como $d_0(X') = d_0(f_1(X'))$ (ya que d_0 es compatible con isomorfismos) y puesto que $f_1(X) \subseteq f_1(X') \subseteq_{finito} |N_1|$ tenemos por lo tanto que $d(f_1(X); |N_1|) \leq d_0(f_1(X')) = d_0(X') = d(X; |M_1|)$. Análogamente se puede probar que $d(f_1(X); |N_1|) \geq d(X; |M_1|)$, luego $d(f_1(X); |N_1|) = d(X; |M_1|)$. Como $f_1(X) \subseteq |N_1|$ y $N_1 \leq N_2$ entonces $d(f_1(X); |N_1|) = d(f_1(X); |N_2|)$ (en virtud del hecho 4.11 (1)). Haciendo un argumento similar al que hicimos anteriormente, podemos ver que $d(f_2(X); |N_2|) = d(X; |M_2|)$. Por lo tanto, como $f_1 \subseteq f_2$ tenemos que $f_1(X) = f_2(X)$. De esto podemos concluir que $d(X; |M_1|) = d(f_1(X); |N_1|) = d(f_1(X); |N_2|) = d(f_2(X); |N_2|) = d(X; |M_2|)$, luego en virtud del hecho 4.11 (1) podemos concluir que $M_1 \leq M_2$. □

Proposición 4.25 (LST. descendente en $\mathcal{K}_0$).
Dados $M \in \mathcal{K}_0$ *y* $X \subseteq |M|$*, existe* $N \in \mathcal{K}_0$ *tal que* $X \subseteq N \leq M$*, donde* $\|N\| \leq |X| + |L| + \aleph_0$

Lema 4.26. *Dados* $N \in \mathcal{K}_0$ *y* $X \subseteq A \subseteq |N|$*, existe* X' *tal que* $X \subseteq X' \leq A$*, donde* $|X'| \leq |X| + \aleph_0$

Demostración. Como en la proposición 1.28. □

Demostración de la proposicion 4.25. Definimos $X_0 := X'$ (donde X' es tal que $X \subseteq X' \leq |M|$ y $|X'| \leq |X| + \aleph_0$), $Y_0 := Sk(X_0)$, $X_{n+1} := (Y_n)'$ (donde $(Y_n)'$ es tal que $Y_n \subseteq (Y_n)' \leq |M|$ y $|(Y_n)'| \leq |Y_n| + \aleph_0$) y $Y_{n+1} := Sk(X_{n+1})$ $(n < \omega)$. Definamos $B := \bigcup_{n<\omega} X_n$. Tenemos que B es un L-modelo, puesto que si $F \in L$ es símbolo de función de aridad m y $a_1, \cdots, a_m \in B$, sabemos que existe $k < \omega$ minimal tal que $a_1, \cdots, a_m \in X_k$, luego $F^M(a_1, \cdots, a_m) \in Sk(X_k) = Y_k \subseteq (Y_k)' = X_{k+1} \subseteq B$. Denotemos por N a este L-modelo.

Supuesto 4.27. Vamos a suponer que tal modelo N está en la clase $\mathcal{K}$. En el caso particular de las fusiones esto se tenía puesto que la clase $\mathcal{K} := Mod(T_1 \cup T_2)$ de la que se partió es elemental y que una $\leq$-cadena es en particular una $\preceq$-cadena, en el ejemplo "ab initio" también se tiene este hecho pues la clase tomada inicialmente es $\mathcal{K} := \{M \mid M \text{ es } L\text{-estructura}\}$. Lo que se debe comprobar a continuación, es que tal modelo N satisface la condición de Schanuel.

Por otro lado, por la manera como se ha construido N tenemos que $N \subseteq M$, luego si $A \in [|N|]^{<\omega} \subseteq [|M|]^{<\omega}$ entonces $d_0(A) \geq 0$ en virtud del hecho de que $M \in \mathcal{K}_0$, por lo tanto $N \in \mathcal{K}_0$.

Todo lo demás se sigue como en la proposición 1.30 □

Considerando los supuestos 4.3, 4.18 y 4.27, tenemos que $(\mathcal{K}_0, \leq)$ es una clase elemental abstracta.

Proposición 4.28. $(\mathcal{K}_0, \leq)$ *es una clase elemental abstracta con número de Lowënheim-Skolem* $LS(\mathcal{K}) = |L| + \aleph_0$

Como hemos observado, si la relación de *autosuficiencia* está definida sobre una predimensión d_0 compatible con isomorfismos, la clase $(\mathcal{K}_0, \leq)$ resulta ser una clase elemental abstracta. Como es el caso de las fusiones y del ejemplo ejemplo "ab initio". Este último estudio resulta generalizar los casos particulares estudiados en el desarrollo de esta tesis (ejemplo "ab initio"y las fusiones).

El estudio de otras propiedades adicionales tales como amalgamación, como se observó en los ejemplos analizados en esta tesis, depende de cada caso particular.

En el ejemplo “ab initio” fue suficiente trabajar directamente sobre la unión de los modelos a amalgamar ya que solo se está trabajando con una relación ternaria, de hecho el modelo que sirvió de amalgama en ese caso es la denominada *amalgama libre*, el cual es un modelo cuyo universo es la unión de los modelos a amalgamar (este modelo se puede considerar bajo ciertas hipótesis adicionales). Esto fue posible hacerlo, ya que al trabajar en un lenguaje con una relación ternaria y si M_0, M_1 son los modelos a amalgamar, no es necesario definir como se relacionan elementos de $M_0 \setminus M_1$ con elementos de $M_1 \setminus M_0$.

En el caso de las fusiones es necesario hacer un argumento más elaborado ya que en ese caso muy posiblemente se está trabajando con operadores (como en [Hr92]) y lo más seguro es que se necesite algo más que la unión para amalgamar, ya que se deben definir las imágenes de tuplas que tengan por lo menos un elemento en $M_0 \setminus M_1$ y uno en $M_1 \setminus M_0$.

Bibliografía

[Ba] John Baldwin, *Abstract Elementary Classes: Past and Future*, 2005.

[BaHo] John Baldwin & Kitty Holland, *Constructing ω-stable structures: Rank 2 fields.*

[Bu96] Steven Buechler, *Essential stability theory*, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[Gr] Rami Grossberg, *A course in Model theory*, libro en preparación.

[Gr02] Rami Grossberg, *Classification theory for abstract elementary classes*, Logic and Algebra, ed. Yi Zhang, Contemporary Mathematics, vol 302, AMS, (2002), p. 165 - 204

[GrVa1] Rami Grossberg & Monica Van Dieren, *Galois-stability for tame abstract elementary classes*, versión preliminar.

[GrVa2] Rami Grossberg & Monica Van Dieren, *Upward categoricity transfer theorem for tame abstract elementary classes*, versión preliminar.

[GrKo] Rami Grossberg & Alexei Kolesnikov, *Excellent abstract elementary classes are tame*, versión preliminar.

[He98] C. W. Henson, *Model theory : Spring 1998 Class Notes for Mathematics 411*, 1998.

[Ho94] Wilfrid Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Hol95] Kitty Holland, *Introduction to fusion of strongly minimal sets: the geometry of fusions*, Archive for Mathematical Logic, vol. 34 no. 06 (1995), p. 395.

[Hr92] Ehud Hrushovski, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Israel Journal of Mathematics 79 (1992), p. 129-151.

[Hr93] Ehud Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Annals of pure and applied logic 62 (1993), p. 147-166.

[Jó56] B. Jónsson, *Universal relational systems*, Mathematica Scandinavica 4 (1956), p. 193-208.

[Jó60] B. Jónsson, *Homogeneous universal relational systems*, Mathematica Scandinavica 8 (1960), p. 137-142.

[Ma00] David Marker, *Introduction to model theory*; Model theory, Algebra and Geometry 39 (2000) ed. por D. Haskell, A. Pillay y C. Steinhorn, p. 15-35, Cambridge University Press, Cambridge.

[Sh88] Saharon Shelah, *Classification of nonelementary classes II, abstract elementary classes*, In J.T. Baldwin, editor, Classification theory (Chicago, IL, 1985), p. 419-497, Springer-Verlag , Berlin, 1987. paper 88: Proceedings of the USA-Israel Conference on Classification Theory, Chicago, December 1985; vol. 1292 de Lecture Notes in Mathematics.

[Sh300] Saharon Shelah, *Universal classes*, part I. In J.T. Baldwin, editor, Classification theory (Chicago, IL, 1985), p. 264-419. Springer, Berlin, 1987. paper 300:Proceedings of the USA-Israel Conference on Classification Theory, Chicago, December 1985; vol. 1292 de Lecture Notes in Mathematics

[Sh394] Saharon Shelah, *Categoricity of abstract class with amalgamation*, APAL, 1999

[ViZa] Andrés Villaveces & Pedro Zambrano, *Hrushovski Fusions and Tame Abstract Elementary Classes*, en preparación.

[Zi01] Boris Zilber, *Analytic and pseudo-analytic structures*, (Survey paper) After talk given at Logic Colloquium 2000, Paris. To appear in the Proceedings of the Colloquium. Proofread February 2002.

[Zi04a] Boris Zilber, *Complex and pseudo-analytic structures*, Oberwolfach tutorial slides, 19-23, July 2004.

[Zi04b] Boris Zilber, *Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero*, Annals of Pure and Applied Logic, Vol 132 (2004) 1, pp 67-95

Índice de símbolos

Índice de materias