PRESERVACIÓN DE MODELOS DE SOLOVAY BAJO EL FORCING DE SACKS

RAFAEL EDUARDO BENJUMEA HOYOS

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de magister en matemáticas

Director
ANDRÉS VILLAVECES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Codirector
CARLOS AUGUSTO DI PRISCO
INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2007

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer principalmente al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (I.V.I.C) por permitirme hacer uso de sus instalaciones, al igual que por poder contar con la colaboración y calidez de su gente. Agradezco al profesor Carlos Di Prisco por su colaboración y disposición para enseñarme todos estos temas tan fascinantes, igualmente a los profesores Andrés Villaveces y Alexander Berenstein que siempre han estado dispuestos a brindarme su colaboración y buenos consejos.

De una forma u otra estoy en deuda con todas las personas que tuve la fortuna de conocer durante mi estadía en Venezuela, muchas gracias a Jenny, Ingrid, Franklin, Zailex, Eddy, Eglys, Jessy, Gabriel, Goyo, Maria Rosa, Naty y muchos otros, para todos ellos un abrazo muy especial.

Índice general

Introducción

"Set theorists get born and die
move to distant countries, get married, bear children,
go bankrupt, grow old an sick, and Sacks forcing is still with us,
working just as well as the day Sacks invented it".
J. Zapletal.

Daremos en esta introducción un breve sumario histórico de los temas y problemas que trataremos en los siguientes capítulos.

En 1998 Di Prisco y Todorcevic [DT], en su estudio sobre propiedades de conjuntos de reales que se satisfacen en $L(\mathbb{R})[U]$, cuando $L(\mathbb{R})$ es un modelo de Solovay, y U es un ultrafiltro selectivo sobre ω, probaron que si se agrega un real genérico de Mathias a un modelo de Solovay sobre V, la extensión genérica resultante continúa siendo un modelo de Solovay sobre V, y dejaron abierta la pregunta de si eso se podría extender a todos los forcings propios definibles. El objetivo principal de este trabajo es demostrar que la propiedad de ser modelo de Solovay se preserva bajo extensiones genéricas utilizando el orden de Sacks ($\mathbb{S}$).

En 1965 Solovay [So] construyó un modelo de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), donde todo conjunto definible de reales X es Lebesgue medible, tiene la propiedad de Baire y contiene un subconjunto perfecto cuando es no contable (ver teorema 1.8 de este trabajo). Aquí "definible" significa que $X = \{x \in \mathbb{R} | \, \phi(x, r, \alpha)\}$, donde $r \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in Ord$(la clase de los ordinales). Las ideas desarrolladas por Solovay para construir su modelo y establecer el teorema 1.8, generaron entre otras cosas, caracterizaciones para las propiedades de regularidad de los conjuntos $\sum_2^1$, como lo muestra el siguiente teorema (ver [K]).

0.1 Teorema. *(Solovay) Las siguientes condiciones son equivalentes para $a \in {}^{\omega}\omega$:*

1. *Todo conjunto de reales $\sum_2^1(a)$ es Lebesgue medible.*
2. *$\{x | \, x$ no es un real random sobre $L[a]\}$ es nulo.*

3. *Todo conjunto de la forma* $\{x \in {}^{\omega}\omega |\, L[a][x] \models \phi(p,x)\}$ *para alguna fórmula* ϕ *y* $p \in L[a]$ *es Lebesgue medible.*

Un resultado análogo se tiene si remplazamos en el teorema anterior Lebesgue medibilidad por la propiedad de Baire, y medida nula por magro. Adicionalmente Solovay logró establecer resultados sobre la estrecha relación que existe entre axiomas de grandes cardinales y el estudio de la jerarquía proyectiva de conjuntos, por ejemplo el siguiente teorema muestra que el grado de consistencia para la proposición "todo conjunto $\prod_1^1$ tiene la propiedad del conjunto perfecto", es la de un cardinal inaccesible.

0.2 Teorema. *Las siguientes condiciones son equivalentes para todo* $a \in {}^{\omega}\omega$*:*

1. *Todo conjunto de reales* $\sum_2^1(a)$ *tiene la propiedad del conjunto perfecto.*
2. *Todo conjunto de reales* $\prod_1^1(a)$ *tiene la propiedad del conjunto perfecto.*
3. $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$.

Esta relación entre grandes cardinales y propiedades de regularidad de conjuntos de reales, ha sido uno de los motores que han impulsado de manera significativa el desarrollo de la teoría moderna de conjuntos. Shelah y Woodin [SW] mostraron que en presencia de cardinales supercompactos todo conjunto de reales en $L(\mathbb{R})$ es Lebesgue medible y tiene la propiedad de Baire, es decir que bajo la presencia de un cardinal supercompacto, el $L(\mathbb{R})$ del universo es elementalmente equivalente a un modelo de Solovay.

Los axiomas de grandes cardinales también han generado resultados de absoluticidad genérica, principalmente para el modelo interno $L(\mathbb{R})$. Uno de los primeros resultados en esta dirección es el siguiente

0.3 Teorema. *Supongamos que* $L(\mathbb{R})^M$ *y* $L(\mathbb{R})^N$ *son modelos de Solovay sobre* V *tales que* $\mathbb{R}^M \subseteq \mathbb{R}^N$ *y* $\omega_1^M = \omega_1^N$*. Entonces existe una inmersión elemental*

$$j : L(\mathbb{R})^M \to L(\mathbb{R})^N$$

que fija todos los ordinales y los reales.

Otro ejemplo es el llamado **teorema de la inmersión** probado por I. Neeman y J. Zapletal en 1998 [NZ]

0.4 Teorema. *Sea* δ *un cardinal de Woodin débilmente compacto y* $\mathbb{P}$ *una noción de forcing propio de tamaño* $< \delta$*. Entonces en* $V^{\mathbb{P}}$ *hay una inmersión elemental*

$$j : L(\mathbb{R}^V) \to L(\mathbb{R}^{V^{\mathbb{P}}})$$

que fija todos los ordinales y los reales.

La relación entre grandes cardinales y absoluticidad es una de las razones para el estudio de la preservación de modelos de Solovay bajo extensiones genéricas que no colapsen ω_1. Pues cada vez que esta propiedad se tiene, alguna forma de absoluticidad genérica se cumple, lo que principalmente tiene consecuencias en la teoría de la estructura del modelo $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ (de los conjuntos *hereditariamente contables*), que es una herramienta clave en el estudio de la hipótesis del continuo.

Entre los años 2003 y 2004, gracias a los trabajos de Bagaria y Bosch [Bb], [BB] se dio el avance más importante en el estudio de la preservación de modelos de Solovay, pues ellos probaron que tal la propiedad se preserva bajo órdenes $\sum_3^1$- fuertemente propios, y también bajo ordenes fuertemente-$\sum_3^1$ absolutamente-*ccc*, nótese que el orden de Sacks $\mathbb{S}$ está en la clase de los órdenes $\sum_3^1$- fuertemente propios, así nuestro resultado se sigue de lo anterior, pero los métodos utilizados aquí son completamente distintos. Como consecuencia de los resultados anteriores, Bagaria y Bosch obtuvieron varios teoremas que relacionan la propiedad de preservación de ser modelo de Solovay y la propiedad de absoluticidad; por ejemplo tenemos el siguiente

0.5 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equiconsistentes (módulo ZFC):*

1. *Existe un cardinal inaccesible.*

2. *$L(\mathbb{R})$-dos-pasos absoluticidad se tiene bajo forcing fuertemente-$\sum_3^1$ absolutamente ccc.*

3. *$\sum_4^1$-absoluticidad se tiene bajo el forcing de Cohen y el forcing Random.*

Si en el teorema anterior cambiamos el numeral 2. por :
$2'$: $L(\mathbb{R})$-dos-pasos absoluticidad se tiene bajo forcing $\sum_3^1$ fuertemente propio. Las equivalencias se mantienen.

Ahora bien, basándonos en las ideas expuestas en [DT] y [Za] mostraremos aquí que bajo la existencia de grandes cardinales (ω cardinales de Woodin), todo forcing propio definible preserva la propiedad de ser modelo de Solovay sobre V; el resultado "óptimo"(donde únicamente es necesario suponer la existencia de un cardinal inaccesible para definir el modelo de Solovay) que hemos podido obtener y que le da el nombre al presente trabajo es (ver teorema 3.9):

0.6 Teorema. *Si $L(\mathbb{R})$ es un modelo de Solovay sobre V y s es un real genérico de Sacks, entonces $L(\mathbb{R})[s]$ es de nuevo un modelo de Solovay sobre V.*

Resulta de particular interés para nosotros el orden de Sacks debido a las relaciones que se pueden establecer entre las propiedades de absoluticidad y medibilidad, además porque este orden es la noción más débil, entre todas aquellas que adicionan un real genérico, con respecto a la $\sum_3^1$-absoluticidad. Específicamente tenemos los siguientes teoremas (ver [D]):

0.7 Teorema. *Las condiciones siguientes son equivalentes*

1. $\sum_3^1$-*absoluticidad.*
2. *Todo conjunto de reales* Δ_2^1 *es Sacks medible.*

0.8 Teorema. *Supongamos que* $\mathbb{P}$ *es un orden que adiciona un real genérico. Entonces* $\sum_3^1$-$\mathbb{P}$-*absoluticidad implica* $\sum_3^1$-$\mathbb{S}$-*absoluticidad.*

Para lograr nuestros resultados y hacer el documento lo más autocontenido posible, hemos organizado el trabajo de la siguiente forma:

El capítulo 0 corresponde a los preliminares. Allí introducimos las definiciones, la notación necesaria para el desarrollo del trabajo, así como algunos teoremas básicos e importantes sobre propiedades de regularidad de los números reales, y las definiciones de los cardinales que utilizaremos. El capítulo 1 está dedicado a la definición del modelo de Solovay; presentamos allí la siguiente caracterización, debida a Woodin:

0.9 Lema. *Sea* $V \subseteq W$ *modelos de* ZFC. *Si* $\mathbb{R}$ *el conjunto de reales en* W, *el modelo* $L(\mathbb{R})$ *es un modelo de Solovay sobre* V *si y solamente si las siguientes condiciones se tienen en* W:

i) *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $\kappa = \omega_1$ *de* $L(\mathbb{R})$ *es un cardinal inaccesible en* $V[x]$.

ii) *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $V[x]$ *es una extensión genérica de* V *por algún orden parcial de tamaño* $< \omega_1$.

En el capítulo 2 desarrollamos los aspectos fundamentales de los órdenes propios definibles, donde los órdenes son representados como $P_I := B(X) \setminus I$, es decir los borelianos de un espacio polaco que no están en un σ-ideal adecuado. El resultado más importante en este capítulo afirma que si P_I es una noción de forcing propio, entonces P_I fuerza que todo real en la extensión genérica es la imagen del elemento P_I-genérico sobre V, vía una función boreliana. Exactamente tenemos

0.10 Lema. *Sea* I *un* σ-*ideal sobre un espacio polaco* X, *tal que la noción de forcing* P_I *es propio. Supongamos* Y *un espacio polaco,* $B \in P_I$ *tal que* $B \Vdash \dot{y} \in Y$ *es un punto. Entonces existe una condición* $C \subseteq B$ *en el forcing* P_I *y una función boreliana* $f : C \to Y$ *tal que* $C \Vdash \dot{y} = \dot{f}(\dot{x}_{gen})$.

Concluimos el segundo capítulo con algunas observaciones sobre el forcing de Sacks.

Ya con las herramientas necesarias, en el último capítulo presentaremos un esquema de prueba general que nos servirá para mostrar que bajo la existencia de grandes cardinales, la propiedad de ser modelo de Solovay se preserva bajo todo forcing propio definible P_I. En particular asumiendo la existencia de un cardinal inaccsesible κ, mostramos que los órdenes de Cohen(P_{I_1}), Random(P_{I_2}) y Sacks(P_{I_3}) preservan la propiedad de ser modelo de Solovay. Nuestra herramienta fundamental en la prueba son los teoremas de *uniformización*, para el caso específico del orden de Sacks probamos que:

0.11 Lema. *Sea $L(\mathbb{R})$ un modelo de Solovay, $B \in P_{I_3}$ y $R \subseteq B \times \mathbb{R}$ una relación en $L(\mathbb{R})$ tal que $\forall x \exists y\ R(x, y)$. Entonces existe $C \subseteq B$ en P_{I_3} y una función en $L(\mathbb{R})$ $f : C \to \mathbb{R}$ tal que para todo real $x \in C$ $R(x, f(x))$.*

Concluimos el trabajo con el siguiente teorema que relaciona uniformización y absoluticidad para el forcing de Sacks:

0.12 Teorema. $\prod^1_n(\mathbb{S})$*-uniformización implica* $\sum^1_{n+2}(\mathbb{S})$*-absoluticidad.*

Queda aún abierto si podemos debilitar la hipótesis de la existencia de ω cardinales de Woodin para obtener el resultado de preservación lo más general posible, creemos que la prueba que se presenta aquí se puede aplicar a una clase más extensas de órdenes, suponiendo sólo la existencia de un cardinal inaccesible.

Preliminares

En esta sección vamos a dar la notación y definiciones básicas necesarias para el desarrollo del presente trabajo, la notación será estándar y trataremos de seguir la expuesta en [J].

0.1. Subconjuntos definibles de espacios Polacos

Un espacio topológico (X, τ) se dice **polaco** si es un espacio separable y completamente metrizable. Los espacios polacos con los que trabajaremos son: El espacio de Cantor 2^ω y el espacio de Baire $\mathcal{N} = \omega^\omega$, ambos tomados con la topología producto. Las vecindades básicas de $\mathcal{N}$ están dadas por

$$N(k_0, \ldots, k_n) = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \alpha(0) = k_0, \ldots, \alpha(n) = k_n\}.$$

Con esta topología podemos ver que el espacio de Cantor es un subespacio compacto del espacio de Baire, y dado el homeomorfismo que existe entre este último y los números irracionales (con la topología usual heredada de $\mathbb{R}$), llamaremos a sus elementos **reales**.

Estamos interesados en una clase muy especial de conjuntos de reales, estos son los conjuntos *proyectivos*, particularmente los conjuntos *borelianos*.

0.13 Definición. Sea X un espacio polaco, un conjunto $A \subset X$ es un conjunto **boreliano** si pertenece a la σ-álgebra más pequeña de subconjuntos de X que contenga a todos los conjuntos abiertos.

Utilizaremos una definición más explícita. Para cada $\alpha < \omega_1$, definamos las siguientes colecciones de subconjuntos X:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1^0 := \text{la colección de todos los conjuntos abiertos;}\\
&\Pi_1^0 := \text{la colección de todos los conjuntos cerrados;}\\
&\Sigma_\alpha^0 := \text{la colección de los conjuntos } A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \text{donde cada } A_n \text{ pertenece a } \Pi_\beta^0 \qquad (1)\\
&\qquad\qquad \text{para algún } \beta < \alpha;\\
&\Pi_\alpha^0 := \text{la colección de todos los complementos de conjuntos en } \Sigma_\alpha^0.
\end{aligned}$$

Definimos así la clase de los conjuntos borelianos como los conjuntos que pertenecen a:

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha^0 \tag{2}$$

Los conjuntos que pertenecen a Σ_2^0 son conocidos como $\boldsymbol{F_\sigma}$ conjuntos, y son los que se pueden obtener como la unión contable de cerrados, y sus complementos son conocidos como conjuntos $\boldsymbol{G_\delta}$.

Definamos ahora la jerarquía de los conjuntos proyectivos, introducida por Lusin y Sierpienski alrededor de 1925, la primera clase es la de los conjuntos analíticos:

0.14 Definición. Un subconjunto A de un espacio polaco X se dice **analítico** si existe una función continua $f : \mathcal{N} \to X$ tal que $A = f(\mathcal{N})$

El siguiente lema nos da caracterizaciones de los conjuntos analíticos.

0.15 Lema. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier conjunto A en un espacio polaco X:*

i) *A es la imagen continua de $\mathcal{N}$.*

ii) *A es la imagen continua de un boreliano B en algún espacio polaco Y.*

iii) *A es la proyección de un boreliano $B \in X \times Y$, para algún espacio polaco Y.*

Ahora para cada $n \geq 1$, definimos las colecciones Σ_n^1, Π_n^1, y Δ_n^1 de subconjuntos de un espacio polaco X como:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1^1 := \text{La clase de los conjuntos analíticos.}\\
&\Pi_1^1 := \text{Los complementos de conjuntos de analíticos.}\\
&\Sigma_{n+1}^1 := \text{La colección de todas las proyecciónes de conjuntos } \Pi_n^1 \text{ de } X \times \mathcal{N}. \qquad (3)\\
&\Pi_n^1 := \text{Los complementos de los conjuntos } \Sigma_n^1.\\
&\Delta_n^1 := \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1.
\end{aligned}$$

Los conjuntos que pertenecen a alguna de las clases Σ^1_n o Π^1_n son llamados **conjuntos proyectivos**. Se puede ver que $\Delta^1_n \subset \Sigma^1_n \subset \Delta^1_{n+1}$ y $\Delta^1_n \subset \Pi^1_n \subset \Delta^1_{n+1}$, y que la contenencia es estricta. Suslin mostró que si un conjunto y su complemento son analíticos, ese conjunto es boreliano, es decir Δ^1_1 es la colección de todos los borelianos.

0.2. Regularidad

Recordaremos algunas propiedades y definiciones básicas de algunos conjuntos de reales que son la base para definir las nociones de forcing que utilizaremos, al hablar de propiedades de regularidad de conjuntos de reales nos referiremos a propiedades como la medibilidad de Lebesgue, la propiedad de Baire, la medibilidad de Sacks, la propiedad del conjunto perfecto etc.

Un *ideal* I sobre un conjunto A es una colección $I \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que

1. I es cerrado bajo subconjuntos, es decir, $X \in Y$ y $Y \subseteq X$ entonces $Y \in I$.

2. I es cerrado bajo uniones finitas, es decir, $X_1, X_2 \in I$ entonces $X_1 \cup X_2 \in I$,

y así la unión de cualquier colección finita de elementos en I está en I.

Si $A \notin I$, entonces I se dice *propio*.

Un ideal I es un σ-ideal o un ideal *contablemente completo* si dada una colección $X_n \in I$ para todo n, entonces

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in I.$$

La noción dual de ideal es la de *filtro*, una colección $F \subseteq \mathcal{P}(A)$ es un $filtro$ sobre A ssi

1. F es cerrado bajo superconjuntos, es decir, $X \in F$ y $X \subseteq Y \subseteq A$ implica $Y \in F$.

2. F es cerrado bajo intersecciones finitas.

Por lo general un $filtro$ será considerado *propio*, es decir $\emptyset \notin F$. Un filtro F, maximal bajo la relación de inclusión es llamado un ultrafiltro. Un ejemplo de ultrafiltro sobre un conjunto A es:

$$\{X \subseteq A |\ a \in X\}$$

para cualquier $a \in A$. Llamaremos a estos ultrafiltros *principales*(generados por $\{a\}$), los ultrafiltros que no son generados por un único elemento del conjunto serán no principales.

Si I es un ideal sobre A, entonces $I^* = \{X \subseteq A \mid A \setminus X \in I\}$ es su $filtro\ dual$.

Los conjuntos que pertenecen a un ideal I son intuitivamente "pequeños" o "nulos", mientras los que pertenecen a un $filtro$ son "grandes" o "de medida uno". Sea I un ideal sobre A , entonces los subconjuntos de A que no están en I son llamados "positivos" y la colección de conjuntos positivos es denotada I^+.

$$I^+ = \{X \subseteq A \mid X \notin I\}.$$

Algunos ejemplos básicos e importantes aquí de σ-ideales sobre el conjunto de los números reales son:

1. El ideal de los conjuntos de medida de Lebesgue cero.

2. El ideal de los conjuntos *Magros* o de primera categoría.

3. El ideal de los subconjuntos contables.

Recordemos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *Lebesgue medible* si para cada $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A)$$

siendo μ^* una "medida exterior". Y un conjunto X se dice *magro* si es una unión contable de conjuntos nunca densos, es decir conjuntos A tal que $int(\bar{A}) = \emptyset$.

El siguiente teorema permite caracterizar a los conjuntos Lebesgue medibles y será de utilidad posteriormente.

0.16 Teorema. *Si A es medible, entonces existe un conjunto F_δ, F y un conjunto G_δ, G tal que $F \subset A \subset G$ y $G \setminus F$ es nulo.*

0.17 Definición. Un conjunto A tiene la *propiedad de Baire*(**BP**) si existe un conjunto abierto G tal que $A \Delta G$ es magro.

Un subconjunto $A \subset X$ de un espacio polaco se llama *perfecto* si es cerrado y no tiene puntos aislados.

0.18 Definición. Un subconjunto de un espacio polaco tiene la *propiedad del conjunto perfecto* (**PSP**) si este es contable o contiene un subconjunto perfecto.

Se puede ver fácilmente que los conjuntos analíticos cumplen la propiedad del conjunto perfecto [J]. Además utilizando el axioma de elección Bernstein [Be] mostró la existencia de un conjunto *totalmente imperfecto* de reales, es decir un conjunto que no es ni disjunto ni incluye un conjunto perfecto de reales.

0.3. Árboles

El concepto de árbol es una herramienta básica y muy importante en teoría descriptiva de conjuntos, pues muchos de los problemas de esta rama pueden ser planteados en términos de árboles, buen ejemplo de esto es el *problema de Suslin*, para nosotros resulta vital esta definición ya que las nociones de forcing que aquí mencionamos pueden ser vistas como órdenes parciales donde las condiciones son precisamente árboles.

Sea A un conjunto no vacío, $n \in \omega$, denotamos con A^n al conjunto de todas las sucesiones $s = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ de longitud n de elementos de A, así

$$A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$$

es el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A.

0.19 Definición. Un árbol sobre un conjunto A es un subconjunto $T \subseteq A^{<\omega}$ cerrado bajo segmentos iniciales; es decir si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. Los elementos de T son llamados *nodos*. Una *rama infinita* de T es una sucesión $x \in A^{\omega}$ tal que $x \upharpoonright n \in T$ para todo n. Denotamos por $[T]$, al conjunto de todas las ramas infinitas de T, explicitamente

$$[T] = \{x \in A^{\omega} : \forall n(x \upharpoonright n \in T)\}.$$

Sea T un árbol sobre A,

I) Para nodos $s, t \in T$, s y t son incompatibles si no existen nodos $u \in T$ tales que s, t sean subsucesiones de u. En caso contrario decimos que son compatibles.

II) T es perfecto si para cualquier nodo t de T, existen nodos $u, v \in T$ incompatibles, tal que t es una subsucesión de u y de v; es decir, todo nodo de T se bifurca en algún nivel.

Algunas observaciones que podemos hacer sobre lo anterior, son las relaciones que se establecen entre conjuntos de un espacio polaco X y árboles sobre X:
Si X es un espacio topológico discreto entonces

I) Para cualquier subconjunto A de X^{ω}, A es cerrado ssi existe un árbol T sobre X tal que $A = [T]$.

II) Para cualquier subconjunto A de X^{ω}, A es perfecto ssi existe un árbol T perfecto sobre X tal que $A = [T]$. Por lo tanto hay una correspondencia canónica entre subconjuntos perfectos de X^{ω} y arboles perfectos sobre X

0.4. Grandes Cardinales

Recordaremos aquí las definiciones de algunos cardinales que utilizaremos a lo largo del trabajo, la mayoría de estos son denominados *grandes cardinales*, es decir cardinales cuya existencia no puede ser probada en ZFC.

0.20 Definición. I) Un cardinal β es *regular* si para cualquier ordinal $\alpha < \beta$ y cualquier función $f : \alpha \to \beta$, $sup(f``\alpha) < \beta$

II) β es *inaccesible* ssi $\beta > \omega$, es regular y

$$\forall \kappa < \beta, 2^\kappa < \beta.$$

III) β es un cardinal *medible* si existe un ultrafiltro no principal U que es β-completo sobre β.

Donde un filtro U es β-completo si

$$\forall A \subseteq U(|A| < \beta \to \bigcap A \in U).$$

IV) Un cardinal regular β no contable se dice *compacto* (fuertemente compacto) si para cualquier conjunto S, todo filtro β-completo sobre S puede ser extendido a un ultrafiltro β-completo sobre S.

V) Un cardinal β, es un un cardinal de Woodin si para toda función $f : \beta \to \beta$ existe un $\kappa < \beta$ tal que

$$\{f(\lambda)|\lambda < \kappa\} \subseteq \kappa$$

y una inmersión elemental $j : V \to M$ donde M es un modelo transitivo interno, con punto crítico κ (i.e. $j(\alpha) = \alpha \ \ \forall \alpha < \kappa, \ j(\kappa) > \kappa$) y

$$V_{j(f(\kappa))} \subseteq M$$

Algunas observaciones sencillas que podemos hacer sobre las definiciones anteriores, las resume el siguiente diagrama:

$$Compacto \Rightarrow Medible \Rightarrow Inaccesible.$$

Además, aunque debajo de cada cardinal de Woodin β existan "muchos" cardinales medibles, β no necesariamente es medible.

0.5. Teoremas de absoluticidad

Mencionamos aquí un par de hechos que conectan la validez de ciertas sentencias en las extensiones genéricas y en el modelo base.

0.21 Teorema. *(Absoluticidad Analítica) Supongamos M un modelo transitivo de ZFC, $\vec{x} \in M \cap \omega^\omega$ una sucesión de parámetros, y ϕ una fórmula Σ^1_1 con variables libres. Entonces $\phi(\vec{x})$ se tiene ssi $M \models \phi(\vec{x})$ se tiene.*

0.22 Teorema. *(Absoluticidad de Shoenfield) Toda relación $\Sigma^1_2(a)$ y toda relación $\Pi^1_2(a)$ es absoluta para todos los modelos transitivos M, tales que $M \models ZFC+DC$, contienen a todos los ordinales y además $a \in M$. En particular las relaciones Σ^1_2 y Π^1_2 son relaciones absolutas para L.*

Capítulo 1

MODELO DE SOLOVAY

En este capítulo vamos a presentar el modelo creado por Solovay [So] y su caracterización más importante que será la que utilizaremos para mostrar nuestros resultados de preservación. Aunque demostraremos varios resultados, remitimos al lector a la bibliografía principal [K] y [J].

Primero veamos las definiciones y propiedades básicas de la noción de forcing que usaremos para construir el modelo de Solovay.

1.1. Colapso de Lévy

Cuatro meses después de que Cohen mostró sus primeros resultados utilizando el método de forcing, un anuncio muy importante aún hoy para la teoría de conjuntos fue hecho por Azriel Lévy, motivado principalmente por cuestiones de definibilidad, Lévy formuló un orden parcial que colapsa un cardinal inaccesible al primer cardinal no contable $\aleph_1$; esta noción de forcing conocida como el *Colapso de Lévy*, es hoy una de las herramientas más importantes para relacionar grandes cardinales con propiedades combinatorias de ω_1 y ω_2, de ahí su relevancia para la *hipótesis del continuo* (**HC**).

Antes de dar la definición, veamos algunas propiedades de extensiones genéricas; las pruebas pueden ser halladas en [K].

1.1 Teorema. *(Solovay). Supongamos que P y Q son órdenes parciales arbitrarios en V, entonces G es $P \times Q$-genérico sobre V ssi $G = G_0 \times G_1$, donde G_0 es P-genérico sobre V, G_1 es Q-genérico sobre $V[G_0]$, y así $V[G] = V[G_0][G_1]$.*

1.2 Teorema. *Suponga que κ es un cardinal inaccesible, y P es un orden parcial tal que $|P| < \kappa$, entonces*

$$\Vdash_P \text{“}\kappa \textit{ es inaccesible”}$$

1.3 Definición. Para $S \subseteq Ord$ y λ un cardinal regular, definimos el colapso de Lévy $Col(\lambda, S)$ como el conjunto:
$\{p|p$ es una función $\wedge\, |p| < \lambda \wedge dom(p) \subseteq S \times \lambda$
$\wedge\, \forall(\alpha, \psi) \in dom(p)(\alpha > 0 \rightarrow p(\alpha, \psi) \in \alpha)\}$
ordenado por $p \leq q$ ssi $p \supseteq q$. Así $Col(\lambda, S)$ es un orden parcial que agrega genéricamente sobreyecciones de $\lambda \rightarrow \alpha$ para todo $\alpha \in S$, $Col(\omega, \{\omega\})$ es esencialmente el orden parcial de Cohen para agregar un subconjunto de ω, un real. $Col(\lambda, \{\kappa\})$ para $\kappa > \lambda$ es el orden parcial estándar para colapsar $|\kappa|$ a λ.

En lo que sigue utilizaremos las expresiones $Col(\lambda, \kappa)$ y $Col(\lambda, < \kappa)$ indistintamente. El siguiente lema resume las propiedades más importantes del Colapso de Lévy.

1.4 Lema. *(a) $Col(\lambda, S)$ es λ-cerrado.*

(b) Suponga que $S = X \cup Y$ es una unión disyunta, sea $P_0 = Col(\lambda, X)$, $P_1 = Col(\lambda, Y)$. Entonces G es $Col(\lambda, S)$-genérico sobre V ssi $G = G_0 \cup G_1$, donde G_0 es P_0-genérico sobre V, $P_1^{V[G_0]} = P_1$, y G_1 es P_1-genérico sobre $V[G_0]$.

(c) Si κ es regular, $\kappa > \lambda$ y κ es inaccesible o $\lambda = \omega$, entonces $Col(\lambda, \kappa)$ tiene la κ-c.c.

(d) Suponga que κ es regular, $Col(\lambda, \kappa)$ tiene la κ-c.c. y G es $Col(\lambda, \kappa)$-genérico sobre V. Entonces para cualquier $x \in V[G]$ con $x : \gamma \rightarrow Ord$ donde $\gamma < \kappa$, existe un $\delta < \kappa$ tal que $x \in V[G \cap Col(\lambda, \delta)]$

Demostración. (a) Como λ es regular, si $\gamma < \lambda$ y $\langle p_i |\ i < \gamma\rangle$ es una sucesión decreciente de condiciones, entonces $p = \cup_\gamma p_i$ es una condición que extiende a todos los p_i.

(b) Dado que la función $g : Col(\lambda, S) \rightarrow P_0 \times P_1$ definida por $g(p) = \langle p \restriction (X \times \lambda), p \restriction (Y \times \lambda)\rangle$ es un isomorfismo, el lema se sigue del teorema de Solovay 1.1 ; que $P_1^{V[G]} = P_1$ se sigue del hecho de que P_0 sea λ-cerrado, y por lo tanto no agrega nuevas sucesiones de ordinales de tamaño menor que λ.

(c) Por el lema del Δ-sistema, dado $\{p_\xi |\ \xi < \kappa\} \subseteq Col(\lambda, \kappa)$ existe $X \in [\kappa]^\kappa$ y un $r \subseteq \kappa \times \lambda$, tal que si $\beta \neq \gamma$ ambos en X, entonces $dom(p_\beta) \cap dom(p_\gamma) = r$. Como las condiciones son funciones y $|r| < \kappa$, existe además un $Y \in [X]^\kappa$ tal que si $\beta \neq \gamma$ están en Y tenemos que $p_\beta \restriction r = p_\gamma \restriction r$, pero así p_β y p_γ son compatibles.

(d) Sea $\dot{x}$ tal que $int_G(\dot{x}) = x$, y para cada $\alpha < \gamma$ sea $A_\alpha \subseteq Col(\lambda, \kappa)$ una anticadena maximal tal que para cada $p \in A_\alpha$ hay un ξ con $p \Vdash \dot{x}(\alpha) = \xi$. Por hipótesis $|A| < \kappa$, así $|\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha| < \kappa$, y por la regularidad de κ debe existir un $\delta < \kappa$ tal que si $p \in \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ entonces $dom(p) \subseteq \delta \times \lambda$. Así x es definible de $G \cap Col(\lambda, \delta)$ por $x(\alpha) = \xi$ ssi $p \Vdash \dot{x}(\alpha) = \xi$ para el único $p \in G \cap A_\alpha$.

$\square$

Daremos ahora algunas propiedades importantes del **álgebra de Lévy**, es decir el álgebra booleana completa que se obtiene al tomar los abiertos regulares de $Col(\omega, < \kappa)$. La más útil para nosotros es el "*Lema del factor*", probado por Solovay [So], que nos dice básicamente que cualquier sucesión contable de ordinales puede ser "absorbida.$^{\text{en}}$ el modelo base.

1.5 Lema. *(Solovay). Supongamos $\kappa > \omega$ regular, y G un filtro $Col(\omega, < \kappa)$-genérico. Entonces para cualquier $x \in V[G]$ con $x : \omega \to On$, existe un H que es $Col(\omega, < \kappa)$-genérico sobre $V[x]$, tal que*

$$V[G] = V[x][H].$$

Otras propiedades están dadas por los siguientes lemas, ver [J].

1.6 Lema. *(Kripke) Toda álgebra booleana completa B puede ser inmersa en un álgebra booleana completa $\aleph_0$-generada; de hecho, si $|B| = \lambda$ entonces B puede ser inmersa en $Col(\omega, \lambda)$.*

1.7 Lema. *El álgebra de Lévy B es homogénea, en el siguiente sentido: Si A, A' son subalgebras completas de B isomorfas, tal que $|A| < |B|$, y si π_0 es un isomorfismo entre A y A', entonces existe un automorfismo π de B que extiende a π_0.*

1.2. Descripción del modelo

Para resolver principalmente el problema de la medida de Lebesgue, y siguiendo una sugerencia dada por Cohen en 1963, Solovay construyó [So] un modelo en el que es válido el siguiente

1.8 Teorema. *Suponga que existe un $\in$-modelo transitivo de ZFC + " existe un cardinal inaccesible κ ". Entonces existe un $\in$-modelo transitivo de ZF en el que las siguientes afirmaciones son validas:*

i) *El principio de elección dependiente (**DC**).*

ii) *Todo conjunto de reales es Lebesgue medible.*

iii) *Todo conjunto tiene la propiedad de Baire.*

IV) *Todo conjunto tiene la **PSP**.*

El principio **DC** formulado por Bernays es una forma débil del axioma de elección, pero es suficiente para desarrollar la mayor parte de la teoría de análisis real, **DC** es la siguiente afirmación:

$$\forall X \forall R[X \neq \emptyset \ \wedge \ R \subseteq X \times X \ \wedge \ \forall x \in X \exists y \in X \ (x,y) \in R \rightarrow \exists f \in X^{\omega} \ \forall n \in \omega (f(n), f(n+1)) \in R].$$

Notese que este principio implica el *Axioma de elección contable* ($\boldsymbol{AC_\omega}$):

Toda colección contable de conjuntos no vacios tiene una función de elección.

Dado que tanto Bernstein como Vitali usaron explícitamente el axioma de elección para construir contraejemplos a las propiedades IV y II respectivamente, un modelo natural donde estas patologías podrían no ocurrir es $L(\mathbb{R})$, la clausura construíble de los reales. Solovay construyó su modelo usando el colapso de Lévy de un cardinal inaccesible κ al primer cardinal no contable $\aleph_1$, y luego evaluando $L(\mathbb{R})$ en la extensión genérica $V^{Col(\omega,<\kappa)}$.

El modelo del teorema anterior es lo que conocemos como modelo de Solovay, formalmente tenemos la siguiente

1.9 Definición. Sea V un modelo transitivo de $ZFC + \exists\kappa$ *inaccesible*, decimos que M es un ***modelo de Solovay*** sobre V si $M = L(\mathbb{R})$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales en una extensión genérica de V, obtenida utilizando el orden de Lévy para colapsar κ a ω_1.

El siguiente resultado es debido a Woodin, y es la caracterización más importante y útil de los modelos de Solovay.

1.10 Lema. *Sea $V \subseteq W$ modelos de ZFC. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de reales en W, el modelo $L(\mathbb{R})$ es un modelo de Solovay sobre V si y solamente si las siguientes condiciones se tienen en W:*

I) *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\kappa = \omega_1$ de $L(\mathbb{R})$ es un cardinal inaccesible en $V[x]$.*

II) *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $V[x]$ es una extensión genérica de V por algún orden parcial de tamaño $< \omega_1$.*

Demostración. Si $L(\mathbb{R})$ es un modelo de Solovay entonces las dos condiciones se tienen ya que por el lema 1.4 (c) el álgebra de Lévy $\mathcal{B}$ es κ-saturada, así existe una subálgebra $D \subseteq \mathcal{B}$ tal que $|D| < \kappa$ y $V[x] = V[D \cap G]$ (donde G es un filtro $Col(\omega, < \kappa)$-genérico sobre V); ahora por el teorema 1.2, tenemos que κ es inaccesible en $V[x]$.

Para la otra dirección, forzaremos sobre W para obtener un filtro genérico $G \subseteq Col(\omega, < \kappa)$ tal que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{V[G]}$, de lo que se sigue el lema. Si las dos condiciones anteriores se tienen, definamos en W el siguiente orden parcial $\mathbb{P}$:

a) $g \in \mathbb{P}$ ssi existe $\alpha < \kappa$ tal que $g \subseteq Col(\omega, < \alpha)$ es un filtro genérico sobre V.

b) $g \leq h$ ssi $h \subseteq g$.

Por I), para todo $g \subseteq Col(\omega, < \alpha)$ con $g \in \mathbb{P}$ y para todo $\beta < \kappa$, $\alpha \leq \beta$ hay sólo contables anticadenas de $Col(\omega, < \beta)$ en $V[g]$. Por lo tanto existe algún $h \leq g$ que es $Col(\omega, < \beta)$-genérico sobre $V[g]$. Esto lo que dice es que para todo $\alpha < \kappa$,

$$D_\alpha = \{g \in \mathbb{P} : g \cap Col(\omega, < \alpha) \text{ es genérico sobre } V\}$$

es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$.

Dado que cualquier $g \in \mathbb{P}$ tiene clausura transitiva contable, para cualquier real x, podemos codificar g y x con un real y, por II) $V[y]$ es una extensión genérica de V por algún orden parcial de tamaño $< \kappa$. Por lo tanto podemos hallar un $\alpha < \kappa$ y un filtro genérico $h \subseteq Col(\omega, < \alpha)$ tal $y \in V[h]$ y $h \leq g$. Esto lo que muestra es que para todo real x,

$$E_x = \{g \in \mathbb{P} : x \in V[g]\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{P}$.

Supongamos que H es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre W, veamos que $C = \bigcup H$ es el filtro que estamos buscando.

Claramente $C \subseteq Col(\omega, < \kappa)$ es un filtro. Por la $\kappa - cc$ condición de $Col(\omega, < \kappa)$, si A es una anticadena maximal de V, existe $\alpha < \kappa$ tal que $A \subseteq Col(\omega, < \alpha)$. Y por la densidad del conjunto D_α tenemos que $C \cap A \neq \emptyset$, así $C \subseteq Col(\omega, < \kappa)$ es genérico sobre V.

Ahora si $x \in \mathbb{R} \cap V[C]$, entonces $x \in V[g] \subseteq W$ para algún $g \in H$, así $x \in W$. Y si $x \in \mathbb{R} \cap W$, entonces por la densidad del conjunto E_x, existe $g \in H$ tal que $x \in V[g]$, así $x \in V[C]$. Por lo tanto W y $V[C]$ tienen los mismos reales, en consecuencia tienen el mismo $L(\mathbb{R})$, de lo que se sigue el lema. $\square$

Capítulo 2

FORCING DEFINIBLE

Vamos ahora a estudiar las nociones de forcing para las que mostraremos los resultados de preservación en el siguiente capítulo. El método que utilizaremos para este estudio es debido a Jindřich Zapletal [Za], y es motivado básicamente por lo siguiente: Muchos órdenes parciales que agregan un real, son forcing-isomorfos a un orden de la forma P_I, de todos los conjuntos borelianos de reales que no estan en el ideal I, ordenado por inclusión, para un σ-ideal I adecuado. El orden P_I no es separativo, y su cociente separativo es precisamente la σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})/I$. Mostraremos aquí las definiciones y ejemplos más importantes de los conjuntos P_I, así como algunos lemas que serán necesarios posteriormente.

2.1. Forcing con ideales

2.1 Definición. Suponga que X es un espacio polaco, I un σ-ideal sobre X. P_I simboliza el orden parcial de los conjuntos borelianos I-positivos, ordenados por inclusión,
$P_I = \mathcal{B}(X) \setminus I$.

Vamos a suponer siempre que el espacio polaco X es no contable, también que el ideal I contiene a todos los conjuntos unitarios.

La siguiente propiedad es común a todos los órdenes expresables de la forma P_I.

2.2 Proposición. *El conjunto parcialmente ordenado P_I adiciona un elemento $\dot{x}_{gen}$ del espacio polaco X tal que para todo conjunto boreliano $B \subset X$ codificado en el modelo base, $B \in G$ ssi $x_{gen} \in B$.*

Demostración. Podemos describir el punto genérico como el único elemento que está en todos los abiertos básicos del filtro genérico. La prueba la realizaremos por inducción en la complejidad del conjunto boreliano B, veremos que $B \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \dot{B}$.

Para los abiertos se tiene por la descripción de $\dot{x}_{\text{gen}}$. Supongamos que $B = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, y $A_n \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \dot{A}_n$, entonces para cualquier conjunto boreliano I-positivo $D \subseteq B$, tenemos que existe $n \in \omega$ tal que $D \cap A_n \notin I$, pues de lo contrario por la σ-completitud tendríamos que $D \in I$, esto lo que muestra es que $\{A_n : A_n \notin I\}$ es predenso bajo B, así $B \Vdash \exists n \in \omega\ \dot{x}_{\text{gen}} \in \dot{A}_n$, y $B \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \bigcup_n \dot{A}_n$. Supongamos ahora que $B = \bigcap A_n$ y que cada $A_n \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \dot{A}_n$, entonces para cada $n \in \omega$ $B \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \dot{A}_n$ pues $B \subseteq C_n$, en otras palabras $B \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \bigcap_n \dot{A}_n = \dot{B}$. Dado que los borelianos en espacios polacos son obtenidos apartir de conjuntos abiertos por un aplicación repetida de uniones e intersecciones contables, la inducción está completa.

□

Al único real obtenido por la proposición anterior lo llamaremos el *real genérico*, y lo denotaremos por x_{gen}. Otra definición importante es la de *real* $M-$ *genérico*: Si M es una subestructura elemental de alguna estructura suficientemente grande ($H(\lambda)$ para algún λ suficientemente grande), y x es un real tal que el conjunto $\{B \in P_I \cap M : x \in B\}$ es un filtro P_I-genérico sobre M, entonces llamaremos al real x M-genérico.

Recordamos que una noción de forcing $\mathbb{P}$ es *propia* si para cualquier subconjunto no contable X, y para cualquier subconjunto estacionario $S \subseteq [X]^{\leq\omega}$, S sigue siendo estacionario de $[X]^{\leq\omega}$ en $V^{\mathbb{P}}$. Podemos caracterizar los forcing propios con la siguiente propiedad:

$\mathbb{P}$ es propio ssi para algún cardinal regular λ, suficientemente grande, para un club de subestructuras elementales N de $H(\lambda)$, y para todo $p \in \mathbb{P} \cap N$, existe un $q \leq p$ que es $(N, \mathbb{P})$-genérico, es decir, siempre que $A \subseteq \mathbb{P}$ sea una anticadena maximal de $\mathbb{P}$ y $A \in N$, entonces $A \cap N$ es predenso bajo q.

En nuestro caso tenemos una caracterización similar, dada por el siguiente

2.3 Lema. *Sea I un σ-ideal sobre un espacio polaco X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P_I es propio.*
2. *Para toda subestructura elemental contable M, de una estructura suficientemente grande, y para toda condición $B \in P_I \cap M$ el conjunto $C = \{x \in B : x$ es $M-$ genérico$\}$ no está en el ideal I.*

Demostración. La demostración es sólo una reescritura cuidadosa de las definiciones, ver [Za]. □

2.4 Lema. *Sea I un σ-ideal sobre un espacio polaco X, tal que la noción de forcing P_I es propio. Supongamos Y un espacio polaco, $B \in P_I$ tal que $B \Vdash \dot{y} \in Y$ es un* *punto. Entonces existe una condición $C \subseteq B$ en el forcing P_I y una función boreliana $f : C \to Y$ tal que $C \Vdash \dot{y} = \dot{f}(\dot{x}_{gen})$. En particular P_I fuerza que todo real en la extensión es la imagen del real genérico $\dot{x}_{gen}$ bajo una función boreliana codificada en el modelo base.*

Demostración. Sea $\mathcal{O} = \{O_n | \, n \in \omega\}$ una base para el espacio Y. Sea M una subestructura elemental contable de una estructura suficientemente grande, sea $C = \{x \in B | \, x \text{ es } M-\text{genérico}\}$. Por el lema anterior C es un boreliano I-positivo. Consideremos la función $f : C \to Y$ que asigna a cada x el valor de $\dot{y}$ evaluado de acuerdo al filtro generado por x.

Tenemos que f es una función boreliana, pues dado O_n abierto básico de Y

$$f(x) \in O_n \ ssi \ x \in \bigcup \{D | D \in P_I \cap M, \ D \Vdash \dot{y} \in \dot{O}_n\}.$$

Ahora $C \Vdash \dot{y} = \dot{f}(\dot{x}_{\text{gen}})$, pues $C \Vdash \dot{x}_{\text{gen}} \in \dot{C}$ es un punto M-genérico, así el par $(\dot{x}_{\text{gen}}, \dot{y})$ debe cumplir la definición de la función f. □

Concluimos esta sección con un par de teoremas, probados por Zapletal, que nos darán un primer sorbo del lema clave para probar nuestro resultado de preservación.

2.5 Teorema. *Suponga que I es σ-ideal sobre un espacio polaco X tal que el forcing P_I es propio. Sea Y un espacio polaco, $B \in P_I$ y $A \subseteq B \times Y$ un conjunto analítico, con secciones verticales no vacias. Entonces existe una condición $C \subseteq B$ en P_I y una función boreliana $f : C \to Y$ cuyo gráfico está contenido en A.*

Demostración. La prueba es esencialmente la misma que la del lema anterior, pues por el teorema de absoluticidad de Shoenfield tenemos que $B \Vdash \exists y \in Y (\dot{x}_{\text{gen}}, y) \in \dot{A}$, sea $\dot{y}$ un P_I-nombre para el real que atestigua la afirmación, por el argumento de la prueba anterior, obtenemos un $C \in P_I$ y una función boreliana $f : C \to Y$, y tal que para todo $x \in C \ M[x] \models (x, f(x)) \in A$, ahora por absoluticidad analítica para el modelo $M[x]$, tenemos que $(x, f(x)) \in A$. □

Por último el siguiente teorema nos dice que para las nociones de forcing *acotadas* (es decir, órdenes $\mathbb{P}$ que cumplen que para toda función $f \in \omega^\omega$ en la extensión genérica por $\mathbb{P}$, existe una función $g \in \omega^\omega$ en el modelo base que domina puntualmente a f), la función boreliana que nos da el teorema, puede ser elegida continua.

2.6 Teorema. *Suponga que I es un σ-ideal sobre un espacio polaco X tal que el forcing P_I es propio, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P_I es ω^ω-acotado.*

2. *En P_I los conjuntos compactos son densos, y toda función boreliana sobre un dominio I-positivo tiene una restricción continua a un dominio I-positivo.*

2.2. Forcing de Sacks

El forcing de Sacks $\mathbb{S}$ es un orden creado por Gerald Sacks [S] para producir una extensión genérica $V[G]$ minimal en el siguiente sentido: Si W es un modelo de ZFC tal que $V \subseteq W \subseteq V[G]$, entonces $V = W$ ó $W = V[G]$. Vamos a presentar algunas propiedades de este orden parcial y probar que este orden lo podemos ver de la forma P_I para un σ-ideal I sobre $\mathbb{R}$ adecuado.

2.7 Definición. El forcing de Sacks $\mathbb{S}$ es el conjunto de todos los árboles perfectos de $2^{<\omega}$ ordenados por inclusión.

Bajo esta definición, un *real de Sacks* es el único elemento $x_G \in \cap_{p\in G}[p]$, donde G es $\mathbb{S}$-genérico. Si x es un real de Sacks, y esto es atestiguado por G, entonces:

$$G = \{p \in V | p \text{ es árbol perfecto } \wedge \ x \in [p]\}$$

Podemos ver fácilmente que el orden $\mathbb{S}$ no satisface la condición de cadena contable (*c.c.c*), de hecho la siguiente construcción nos da una anticadena de tamaño $2^{\aleph_0}$. Tomemos una familia casi disjunta $\{A_\alpha | \ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ de subconjuntos de ω, para cada α elijamos un árbol perfecto T_α cuyos niveles de bifurcación son exactamente los elementos de A_α, así si $\alpha \neq \beta$, $T_\alpha \cap T_\beta$ no contiene ningún árbol perfecto, es decir son incompatibles. Veremos más adelante, utilizando el lema 2.3, que el forcing $\mathbb{S}$ es propio.

Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es *Marczewski medible*(s-medible) si para todo conjunto perfecto $T \subseteq \mathbb{R}$ existe un conjunto perfecto $S \subseteq T$ tal que: $S \cap A = \emptyset$ ó $S \subseteq A$. Si se tiene el primero de los dos casos A se dice un conjunto *Marczewski nulo* ó s^0. Los complementos de los conjuntos s^0 son llamados s^1. Es claro que los conjuntos s^0 forman un σ-ideal, el ideal de Marczewski.

Ahora bien, por un teorema de Alexandroff y Hausdorff [J], todo conjunto boreliano (de hecho analítico) no contable contiene un subconjunto perfecto. Por lo tanto todo conjunto boreliano es s-medible, y los borelianos en s^0 son precisamente los conjuntos contables, además todo conjunto s-medible $A \subseteq 2^\omega$, que no está en s^0 contiene un subconjunto perfecto, y dado que los conjuntos perfectos son borelianos, tenemos una inmersión densa de $B(\mathbb{R}) \setminus I_{cont}$ en el orden parcial de los conjuntos s-medibles que no están en s^0, donde I_{cont} es el σ-ideal de los subconjuntos contables de 2^ω. Es decir estas dos nociones generan las mismas extensiones genéricas.

Notemos ahora que dado que los conjuntos perfectos de reales tienen cardinalidad $2^{\aleph_0}$, tenemos que cada $A \subseteq \mathbb{R}$ perfecto, contiene un subconjunto homeomorfo a 2^ω, estas copias de 2^ω resultan densas en $P_{I_{cont}}$. Así el forcing con subconjuntos perfectos de 2^ω resulta equivalente a $P_{I_{cont}}$, y dada la correspondencia que tenemos entre subconjuntos perfectos y árboles perfectos, podemos concluir que $P_{I_{cont}}$ es equivalente a la noción de forcing $\mathbb{S}$.

Lo anterior nos permite dar la siguiente definición.

2.8 Definición. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice Sacks medible si pertenece a:

$$\{A|\forall T \in \mathbb{S}(\exists S \leq T([S] \subseteq A \text{ ó } [S] \cap A = \emptyset))\}.$$

Y que es Sacks nulo si está en

$$\{A|\forall T \in \mathbb{S}(\exists S \leq T([S] \cap A = \emptyset))\}.$$

Una propiedad importante que satisfacen casi todos los forcing que se puedan definir con árboles, es la propiedad de fusión, en el caso del forcing $\mathbb{S}$, definimos el orden

$$p \leq_n q \Leftrightarrow p \leq q \ \wedge \ p^n = q^n.$$

Donde p^n es el conjunto de aquellos $t \in p$ que son minimales en p (respecto a $\subseteq$) tales que t tiene exactamente n nodos de bifurcación bajo él. Entonces dada una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ tal que $p_{n+1} \leq_n p_n$ tenemos que $q = \bigcap_n p_n$ es un árbol perfecto, es decir un elemento de $\mathbb{S}$, y es un elemento tal que $q \leq_n p_n$ $\forall n \in \omega$, a q lo llamaremos la *fusión* de la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$.

Utilizando la propiedad de fusión podemos ver que el forcing de Sacks satisface el *axioma A* de Baumgartner, que es una condición más fuerte que la de ser propio, nosotros veremos aquí directamente utilizando el lema 2.3 que el forcing de Sacks es propio.

2.9 Lema. *El orden parcial* $\mathbb{S}$ *es propio.*

Demostración. Tomemos el σ-ideal I_{cont} de los subconjuntos contables del espacio de Cantor 2^ω; por el lema 2.3, debemos verificar que para toda subestructura elemental contable M de $H(\lambda)$ (con λ suficientemente grande), y todo boreliano no contable $B \in M$, el conjunto $C = \{r \in B|\ r \text{ es } M\text{-genérico}\}$ no es contable. Supongamos lo contrario, y sea entonces $\{y_n|n \in \omega\}$ una enumeración del conjunto C. Enumeremos los subconjuntos abiertos densos de $P_{I_{cont}}$ que están en M por $\{D_n|n \in \omega\}$. Sea $B = B_0$, vamos a construir una cadena descendente de condiciones de $P_{I_{cont}}$ de la siguiente forma: Dado $n \in \omega$, como B_n es no contable, debe existir un abierto O tal que $y_n \notin O$ y $O \cap B_n$ es no contable, por la elementaridad de M, podemos hallar una condición $B_{n+1} \subseteq O \cap B_n$ tal que $B_{n+1} \in D_n$. Ahora sea G el filtro M-genérico generado por los conjuntos B_n, por la proposición 2.2 aplicada al modelo M, la extensión genérica está dada por un real, luego $M[G] \models \cap G = \{x\}$ y $x \in B$, pero la absoluticidad analítica aplicada al modelo $M[G]$ implica que x es en realidad un elemento de B, además es distinto de todos los y_n, por lo tanto C no es contable, que es lo que queríamos probar. $\square$

Capítulo 3

PRESERVACIÓN

Tenemos ahora las herramientes suficientes para probar los resultados de preservación que queremos. El primer paso será probar un teorema de uniformización similar al introducido en el capítulo anterior, específico para el forcing de Sacks, luego daremos un esquema general de prueba del teorema de preservación para todos los forcing propios definibles, la diferencia radicará en las condiciones que nos permiten tener un teorema de uniformización adecuado, finalmente daremos una aplicación de una versión de este teorema a la existencia de absoluticidad genérica para cierta clase de fórmulas proyectivas.

3.1. Preservación bajo forcing propio

El lema fundamental en este trabajo lo llamaremos el lema de **uniformización**. El problema de *uniformizar relaciones*, es decir, dado un subconjunto A del plano real, hallar un subconjunto A^* que sea el gráfico de una función con dominio la proyección de A sobre la recta real, y tal que para cada x en la proyección de A seleccione un testigo y tal que $(x, y) \in A^*$, fue planteado por Lusin en 1930. Este problema es obvio si tenemos el axioma de elección, pero es bastante no trivial si pedimos que el conjunto A^* sea definible. Lusin mostró que los conjuntos analíticos admiten uniformizaciones proyectivas [Lu], ocho años más tarde Kondô probó el siguiente

3.1 Teorema. *Toda relación $\Pi^1_1(a)$ $A \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$, puede ser uniformizada por una función A^*, que es $\Pi^1_1(a)$.*

Demostración. Ver [J] □

Un poco más de treinta años pasaron hasta que Moschovakis pudo derivar la propiedad de *uniformización proyectiva* (uniformización de conjuntos proyectivos por funciones proyectivas), utilizando el axioma de *determinación proyectiva* (**PD**) que afirma que todo conjunto proyectivo $A \subseteq \omega^\omega$ es determinado. Exactamente tenemos el siguiente

3.2 Teorema. *(Moschovakis 1971) Si (**PD**) se tiene, entonces* $\forall n \geq 1$*, toda relación* Σ^1_{2n} *puede ser uniformizada por una función* Σ^1_{2n}.

Un desarrollo notable en la relación entre grandes cardinales y axiomas de determinación se dió en la década del 80 gracias a los trabajos de Woodin, Foreman, Shelah, Martin, Steel entre otros; como lo muestra el siguiente

3.3 Teorema. *(Martin, Steel 1985) Si existe una cantidad infinita de Cardinales de Woodin, entonces **PD** se tiene.*

Así, si suponemos la existencia de ω cardinales de Woodin, toda relación proyectiva se puede uniformizar.

Para simplificar la notación, hagamos la siguiente

3.4 Definición. Sea

1. I_1 el ideal de los conjuntos de medida de Lebesgue cero.
2. I_2 El ideal de los conjuntos de primera categoría.
3. I_3 El ideal de los conjuntos contables.

Específicamente nosotros estamos interesados en uniformización de relaciones que están en el modelo de Solovay, así tenemos el siguiente

3.5 Lema. *(**Uniformización 1**) Sea* $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *una relación en* $L(\mathbb{R})$*, tal que* $\forall x \exists y R(x, y)$*, entonces existe una función boreliana* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *en* $L(\mathbb{R})$ *tal que* $R(x, h(x))$ *se tiene para casi todo* x*, i.e para todos salvo un conjunto de medida de Lebesgue nula ó un conjunto magro.*

Demostración. Ver [So] III 1.12. □

Observe que el lema anterior nos da una "uniformización local" para el forcing Random y el forcing de Cohen, para probar un resultado análogo para el forcing de Sacks necesitamos el siguiente

3.6 Lema. *Sea* P_I *el orden de Sacks en* $L(\mathbb{R})$ *(un modelo de Solovay sobre* V*) y sea* $\mathbb{S}$ *el orden de Sacks en* V*, dado* $B \in P_I$ *existe* $C \subseteq B$ *en* P_I *tal que* $\forall x \in [C]$*,* x *es* $\mathbb{S}$*-genérico sobre* V.

Demostración. Sea $B \in P_I$, y sea D_n una enumeración en $L(\mathbb{R})$ de la colección de abiertos densos de $\mathbb{S}$, tomemos $C_0 \subseteq B$ con $C_0 \in D_0$, ahora elijamos $C_1 \subseteq C_0$, $C_1 \in D_1$ y además $C_1 \leq_1 C_0$; $C_2 \leq_2 C_1$, $C_2 \in D_2$, y así para cada n elegimos $C_n \in D_n$ de tal forma que preservamos hasta el n-ésimo nodo de bifurcación del paso $n-1$. De este modo obtenemos una sucesión de fusión $\{C_n\}_{n\in\omega}$, llamemos C a su fusión, así $C \in P_I$ y cada $x \in [C]$ genera un filtro $\mathbb{S}$-genérico, pues por construcción intersecta todos los densos de $\mathbb{S}$.

□

3.7 Lema. ***(Uniformización 2)****. Sea $L(\mathbb{R})$ un modelo de Solovay, $B \in P_{I_3}$ y $R \subseteq 2^\omega \times \mathbb{R}$ una relación en $L(\mathbb{R})$ tal que $\forall x \exists y\ R(x,y)$. Entonces existe C en P_I y una función en $L(\mathbb{R})$ $f : [C] \to \mathbb{R}$ tal que para todo real $x \in [C]$ $R(x, f(x))$.*

Demostración. Sea G un filtro $Col(\omega, <\kappa)$-genérico sobre V, $B \in P_{I_3}$ una condición del forcing de Sacks, sea p el parámetro real en la definición de la relación R; existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $p, B \in\ V[G_{\alpha_0}]$, donde $G_{\alpha_0} = G \cap Col(\omega, \alpha_0)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los parámetros están en el modelo base V, sea $\mathbb{S}$ el orden de Sacks en V. Ya que $|\mathbb{S}| = 2^{\aleph_0} < \kappa$, podemos ver este orden como una subálgebra completa de $Col(\omega, <\kappa)$, así existe s V-genérico para $\mathbb{S}$ en $V^{Col(\omega,<\kappa)}$, podemos suponer entonces que $B \in \mathbb{S}$, y sea $\mathcal{S}$ el nombre canónico para un real de Sacks.

Sea y tal que $V[G] \models R(s,y)$; elijamos $\alpha < \kappa$ suficientemente grande para que p, y, s, $\in V[G \cap Col(\omega,\alpha)]$.

Sea $\dot{\mathcal{D}}$ un $\mathbb{S}$-nombre para el álgebra cociente $Col(\omega,\alpha)/s$ (está en $V[s]$), y τ un $\mathbb{S}$-nombre para un $Col(\omega,\alpha)/s$-nombre para y.Como $R(s,y)$ se tiene en $V^{Col(\omega,\alpha)}$, existe $Q \in s$ tal que $Q \Vdash\ \check{R}(\mathcal{S},\tau)$, por la compatibilidad de s, podemos elejir $C \subseteq B$ que satisface el lema anterior. Definamos $f : [C] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = int_{G_x}(\tau)$, donde $G_x \subseteq int_x(\dot{\mathcal{D}})$ es un subconjunto genérico que está en $V[G \cap Col(\omega,\alpha)]$. Nótese que por la escogencia de C, x es $\mathbb{S}$-genérico sobre V, y G_x existe ya que los “buenos”nombres para subconjuntos de $\dot{\mathcal{D}}$ pueden ser enumerados en $V[G \cap Col(\omega,\alpha)]$, además puede ser construído de forma canónica. Ahora utilizando como parámetro el real que codifica la enumeración de tales nombres, tenemos una función en $L(\mathbb{R})$ que satisface las condiciones del lema, pues si $x \in [C]$, x es un genérico de Sacks, y $C \Vdash \check{R}(\mathcal{S},\tau)$, por el teorema de forcing $V[G \cap Col(\omega,\alpha), x] \models R(x, f(x))$, que era lo que queríamos. □

3.8 Lema. *Sea $L(\mathbb{R})$ un modelo de Solovay. Sea P_{I_i} una noción de forcing propio con $i = 1,2,3$, G un filtro P_{I_i}-genérico y $L(\mathbb{R})[G]$ la extensión correspondiente. Entonces para toda fórmula χ, con parámetros de $L(\mathbb{R})$ y cuantificación sólo sobre reales, si $L(\mathbb{R}) \models \chi$ entonces $L(\mathbb{R})[G] \models \chi$.*

Demostración. Definamos por inducción el conjunto Γ de todas las fórmulas que son equivalentes a fórmulas con parámetros en $L(\mathbb{R})$ y cuantificación sólo sobre reales. Sea:

1. $\Gamma_0 := CB\{\varphi |\, \varphi \, \text{es atómica}\}$.

   Donde CB denota la clausura booleana del conjunto.

2. Si Γ_i ya está definido, sea

$$\Gamma_{i+1} := CB\{\exists x \forall y \psi(x, y, \ldots), \forall x \exists y \psi(x, y, \ldots)|\ \psi \in \Gamma_i\}.$$

   Finalmente

   $\Gamma = \bigcup_{i \in \omega} \Gamma_i$.

Veamos ahora que toda fórmula en Γ satisface la propiedad establecida en el lema.

Si $\chi \in \Gamma_0$ el lema se cumple trivialmente. Supongamos que el lema es válido para fórmulas en Γ_i, sea G un filtro P_{I_i}-genérico, $\chi \in \Gamma_{i+1}$, veamos que si $L(\mathbb{R})[G] \not\models \chi$ entonces $L(\mathbb{R}) \not\models \chi$. Supongamos que $\chi := \forall x \exists y\ \psi(x,\, y)$, con $\psi \in \Gamma_i$.
Sea τ un nombre para un real x tal que $L(\mathbb{R})[G] \models \forall y \neg\ \psi(x,\, y)$, por el lema **2.4** existe un $B \in P_I$ y una función boreliana $f : B \to \mathbb{R}$ tal que $B \Vdash \dot{f}(\dot{x}_{\text{gen}}) = \tau$. Entonces $B \Vdash \forall y \neg\, \psi(f(\dot{x}_{\text{gen}}),\, y)$.

Supongamos que $\neg\chi$ es falso en $L(\mathbb{R})$, así $\forall x \exists y \psi(x, y)$ se tiene en $L(\mathbb{R})$, definamos allí la relación $R = \{(x, y) : x \in B \wedge\ \psi(f(x), y)\}$.

Continuemos la prueba por casos:

1. Por el lema de *uniformización* 1, existe una función boreliana $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $R(x, h(x))$ para casi todo x, es decir salvo para un conjunto de medida nula o un conjunto magro. Así si:

   a) $i = 1$ Sea A un conjunto de medida nula tal que $\neg R(x, h(x))$ se tiene para todo $x \in A$, por el teorema 0.16 existe un conjunto $H \supseteq A$ que es G_δ y tal que $\mu(H \setminus A) = 0$, ahora $C := B \setminus H$ es un boreliano que está en P_{I_1} y $\forall x \in C\ \psi(f(x), h(x))$.

   b) $i = 2$ Sea A un conjunto de primera categoría tal que $\neg R(x, h(x))$ se tiene para todo $x \in A$, ahora $A = \bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n \bar{A}_n$ donde cada A_n es nunca denso, así $\bar{A}_n$ también es nunca denso para todo n, y esta última unión es un conjunto boreliano, entonces $C := B \setminus \bigcup_n \bar{A}_n$ es un boreliano que está en P_{I_2} y $\forall x \in C\ \psi(f(x), h(x))$.

2. Por el lema de *uniformización* 2, existe un conjunto $C \subseteq B$ en P_{I_3} y una función $h : C \to \mathbb{R}$ tal que para todo real $x \in [C]$ $\psi(f(x), h(x))$

Como la relación R se definió en $L(\mathbb{R})$, para cualquier $x \in C$, $L(\mathbb{R}) \models \psi(f(x), h(x))$, y por la hipótesis inductiva tenemos que $L(\mathbb{R})[G] \models \psi(f(x), h(x))$, que es una contradicción, pues sea H un genérico tal que $C \in H$ (así $B \in H$), entonces $L(\mathbb{R})[H] \models \psi(f(x), h(x))$ y por el teorema de forcing $\exists D \in H$ tal que $D \Vdash \psi(f(\dot{x}_{\text{gen}}), h(\dot{x}_{\text{gen}}))$ y dado que B, D son compatibles, existe una extensión común que fuerza una fórmula y su negación.

Verifiquemos ahora que las fórmulas universales satisfacen el lema: supongamos que $L(\mathbb{R}) \models \phi$, donde $\phi := \forall x \psi(x, \ldots) \equiv \forall x \exists y \psi(y, \ldots) \wedge y = y$ (y no es variable libre en ψ), y $\psi \in \Gamma_i$. Así

$$L(\mathbb{R})[G] \models \forall x \exists y \psi(y, \ldots \wedge y = y,$$

y por lo tanto

$$L(\mathbb{R})[G] \models \forall x \psi(x, \ldots).$$

Sólo nos resta entonces ver que si

$$L(\mathbb{R}) \models \exists x \forall y \psi(x, y, \ldots) \Rightarrow L(\mathbb{R})[G] \models \exists x \forall y \psi(x, y, \ldots).$$

Pero si $L(\mathbb{R}) \models \exists x \forall y \psi(x, y, \ldots)$, entonces existe $a \in L(\mathbb{R})$ tal que $L(\mathbb{R}) \models \forall y \psi(a, y, \ldots)$, como los universales cumplen la propiedad, tenemos que $L(\mathbb{R})[G] \models \forall y \psi(a, y, \ldots)$ y así $L(\mathbb{R})[G] \models \exists x \forall y \psi(x, y, \ldots)$. □

3.9 Teorema. *Si $L(\mathbb{R})$ un modelo de Solovay sobre un modelo base V y P_{I_i} los órdenes parciales anteriores, entonces el $L(\mathbb{R})$ de cualquier extensión P_{I_i}-genérica es de nuevo un modelo Solovay sobre V.*

Demostración. Sea G un filtro P_{I_i}-genérico sobre $L(\mathbb{R})$. Por el lema 1.10, y dado que P_{I_i} no colapsa ω_1 por ser propio, es suficiente ver que todo real en $L(\mathbb{R})[G]$ es genérico sobre V por un orden parcial de tamaño $< \kappa = \omega_1^{L(\mathbb{R})}$.

Esto útimo puede ser expresado por una fórmula que dice que para todo par de reales a y x, existe un real y que codifica:

1. Un $\alpha < \omega_1$.
2. Un $Col(\omega, \alpha)$-nombre τ en $L[a]$.
3. Un conjunto $G_y \subseteq Col(\omega, \alpha)$ $L[a]$-genérico tal que $int_{G_y}(\tau) = x$.

Como está fórmula cuantifica sólo sobre reales y tiene sólo parámetros reales, el lema 3.8 nos garantiza que es absoluta entre $L(\mathbb{R})$ y $L(\mathbb{R})[G]$, como $L(\mathbb{R})$ es modelo de Solovay, este satisface la fórmula y por lo tanto la extensión P_{I_i}-genérica también la satisface, así la extensión es modelo de Solovay.

$\square$

Nótese que la prueba del lema 3.8 funciona para todo orden parcial propio P_I tal que las relaciones en $L(\mathbb{R})$ puedan ser uniformizadas por funciones en $L(\mathbb{R})$, con dominio alguna condición en P_I. En vista del teorema 3.3, tenemos

3.10 Teorema. *Sea I un σ-ideal sobre $\mathbb{R}$ tal que el orden P_I es propio. Si existen ω cardinales de Woodin y $L(\mathbb{R})$ es un modelo de Solovay sobre algún modelo base V, entonces $L(\mathbb{R})[G]$ es también un modelo de Solovay sobre V, para todo G filtro P_I-genérico sobre $L(\mathbb{R})$.*

3.2. Absoluticidad

Presentamos ahora la versión para el forcing de Sacks $\mathbb{S}$, de un teorema probado por H. Woodin [**?**] para el forcing de Cohen y el forcing Random, y luego generalizado para los órdenes Suslin *c.c.c* por E. Amir.

Definamos la versión de uniformización que utilizaremos en esta sección.

3.11 Definición. Sea $n \geq 1$, la $\prod_n^1(P_I)$-uniformización (para el forcing P_I), es la siguiente propiedad :
Para todo subconjunto A del plano, tal que A es un conjunto $\prod_n^1$, si $\{x : A_x = \emptyset\} \in I$, entonces existe una función boreliana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\{x : f(x) \in A_x\}^c \in I$. Donde $A_x := \{y : (x, y) \in A\}$, las secciones verticales de A.

Se tiene una definición análoga para $\Sigma_n^1(\mathbb{S})$- uniformización.

3.12 Teorema. $\prod_n^1(\mathbb{S})$*-uniformización implica* $\sum_{n+2}^1(\mathbb{S})$*-absoluticidad.*

Demostración. Probemos el teorema por inducción en n.
$n = 1$. Sea $\chi := \exists x \forall y \phi(x, y, z)$ una $\sum_3^1$ fórmula con parámetros en V, donde ϕ es $\sum_1^1$. Veamos primero que $V[x_{gen}] \models \chi \Rightarrow V \models \chi$, donde x_{gen} es un real genérico de Sacks. Sea $a \in \mathbb{R} \cap V$ tal que

$$V[x_{gen}] \models \exists x \forall y \phi(x, y, a)$$

y b que atestigua $V[x_{gen}] \models \forall y \phi(b, y, a)$, por el lema 2.4 existe una función boreliana g codificada en el modelo base y $p \in \mathbb{S}$ tal que $p \Vdash \dot{g}(\dot{x}_{\text{gen}}) = \dot{b}$, así si b es un real nuevo en $V[x_{gen}]$, b es Sacks genérico sobre V, así

$$V[x_{gen}] \models \forall y \psi(g(x_{gen}), y, a)$$

Supongamos ahora que $V \models \forall x \exists y \neg\psi(x, y, a)$, entonces $V \models \forall x \exists y \neg\psi(g(x), y, a)$. Definamos la relación $A = \{(x, y) : \neg\psi(g(x), y, a)\}$. Por la $\prod_1^1(\mathbb{S})$-uniformización existe una función boreliana f tal que $\{x : (g(x), f(x)) \in A\}^c \in I_3$, sea $B = \{x : (g(x), f(x)) \in A\}$, luego B es boreliano, ya que su complemento es un conjunto contable, así

$$V \models \forall x(x \in B \Rightarrow \neg\psi(g(x), f(x), a))$$

como $\neg\psi$ es $\prod_1^1$ y B es boreliano, la fórmula anterior es $\prod_1^1$ también, usando como parámetros adicionales los códigos para las funciones f y g; así por absoluticidad de Shonfield

$$V[x_{gen}] \models \forall x(x \in B \Rightarrow \neg\psi(g(x), f(x), a))$$

y como x_{gen} es $\mathbb{S}$-genérico, no pertenece a ningún $K \in I_3$, en particular $x_{gen} \notin B^c$, así $x_{gen} \in B$ y por lo tanto

$$V[x_{gen} \models \neg\psi(g(x_{gen}), f(x_{gen}), a)$$

que es una contradicción.

La otra dirección se sigue fácilmente del teorema de absoluticidad de Shoenfield para fórmulas $\prod_1^1(a)$. $\square$

Bibliografía

[Bb] J. Bagaria, R. Bosch, *Solovay models and forcing extensions*,The Journal of Symbolic Logic 69, Number 3, Sept.2004, 742-766.

[BB] J. Bagaria, R. Bosch,*Proper forcing extensions and Solovay models*, Arch. Math. Logic 43, 739- 750 2004.

[Be] Bernstein, F. Zur Theorie der Trigonometrischen Reiche, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Mathematisch-Physiche Klasse 60 (1908), 325-338.

[D] D. Ikegami,*Projective absoluteness under Sacks forcing*,Preprint.

[DT] C. Di Prisco, S. Todorcevic, *Perfect-Set Properties in* $L(\mathbb{R})[U]$,Advances in Mathemathics 139, 240-259 (1998).

[J] T. Jech *Set theory*, 3rd Edition.Springer Verlag 2003.

[JMS] . Judah, A. Miller, S. Shelah. Sacks forcing, Laver forcing, and Martin's axiom. Arch. Mathematical Logic (1992) 31; 145-161.

[JL] J. Brendle, B.Lowe , *Solovay-type characterizations for forcing-algebras*, The Journal of Symbolic Logic 64, Number 3, 1999, 1307-1323.

[K] Akihiro Kanamori. The higher infinite. Springer Monographs in Math- ematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. Large cardinals in set theory from their beginnigs.

[Lu] N. Lusin, Sur le probleème de M. Hadamard d´uniformisation des ensembles, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 190 (1930) 349-351.

[Mo] Y. Moschovakis. Descriptive set theory. Studies in logic and the foundations of mathematics, v.100, 1980.

[MS] D. Martin, J. Steel. Projective determinacy. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Vol 85, pp 6582-6586, September 1988.

[NZ] I. Neeman, J. Zapletal. Proper forcings and absoluteness in $L(\mathbb{R})$.Comment. Math.Univ.Carolinae 39,2(1998)281-301.

[S] Sacks,G.E. Forcing with perfect closed sets. Axiomatic Set Theory (D. Scott, ed). Proc. Sympos. Pure Math. 13,2(1971) 331-355.

[So] R. Solovay, *A model of set theory in wich every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. 92 (1970), 1-56.

[SW] S. Shelah, H. Woodin. Large cardinals imply that every reasonably definible set of reals is Lebesgue medible. Israel Journal of Mathematics.vol 70 (1990) no. 3 pp 381-394.

[T] S. Todorcevic, *Generic Absoluteness and the Continuum*, Mathematical Research Letters 9, 465-471 (2002).

[Wo] W. H. Woodin, *On the consistency strength of projective uniformization* , Proceeding of the Herbrand symposium. Logic colloquium '81. J Stern(editor).365-384.North Holland Publishing company, 1982.

[Za] J. Zapletal. Forcing Idealized. Preprint 2006.