Clases elementales abstractas inducidas por clases Cotilting

Alejandra Rincón Hidalgo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo 2010

Clases elementales abstractas inducidas por clases Cotilting

Alejandra Rincón Hidalgo

Director
Andrés Villaveces Niño.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo 2010

Título en español

Clases elementales abstractas inducidas por clases Cotilting

Title in English

Abstract elementary classes induced by Cotilting classes

Abstract: An abstract elementary class (AEC) can be seen as the abstraction of the essential features of the class of models of a first order theory. The structure of an AEC starts to be relevant when we find examples inside common mathematical structures. In this paper we analyze some AEC of modules.

Let R be an associative ring with unit, and N a R-module. We define ${}^{\perp}N$={ A: $Ext^i(A, N) = 0$ for all $1 \leq i < \omega$}, and $A \prec_N B$ if and only if $A \subseteq B$ (submodule) and B/A $\in {}^{\perp}N$. We characterize when $({}^{\perp}N, \prec_N)$ is an AEC through algebraic properties. We find a direct correspondence between algebraic properties of classes of modules, and model theoretic properties of the induced AEC $({}^{\perp}N, \prec_N)$. We analyze the specific case when ${}^{\perp}N$ is a cotilting class, because we will have that $({}^{\perp}N, \prec_N)$ is a finitary AEC that admits closure, then we will gain some good properties related with stability and categoricity.

We try to find algebraic properties in order to characterize others model theoretic properties as the $\aleph_0$-Galois Stability and when the closure induces a pregeometry. We analyze some example of AEC of abelian groups. We analyzed deeply [1], [5]

Índice general

Índice general **I**

Introducción **III**

1. Preliminares **1**

1.0.1. Módulos Proyectivos e Inyectivos 3

1.0.2. Módulos Tilting y Cotilting 5

2. $({}^{\perp}N, \prec_N)$ como una Clase Elemental Abstracta **7**

2.0.3. Teorema Principal de Clasificación 8

2.0.4. Un caso particular 14

3. Propiedades Generales de$({}^{\perp}N, \prec_N)$ **17**

3.0.5. Amalgamación 17

3.0.6. Clausura 18

3.0.7. Tipos de Galois 22

4. R es un dominio de Dedekind y N es de Cotorsión **24**

5. Estabilidad en Grupos Abelianos **28**

6. Clases elementales abstractas finitarias **32**

6.0.8. Clases elementales abstractas finitarias inducidas por clases Cotilting 33

Preguntas **37**

Bibliografía **38**

Introducción

Este trabajo es basado en el artículo de Trlifaj, Eklof y Baldwin [1] donde analizan la conexión entre las propiedades algebraicas y las propiedades modelo teóricas de las clases elementales abstractas. Encuentran como caracterizar cuando $({}^{\perp}N, \prec_N)$ es un clase elemental abstracta por medio de propiedades algebraicas de los módulos. Analizan más profundamente el caso de los dominios de Dedekind, y muestran las clases elementales abstractas se pueden caracterizar por medio de sus ideales maximales. En el caso particular de los Grupos Abelianos se estudia cuando $({}^{\perp}N, \prec_N)$ es estable . Cuando ${}^{\perp}N$ es un clase Cotilting, lograron ver $({}^{\perp}N, \prec_N)$ siempre es una clase elemental abstracta con amalgamación, JEP y admite clausura. Esta última propiedad nos permite relacionar los tipos de Galois directamente con su clausura. Luego estudiamos el artículo [7] de Trlifaj, donde muestra que si ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting entonces $({}^{\perp}N, \prec_N)$ tiene carácter finito, lo que nos permitió relacionar estos artículos con la tesis de doctorado de M. Kesälä [8], la cual esta dirigida al estudio de las clases elementales Finitarias.

En este trabajo se hacen las demostraciones con más detalle especificando más claramente cada argumento, y se modifican algunas pruebas del artículo. Por ejemplo:

- El lema 2.0.32, el caso del ordinal sucesor.
- El teorema 2.0.38, La existencia del número de Löwenheim Skolem.
- El teorema 3.0.50 , 2 implica 3.
- Se hacen explícitas las demostraciones del lema 4.0.61 y del lema 4.064.
- Se muestran ejemplos particulares en el caso de los grupos abelianos, y se prueba que la clausura forma una Pregeometría.

Las herramientas sobre módulos se encuentra en su mayoría en [4].

CAPÍTULO 1

Preliminares

Definición 1.0.1. *Sea R un dominio de integridad, es un dominio de Dedekind si cumple alguna de las siguientes condiciones*

1. *Todo ideal de R es un R-módulo proyectivo.*
2. *Todo ideal no nulo se puede factorizar como producto de ideales primos*

Todo dominio de ideales principales es un dominio de Dedekind. Además en los dominios de Dedekind todo ideal primo es maximal.

Teorema 1.0.2. *Para todo $n \geq 1$, existe un bifuntor $Ext^n(-,-)$ de la clase de los R-módulos en la clase de los grupos abelianos, contravariante en la primera y covariante en la segunda, tal que para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Existen las siguientes sucesiones exactas largas

$$0 \longrightarrow Hom(C,N) \longrightarrow Hom(B,N) \longrightarrow Hom(A,N) \longrightarrow Ext^1(C,N)$$

$$\longrightarrow Ext^1(B,N) \longrightarrow Ext^1(A,N) \longrightarrow Ext^2(C,N) \longrightarrow ....$$

$$0 \longrightarrow Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B) \longrightarrow Hom(M,C) \longrightarrow Ext^1(M,A) \longrightarrow$$

$$Ext^1(M,B) \longrightarrow Ext^1(M,C) \longrightarrow Ext^2(M,A) \longrightarrow ....$$

Este funtor mide la exactitud de la sucesiones exactas cortas y la longitud de las resoluciones inyectivas y proyectivas del módulo.

Propiedades

- La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

  es separable si y sólo si $Ext^1(C, A) = 0$.

- Sea $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de módulos, entonces $Ext^n(\bigoplus_{\alpha<\kappa} A_\alpha, N) = \prod_{\alpha<\kappa} Ext^n(A_\alpha, N)$

- $Ext^1(\mathcal{Z}/m\mathcal{Z}, B) = B/mB$

- Sea R es un dominio de Dedekind , y N es un R-módulo entonces para todo $n \geq 2$ y para todo R-módulo A $Ext^n(A, N) = 0$.

- Sea $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de módulos, entonces $Ext^n(N, \prod_{\alpha<\kappa} A_\alpha) = \prod_{\alpha<\kappa} Ext^n(N, A_\alpha)$

Teorema 1.0.3. *Sea N un R-módulo. Para todo $n \geq 1$, existe un funtor $Tor^n(-, N)$ de la clase de los R-módulos en la clase de los grupos abelianos, covariante tal que para cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Existe las siguientes sucesiones exactas largas

$$... \longrightarrow Tor^2(C, N) \longrightarrow Tor^1(A, N) \longrightarrow Tor^1(B, N) \longrightarrow Tor^1(C, N)$$

$$\longrightarrow A \otimes N \longrightarrow B \otimes N \longrightarrow C \otimes N \longrightarrow 0$$

Definición 1.0.4. *Sea κ un cardinal . Un módulo M se dice $\leq \kappa$ presentado, si existen μ, $\lambda \leq \kappa$ tal que*

$$R^\lambda \longrightarrow R^\mu \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es exacta.

Definición 1.0.5. *Un R-módulo a izquierda F es plano si el funtor $-\otimes F$ es exacto. Es decir si*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es un sucesión exacta,

$$0 \longrightarrow A \otimes F \longrightarrow B \otimes F \longrightarrow C \otimes F \longrightarrow 0$$

es exacta.

Equivalentemente si $Tor^1(A, F) = 0$ *, para todo módulo* A*. En un dominio de Dedekind un módulo es plano si y sólo si es libre de torsión.*

Definición 1.0.6. *A es submódulo puro de B, ($A \subseteq_* B$), si para cada módulo finitamente presentado F, el funtor $Hom_R(F, -)$ preserva la exactitud de la siguiente sucesión exacta.*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

También se cumple que para cualquier R-módulo a derecha M

$$0 \longrightarrow M \otimes A \longrightarrow M \otimes B \longrightarrow M \otimes B/A \longrightarrow 0$$

es un sucesión exacta.

Definición 1.0.7. *El caso particular cuando $R = \mathbb{Z}$, los números enteros, la noción de subgrupo puro coincide con la de submódulo puro. Se tiene que A es subgrupo puro de B, si para todo $n \in \mathbb{Z}$, y para todo $a \in A$, se cumple que si existe $b \in B$ tal que $nb = a$, luego existe $b \in A$ tal que $nb = a$.*

Definición 1.0.8. *Un módulo N es inyectivo puro si dados módulos A,B, tal que $A \subseteq_* B$, entonces $Hom(i, N) : Hom(B, N) \longrightarrow Hom(A, N)$ es sobreyectiva.*

Si N es inyectivo puro y es submódulo puro de M, entonces N es sumando directo de M.

Definición 1.0.9. *N es un módulo de Cotorsion si para todo módulo plano J $Ext^1(J, N) = 0$. En el caso de los dominios de Dedekind los módulos de Cotorsion son imágenes epimorficas de módulos inyectivos puros.*

1.0.1. Módulos Proyectivos e Inyectivos

Definición 1.0.10. *Decimos que un R-módulo P es proyectivo, si dados R-módulos A, B y funciones $g : A \longrightarrow B$, sobre y $f : P \longrightarrow B$, existe una función $h : P \longrightarrow B$ tal que $g \circ h = f$*

Sea P un módulo proyectivo.

Propiedades

- Todo módulo libre es proyectivo
- Todo módulo proyectivo es plano.

- Todo módulo proyectivo es sumando directo de un módulo libre.
- El conjunto de los módulos proyectivos $\mathcal{P}$, es cerrado bajo sumandos directos, y sumas directas.
- Todo módulo es imagen epimorfica de un módulo proyectivo.
- $Ext^1(P, A) = 0$ para todo módulo A.
- En los grupos abelianos, un módulo es proyectivo si y sólo si es libre.
- $Hom_R(P, -)$, es exacto.

Definición 1.0.11. *La dimensión proyectiva de M es el mínimo n tal que* $Ext^k(M, A) = 0$*, para todo módulo A y* $k \geq n+1$*. Si este n no existe decimos que la dimensión proyectiva es infinita. Es claro que si la dimensión proyectiva es 0, entonces el módulo es proyectivo.*

Lema 1.0.12. *Todo módulo plano es limite directo de módulos proyectivos.*

Definición 1.0.13. *Decimos que un R-módulo E es inyectivo, si dados R-módulos A, B y funciones* $g : A \longrightarrow B$*, inyectiva y* $f : A \longrightarrow E$*, existe una función* $h : B \longrightarrow E$ *tal que* $g \circ h = f$

Sea E un módulo inyectivo.

Propiedades

- Si R es un dominio, todo módulo inyectivo es divisible.
- El conjunto de los módulos inyectivos $\mathcal{I}$, es cerrado bajo sumandos directos, y productos directos.
- Todo módulo se puede encajar en un módulo inyectivo.
- $Ext^1(A, E) = 0$ para todo módulo A.
- En los grupos abelianos, un módulo es inyectivo si y sólo si es divisible.
- $Hom_R(-, E)$, es exacto.

Definición 1.0.14. *La dimensión inyectiva de M es el mínimo n tal que* $Ext^k(A, M) = 0$*, para todo módulo A y* $k \geq n + 1$*. Si este n no existe decimos que la dimensión inyectiva es infinita. Es claro que si la dimensión inyectiva es 0, entonces el módulo es inyectivo.*

1.0.2. Módulos Tilting y Cotilting

Definición 1.0.15.

- ***Generadores de N:*** *Gen(N) es el conjunto de imágenes epimorficas de sumas directas de copias de N. Es decir $A \in Gen(N)$ si existe un cardinal κ tal que*

$$N^{(\kappa)} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Donde $N^{(\kappa)}$, es la suma directa de κ copias de N.

$Gen(N)$, es cerrado bajo imágenes epimorficas, sumandos directos, y sumas directas.

$Gen(R) = R - Mod$. Pues todo módulo es imagen epimorfica de un módulo libre.

- ***Cogeneradores de N:*** *Cogen(N) es el conjunto de submódulos de productos directos de copias de N. Es decir $B \in Cogen(N)$ si existe un cardinal κ tal que*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow N^{\kappa}$$

es una sucesión exacta. Donde N^{κ} es el producto directo de κ copias de N

$Cogen(N)$ es cerrado bajo submódulo y productos directos.

- *Módulos Presentados por N: $Pres(N)$, $A \in Pres(N)$, si existe κ, λ cardinales, tal que*

$$N^{(\lambda)} \longrightarrow N^{(\kappa)} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

- *Módulos Copresentados por N: $Copres(N)$, $B \in Copres(N)$, si existe κ, λ cardinales, tal que*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow N^{\kappa} \longrightarrow N^{\lambda}$$

es una sucesión exacta.

- *Add(N) es el conjunto de sumandos directos de sumas directas de copias de N. $A \in Add(N)$ si existe un cardinal κ y*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N^{(\kappa)} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y separable.

- *Prod(N) es el conjunto de sumandos directos de productos directos de copias de $N.B \in Prod(N)$ si existe un cardinal κ y*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow N^{\kappa} \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y separable.

- *Se cumple que* $Add(N) \subseteq Pres(N) \subseteq Gen(N)$
- *Se cumple que* $Prod(N) \subseteq Copres(N) \subseteq Cogen(N)$

Definición 1.0.16. *Un módulo P es un generador proyectivo si Gen(P)=R-Mod y P es proyectivo.*

Definición 1.0.17. *Un módulo E es un cogenerador Inyectivo si Cogen(E)=R-Mod y E es inyectivo.*

Los módulo Tilting y Cotilting generalizan la noción de generador proyectivo, cogenerador Inyectivo.

Definición 1.0.18. *Un R-módulo N es Tilting si*

- *Tiene dimensión proyectiva 1. Es decir* $Ext^{n+1}(N, A) = 0$ *para todo A, y para todo* $n \geq 1$.
- $Ext^1(N, N^{(\kappa)}) = 0$, *para todo* κ, *(*$Gen(N) \subseteq N^{\perp}$*)*
- *Existen módulos* $N_0, N_1 \in Add(N)$ *tal que*

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Lema 1.0.19. *N es un módulo Tilting si y sólo si* $Gen(N) = N^{\perp}$. *Luego* $N^{\perp}$ *es cerrado bajo imágenes epimorficas y sumandos directos.*

Definición 1.0.20. $\mathcal{C}$ *es una clase tilting, si existe un módulo tilting N tal que* $\mathcal{C}$=$N^{\perp}$.

Definición 1.0.21. *Un R-módulo N es Cotilting si*

- *Tiene dimensión inyectiva 1. Es decir* $Ext^{n+1}(A, N) = 0$ *para todo A, y para todo* $n \geq 1$.
- $Ext^1(N^{\kappa}, N) = 0$, *para todo* κ, *(*$Cogen(N) \subseteq {}^{\perp}N$*)*
- *Existen módulos* $N_0, N_1 \in Prod(N)$, *y W un cogenerador inyectivo tal que*

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Lema 1.0.22. *N es un módulo cotilting si y sólo si* $Cogen(N) = {}^{\perp}N$. *Luego* ${}^{\perp}N$ *es cerrado bajo productos directos y submódulos.*

Definición 1.0.23. $\mathcal{C}$ *es una clase cotilting, si existe un módulo cotilting N tal que* $\mathcal{C}$=${}^{\perp}N$.

CAPÍTULO 2

$({}^{\perp}N, \prec_N)$ como una Clase Elemental Abstracta

Definición 2.0.24 (Clase elemental Abstracta(CLEA)). *Una clase de τ-estructuras $(\mathcal{K}, \prec_K)$, es una clase elemental abstracta si $\mathcal{K}$ y la relación binaria $\prec_N$ sobre $\mathcal{K}$ son cerrados bajo isomorfismos y satisfacen las siguientes condiciones*

1. *Si $\mathcal{M} \prec_K \mathcal{N}$ entonces $M \subseteq N$*
2. *$\prec_K$ es un orden parcial sobre $\mathcal{K}$*
3. *Si $\langle A_i : i < \delta \rangle$ es una $\prec_K$-cadena creciente continua entonces :*
   (a) *$\bigcup_{i<\delta} A_i \in \mathcal{K}$*
   (b) *Para cada $j < \delta$ se cumple que $A_j \prec_K \bigcup_{i<\delta} A_i$*
   (c) *Si cada $A_i \prec_K M$, $M \in \mathcal{K}$ entonces $\bigcup_{i<\delta} A_i \prec_K M$*
4. *Si $A, B, C \in \mathcal{K}$, $A \prec_K C$, $B \prec_K C$ and $A \subseteq B$ entonces $A \prec_K B$*
5. *Existe un número de Löwenheim-Skolem $LS(\mathcal{K})$ tal que si $A \subseteq B \in \mathcal{K}$, existe $A' \in \mathcal{K}$ con $A \subseteq A' \prec_K B$ y $|A'| \leq |A| + LS(\mathcal{K})$*

Definición 2.0.25 ($\prec_K$-cadena creciente continua). *$\langle A_i : i < \delta \rangle$ es una $\prec_K$-cadena creciente continua dado que $A_i \in \mathcal{K}$ y $A_i \prec_K A_{i+1}$ para todo $i < \delta$ y $A_i = \bigcup_{j<i} A_j$ para todos los ordinales límites $i < \delta$.*

Definición 2.0.26. *Una función $f : N \longrightarrow M$ es una inmersión fuerte si es inyectiva y $f(M) \prec_K \mathcal{N}$*

Definición 2.0.27. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo con unidad y N un $\mathcal{R}$-módulo a derecha, entonces definimos $({}^{\perp}N, \prec_N)$ como:*

- $^{\perp}N$ =*{A: $Ext^i(A,N) = 0$ para todo $1 \leq i < \omega$}*

- $A \prec_N B$ *si y sólo si* $A \subseteq B$ *y* $B/A \in {}^{\perp}N$

Algunas Propiedades de $(^{\perp}N, \prec_N)$

1. $^{\perp}N$ es cerrado bajo sumas arbitrarias, es decir si $M_i \in {}^{\perp}N$ entonces $\bigoplus_{i=0} M_i \in {}^{\perp}N$. Ya que $Ext^i(\bigoplus_{i=0} M_i, N) = \prod Ext^i(M_i, N)$

2. $^{\perp}N$ es resolvente [resolving], si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

es un sucesión exacta y N, L $\in {}^{\perp}N$, entonces M $\in {}^{\perp}N$

3. Si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y M, L $\in {}^{\perp}N$, entonces N $\in {}^{\perp}N$

Definición 2.0.28. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos. Una $\mathcal{C}$-filtración de un módulo A es una cadena creciente continua $\langle A_i : i < \lambda \rangle$ de submódulos tal que $A_0 = 0$, $A_{i+1}/A_i \in \mathcal{C}$ para $i < \lambda$*

Definición 2.0.29. *Sea N un R-módulo y κ un cardinal. Un (κ, N)-refinamiento de longitud λ es un cadena continua $\langle A_i : i < \lambda \rangle$ de submódulos de A tal que $A_0 = 0$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in {}^{\perp}N$ y $|A_{\alpha+1}/A_\alpha| \leq \kappa$ para todo $\alpha < \lambda$.*

Definición 2.0.30. *Sea $(I, <)$ un orden parcial tal que que para todo i,j existe $k >$ i,j . Un conjunto de módulos y homomorfismos $(A_i, \tau_{ij} : A_i \longrightarrow A_j, i < j)$ donde i,j $\in I$, es un sistema directo si $\tau_{ik} = \tau_{jk} \circ \tau_{ij}$ $(i < j < k)$.*

A es límite directo de $(A_i, \tau_{ij}, i < j)$ si existen $\tau_i : A_i \longrightarrow A$ para cada $i \in I$, tal que $\tau_i = \tau_j \circ \tau_{ij}$, i<j, y para cualquier B para el cual existan $\sigma_i : A_i \longrightarrow B$ tal que $\sigma_i = \sigma_j \circ \tau_{ij}$ existe $\phi : A \longrightarrow B$ tal que $\sigma_i = \phi \circ \tau_i$

2.0.3. Teorema Principal de Clasificación

Teorema 2.0.31. $(^{\perp}N, \prec_N)$ *es un CLEA si y sólo si es cerrada bajo límites directos de homomorfismos y admite un (κ, N)-refinamiento.*

Demostración: Sean A,B $\in {}^{\perp}N$

- 1. Si $\mathcal{A} \prec_N \mathcal{B}$ entonces $A \subseteq B$:

  Esto es inmediato por la definición de $\prec_N$.

- 2. $\prec_N$ es un orden parcial sobre $^{\perp}N$.

  Debemos ver que $\prec_N$ es reflexiva, transitiva, y antisimétrica

  1. Reflexiva: $A \subseteq A$ y A/A = 0, $0 \in {}^{\perp}N$ entonces $A \prec_N A$
  2. Transitiva : Si $A \prec_N B$ y $B \prec_N C$, entonces $A \subseteq B$, $B \subseteq C$. Así $A \subseteq C$, pues ser submódulo es una relación transitiva.
     Además
     $$0 \longrightarrow B/A \xrightarrow{i} C/A \xrightarrow{p} C/B \longrightarrow 0$$
     Donde i(b+[A])=b+[A], p(c+[A])=c+[B].
     Claramente i es inyectiva, p es sobreyectiva y Im(i)= Ker(p). Luego es una sucesión exacta corta. Como B/A , C/B $\in {}^{\perp}N$ entonces C/A $\in {}^{\perp}N$
     Así $A \prec_N C$
  3. Antisimétrica: Si $A \prec_N B$ y $B \prec_N A$, entonces $A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Luego A=B.

- 3. Si $\langle A_i : i < \delta \rangle$ es una $\prec_N$-cadena creciente continua entonces :

  1. $\bigcup_{i<\delta} A_i \in {}^{\perp}N$

     Demostración: Queremos ver que $Ext^i(\bigcup_{i<\delta} A_i, N) = 0$, i$< \omega$
     Lo probamos por inducción sobre i.
     Para i=1.
     Sea A=$\bigcup_{i<\delta} A_i$. Sabemos que $Ext^1(A, N)$= 0 si y sólo si toda sucesión exacta corta
     $$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$
     se separa, es decir si existe β: A$\longrightarrow$B tal que $\pi \circ \beta = id_A$.
     Para probar la existencia de β vamos a definir una cadena de homomorfismos $\beta_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B$ tal que $\pi \circ \beta_\alpha$=id_{A_α}.
     Lo construimos por inducción sobre α.
     Para $\alpha = 0$: $A_0 = 0$, entonces $\beta_0 = A_0 \longrightarrow B$ es el homomorfismo trivial.
     Supongamos que ya construimos la cadena de homomorfirmos hasta α y queremos definir $\beta_{\alpha+1}$. Por hipótesis $A_{\alpha+1} \in {}^{\perp}N$, entonces $Ext^1(A_{\alpha+1}, N)$= 0. Además
     $$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} \pi^{-1}(A_{\alpha+1}) \xrightarrow{\pi} A_{\alpha+1} \longrightarrow 0$$
     es una sucesión exacta, ya que N= Ker(π)= Ker($\pi|\pi^{-1}(A_{\alpha+1})$). Se sigue que la sucesión es separable. Así, existe $\sigma : A_{\alpha+1} \longrightarrow B$ tal que $\pi \circ \sigma$=$id_{A_{\alpha+1}}$. La función σ no necesariamente extiende a β_α, pero si cumple que $\pi \circ \sigma|_{A_\alpha}$=$id_{A_\alpha}$. Entonces, existe un homomorfismo $\theta : A_{\alpha+1} \longrightarrow N$, el cual cumple $i \circ \theta = \beta_\alpha - \sigma|_{A_\alpha}$.
     Como $Ext^1(A_{\alpha+1}/A_\alpha, N)$= 0, entonces existe $\theta' : A_{\alpha+1} \longrightarrow N$ tal que $\theta'|_{A_\alpha} = \theta$. Así, definimos $\beta_{\alpha+1} = \sigma + (i \circ \theta')$, y cumple:

– $\beta_{\alpha+1}|_{A_\alpha} = \sigma|_{A_\alpha} + (i \circ \theta')|_{A\alpha} = \beta_\alpha - (i \circ \theta) + (i \circ \theta) = \beta_\alpha$.
– $\pi \circ \beta_{\alpha+1} = id_{A_{\alpha+1}}$

Suponga α es un ordinal límite, definimos $\beta_\alpha = \bigcup_{i<\alpha} \beta_i$. Por hipótesis de inducción las $\beta_i : A_i \longrightarrow B$ forman una cadena de homomorfismos y cada una cumple $\pi \circ \beta_i = id_{A_i}$. Por lo tanto, $\beta_\alpha : \bigcup_{i<\alpha} A_i \longrightarrow B$ y $\pi \circ \beta_\alpha = id_{\bigcup_{i<\alpha} A_i}$

Entonces definimos $\beta = \beta_\delta$ y $Ext^1(A, N) = 0$

Caso sucesor: Suponga que se cumple para m y veamos que se cumple para m+1.

Sabemos que todo módulo se puede encajar en un módulo inyectivo. Luego existe X inyectivo en el cual N se puede encajar. Construimos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/i(N) \longrightarrow 0$$

Sea $Y = X/i(N)$

obtenemos la sucesión exacta larga inducida:

$$... \longrightarrow Ext^i(A_{\alpha+1}/A_\alpha, X) \longrightarrow Ext^i(A_{\alpha+1}/A_\alpha, Y) \longrightarrow Ext^{i+1}(A_{\alpha+1}/A_\alpha, N) \longrightarrow ...$$

Para $\alpha < \delta$.

Como $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in {}^{\perp}N$, entonces $Ext^{i+1}(A_{\alpha+1}/A_\alpha, N) = 0$, y al ser X inyectivo tenemos que $Ext^i(A_{\alpha+1}/A_\alpha, X) = 0$. Así, $Ext^i(A_{\alpha+1}/A_\alpha, Y) = 0$ para todo $1 \leq i < \omega$.

Por hipótesis de inducción $Ext^m(A, Y) = 0$, y $Ext^{m+1}(A, X) = 0$ por la inyectividad de X.

$$... \longrightarrow Ext^m(A, Y) \longrightarrow Ext^{m+1}(A, N) \longrightarrow Ext^{m+1}(A, X) \longrightarrow ...$$

Entonces $Ext^{m+1}(A, N) = 0$.

Por lo tanto $A \in {}^{\perp}N$

□

2. Para cada $j < \delta$ se cumple que $A_j \prec_N \bigcup_{i<\delta} A_i$

Demostración: Sea A=$\bigcup_{i<\delta} A_i$, queremos ver que $A/A_j \in {}^{\perp}N$.

Debemos notar que $A/A_j = \bigcup_{i<j} A_j/A_i$. Por hipótesis $A_i \prec_N A_j$ para $i \leq j$, luego $A_j/A_i \in {}^{\perp}N$.

Claramente $(A_{j+1}/A_i)/(A_j/A_i) \backsimeq A_{j+1}/A_j$, así $(A_{j+1}/A_i)/(A_j/A_i) \in {}^{\perp}N$ y $(A_j/A_i) \prec_N (A_{j+1}/A_i)$. Aplicando el resultado anterior tenemos que $\bigcup_{i<j} A_j/A_i \in {}^{\perp}N$. Se sigue que $A/A_j \in {}^{\perp}N$, así $A_j \prec_N A$ □

3. Si cada $A_i \prec_N M$, $M \in^{\perp} N$ entonces $\bigcup_{i<\delta} A_i \prec_N M$

Lema 2.0.32. *Dado que* $A_i \prec_N M$*,* $M \in \mathcal{K}$ *entonces* $\bigcup_{i<\delta} A_i \prec_N M$*, si y sólo si* $^{\perp}N$ *es cerrado bajo límites directos de homomorfismos.*

Demostración: Suponga $^{\perp}N$ es cerrado bajo límites directos de homomorfismos. Sea $\langle A_i : i < \delta \rangle$ una $\prec_N$-cadena creciente continua con $A_i \prec_N$ M para todo i. Queremos ver que $A \prec_N$ M, es decir que M/A $\in {}^{\perp}N$.

$(M/A_i, f_{ij} : M/A_i \longrightarrow M/A_j), i < j)$ $i, j < \omega$, donde $f_{ij}(m + [A_i]) = m + [A_j]$ esta bien definida pues $A_i \subseteq A_j, i < j$. Es un sistema directo de homomorfismos pues $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$.

Veamos que M/A es el límite directo de este sistema.

Definimos $f_i : M/A_i \longrightarrow M/A$, $f_i(m+[A_i]) = m+[A]$, esta bien definida pues $A_i \subseteq A$, y se cumple

- $f_i = f_j \circ f_{ij}$
- Si para B existen $\sigma_i : M/A_i \longrightarrow B$ tal que $\sigma_i = \sigma_j \circ f_{ij}$, entonces existe $\phi : M/A \longrightarrow B$, definida como $\phi(m + [A]) = \sigma_1(m + [A_1])$, la cual cumple que $\sigma_i = \phi \circ f_i$ para todo i.

Así M/A $\in {}^{\perp}N$, y $A \prec_N M$.

Ahora supongamos que : Si $A_i \prec_N M$, $M \in \mathcal{K}$ entonces $\bigcup_{i<\delta} A_i \prec_N$ M. Queremos probar que $^{\perp}N$ es cerrado bajo límites directos. Es suficiente mostrarlo para sistemas directos de homomorfismos donde I es un buen orden, I=$(\sigma, <)$ donde σ es algún ordinal. Sea $\mathcal{C} = (A_\alpha, f_{\alpha\beta}, \alpha \leq \beta < \sigma)$ un sistema directo, donde $A_\alpha \in {}^{\perp}N$ para todo $\alpha < \sigma$. Tenemos dos casos

- σ **es un ordinal sucesor**:
  Veamos que $A_{\sigma-1}$ es límite directo del sistema dado.
  Definimos $f_\alpha = f_{\alpha\sigma-1} : A_\alpha \longrightarrow A_{\sigma-1}$, las cuales cumplen que $f_\alpha = f_\beta \circ f_{\alpha\beta}$ para $\alpha < \beta$, pues $f_{\alpha\sigma-1} = f_{\beta\sigma-1} \circ f_{\alpha\beta}$. Además si para C existen $\tau_\alpha : A_\alpha \longrightarrow C$ tal que $\tau_\alpha = \tau_\beta \circ f_{\alpha\beta}$, entonces existe $\phi = \tau_{\sigma-1} : A_{\sigma-1} \longrightarrow C$, la cual cumple que $\tau_\alpha = \phi \circ f_\alpha$ para todo $\alpha < \sigma$.
  Por hipótesis $A_{\sigma-1} \in {}^{\perp}N$. Así el límite directo de este sistema esta en $^{\perp}N$
- σ **es un ordinal límite**:
  Sean $B = (\bigoplus_{\alpha<\sigma} A_\alpha)$ y L el límite directo del sistema dado, este tiene una presentación canónica. $L \backsimeq B/S$, donde S es un submódulo de B generado por todos los elementos de la forma $x_{\alpha\beta} = \lambda_\beta \circ f_{\alpha\beta}(m) - \lambda_\alpha(m)$, $m \in A_\alpha$ y $\lambda_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B$, $\alpha < \sigma$ son los morfismos canónicos.
  Definimos $S_\gamma = \langle x_{\alpha\beta}, \alpha \leq \beta < \gamma \rangle$, el submódulo generado por los $x_{\alpha\beta}$. Notemos que $S_\sigma = S$, y $S_\gamma \subseteq S_{\gamma+1}$
  Probamos por inducción sobre $\gamma \leq \sigma$ que $S_\gamma \in {}^{\perp}N$ y $B/S_\gamma \in {}^{\perp}N$
  $\gamma = 1 : S_1 = \langle x_{00} \rangle$, y $x_{00} = 0$. Así $S_1 = 0 \in {}^{\perp}N$ y $B \in {}^{\perp}N$, ya que $^{\perp}N$ es cerrado bajo sumas directas arbitrarias.

γ **es un ordinal sucesor**:
Definimos $g_\alpha : A_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\gamma-1<\alpha<\sigma} A_\alpha$:
 $*$ $g_\alpha(a_\alpha) = \lambda_{\sigma-1}(f_{\alpha\sigma-1}(a_\alpha))$. Para $\alpha < \gamma$
 $*$ $g_\alpha(a_\alpha) = \lambda_\alpha(a_\alpha)$. Para $\gamma - 1 < \alpha < \sigma$
Por la propiedad universal de la suma directa existe un homomorfismo
$g : B \longrightarrow \bigoplus_{\gamma-1<\alpha<\sigma} A_\alpha$, tal que $g \circ \lambda_\alpha = g_\alpha$.
La función g es claramente sobre, y además Ker g$= S_\gamma$.
Así $B/S_\gamma \backsimeq \bigoplus_{\gamma-1<\alpha<\sigma} A_\alpha$ es suma directa de elementos de $^{\perp}N$, entonces $B/S_\gamma \in {}^{\perp}N$
Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_\gamma \longrightarrow B \longrightarrow B/S_\gamma \longrightarrow 0$$

Como B, $B/S_\gamma \in {}^{\perp}N$ y $^{\perp}N$ es resolving entonces $S_\gamma \in {}^{\perp}N$
γ **es un ordinal límite** :
Por la hipótesis de inducción, para todo $\alpha < \gamma$ se cumple que $S_\alpha \in {}^{\perp}N$ y $B/S_\alpha \in {}^{\perp}N$. Definimos la siguientes sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_{\alpha+1}/S_\alpha \xrightarrow{i} B/S_\alpha \xrightarrow{\pi} B/S_{\alpha+1} \longrightarrow 0$$

Para $\alpha < \delta$.
Como B/S_α y $B/S_{\alpha+1} \in {}^{\perp}N$, entonces $S_{\alpha+1}/S_\alpha \in {}^{\perp}N$.
Luego $\langle S_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ es una $\prec_N$-cadena creciente continua, la cual cumple $S_\alpha \prec_N B$ para todo $\alpha < \delta$. Así $\bigcup_{\alpha<\gamma} \in {}^{\perp}N$ por un resultado anterior y $\bigcup_{\alpha<\gamma} S_\alpha \prec_N B$ por hipótesis.
Como σ es un ordinal límite se tiene que $\bigcup_{\alpha<\sigma} S_\alpha \prec_N B$, entonces $B/(\bigcup_{\alpha<\sigma} S_\alpha) \in {}^{\perp}N$ y $L \backsimeq B/(\bigcup_{\alpha<\sigma} S_\alpha)$, Así $L \in {}^{\perp}N$.

□

- 4. Si $A, B, C \in {}^{\perp}N$, $A \prec_N C$,$B \prec_N C$ and $A \subseteq B$ entonces $A \prec_N B$ Consideremos las siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B/A \xrightarrow{i} C/A \xrightarrow{\pi} C/B \longrightarrow 0$$

Como C/A y C/B $\in {}^{\perp}N$, entonces B/A $\in {}^{\perp}N$. Pues $^{\perp}N$ es resolvente.

Así $A \prec_N B$.

- Existe un número de Löwenheim-Skolem $LS({}^{\perp}N)$ tal que si $X \subseteq A \in {}^{\perp}N$, existe $A' \in {}^{\perp}N$ con $X \subseteq A' \prec_N A$ y $|A'| \leq |X| + LS({}^{\perp}N)$.

Usaremos el conocido lemma de Hill para probar que bajo las hipótesis dadas existe el número de Löwenheim-Skolem.

Lema 2.0.33. *(Lema de Hill)[4, 4.2,6]. Sea κ un cardinal regular infinito. Suponga que A admite una $\mathcal{C}$-filtración $\langle A_\alpha, \alpha \leq \sigma\rangle$ donde $\mathcal{C}$ es un conjunto de módulos $< \kappa$-presentados. Entonces existe una familia $\mathcal{F}$ de submódulos de $A = A_\sigma$ tal que*

1. *$A_\alpha \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \leq \sigma$*
2. *Sea $B \subseteq C$, tal que $B, C \in \mathcal{F}$. Entonces existe una $\mathcal{C}$-filtración de C/B*
3. *Si $B \in \mathcal{F}$ y $X \subseteq A$ con $|X| < \kappa$, entonces existe $B_1 \in \mathcal{F}$ tal que $B \bigcup X \subseteq B_1$ y B_1/B es κ-presentado*

Demostración: Por hipótesis tenemos que existe $\kappa \geq |R| + \aleph_0$, tal que si $A \in {}^{\perp}N$ entonces tiene un (κ, N)-refinamiento $\langle A_\alpha, \alpha \leq \sigma \rangle$. Este refinamiento genera un una $\mathcal{C}$-filtración donde $\mathcal{C}$ es la clase de los módulos $\leq \kappa$ -presentados. Así podemos aplicar el lemma anterior para κ^+, pues todo cardinal sucesor es regular.

Se sigue que existe $\mathcal{F}$ una familia de submódulos de A con las propiedades descritas en el lemma . Si $B, C \in \mathcal{F}$, con $B \subseteq C$, entonces por 2. existe una $\mathcal{C}$-filtración de C/B, en especial un ${}^{\perp}N$- filtración. Así $C/B \in {}^{\perp}N$, y $B \prec_N C$. Es decir, si $B \subseteq C$ en $\mathcal{F}$ entonces $B \prec_N C$. En especial $B \prec_N A$, para todo $B \in \mathcal{F}$. Tenemos que $X \subseteq A$, podemos escribir X=$\bigcup_{i<\sigma} X_i$, donde $|X_i| < \kappa$ y $|X| = \sigma$.

Construimos por inducción usando la parte 4. del Lemma de Hill la siguiente $\langle A'_i, i \leq \sigma \rangle$:

- $A'_0 = 0$
- $A'_i \in \mathcal{F}$, y $X_i \cup A'_i \subseteq A'_{i+1}$,
- A'_{i+1}/A'_i es $\leq \kappa$ presentado.

Así $A' = A'_\sigma$, y cumple las condiciones deseadas.

También se tiene que si $({}^{\perp}N, \prec_N)$ tiene número de Löwenheim-Skolem $LS({}^{\perp}N) = \kappa$ y ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo límites directos entonces si $A \in {}^{\perp}N$ tiene un (κ, N)-refinamiento.

Sea X un conjunto de R-generadores de A.

Tomamos $A_0 = 0$.

Supongamos que A_α esta construido, tomamos $x \in A - A_\alpha$, Sabemos que $A/A_\alpha \in {}^{\perp}N$, y $(A_\alpha + xR)/A_\alpha \subseteq A/A_\alpha$. Luego existe $A_{\alpha+1}$, tal que $A_\alpha + xR \subseteq A_{\alpha+1}$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in {}^{\perp}N$ y $|A_{\alpha+1}/A_\alpha| \leq |(A_\alpha + xR)/A_\alpha| + \kappa$, ya que existe el número de Löwenheim-Skolem .

Definimos
$$f : (A_\alpha + xR)/A_\alpha \longrightarrow xR/(A_\alpha \cap xR)$$

$f(a_\alpha + xr + A_\alpha) = f(xr + A_\alpha) = xr + (A_\alpha \cap xR)$.

Suponga que $f(a_\alpha + xr + A_\alpha) = 0, xr + (A_\alpha \cap xR) = 0$, luego $xr \in (A_\alpha \cap xR)$, en especial $xr \in A_\alpha$. Así, $a_\alpha + xr + A_\alpha = 0$ y la función es inyectiva.Además es claramente sobre, luego es un isomorfismo, y $|(xR/(A_\alpha \cap xR)| \leq |xR| = |R| \leq \kappa$. Así, $|A_{\alpha+1}/A_\alpha| \leq \kappa$.

Como A_α, y $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in {}^{\perp}N$, entonces $A_{\alpha+1} \in {}^{\perp}N$

Para un ordinal límite λ, Definimos $A_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} A_\beta$. Así, $A_\lambda \in {}^{\perp}N$ y como es cerrado bajo límites directos $A_\lambda \prec_N A$, y $A/A_\lambda/ \in {}^{\perp}N$, y construimos un (κ, N)-refinamiento.

□

□

2.0.4. Un caso particular

N es un Módulo Inyectivo-puro

Lema 2.0.34. *Sea* $(A_i, \tau_{ij} : A_i \longrightarrow A_j, i < j)$ *un sistema directo de módulos y* L *su límite. Consideremos la representación canónica*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (\bigoplus_{\alpha<\sigma} A_\alpha) \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

Entonces π *es un epimorfismo puro.* ***[4, 1.2.7]***

Lema 2.0.35. *Un módulo* F *es plano si y sólo si es límite directo de módulos proyectivos.*

Lema 2.0.36. *Dado* N^* *un módulo inyectivo puro, entonces* $\mathcal{J}=\{A : Ext^1(A, N^*) = 0\}$ *es cerrado bajo imágenes de epimorfismos puros.*

Demostración: Sean $A \in \mathcal{J}$ y $\pi : A \longrightarrow C$ un epimorfismo puro, entonces $Ker(\pi) \subseteq_* A$. Dada la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(\pi) \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta larga

$$... \longrightarrow Hom(A, N^*) \xrightarrow{Hom(f,N^*)} Hom(Ker(\pi), N^*) \longrightarrow Ext^1(C, N^*)$$

$$\longrightarrow Ext^1(A, N^*) \longrightarrow ....$$

Como N^* es un módulo inyectivo puro entonces $Hom(f, N^*)$ es sobre y $Ext^1(A, N^*) = 0$. Así $Ext^1(C, N^*) = 0$.

□

Lema 2.0.37. *Sea $A \subseteq B$. $A \subseteq_* B$, si y sólo si para todo $0 < m < \omega$, $0 < n < \omega$, y para todo R-sistema de ecuaciones $S = (\sum_{j<n} r_{ij}x_j = a_i)(i < m)$ en las variables $(x_j)(j < m)$ con $a_i \in A(i < m)$ y $r_{ij} \in R(i < m, j < n)$ con soluciones en B, tiene soluciones en A.* ***[4, 1.2.13]***

Teorema 2.0.38. *: Si N es un módulo inyectivo puro, entonces $(^{\perp}N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta. Además, si $(^{\perp}N, \prec_N)$ es una CLEA entones N es de co-torsión.*

Demostración: Sea N un módulo inyectivo puro, debemos ver que $^{\perp}N$ es cerrado bajo límites directos y existe $LS(^{\perp}N)$.
Cerrado bajo limites directos Sea $(A_i, \tau_{ij} : A_i \longrightarrow A_j, i < j)$ un sistema directo de módulos en $^{\perp}N$, dado que $(\bigoplus_{\alpha<\sigma} A_\alpha) \in {}^{\perp}N$, por el lema anterior bastará ver que $^{\perp}N$ es cerrado bajo imágenes de epimorfismos puros.

Sea $f : M \longrightarrow D$ un epimorfismo puro y $M \in {}^{\perp}N$. Sabemos que para todo $i > 0$ existe N_i un módulo inyectivo puro tal que $Ext^i(B, N) = Ext^1(B, N_i)$, [4,2.2.7 y 3.2.10] para todo B. Luego, para todo i se tiene que $Ext^i(M, N) = Ext^1(M, N_i) = 0$, pues $M \in^{\perp} N$. Además, $\mathcal{J}=\{A : Ext^1(A, N_i) = 0\}$ es cerrado bajo imagenes de epimorfismos puros entonces $Ext^1(D, N_i) = 0$ y así $Ext^i(D, N) = 0$ para todo i, y $D \in^{\perp} N$

Por lo tanto $^{\perp}N$ es cerrado bajo imágenes de epimorfismo puros y así bajo límites directos.

Lowenheim-Skolem Sea $\kappa = |R| + \aleph_0$, $A \in {}^{\perp}N$, y $X \subseteq A$. Queremos encontrar $A' \prec_N A$, tal que $X \subseteq A'$ y $|A'| \leq |X| + \kappa$.

Construiremos A' por inducción.

Sea $A'_0 = \langle X \rangle$. Supongamos que ya construimos A'_i, tal que $X \subseteq A'_i$, $|A'_i| \leq |X| + \kappa$. Sea $S = (\sum_{j<n} r_{ij}x_j = a_i)(i < m)$ un R-sistema de ecuaciones. Escogemos A'_{i+1} como el módulo generado por A'_i y las soluciones en A de los R-sistemas de ecuaciones con $a_i \in A'_i$,$(i < m)$.

Como $\kappa = |R| + \aleph_0$, y $|A'_i| \leq |X| + \kappa$ entonces $\left|A'_{i+1}\right| \leq |X| + \kappa$. Definimos $A' = \bigcup_{i<\omega} A'_i$. Es claro que dado $S = (\sum_{j<n} r_{ij}x_j = a_i)(i < m)$ un R-sistema de ecuaciones con $a_i \in A'$, existe $j < \omega$ tal que $a_i \in A'_j$. Luego, las soluciones en A de este sistema estarán en A'_{i+1}, y por lo tanto en A'. Así, por uno de los lemas anteriores tenemos que $A' \subseteq_* A$. Además, $|A'| \leq |X| + \kappa$.

Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \longrightarrow A/A' \longrightarrow 0$$

e induce la siguiente sucesión

$$... \longrightarrow Hom(A,N) \xrightarrow{Hom(f,N)} Hom(A',N) \longrightarrow Ext^1(A/A',N)$$

$$\longrightarrow Ext^1(A,N) \longrightarrow ....$$

Como $A' \subseteq_* A$ y N es inyectivo puro, entonces $Hom(f,N)$ es sobre y como $Ext^1(A,N) = 0$, pues $A \in {}^{\perp}N$, entonces $Ext^1(A/A',N) = 0$ y $A' \prec_N A$.

-

Suponga que $({}^{\perp}N, \prec_N)$ es un CLEA.

Por [4,1.2.16] todo módulo plano F es límite directo de módulos proyectivos. Como el conjunto de los módulos proyectivos esta contenido en ${}^{\perp}N$ y ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo límites directos, entonces $F \in {}^{\perp}N$, y así N es de Cotorsión.

□

CAPÍTULO 3

Propiedades Generales de$(^{\perp}N, \prec_N)$

3.0.5. Amalgamación

Definición 3.0.39. *Sea* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *una clase elemental abstracta decimos que tiene la propiedad de Amalgamación, si dados* $A, B, C \in \mathcal{K}$ *con* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : A \longrightarrow C$ *inmersiones elementales, existe* $D \in \mathcal{K}$ *y* $h : B \longrightarrow D$ *,* $j : C \longrightarrow D$ *inmersiones elementales tales que* $h \circ f = j \circ g$*.*

Se dice que tiene la propiedad de Amalgamación disyunta si $h(B) \cap j(C) = h(f(A)) = j(g(A))$

Definición 3.0.40. *Sea* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *una clase elemental Abstracta decimos que tiene la "Joint Embedding Property", si dados* $A, B \in \mathcal{K}$ *existe* $C \in \mathcal{K}$ *tal que* $A \prec_K C$ $B \prec_N C$

Lema 3.0.41. *Si* $(^{\perp}N, \prec_N)$ *es una clase elemental Abstracta entonces tiene la propiedad de Amalgmación Disyunta.*

Demostración: Sean $A, B, C \in {}^{\perp}N$, tal que $A \prec_N B$ $A \prec_N C$. Sea D el pushout de B y C sobre A. Tenemos la siguiente exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} B \xrightarrow{\pi} B/A \longrightarrow 0$$

y el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & B & \xrightarrow{\pi} & B/A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle i_2}\big\downarrow & & {\scriptstyle j_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle id}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{j_2} & D & \xrightarrow{\phi} & B/A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como D es el pushout, sabemos que $D = (B \oplus C)/T$, donde $T = \{(x, -x) : x \in A\}$ y existe $j_1 : B \longrightarrow D$, $j_1(b) = (b, 0) + T$ y $j_2 : C \longrightarrow D$, $j_2(c) = (0, c) + T$ las cuales cumplen que $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$.

Sea $\pi : B \longrightarrow B/A$ la proyección y $f : C \longrightarrow B/A$ definida como $f(c) = 0$, para todo $c \in C$, estas funciones cumplen que $\pi \circ i_1 = f \circ i_2$. Por la propiedad universal del pushout existe $\phi : D \longrightarrow B/A$, tal que $\phi \circ j_2 = 0$ y $\phi \circ j_1 = \pi$. y definimos $\phi((x, y) + T) = x + A$.Además ϕ es sobre, pues tomando $b + [A] \in B/A$ tenemos que existe $b \in B$ tal que $\pi(b) = b + [A]$ ya que π es sobre, como $\phi \circ j_1 = \pi$, entonces $b + [A] = \phi(j_1(b))$.

Es claro que j_1, j_2 son inyectivas .Veamos que $Im(j_2) = Ker(\phi)$.

$\phi((0, c) + T) = 0$, luego $Im(j_2) \subseteq Ker(\phi)$.

Sea $(b, c) + T \in D$ tal que $\phi((b, c) + T) = b + A = 0$, entonces $b \in A$, y $(b, c) + T = (0, b + c) + T \in Im(j_2)$. Luego $Ker(\phi) \subseteq Im(j_2)$

Como $B/A \in {}^{\perp}N$ y $C \in {}^{\perp}N$ entonces $D \in {}^{\perp}N$. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $D/C \cong B/A$. Así $C \prec_N D$.

Análogamente probamos que $B \prec_N D$.

Veamos que $j_1(B) \cap j_2(C) = j_1(A)$. Sea $d \in j_1(B) \cap j_2(C)$, luego existe $b \in B$ y $c \in C$ tal que $j_1(b) = d$ y $j_2(c) = d$. Ahora, $\phi(d) = \phi(j_1(b)) = \pi(b) = b + [A]$, pero también $\phi(d) = \phi(j2(c)) = 0$, entonces $b + [A] = 0$, y $b \in A$. Así, $d = j_1(b) \in j_1(A)$.

Por lo tanto, cumple la propiedad de amalgamación disyunta. □

Corolario 3.0.42. *Si* ($^{\perp}N, \prec_N$) *es una clase elemental Abstracta entonces tiene la "Joint Embedding Property".*

3.0.6. Clausura

Definición 3.0.43. *Sea* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *un clase elemental abstracta. Sea* $X \subseteq L \in \mathcal{K}$ *y* $cl_L(X) = \bigcap\{M : X \subseteq M \prec_K L\}$. *Decimos* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *admite clausuras si* $cl_L(X) \prec_K L$.

Definición 3.0.44. *Sean* A, B *módulos arbitrarios , decimos que* $A \prec'_N B$ *si y sólo si* $B/A \in {}^{\perp}N$

Notemos que en la definición anterior no necesariamente se cumple que $A, B \in {}^{\perp}N$. Además si $A \prec'_N B$ entonces $A \in {}^{\perp}N$ si y sólo si $B \in {}^{\perp}N$.

Lema 3.0.45. *Supongamos que* ($^{\perp}N, \prec_N$) *es una clase elemental abstracta que admite clausura . Sea* M *un módulo,* X *un subconjunto de* M *y* $sc_L(X) = \bigcap\{Q : X \subseteq Q \prec'_N L\}$. *Entonces* $sc_L(X) \prec'_N L$

Demostración: Sabemos que todo módulo es imagen epimorfica de un módulo libre. Así, existe F un módulo libre, y $\pi : F \longrightarrow L$ un epimorfismo.

Sea Q tal que $X \subseteq Q \prec'_N L$, $i_Q : Q \longrightarrow L$ la inclusión, y P_Q el pullback de π y i_Q. Luego existe $p_1 : P_Q \longrightarrow Q$ y $p_2 : P_Q \longrightarrow F$, las cuales cumplen que $i_Q \circ p_1 = \pi \circ p_2$.

Veamos que $P_Q = \{(l, f) \in L \bigoplus F : l \in Q \text{ y } \pi(f) = l\}$ con $p_1(l, f) = l$ y $p_2(l, f) = f$

Primero veamos que $i_Q \circ p_1 = \pi \circ p_2$:

$i_Q \circ p_1(l, f) = l = \pi(f) = \pi \circ p_2(l, f)$.

Ahora veamos que cumple la propiedad Universal para Pullbacks:

Suponga que existe R un módulo y $f_1 : R \longrightarrow Q$, $f_2 : R \longrightarrow F$ que cumplen $i_Q \circ f_1 = \pi \circ f_2$.

Definimos $g : R \longrightarrow P_Q, g(r) = (f_1(r), f_2(r))$. Claramente $p_1 \circ g = f_1$ y $p_2 \circ g = f_2$. Luego P_Q es el Pullback.

Induce el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_Q \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & F \arrow[r, "p\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & L/Q \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "i_Q"] & L \arrow[r, "p"] & L/Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Debemos ver que las sucesiones son exactas, y el diagrama conmuta.

Sea $p : L \longrightarrow L/Q$ la proyección

Veamos que p_2 es inyectivo: $p_2(l_1, f_1) = p_2(l_2, f_2)$, entonces $f1 = f = 2$ y $l_1 = \pi(f_1) = \pi(f_2) = l_2$.

Como p y π son sobre, entonces $p \circ \pi$ también es sobre. Además $Im(p_2) \subseteq Ker(p \circ \pi)$, pues $p \circ \pi(p_2(l, f)) = p \circ \pi(f) = p(l) = 0$ pues $l \in Q$ Luego la sucesión de arriba es exacta.

En la sucesión de abajo es claro que i_Q es inyectiva, p es sobre y $Im(i_Q) \subseteq Ker(p)$.

El diagrama conmuta pues P_Q es el pullback y $i_Q \circ p_1 = \pi \circ p_2$.

Como $Q \prec'_N L$ y F es proyectivo entonces $L/Q, F \in {}^{\perp}N$. Además, dado que ${}^{\perp}N$ es resolvente entonces $P_Q \in {}^{\perp}N$ y se tiene que $F/p_2(P_Q) \cong L/Q$. Luego $p_2(P_Q) \prec'_N F$

Sea $\mathcal{Q} = \{Q : X \subseteq Q \prec'_N L\}$.

Queremos ver que $p_2(P_{sc_L(X)}) = \bigcap\{p_2(P_Q) : X \subseteq Q \prec'_N L\}$. Tenemos que $f \in p_2(P_{sc_L(X)})$ si y sólo si $\pi(f) \in sc_L(X) = \bigcap\{Q : X \subseteq Q \prec'_N L\}$ y si y sólo si $f \in p_2(P_Q)$, para $Q \in \mathcal{Q}$.

Por hipótesis $(^{\perp}N, \prec_N)$ admite clausuras, como $p_2(P_{sc_L(X)}) = \bigcap\{p_2(P_Q) : p_2(P_Q) \prec_N F\}$, entonces $p_2(P_{sc_L(X)}) \prec_N F$. Así $F/p_2(P_{sc_L(X)}) \cong L/sc_L(X)$ y $sc_L(X) \prec'_N L$. □

Definición 3.0.46. *Decimos que una clase $\mathcal{C}$ de módulos admite cubrimientos si para todo M, R-módulo existe $f \in Hom_R(C, M)$, con $C \in \mathcal{C}$, tal que para todo $C' \in$*

$\mathcal{C}$, $Hom_R(C', f) : Hom_R(C', C) \longrightarrow Hom_R(C', M)$ es sobre. Además si $f \circ g = f$, implica que g es un automorfismo para todo $g \in End(C)$.

Lema 3.0.47. *Una clase $\mathcal{C}$ de módulos es cotilting si y sólo si $\mathcal{C}$ es resolvente, admite cubrimientos, es cerrada baja productos directo y sumas directas, y $\mathcal{C}^{\perp} \subseteq \mathcal{I}$ para algún n.*

Lema 3.0.48. *($^{\perp}N$) es cerrado bajo submódulos si y sólo si N tiene dimensión inyectiva ≤ 1*

Demostración. Suponga que ($^{\perp}N$) es cerrado bajo submódulos. Sea M un módulo, existe P un módulo libre tal que M es imagen epimorfica de P. Induce la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow Ker(\pi) \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

Así, tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$... \longrightarrow Ext^i(Ker(\pi), N) \longrightarrow Ext^{i+1}(M, N) \longrightarrow Ext^{i+1}(P, N) \longrightarrow ....$$

Como P es libre, $P \in {}^{\perp}N$, y por la hipótesis $Ker(\pi) \in {}^{\perp}N$, entonces $Ext^{i+1}(M, N) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Ahora supongamos que N tiene dimensión inyectiva ≤ 1. Sea $A \in {}^{\perp}N$, y B un submódulo de A. Tenemos la siguiente sucesión.

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow A/B \longrightarrow 0$$

Induce la siguiente sucesión exacta larga

$$... \longrightarrow Ext^i(A, N) \longrightarrow Ext^i(B, N) \longrightarrow Ext^{i+1}(A/B, N) \longrightarrow ....$$

Como $Ext^i(A, N) = 0$ y$Ext^{i+1}(A/B, N) = 0$ para todo $i \geq 1$, entonces $Ext^i(B, N) = 0$ para todo $i \geq 1$ y $B \in {}^{\perp}N$. Así es cerrado bajo submódulos.

□

Lema 3.0.49. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos cerrada bajo productos directos. Si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos puros, entonces $\mathcal{C}$ admite cubrimientos. [4,4.3.21]*

Teorema 3.0.50. *Sea N un R-módulo con dimensión inyectiva ≤ 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *($^{\perp}N, \prec_N$) es una clase elemental abstracta que admite clausura*
2. *$^{\perp}N$ es cerrado bajo productos directos.*
3. *$^{\perp}N$ en un clase Cotilting.*

Demostración: **1. implica 2.**: Supongamos que $({}^{\perp}N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta que admite clausura, es decir para cada $X \subseteq L \in {}^{\perp}N$, se tiene que $cl_L(M) \prec_N L$, y suponga que ${}^{\perp}N$ no es cerrado bajo productos directos. Así, existe un cardinal κ y $M_\alpha \in {}^{\perp}N$, para todo $\alpha < \kappa$ tal que $\prod_{\alpha<\kappa} M_\alpha \notin {}^{\perp}N$. Escogemos γ el cardinal más pequeño tal que $M = \prod_{\alpha<\gamma} M_\alpha \notin {}^{\perp}N$. Es claro que γ debe ser un cardinal infinito, pues si fuera finito el producto coincidiria con la suma directa, y ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo sumas directas.

Definimos P_α=$\{p \in M : \pi_\beta(p) = 0$, para todo $\beta < \alpha\}$, luego $M/P_\alpha \cong \prod_{\beta<\alpha} M_\beta$, y $M/P_\alpha \in {}^{\perp}N$, por la minimalidad de γ.

Así, $P_\alpha \prec'_N M$. Dado que $({}^{\perp}N, \prec_N)$ admite clausura, podemos aplicar el lemma anterior y tenemos que $\bigcap_{\alpha<\gamma} P_\alpha \prec'_N M$, luego $M/\bigcap_{\alpha<\gamma} P_\alpha \in {}^{\perp}N$. Además, $\bigcap_{\alpha<\gamma} P_\alpha = 0$, y $M \cong M/\bigcap_{\alpha<\gamma} P_\alpha$, entonces M $\in {}^{\perp}N$. Contradicción.

2. implica 3. Asumamos que ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo productos directos. Queremos ver que ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting.

Ya sabemos que ${}^{\perp}N$ es resolvente, es cerrada bajo sumas directas, y por hipótesis bajo productos directos. Sólo nos queda ver que admite cubrimientos y que $({}^{\perp}N)^{\perp} \subseteq \mathcal{I}_1$

- Veamos que $({}^{\perp}N)^{\perp} \subseteq \mathcal{I}_1$(Módulos inyectivos $\leq$ 1). Sea $M \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$, luego para todo $T \in {}^{\perp}N$ se cumple que $Ext^i(T, M) = 0$ para todo $i < \omega$. Sabemos que cualquier módulo A es imagen epimorfica de un módulo libre P, e induce la siguiente sucesión:

  $$0 \longrightarrow Ker(\pi) \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

  y obtenemos

  $$... \longrightarrow Ext^i(Ker(\pi), M) \longrightarrow Ext^{i+1}(A, M) \longrightarrow Ext^{i+1}(P, M) \longrightarrow ....$$

  Por hipótesis N tiene dimensión inyectiva $\leq$ 1, luego ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo submódulos. Como $P \in {}^{\perp}N$ por ser proyectivo, entonces $Ker(\pi) \in {}^{\perp}N$ y así $Ext^i(Ker(\pi), M) = 0$ y $Ext^{i+1}(P, M) = 0$. Entonces $Ext^{i+1}(A, M) = 0$, para todo $i \geq 1$ y $M \in \mathcal{I}_1$ como queriamos ver.

- Veamos que admite cubrimientos:

  Bajo nuestras hipótesis ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo submódulos y productos directos, en especial bajo submódulos puros. Así, admite cubrimientos.

3.implica 1. Asumamos que ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting, entonces existe un módulo Cotilting C, tal que ${}^{\perp}N$=${}^{\perp}C$, los módulos Cotilting son inyectivos puros, luego $({}^{\perp}C, \prec_C)$ es una clase elemental abstracta y $({}^{\perp}N, \prec_N)$ también lo es.

Queremos ver que $({}^{\perp}N, \prec_N)$ admite clausuras.

Sea $X \subseteq M \in {}^{\perp}N$. Consideremos las funciones $\phi_Q : M/cl_M(X) \longrightarrow M/Q$, para cualquier módulo en $\{Q : X \subseteq Q \prec_N M\}$, tal que $\phi(m + cl_M(X)) = m + Q$, claramente ϕ_Q es inyectiva. Como ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo submódulos, entonces $M/cl_M(X) \in {}^{\perp}N$ y además $M \in {}^{\perp}N$, luego $cl_M(X) \in {}^{\perp}N$ y $cl_M(X) \prec_N M$.

$\square$

Propiedades de la Clausura

1. $X \subseteq cl_M(X)$
2. $cl_M(cl_M(X)) = cl_M(X)$
3. Carácter finito: $cl_M(X) = \cup\{X' : X' \subseteq_{fin} X\}$

Se tienen por la forma en la que fue definida la clausura.

3.0.7. Tipos de Galois

En teoría de Modelos de primer orden se define el tipo sintáctico de a sobre B como el conjunto de fórmulas con parámetros en B que satisface a. Cuando la teoría en la cual estamos trabajando es completa podemos asegurar la existencia del modelo monstruo $\mathcal{C}$ en el cual $tp(a/B) = \{c$:existe $f \in Aut(B/\mathcal{C}), f(a) = c\}$.

En $(\mathcal{K}, \prec_K)$ una clase elemental abstracta, los tipos de Galois serán definidos como clases de equivalencias, pero si $(\mathcal{K}, \prec_K)$ satisface la propiedad de amalgamación podremos garantizar la existencia de un modelo con ciertas propiedades, de tal forma que de nuevo podamos ver los tipos como órbitas de automorfismos.

Definición 3.0.51. *1. M es un modelo μ-homogéneo, si para todo $N \prec_K M$, y $N' \in \mathcal{K}$, $|N'| < \mu$, y $N \prec_K N'$, existe una $\mathcal{K}$-inmersión, de N' en M sobre N.*

2. M es un modelo fuertemente μ-homogéneo si es μ-homogéneo y dados $N, N' \prec_K M$, tal que $|N'| < \mu$ y $|N| < \mu$. Todo isomorfismo f de N en N' se puede extender a un automorfismo de M. M se dice fuertemente homogéneo si es $|M|$-fuertemente homogéneo.

Lema 3.0.52. *Suponga que $(\mathcal{K}, \prec_K)$ tiene la JEP, si M es un modelo μ-homogéneo y $N \in \mathcal{K}$ y $|N| < \mu$, entonces existe una $\mathcal{K}$-inmersión de N en M*

Lema 3.0.53. *Si M_1 y M_2 tienen cardinalidad μ y ambos son μ-homogéneos, con $\mu > (LS(\mathcal{K}))$, entonce $M_1 \cong M_2$.*

Teorema 3.0.54. *Suponga que $(\mathcal{K}, \prec_K)$ tiene amalgamación. Si $\mu*^{<\mu*} = \mu*$, y $\mu* \geq 2^{(LS(\mathcal{K}))}$, entonces existe un modelo $\boldsymbol{M}$ de cardinalidad $\mu*$ el cual es fuertemente homogéneo. [2,8.5]*

Definición 3.0.55. *El único modelo bajo isomorfismo fuertemente homogéneo de cardinal* $\mu*$*, con* $\mu*^{<\mu*} = \mu*$*, y* $\mu* \geq 2^{(LS(\mathcal{K}))}$*. Es* $\boldsymbol{M}$*, y es llamado el modelo monstruo.*

Definición 3.0.56. *Sea* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *una clase elemental abstracta con la propiedad de amalgamación y la "Joint Embedding Property"*

1. *Sean* $M, N \in {}^{\perp}N$ *y consideremos las 3-tuplas (M,a,N) con* $M \prec_K N$ *y* $a \in M - N$*.*

   Decimos que $(M, a, N) \cong (M, a', N')$*, si existe* N'' *e inmersiones fuertes* $f : N \longrightarrow N''$ *y* $f' : N' \longrightarrow N''$ *las cuales satisfacen que* $f(M) = f'(M)$ *y* $f(a) = f'(a')$

2. *Denotamos* $tp^g(a/M, N)$ *como el tipo de Galois de a sobre M en N.*

   Decimos que $tp^g(a/M, N)$=$tp^g(a'/M, N')$ *si* $(M, a, N) \cong (M, a', N')$

3. *Definimos* $tp^g(a/M) = tp^g(a/M, \boldsymbol{M})$ *donde* $\boldsymbol{M}$ *es el modelo Monstruo. Además* $tp^g(a/M)$=$O(A/M)$=$\{f(a) : f \in Aut(M/\boldsymbol{M})\}$

4. *Sea* $S^g(M) = \{tp^g(a/M) : a \in M\}$

Las definiciones 1. y 2. tienen sentido sin la propiedad de amalgamación, pero la relación que se obtiene no es transitiva. Luego debemos tomar la clausura transitiva de esta.

Lema 3.0.57. *Sea* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *una clase elemental abstracta que admite clausura. Dado que* $M_0 \prec_K M_1, M_2$*, con* $a_i \in M_i - M_0$*, para i=1,2. Entonces,* $tp^g(a_1/M_0, M_1) = tp^g(a_2/M_0, M_2)$ *si y sólo si existe un isomorfismo*

$$f : cl_{M_1}(M_0 \cup \{a_1\}) \longrightarrow cl_{M_2}(M_0 \cup \{a_2\}) \text{ con } f(M_0) = M_0 \text{ y } f(a_1) = a_2.$$

Definición 3.0.58. *Decimos que* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *es* λ*-estable si para todo* $M \in \mathcal{K}$*, con* $|M| = \lambda$ *entonces* $|S^g(M)| \leq \lambda$

Definición 3.0.59. *Sea* $(\mathcal{K}, \prec_K)$ *una clase elemental abstracta, decimos que es* (λ, μ)*-dócil si para cualquier* $N \in \mathcal{K}$ *con* $|N| = \mu$*,se cumple que si* $p, q \in S^g(N)$*, y para todo* $N_0 \subseteq N$ *con* $|N_0| \leq \lambda$*, y* $p|N_0 = q|N_0$*, entonces* $p = q$

En particular decimos que $\mathcal{K}$ *es* (λ, ∞)*-dócil, si* $\mathcal{K}$ *es* (λ, μ)*-dócil para todo* μ*.*

CAPÍTULO 4

R es un dominio de Dedekind y N es de Cotorsión

Lema 4.0.60. *Sea R un dominio de Dedekind y T un R-módulo de torsión. Cada P-componente tiene un R/P-filtración, para $P \in Spec(R)$.[7,16]*

Lema 4.0.61. *Sea R un dominio de Dedekind, N un módulo de Cotorsion, y A un R-módulo. Entonces, $T(A) \in {}^{\perp}N$ si y sólo si $R/P \in {}^{\perp}N$, para todo $P \in Spec(R)$ tal que $R/P \subseteq A$.*

Demostración: Dado que T(A) es un módulo de torsión sobre un dominio de Dedekind, T(A) es suma directa de sus P-componentes $M_P(T)$, donde $P \in Spec(R)$. Si $R/P \subseteq A$, la P-componente no es nula. Supongamos que $R/P \in {}^{\perp}N$ para todo $P \in Spec(R)$ tal que $R/P \subseteq A$. Cada P-componente tiene una R/P-filtración, entonces $M_P(T) \in {}^{\perp}N$, y T(A) es suma directa de las P-componentes. Así $T(A) \in {}^{\perp}N$.

Ahora suponga que $T(A) \in {}^{\perp}N$. Dado que $A/T(A)$ es un módulo libre de torsión y R es un dominio de Dedekind, tenemos que $A/T(A)$ es un módulo plano. Como N es de cotorsión, entonces $Ext^1(A/T(A), N) = 0$. Así, $A/T(A) \in {}^{\perp}N$, y $A \in {}^{\perp}N$ si y sólo si $T(A) \in {}^{\perp}N$. Luego, $A \in {}^{\perp}N$. Además, como R es un dominio de Dedekind, N tiene dimensión inyectiva ≤ 1, y se cumple que ${}^{\perp}N$ es cerrado bajo submódulos. Por lo tanto, si $R/P \subseteq A$ entonces $R/P \in {}^{\perp}N$. □

Teorema 4.0.62. *Sea R un dominio de Dedekind y N un módulo de Cotorsion, entonces existe $\mathcal{S}_N \subseteq Spec(R)$, un conjunto de ideales maximales, tal que ${}^{\perp}N = \{A : Tor^1(R/P, A) = 0$ para todo $P \in \mathcal{S}_N\}$. Además, $\mathcal{S}_N = \{P \in Spec(R) : R/P \notin {}^{\perp}N\}$*

Demostración: Sea A un R-módulo. Sabemos que $A \in {}^{\perp}N$ si y sólo si $T(A) \in {}^{\perp}N$. Por el lema anterior, $A \in {}^{\perp}N$ si y sólo si $R/P \in {}^{\perp}N$, para todo $P \in Spec(R)$ tal que $R/P \subseteq A$.

Si tomamos $\mathcal{S}_N = \{P \in Spec(R) : R/P \notin {}^{\perp}N\}$, entonces ${}^{\perp}N = \{A : R/P \nsubseteq A$, para todo $P \in \mathcal{S}_N\}$. Además sabemos que $Tor^1(R/P, A) = 0$ si y sólo si $R/P \nsubseteq A$ $\square$

Definición 4.0.63. *PE(N), es el módulo inyectivo puro más pequeno que contiene a N como submódulo puro. La existencia la garantiza [4,1.2.22(a)].*

Teorema 4.0.64. *Sea R un dominio de Dedekind y N un módulo. Entonces N es un módulo de Cotorsión si y sólo si* ${}^{\perp}N = {}^{\perp}PE(N)$*, donde* $PE(N)$ *es el cubrimiento injectivo puro de N.*

Demostración: Por el lema anterior sabemos que si N es de Cotorsión ${}^{\perp}N$ depende solo de los ideales en $\mathcal{S}_N$. Así, para ver que ${}^{\perp}N = {}^{\perp}PE(N)$ es suficiente ver que para todo $p \in Spec(R)$, $R/P \in {}^{\perp}N$ si y sólo si $R/P \in {}^{\perp}PE(N)$. Pero en la teoría de módulos de primer orden se cumple que N es elementalmente equivalente a $PE(N)$, luego solamente debemos buscar una fórmula ϕ sin parámetros en la teoría que nos diga cuando $R/P \in {}^{\perp}N$. Como los dominios de Dedekind tienen dimensión Inyectiva ≤ 1 entonces debemos ver que $Ext^1(R/P, N) = 0$, esto sucede si y sólo si todo homomorfismos $h : P \longrightarrow N$ se puede extender a $h' : R \longrightarrow N$, tal que $h'|_P = h$. Así, la fórmula ϕ nos debe decir cuando podemos encontrar la extensión deseada.

Como R es un dominio de Dedekind, entonces todo ideal maximal es primo y proyectivo, además, R es Noetheriano, luego todo ideal primo es finitamente generado . Suponga P es generado por $\langle p_1, p_2....p_n \rangle$, y consideremos la siguiente sucesión.

$$0 \longrightarrow Ker(\pi) \longrightarrow R^{(n)} \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

Donde $\pi(e_i) = p_i$. Es claro que π es sobre y la sucesión es exacta.

Dado que P es proyectivo, la sucesión se separa, y $R^{(n)} \cong P \bigoplus Ker(\pi)$. Luego $Ker(\pi)$ es sumando directo de un módulo finitamente generado, y así también es finitamente generado. Suponga $Ker(\pi)$ es generado por $\langle (r_{1j}, ...r_nj) : j \leq m \rangle$.

Veamos que todo homomorfismo $h : P \longrightarrow N$ se puede extender a R, si y sólo si

$$N \models \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n (\wedge_{j=1}^{m} \textstyle\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i = 0) \to \exists (\wedge_{i=1}^{n} p_i y = x_i)$$

Sea $h : P \longrightarrow N$ un homomorfismo, tal que $h(p_i) = x_i \in N$, y suponga existe $y \in N$ tal que $p_i y = x_i$ para todo i. Así, definimos $h' : R \longrightarrow N$ tal que $h'(1) = y$, luego $h'(p_i) = p_i h'(1) = p_i y = x_i$, y h' extiende a h.

Supongamos que todo homomorfismo $h : P \longrightarrow N$ lo puedo extender a un R, y sean $x_1, ...x_n$ que cumplen $\wedge_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i = 0$. Así, podemos definir $h : P \longrightarrow N$, como $h(p_i) = x_i$. Esta bien definido ya que $\sum_{i=1}^{n} r_{ij} p_i = 0$, pues $\langle (r_{1j}, ...r_nj) : j \leq m \rangle$ genera al $Ker(\pi)$, y así $h(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} p_i) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i = 0$ para todo j. Como existe $h' : R \longrightarrow N$, entonces $h'(p_i) = p_i h'(1) = x_i$. Luego existe $y = h'(1)$, tal que $p_i y = x_i$

para todo i, como queríamos.

Escogemos $\phi = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n(\wedge_{j=1}^m \sum_{i=1}^n r_{ij}x_i = 0) \to \exists(\wedge_{i=1}^n p_i y = x_i)$. $N \models \phi$ si y sólo si $PE(N) \models \phi$.

Entonces, ${}^\perp N = {}^\perp PE(N)$.

Suponga que ${}^\perp N = {}^\perp PE(N)$. Como $PE(N)$ es inyectivo puro, entonces ${}^\perp PE(N) = {}^\perp N$ es cerrado bajo límites directos. Luego es de Cotorsión.

$\square$

Corolario 4.0.65. *Sea R un dominio de Dedekind, y N un módulo. $({}^\perp N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta si y sólo si N es de Cotorsión.*

Demostración: Si N es de Cotorsión, entonces ${}^\perp PE(N) = {}^\perp N$. Como $PE(N)$ es un módulo inyectivo-puro $({}^\perp PE(N), \prec_N)$ es una clase elemental abstracta. $\square$

Teorema 4.0.66. *Sea R un dominio de Dedekind, y N un módulo. Si $({}^\perp N, \prec_N)$ es un clase elemental abstracta, entonces existe $\mathcal{S}_N \subseteq Spec(R)$ tal que ${}^\perp N = \{A : Tor^1(R/P, A) = 0$ para todo $P \in \mathcal{S}_N\}$. También se cumple el converso, dado $\mathcal{S}_C \subseteq Spec(R)$, existe un módulo N tal que ${}^\perp N = \{A : Tor^1(R/P, A) = 0$ para todo $P \in \mathcal{S}_C\}$, y $({}^\perp N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta.*

Además si $({}^\perp N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta, se cumple que admite clausura y la podemos calcular como $cl_L(X) = \{r \in R : lr \in \langle X \rangle, l \in L\}$.

Demostración: Si $({}^\perp N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta, entonces N es de cotorsión, por el teorema anterior obtenemos el resultado. Sea $\mathcal{S}_C \subseteq Spec(R)$,

Veamos que ${}^\perp N$, es cerrado bajo productos directos. Sea α un cardinal y $A_i \in {}^\perp N$ para todo $i < \alpha$. Así, $\prod_{i<\alpha} A_i \in {}^\perp N$. Como es cerrado bajo productos directos entonces $({}^\perp N, \prec_N)$ admite clausura. [1,2.9]

$\square$

Número de Löwenheim-Skolem

En en caso en el cual R es un dominio de Dedekind, y N un módulo de Cotorsión, tenemos que $({}^\perp N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta, y que además existe un módulo inyectivo puro $I(I = PE(N))$, tal que ${}^\perp I = {}^\perp N$. Así, $LS({}^\perp N) = LS({}^\perp I) = |R| + \aleph_0$

Ejemplo 4.0.67. *Sea R un dominio de Dedekind, y $\mathcal{S}_C \subseteq Spec(R)$*

1. *$\mathcal{S}_C = \emptyset$. Por el teorema anterior existe un R-módulo N tal que ${}^\perp N = \{A : Tor^1(R/P, A) = 0$ para todo $P \in \mathcal{S}_C\}$. Al ser $\mathcal{S}_C$ vacío, ${}^\perp N$ sera el conjunto*

de todos los R-módulos. Además, $\prec_N$ es la relación de submódulo, pues si A, B son R-módulos y $A \subseteq B$, siempre se cumple que B/A es un R-módulo.

2. $\mathcal{S}_C = Spec(R)$ *. De nuevo existe N un R-módulo tal* $^{\perp}N = \{A : Tor^1(\boldsymbol{Z}/p, A) = 0$ *para todo p primo*$\}$*. Veamos que* $^{\perp}N$ *es el conjunto de todos los R-módulos libres de torsión*

Es claro que $\mathbb{Z}$, el conjunto de los número enteros es un dominio de Dedekind, ya que es un P.I.D. Sea R =$\mathbb{Z}$.

1. $\mathcal{S}_C = \emptyset$.

   Al ser $\mathcal{S}_C$ vacío, $^{\perp}N$ sera el conjunto de todos los grupos Abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos). Además, $\prec_N$ es la relación de subgrupo, pues si A, B son grupos abelianos y $A \subseteq B$, siempre se cumple que B/A es un grupo abeliano.

   Así, la clase de todos los grupos Abelianos $\mathcal{K}^{ab}$ con $\prec$ como la relación de subgrupo, es una clase elemental abstracta con $LS(\mathcal{K}^{ab}) = \aleph_0$

2. $\mathcal{S}_C = Spec(\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} : p$ *es un número primo*$\}$

   De nuevo existe N un grupo abeliano tal $^{\perp}N = \{A : Tor^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) = 0$ para todo p primo$\}$. Veamos que $^{\perp}N$ es el conjunto de todos los grupos abelianos libres de torsión.

   Tomemos $A \in {}^{\perp}N$, se cumple que $Tor^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) = \{a \in A : pa = 0\} = 0$. Sea $a \in A$, $a \neq 0$, suponga que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $na = 0$. Como $n = p_1p_2p_3....p_n$, donde p_i, $i \leq n$ son números primos, entonces $p_1p_2p_3....p_na = 0$. Luego, para algún i, $p_ia = 0$ y obtenemos una contradiccón. Por lo tanto A es libre de torsión.

   Así, $A \in {}^{\perp}N$ si y sólo A es libre de torsión. Ahora veamos que $\prec_N$ es la relación de subgrupo puro, es decir, si A, B son grupos libres de torsíon, con $A \subseteq B$, se cumple que B/A es libre de torsión si y sólo si $A \subseteq_* B$.

   Supongamos que B/A es libre de torsión. Sea $x \in A, n \in \boldsymbol{Z}$, tal que existe $b \in B$, que cumple $nb = x$. Entonces, $nb \in A$, y $nb+[A] = 0$, luego $n(b+[A]) = 0$. Pero B/A es libre de torsión, luego $b \in A$, y $A \subseteq_* B$.

   Ahora suponga $A \subseteq_* B$, y que B/A no es libre de torsión. Luego existe $b \in B - A$ tal que $n(b + [A]) = 0$. Así $nb = x \in A$, y como $A \subseteq_* B$ existe $a \in A$, tal que $nb = na = x$, así n(b-a)=0, lo que contradice que B es libre de torsión. Entonces B/A es libre de torsión.

   Así, la clase de los grupos abelianos libres de Torsión $\mathcal{K}^{torfr}$, con $\prec$ como la relación de subgrupo puro es una clase elemental abtracta con $LS(\mathcal{K}^{torfr}) = \aleph_0$

CAPÍTULO 5

Estabilidad en Grupos Abelianos

Clausura en los Grupos Abelianos

Sea P un conjunto de ideales primos. Sabemos que la clausura en los Dominios de Dedekind esta dada por $cl_L(X) = \{m \in L : \{r \in R : rm \in \langle X \rangle\}$ es producto finito de elementos de $P\}$.Si $P \neq \emptyset$ un conjunto de números primos $\mathbb{Z}$ entonces $cl_L(X) = \{m \in L : \{n \in \mathbb{Z} : nm \in \langle X \rangle\} = \prod_{<k}, \langle p_i \rangle$ con $p_i \in P\}$, en los grupos abeliano. Sea $\langle p_i \rangle\_* = \{p_i^{\alpha} : \alpha \in \mathbb{Z}\}$, el grupo abeliano multiplicativo generado por $p_i \in P$

Sea $f : \prod_{<k}, \langle p_i \rangle \longrightarrow \langle p_1, p_2 .... p_k \rangle_*, f(n_1 p_1, n_2 p_2, ..., n_k p_k) = p_1^{(n_1)} p_2^{(n_2)} .... p_k^{(n_k)}$, es un isomorfismo. Así, $cl_L(X) = \{m \in L :$ existe $n \in \langle p_1, p_2 .... p_k \rangle_*$ tal que $nm \in \langle X \rangle$ con $p_i \in P\}$.

Luego es el conjunto de elementos en L, tal que existe $n \in \mathbb{Z}$, producto de potencia de primos en P.

Cuando $P = \emptyset$, $cl_L(X) = \{m \in L :$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nm \in \langle X \rangle\} = \langle X \rangle_L$.

Lema 5.0.68. *La clausura en los grupos abelianos induce una pregeometría.*

Demostración: . Sabemos que esta clausura cumple:

1. $X \subseteq cl_L(X)$
2. $cl_L(cl_L(X)) = cl_L(X)$
3. Carácter finito: $cl_L(X) = \cup\{X' : X' \subseteq_{fin} X\}$

Sólo nos queda ver que cumple intercambio. Es decir: $a \in cl_L(X \cup \{b\}), a \notin cl_L(X)$ entonces $b \in cl_L(X \cup \{a\})$.

- Si $P = \emptyset$ es bien conocido que $cl_L(X) = \langle X \rangle_L$ induce una pregeometría.

- Si $P \neq \emptyset$. Sea $a \in cl_L(X \cup \{b\})$, implica que existe $n = p_1^{(n_1)} p_2^{(n_2)} \ldots . p_k^{(n_k)}$ con $p_i \in P$, tal que $na \in \langle X \cup \{b\}\rangle$, y $a \notin cl_L(X)$, entonces para todo m producto de potencias de primos en P, $am \notin \langle X\rangle$, en especial para m=n, luego $an \notin \langle X\rangle$. Como $cl_L(X) = \langle X\rangle_L$ induce una pregeometría, entonces $b \in \langle X \cup \{an\}\rangle$, y $nb \in \langle X \cup \{a\}\rangle$. Así, $b \in cl_L(X \cup \{a\})$, y se cumple la propiedad de intercambio.

□

Es claro que si $A \prec_N B$, entonces $cl_B(A \cup \{b\}) = \langle A \cup C\rangle$, donde C es un conjunto contable. Luego

Teorema 5.0.69. *Ser $R = \mathbb{Z}$, N un grupo abeliano y P, un conjunto de números primos no vacío, tal que $^{\perp}N = \{A : Tor^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) = 0$ para todo $p \in P\}$, y λ es un cardinal infinito. $(^{\perp}N, \prec_N)$ es estable si y sólo si $\lambda = \lambda^{\omega}$.*

Demostración: Asumamos que $\lambda = \lambda^{\omega}$. Sea $B \in {}^{\perp}N$, $A \prec_N B$, $a, a' \in B$, y $|A| \leq \lambda$. Es claro que si $A \prec_N B$, entonces $cl_B(A \cup \{a\}) = \langle A \cup C\rangle$, donde C es un conjunto contable. Supongamos que $tp^g(a/A, B) \neq tp^g(a'/A, B)$, luego no existe un isomorfismo $f : cl_B(A \cup \{a\}) \longrightarrow cl_B(A \cup \{a'\})$ con $f(A) = A$ y $f(a) = a'$. Por lo anterior $cl_B(A \cup \{a\}) = \langle A \cup C\rangle$ y $cl_B(A \cup \{a'\}) = \langle A \cup C'\rangle$, con C', C contable. Así, no existe un isomorfismo que fije a A tal que $f(C) = C'$, entonces $qftp(C/A) \neq qftp(C'/A)$. Luego el número de tipos de Galois sobre A es a lo más el número de tipo libres de cuantificadores de ω-sucesiones sobre A. Como sólo hay λ tipos libres de cuantificadores de sucesiones finitas sobre A, entonces sólo hay λ^{ω} tipos libres de cuantificadores. Así $|S^g(A)| \leq \lambda^{\omega} = \lambda$, y tenemos que es estable.

Supongamos que $(^{\perp}N, \prec_N)$ es estable , y λ un cardinal infinito. Sea p un número primo en P. Fijamos una enumeración $\{f_i : i \in \lambda^{\omega}\}$, donde $f_i : \omega \longrightarrow \lambda$, inyectiva para cada i. Sea $S' = \omega \times \lambda$, $S = \{e_s : s \in S'\}$, y A el grupo abeliano libre con base S, es claro que $|A| = \lambda$. Definimos para cada $i \in \lambda^{\omega}$ $B_i = F_i/K_i$, donde F_i es el grupo libre generados por $S \cup b_i \cup \{z_{n,i} : n \in \omega\}$ y K_i es el subgrupo de F_i, generado por

$$w_{n,i} = p^{n+1} z_{n,i} - b_i - \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l, f_i(l)}$$

K_i también es grupo abeliano libre, al ser subgrupo de un grupo abeliano libre.

Definimos $F : A \longrightarrow B_i$, como $F(a) = a + K_i$. Veamos que es inyectiva, si $F(a) = a + K_i = 0$, entonces $a \in K_i$. Así:

$$\sum_{s \in S'} c_s e_s = \sum_{n \in \omega} d_n (p^{n+1} z_{n,i} - b_i - \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l, f_i(l)})$$

,

donde c_s, d_n estan en $\mathbb{Z}$. Podemos ver ambos en términos de la base de F_i. Luego los coeficientes de $z_{n,i}$ en A, son cero y en K_i son $d_n p^{n+1}$, así $d_n = 0$ para todo n, y se tiene que a=0. De esta forma podemos ver a A como subgrupo de B. Además, lo podemos ver como subgrupo puro. Suponga que no, entonces existe q primo, y $a \in A$ tal que $q(b + K_i) = a + K_i$ y $b \notin A$. Luego

$$\sum_{s\in S'} c_s e_s = qb + \sum_{n\in\omega} d_n(p^{n+1} z_{n,i} - b_i - \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)})$$

, donde q no divide a algún c_s para $s \in S'$.

De nuevo viéndolos desde la base de F_i tenemos que el coeficiente de $z_{n,i}$ es $ql - d_n p^{n+1}$ en el lado derecho de la ecuación. En el lado izquierdo es igual a 0. Así, q divide a d_n y obtenemos una contradicción, pues c_s sería divisible por q, para todo s. Ya que si s no es de la forma $(l, f_i(l))$, para $l \in \mathbb{Z}$, se cumple pues $c_s = qa_s$, pues e_s solo aparece en b, y si $s = (l, f_i(l))$, entonces $c_s = a_s q + mp^l \sum_{n\geq l} d_n$, y como q divide d_n entonces q divide a c_s.

Tenemos que A es subgrupo puro de B_i , y $B_i \in {}^{\perp}N$ pues es libre de torsión...................,.Como $\mathbb{Z}$ es un dominio de Dedekind y ${}^{\perp}N = {}^{\perp} PE(N)$. Entonces,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B_i \longrightarrow B_i/A \longrightarrow 0$$

induce la siguiente sucesión

$$... \longrightarrow Hom(B_i, PE(N)) \xrightarrow{Hom(f,PE(N))} Hom(A, PE(N)) \longrightarrow Ext^1(B_i/A, PE(N))$$

$$\longrightarrow Ext^1(B_i, PE(N)) \longrightarrow ....$$

Como $A \subseteq_* B_i$ y PE(N) es inyectivo puro, entonces $Hom(f, PE(N))$ es sobre y como $Ext^1(B_i, PE(N)) = 0$, pues $B_i \in {}^{\perp}N$, entonces $Ext^1(B_i/A, PE(N)) = 0$ y $A \prec_N B_i$.

También, en $Bi/\langle A \cup \{b_i\}\rangle$ el coset de $z_{n,i}$ tiene orden p^{n+1}. Pues, , $p^{n+1} z_{n,i} = w_{n,i} + b_i + \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)}$, entonces $p^{n+1} z_{n,i} + K_i = b_i + \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)} + K_i$, y $\sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)} \in A$ .Así, $((p^{n+1} z_{n,i} + K_i) + [\langle A \cup \{b_i\}\rangle]) = (b_i + \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)} + K_i) + [\langle A \cup \{b_i\}\rangle]) = 0$ Así, $z_{n,i} \in cl_{B_i}(A, b_i) = \{m \in B_i :$ existe t producto de potencias de primos en P tal que $mt \in \langle A \cup \{b_i\}\rangle\}$. En este caso $t = p^{n+1}$. Para todo $n \in \omega$

Afirmamos que que para todo $i \neq j$, $tp^g(b_i/A, B_i) \neq tp^g(b_j/A, B_j)$. Suponga que no, luego $tp^g(b_i/A, B_i) = tp^g(b_j/A, B_j)$, y existe $\phi : cl_{B_i}(A, b_i) \longrightarrow cl_{B_j}(A, b_j)$ tal que $\phi(A) = A$ y $\phi(b_i) = b_j$. Escogemos el n más pequeño tal que $f_i(n) \neq f_j(n)$.

Tenemos que respecto a B_i

$$p^{n+1}z_{n,i} = b_i + \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)}$$

Aplicando ϕ, obtenemos

$$p^{n+1}\phi(z_{n,i}) = b_j + \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_i(l)}$$

, y además

$$p^{n+1}z_{n,j} = b_j + \sum_{l=0}^{n} p^l e_{l,f_j(l)}$$

Restando las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$p^{n+1}(\phi(z_{n,i}) - z_{n,j}) = p^n(e_{n,f_i(n)} - e_{n,f_j(n)})$$

, por la minimalidad de n.

Como $\phi(z_{n,i}) - z_{n,j} \in B_j - (A + K_j)$, y $p^n(e_{n,f_i(n)} - e_{n,f_j(n)}) \in A$, entonces se contradice que $A + K_j$ sea un subgrupo puro de B_j.

Sabemos que $|A| = \lambda$, y acabamos de probar que $\lambda^\omega \leq |S^g(A)|$. Por hipótesis $(^\perp N, \prec_N)$ es estable, así $|S^g(A)| \leq \lambda$, y obtenemos que $\lambda = \lambda^\omega$ □

Corolario 5.0.70. *Ser $R = \mathbb{Z}$, N un grupo abeliano. $(^\perp N, \prec_N)$ es $(\aleph_0, \infty)$-dócil.*

Demostración. Sea $B \in {}^\perp N$, $A \prec_N B$, $a, a' \in B$, y $|A| \leq \lambda$. Es claro que si $A \prec_N B$, entonces $cl_B(A \cup \{a\}) = \langle A \cup C \rangle$, $cl_B(A \cup \{a'\}) = \langle A \cup C' \rangle$ donde C, C' son conjuntos contables. Supongamos que $tp^g(a/A, B) \neq tp^g(a'/A, B)$, entonces $qftp(C/A) \neq qftp(C'/A)$, luego existe un conjunto contable $A_0 \subseteq A$ tal que $qftp(C/A_0) \neq qftp(C'/A_0)$,pues los tipo sintácticos siempre cumple estas propiedades, lo que implica que $tp^g(a/A_0, B) \neq tp^g(a'/A_0, B)$. Así tenemos que es dócil. □

Teorema 5.0.71. *Ser $R = \mathbb{Z}$, N un grupo abeliano y $P = \emptyset$. ${}^\perp N = \{A : Tor^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) = 0$ para todo $p \in P\}$. Es estable, para todo cardinal infinito λ. [9,4.5]*

CAPÍTULO 6

Clases elementales abstractas finitarias

Vamos a definir la noción de carácter finito en un clase elemental abstracta, la cual fue introducida por Hyttinen y Kesälä con el fin de trabajar con una noción de tipo más debíl que nos permite ver un mejor comportamiento global, definir una buena noción de independencia y probar la existencia de modelos saturados en todos los cardinales(bajo dócilidad).

Si tomamos T un teoría de primer orden, $\mathcal{K}$ los modelos de la teoría, y $\prec_K$ la noción de subestructura elemental. Podemos probar que $A \prec_K B$, si y sólo si $A \subseteq B$ y para toda túpla finita a se cumple que $tp(a/\emptyset, A) = tp(a/\emptyset, B)$. Suponga que $B \models \exists x \phi(x, a)$, $a \in A$, definimos $\mu(y) = \exists x \phi(x, y)$, la cual es una fórmula sobre el vacío y $A \models \mu(a)$. Así por hipótesis ,$A \models \mu(a)$, y $B \models \exists x \phi(x, a)$, por el test de Tarski-Vaught $A \prec_K B$.

Esta propiedad nos muestra como la noción de subestructura elemental sólo depende de una cantidad finita de información. La idea detrás de la definición de carácter finito es ver esta propiedad desde las clases elementales abstractas.

Definición 6.0.72 (Carácter finito). *Sea $(\mathcal{K}, \prec_K)$ una clase elemental abstracta, tiene carácter finito si dados $A, B \in \mathcal{K}$ se satisface que $A \prec_K B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y para toda tupla finita $a \in A$, $tp^g(a/\emptyset, A) = tp^g(a/\emptyset, B)$.*

Lema 6.0.73. *Sea $(\mathcal{K}, \prec_K)$ una clase elemental abstracta con amalgamación, $(\mathcal{K}, \prec_K)$ tiene carácter finito si y sólo si dados $A, B \in \mathcal{K}$, se satisface que $A \prec_K B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y para todo $X \subseteq A$ finito existe una $\mathcal{K}$-inmersión $f : A \longrightarrow B$, tal que $f|_X = id_X$.*

Definición 6.0.74. *Sea $(\mathcal{K}, \prec_K)$ una clase elemental abstracta, decimos que es finitaria si cumple las siguientes propiedades:*

1. *$(\mathcal{K}, \prec_K)$ tiene modelos arbitrariamente grandes.*

2. *$(\mathcal{K}, \prec_K)$ cumple la propiedad de amalgamación disyunta.*

3. *$(\mathcal{K}, \prec_K)$ tiene modelos primos*

4. *$(\mathcal{K}, \prec_K)$ tiene carácter finito*

5. *$LS(\mathcal{K}) = \aleph_0$*

6.0.8. Clases elementales abstractas finitarias inducidas por clases Cotilting

Lema 6.0.75. *Sea R un anillo, N un R-módulo con dimensión inyectiva ≤ 1. Si ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting, entonces existe un conjunto de R-homomorfismos $\theta = \{\theta_i : F_i \longrightarrow G_i, i \in I\}$, donde los F_i's y los G_i's son R-módulos a izquierda finitamente presentados, tal que ${}^{\perp}N = \{M \in R - Mod : id_M \otimes \theta_i : M \otimes F_i \longrightarrow M \otimes G_i$ es inyectivo para todo $i \in I\}$*

Lema 6.0.76. *Sea R un anillo, F un R-módulo a izquierda finitamente generado por $\{f_i : i < m\}$, C un R-módulo a derecha y $\{c_i : i < m\}$ un conjunto finito de elementos de C. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $\sum_{i<m} c_i \otimes f_i = 0$

2. *Existe $0 < n < \omega$, una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(R)$, y elementos $\{c'_j : j < n\}$ en C tal que $\sum_{i<m} a_{ij} f_i = 0$ y $c_i = \sum_{j<n} c'_j a_{ji}$*

Lema 6.0.77. *Sea R un anillo, N un R-módulo con dimensión inyectiva ≤ 1. Si ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting, entonces para todo R-módulo B existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tal que $D \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$, $C \in {}^{\perp}N$.

[4,4.3.23 y 8.1.10]

Teorema 6.0.78. *Sea R un anillo, N un R-módulo con dimensión inyectiva ≤ 1. Si ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting, entonces $({}^{\perp}N, \prec_N)$ tiene carácter finito.*

Demostración. Suponga que ${}^{\perp}N$ no tiene carácter finito, entonces existen módulos $A, B \in {}^{\perp}N$, tal que $A \subseteq B$, $B/A \notin {}^{\perp}N$ y para todo conjunto finito $X \subseteq A$ existe una ${}^{\perp}N$-inmersión $f : A \longrightarrow B$, tal que $f|_X = id_X$.

Dado ${}^{\perp}N$ es especial, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tal que $D \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$, $C \in {}^{\perp}N$.

Como $B, C \in {}^{\perp}N$, entonces $D \in {}^{\perp}N$. Además $C \cong D/B$. Luego $D/A \notin {}^{\perp}N$, pues si estuviera se tendría la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow B/A \longrightarrow D/A \longrightarrow D/B \longrightarrow 0$$

Como $D/B, D/A \in {}^{\perp}N$, entonces $B/A \in {}^{\perp}N$ contradicción.

Sabemos que existe $\theta = \{\theta_i : F_i \longrightarrow G_i, i \in I\}$, donde F_i's y los G_i's son R-módulos finitamente presentados, tal que ${}^{\perp}N = \{M \in R - Mod : id_M \otimes \theta_i : M \otimes F_i \longrightarrow M \otimes G_i$ es inyectivo para todo $i \in I\}$. Dado que $D/A \notin {}^{\perp}N$, existen F, G finitamente presentados , tal que $id_{D/A} \otimes \theta_j : D/A \otimes F \longrightarrow D/A \otimes G$ no es inyectiva.

Como F, G son finitamente presentados, entonces son finitamente generados y tomamos $\{f_i : i < n\}$,$\{g_i : i < m\}$ el conjunto de generadores de F,G, respectivamente. Luego existe una Matriz $(r_{ij}) \in M_{n\times m}(R)$, tal que $\theta(f_i) = \sum_{j<m} r_{ij} g_j$.

Dado que $id_{D/A} \otimes \theta_j$ no es inyectiva, existe $\sum_{i<m}(d_i + A \otimes f_i) \neq 0$ tal que $id_{D/A} \otimes \theta_j(\sum_{i<m}(d_i + A \otimes f_i)) = \sum_{j<m}(\sum_{i<n} d_i r_{ij} + A) \otimes g_j = 0$ en $D/A \otimes G$.

Como $\{g_j : j < m\}$ es un conjunto de generadores de G y $\{\sum_{i<n} d_i r_{ij} + A : j < m\}$ un conjunto de elementos de D/A, y $\sum_{j<m}(\sum_{i<n} d_i r_{ij} + A) \otimes g_j = 0$, entonces usando el lema anterior tenemos que existe $0 < p < \omega$, una matriz $D = (s_{kj}) \in M_{p\times m}(R)$ y $\{d'_k + A : k < p\} \in D/A$ tal que

$$\sum_{j<m} s_{kj} g_j = 0$$

para todo $k < p$ y

$$\sum_{i<n} d_i r_{ij} + A = \sum_{k<p} d'_k s_{k,j} + A$$

para todo $j < m$.

Luego, $(\sum_{i<n} d_i r_{ij}) - (\sum_{k<p} d'_k s_{k,j}) \in A$ para todo $j < m$. Definimos $a_j = (\sum_{i<n} d_i r_{ij}) - (\sum_{k<p} d'_k s_{k,j})$. Además,

$$\sum_{j<m}(\sum_{i<n} d_i r_{ij} - a_j) \otimes g_j = \sum_{j<m}(\sum_{k<p} d'_k s_{kj}) \otimes g_j = \sum_{k<p}(\sum_{j<m} d'_k \otimes s_{kj} g_j) = 0$$

Tomemos $X = \{a_j : j < m\}$, $X \subseteq A$, finito, así existe $f_X : A \longrightarrow B$, una ${}^{\perp}N$-inmersión, tal que $f_X(a_j) = a_j$ para todo $j < m$.

Tenemos que,

$$\sum_{j<m}(\sum_{i<n} d_i r_{ij} + f_X(A)) \otimes g_j = \sum_{j<m}(\sum_{k<p} d'_k s_{k,j} + f_X(A)) \otimes g_j = \sum_{k<p}(\sum_{j<m} d'_k + f_X(A) \otimes s_{kj} g_j) = 0$$

en $D/f_X(A) \otimes G$.

Por hipótesis $B/f_X(A) \in {}^{\perp}N$, y $(D/f_X(A))/(B/f_X(A)) \cong D/B \cong C \in {}^{\perp}N$. Luego, $D/f_X(A) \in {}^{\perp}N$. Entonces $id_{D/f_X(A)} \otimes \theta_j : D/f_X(A) \otimes F \longrightarrow D/f_X(A) \otimes G$ es inyectiva, y como $id_{D/f_X(A)} \otimes \theta_j(\sum_{i<n} d_i + f_X(A) \otimes f_i) = \sum_{j<m}(\sum d_i r_{ij} + f_X(A)) \otimes g_j$=0, así $\sum_{i<n} d_i + f_X(A) \otimes f_i = 0$.

Sea $v : f_X(A) \longrightarrow D$, la inclusión, y $v \otimes id_F : f_X(A) \otimes F \longrightarrow D \otimes F$, y considere la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow f_X(A) \longrightarrow D \longrightarrow D/f_X(A) \longrightarrow 0$$

induce la siguiente sucesión exacta.

$$.... \longrightarrow f_X(A) \otimes F \longrightarrow D \otimes F \xrightarrow{p \otimes id_F} D/f_X(A) \otimes F \longrightarrow 0$$

y $p \otimes id_F(\sum_{i<n} d_i \otimes f_i) = \sum_{i<n} d_i + f_X(A) \otimes f_i = 0$. Así, $\sum_{i<n} d_i \otimes f_i \in Ker(p \otimes id_F) = Im(v \otimes id_F)$. Luego existen $\{a'_i : i < n\}$ en A, tal que $\sum_{i<n} d_i - f_X(a'_i) \otimes f_i = 0$ en $D \otimes F$. Ahora, $id_D \otimes \theta(\sum_{i<n} d_i - f_X(a'_i) \otimes f_i) = \sum_{j<m} \sum_{i<n}(d_i - f_X(a'_i))r_{ij} \otimes g_j = 0$. De nuevo como $\{g_j : j < m\}$es un conjunto de generadores de G y $\{\sum_{i<n}(d_i - f_X(a'_i))r_{ij} : j < m\}$ un conjunto de elementos de D, podemos usar el lema anterior. Así, existen $0 < q < \omega$, una matriz $f_{lj} \in M_{q \times n}(R)$, y $\{b_l : l < q\}$ en D, tal que $\sum_{j<m} f_{lj} g_j = 0$, para todo $l < q$, $\sum_{i<n}(d_i - f_X(a'_i))r_{ij} = \sum_{l<q} b_l f_{lj}$, para todo j.

$$f_X(a_j) + \sum_{k<p} d'_k s_{kj} = a_j + \sum_{k<p} d'_k s_{kj} = \sum_{i<n} d_i r_{ij} = \sum_{i<m} f_X(a'_j) r_{ij} + \sum_{l<q} b_l f_{lj}$$

$$f_X(a_j) - \sum_{i<m} f_X(a'_j) r_{ij} = \sum_{l<q} b_l f_{lj} - \sum_{k<p} d'_k s_{kj}$$

$$\sum_{j<m} f_X(a_j - \sum_{i<n} a'_j r_{ij}) \otimes g_j = \sum_{j<m}(\sum_{l<q} b_l f_{lj} - \sum_{k<p} d'_k s_{kj}) \otimes g_j = 0$$

Así, $\sum_{j<m} f_X(a_j - \sum_{i<n} a'_j r_{ij}) \otimes g_j = 0$ en $D \otimes G$. Además, $f_X : A \longrightarrow f_X(A)$, es biyectiva, luego existe $g_X : f_X(A) \longrightarrow A \subseteq D$, tal que $g_X f_X = id_A$. Dado que $D/f_X(A) \in {}^{\perp}N$, y $D \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$ entonces $Ext^1(D/f_X(A), D) = 0$, y existe $g : D \longrightarrow D$, la cual extiende a g_X.

Luego,

$(g \otimes id_G)(\sum_{j<m} f_X(a_j - \sum_{i<n} a'_i r_{ij}) \otimes g_j) = \sum_{j<m}(a_j - \sum_{i<n} a'_i r_{ij}) \otimes g_j = \sum_{j<m}((\sum_{i<n} d_i r_{ij}) - (\sum_{k<p} d'_k s_{k,j})) - \sum_{i<n} a'_i r_{ij}) \otimes g_j = \sum_{j<m} \sum_{i<n}(d_i - a'_i) r_{ij} \otimes g_j = 0$

Así,

$$\sum_{j<m} \sum_{i<n}(d_i - a'_i) r_{ij} \otimes g_j = 0$$

. Sabemos que $D \in {}^{\perp}N$, luego $id_D \otimes \theta : D \otimes F :\longrightarrow D \otimes G$, es inyectiva. Como $id_D \otimes \theta(\sum_{i<n}(d_i - a_i') \otimes f_i) = \sum_{j<m}\sum_{i<n}(d_i - a_i')r_{ij} \otimes g_j = 0$, entonces $\sum_{i<n}(d_i - a_i') \otimes f_i = 0$ en $D \otimes F$. Y sea $p : D \longrightarrow D/A$, la proyección, $p \otimes id_F : D \otimes F \longrightarrow D/A \otimes F$, $p \otimes \theta(\sum_{i<n}(d_i - a_i') \otimes f_i) = \sum_{i<n}(d_i + A) \otimes f_i = 0$. Contradicción. □

Corolario 6.0.79. *Sea R un anillo contable y N un R-módulo. Si ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting, entonces $({}^{\perp}N, \prec_N)$ es una clase elemental abstracta finitaria.*

Demostración:

1. ${}^{\perp}N$ tiene modelos arbitrariamente grandes, pues todos los módulos proyectivos pertenecen a ${}^{\perp}N$, y en especial los libres de cardinal arbitrario.

2. $({}^{\perp}N, \prec_N)$, cumple la propiedad de amalgamación disjunta.

3. El módulo trivial es un modelo primo sobre el vacío.

4. Por el teorema anterior tiene carácter finito.

5. Como ${}^{\perp}N$ es una clase Cotilting, existe un módulo puro inyectivo E tal que ${}^{\perp}N = {}^{\perp}E$. El número de Löwenheim-Skolem es $LS({}^{\perp}E) = |R| + \aleph_0$. Como R es contable, $LS({}^{\perp}N) = \aleph_0$

□

Preguntas

- Se pueden caracterizar los módulos de Cotorsión tal que $({}^{\perp}N, \prec_N)$ es una CLEA
- Se puede caracterizar por medio de propiedades algebraicas cuando cl_L forma un pregeometría.
- Existe un teorema con el cual podemos relacionar los tipos e Galois directamente con los tipos sintácticos libres de cuantificadores.
- Se puede caracterizar por medio de propiedades algebraicas la $\aleph_0$-Galois estabilidad, o el es ser estable para todos los cardinales.
- Cuándo $({}^{\intercal}N, \prec_N)$ forma una clase elemental abstracta?
- Se puede relacionar esta correspondencia entre propiedades algebraicas y modelo teóricas con otra rama de las matemáticas. Por ejemplo la teoría de categorías ?

Bibliografía

[1] J. T. Baldwin, P. C. Eklof, and J. Trlifaj, ${}^{\perp}N$ as an abstract elementary class, Annals of Pure Appl. Logic 149(2007), 25,39.

[2] J. Baldwin. Categoricity. www.math.uic.edu.

[3] S. Shelah. Classification Theory . North-Holland, 1991. second edition.

[4] R. Göbel and J. Trlifaj, Approximations and Endomorphism Algebras of Modules, GEM 41, W. de Gruyter, Berlin 2006

[5] Z. Chatzidakis, Cherlin G., Shelah S., Srour G., Wood C. Orthogonality in separably closed fields. Classification Theory. Ed. J. Baldwin. New York, Springer, 1985, pp. 72-88.

[6] J. Trlifaj,Abtract elementary classes induced by tilting and cotilting modules have finite character.

[7] P. Eklof and J. Trlifaj. Covers induced by Ext. J. Algebra, 231:640, 651, 2000.

[8] T. Hyttinen and M. Kesälä. Independence in finitary AEC. to appear APAL: Kesala website in Helsinki.

[9] J.Baldwin,W.Calvert,J.Goodrick,A.Villaveces,and A.Walczak,Typke. Abelian groups as AEC. preprint.