Independencia y Calculabilidad

David Valderrama Hernández

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C., Colombia
2018

Independencia y Calculabilidad

David Valderrama Hernández

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director:
Andrés Villaveces Niño
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C., Colombia
2018

A mi padre

Agradecimientos

Agradezco a mi madre por todo el apoyo brindado durante este tiempo de mi pregrado. Al profesor Andrés Villaveces Niño por haber aceptado ser mi director de tesis, y por todas sus ideas y consejos para poder realizar lo mejor posible este trabajo. Agradezco a la Universidad Nacional de Colombia por la formación que me dio durante este período.

Resumen

Se exponen las ideas fundamentales para demostrar el teorema de Paris-Harrington: la codificación de la relación de satisfacción y la indiscernibilidad; y cómo éstas son la base de uno de los trabajos de Harvey Friedman que demuestra la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal con la propiedad de Ramsey estacionaria, a partir de un clique maximal $\mathbb{Z}^+$ superior invariante de un grafo orden-invariante sobre $\mathbb{Q}$. Además, se demuestra el teorema mencionado de Friedman con algunas variaciones y correcciones de la demostración original.
Palabras clave: Incompletitud, Indiscernibles, Codificación, Grafo orden-invariante, Clique, Máquina de Turing, Aritmética de Peano.

Abstract

We present the main ideas of the proof of the Paris-Harrington theorem (coding of the satisfaction relation and indiscernibility) and show how these constitute the basis of one of a much more recent theorem of Harvey Friedman's. In that work, Friedman proves the consistency of ZFC with the existence of a cardinal with the "Ramsey stationary property", from an upper $\mathbb{Z}^+$ order invariant maximal clique of an order invariant graph over $\mathbb{Q}$. In addition, we present in detail a proof of that theorem of Friedman's, as well as some variations and corrections of the original.
Keywords: Incompleteness, Indiscernibility, Coding, Order Invariant Graph, Clique, Turing Machine, Peano Arithmetic

Contenido

1 Introducción

Este trabajo trata, primordialmente, sobre la demostración del teorema de Harvey Friedman del artículo [8], que él mismo denominó como el mayor avance de un caso concreto de incompletitud matemática, hasta el momento. El teorema demuestra la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal con la propiedad estacionaria de Ramsey, a partir de una propiedad de combinatoria "finita" de grafos orden-invariantes sobre $\mathbb{Q}$. El artículo fue publicado en el año 2011; desde ese fecha siguió mejorando sus resultados, hasta que en el año 2014 publicó [4], con un nuevo teorema con la misma esencia del que ya mencionamos, pero esta vez él lo denominó como un caso de incompletitud finita. El artículo [1], de Adam Yedidia y Scott Aaronson, justifica el nombre que dio Friedman debido a que éste presenta una máquina de Turing con 7910 estados, que se construye a partir de los resultados de [4], tal que su comportamiento es independiente de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección (ZFC).

La máquina de Turing de Adam Yedidia y Scott Aaronson la catalogamos como un caso de independencia de la calculabilidad. Sobre esta temática trata el capítulo 2, donde presentamos un breve ensayo que expone las conexiones que hay entre el fenómeno de la incompletitud y la calculabilidad. Una de estas conexiones es el teorema de Paris-Harrington que trata sobre la primera afirmación descubierta, cuyo contenido es puramente matemático, que es verdadera en los números naturales pero no se puede demostrar por la Aritmética de Peano (PA). En el capítulo 3 presentamos una demostración del teorema de Paris-Harrington, y resaltamos dos ideas fundamentales en su demostración: el uso de indiscernibles y la codificación de la relación de satisfacción. Estas dos ideas son el pilar de la demostración del teorema de Friedman del artículo [8].

En el capítulo 4 presentamos la demostración del teorema de Friedman. Desarrollamos con más rigurosidad la prueba e hicimos correcciones y variaciones de la demostración original, de las cuales, las más importantes son:

- En la sección 4.2 resaltamos la increíble idea de codificar las fórmulas usando un clique maximal, agregando ejemplos que ilustran la codificación. Además, cambiamos la condición que codifica cuando una fórmula es del tipo existencial para no complicarnos con el orden de las variables.

- En la sección 4.4, presentamos de una manera un poco distinta el axioma de indiscernibilidad acotada porque consideramos que así se simplifican algunas demostraciones, además incluimos un teorema que denominamos teorema de la definibilidad acotada que, aunque Friedman da las ideas de cómo hacerlo, él no lo desarrolla completo.

- Según nuestras cuentas, el modelo $M(S)$ es $(\mathbb{Q} \cap [0,k])^{16}$ y no $(\mathbb{Q} \cap [0,k])^{14}$.
- Dividimos en dos casos el cuarto ítem del lema 5.7.20 de [8] dado que, según nuestro trabajo, los dos casos no se pueden unir. Les dimos el nombre de separación de primer orden y separación de segundo orden, y se encuentran en el teorema 4.6.4.
- Según nuestras cuentas, IMCT(k,n) implica la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal con la propiedad de $([\frac{k_6}{10^4}]-13)$-SRP, no con la propiedad $([\frac{k_6}{10^4}]-8)$-SRP.

Además, a lo largo del capítulo 4, agregamos muchas explicaciones de las ideas que están ocultas en la demostración original, sobre todo en el tema de la codificación de la relación de satisfacción que aparece en las secciones 4.2 (codificación por medio de un clique maximal), 4.4 (codificación por medio de números naturales) y 4.6 (codificación por medio de funciones); que sirven como guía para entender este maravilloso teorema.

2 Independencia de la calculabilidad

Harvey Friedman afirmó *"La incompletitud empieza a ser potencialmente notable cuando los ejemplos viven en estructuras discretas"*[1]. La principal justificación de la frase anterior se debe a que las estructuras discretas se presentan en muchas ramas de las matemáticas, y no sólo en la teoría de conjuntos en donde la mayoría de resultados independientes se encuentran; además, las afirmaciones sobre estructuras discretas, en general, se pueden programar para que una maquina compruebe su veracidad, lo cual hace que el fenómeno de la incompletitud afecte la computación en el área de la calculabilidad.

La investigación sobre resultados independientes en estructuras discretas ha dado frutos apenas en las dos últimas décadas; sin embargo, su origen se puede remontar a 1970 con el teorema de Matiyasevich y que implica la negación de la siguiente afirmación.

Décimo problema de Hilbert. *Existe un algoritmo capaz de determinar, en un número finito de operaciones, si dada una ecuación diofántica, ésta tiene solución en los enteros.*

La imposibilidad del décimo problema de Hilbert es una de las primeras demostraciones que combinan teoría de números y teoría de la computación, sobre todo el hecho de que el teorema de incompletitud de Gödel, como su demostración, se pueden traducir de manera natural a un lenguaje puramente computacional usando funciones computables. Martin Davis, un matemático que ayudó a demostrar el teorema de Matiyasevich, afirma *"La teoría de la computabilidad proporciona una perspectiva desde la cual se puede ver que la incompletitud es una propiedad fundamental generalizada que no depende de un truco insignificante"*[2]; de hecho, la propiedad fundamental generalizada que menciona la usa para demostrar en [5] la imposibilidad del décimo problema de Hilbert.

En 1970 también ocurrió la demostración del teorema de incompletitud que nos proporciona el matemático Gregory Chaitin. La demostración usa la paradoja de Berry en vez de la paradoja del mentiroso, y además usa teoría de la computabilidad. Como en la demostración de Gödel, se pueden codificar las fórmulas y expresar:

n es el menor natural que cumple que existe una demostración de que n no se puede programar en una maquina de Turing que tiene menos de M bits

Chaitin es capaz de demostrar que para un M muy grande existe una maquina de Turing que tiene menos de M bits que programa n, por lo tanto, para ese M, nuestro sistema axiomático

[1] Ver [3], página 14.
[2] Ver [5]

no puede exhibir números que requieren más de M bits para poderlos programar. Chaitin menciona que gracias a esto, su demostración le da un punto de vista de la teoría de la información al teorema de incompletitud. Los detalles se encuentran en el capítulo 2 de [2].

En 1972 los matemáticos Jeff Paris y Leo Harrington demostraron el primer resultado independiente con contenido puramente matemático de los axiomas de Peano. Este teorema proporcionó dos ideas claves para investigación del fenómeno de incompletitud: indiscernibilidad y codificación. Hay que aclarar que la codificación siempre ha estado presente en los anteriores trabajos descritos, pero gracias al teorema de Paris-Harrington se ratificó su importancia y se cambiaron los métodos específicos. Sobre esto hablaremos en detalle en el capítulo 3.

Hay una idea fundamental que fue la inspiración para desarrollar el teorema de Paris-Harrington; ésta es el uso de los segmentos iniciales de modelos de la aritmética no estándar que había perfeccionado el matemático Harvey Friedman. Éste demostró el siguiente resultado.

Teorema [Friedman]. *Todo modelo contable de la aritmética no estándar es isomorfo a un segmento inicial propio.*

Gracias al teorema de Friedman, como dice Richard Kaye en [6], “El estudio de modelos de la aritmética no estándar alcanzó su madurez”. Se puede ver en [11] la gran cantidad de trabajos que han surgido en consecuencia de él, incluso en la última década, de los cuales hay que resaltar el del matemático Ali Enayat que agrega la hipótesis de que existe un automorfismo que fije puntualmente el segmento inicial[3].

Harvey Friedman dedicó gran parte de su tiempo en encontrar lo que él denominó un caso concreto de incompletitud matemática[4], en el 2011 demostró que una propiedad de combinatoria finita sobre un grafo en $\mathbb{Q}$ es equivalente a la consistencia de ZFC más un gran cardinal, siendo en su momento el mayor logro que había conseguido en este tema. El capítulo 4 se dedicará exclusivamente a este resultado. En el 2014 consiguió mejorar su trabajo:

Definición. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Sean $(x,y),(z,w) \in [\mathbb{Q}]^{\leq k} \times [\mathbb{Q}]^{\leq k}$. Decimos que (x,y) y (z,w) son **orden-equivalentes** si y sólo si

- x, z tienen los mismos elementos y y, w tienen los mismos elementos.
- Si el i-ésimo elemento de x es menor o igual que el j-ésimo elemento de y entonces el i-ésimo elemento de z es menor o igual que el j-ésimo elemento de w

Definición. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Decimos que un grafo (G,E) sobre $[\mathbb{Q}]^{\leq k}$ es **orden-invariante**, si dados $x,y,w,z \in [\mathbb{Q}]^{\leq k}$ tales que xEy y (w,z) es orden equivalente a (x,y), entonces wEz.

[3] Ver [11]

[4]Ver [3], introducción

Definición. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Dado $x \in [\mathbb{Q}]^{\leq k}$ denotaremos como $\mathrm{ush}(x)$ al conjunto obtenido por sumar 1 a todos los elementos no negativos de x. **La complejidad de** x es el menor $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que todo elemento de x se puede escribir con numerador y denominador menores o iguales que n. **La complejidad de un conjunto** $C \subset \mathbb{Q}^{\leq k}$ es el menor n tal que todo elemento de C tiene complejidad menor o igual que n.

Definición. Sea (G, E) un grafo sobre $[\mathbb{Q}]^{\leq k}$. Sean $X, Y \subset G$. Decimos que X es **libre** si todo par de elementos de X no se relacionan. Decimos que X **reduce a** Y si dado $y \in Y$ se tiene que $y \in X$, ó existe $x \in X$ tal que $\mathrm{máx}(x) \leq \mathrm{máx}(y)$ y xEy.

Enunciado de Friedman. *Todo grafo orden-invariante sobre* $[\mathbb{Q}]^{\leq k}$ *tiene un conjunto libre* $\{a_1, ..., a_r,\ ush(a_1), ..., ush(a_r)\}$ *de complejidad menor o igual que* $(8knr)!$, *donde cada subconjunto* $\{x_1, ..., x_{(8kni)!}\}$ *de* $\{a_1, ..., a_r,\ ush(a_1), ..., ush(a_r)\}$ *reduce a* $[x_1 \cup ... \cup x_i \cup \{0, ..., n\}]^{\leq k}$.

Nuevamente Friedman demostró que el anterior enunciado es equivalente a la consistencia de ZFC más un gran cardinal. En en el año 2016 Adam Yedidia y Scott Aaronson publicaron un artículo en donde presentaron una máquina de Turing con 7910 estados tal que su comportamiento es independiente de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección (ZFC). Básicamente el problema de la parada de dicha máquina es equivalente a la afirmación de Friedman.

En 2016 O'Rear mejoró el resultado creando una máquina de Turing de 1919 estados cuyo comportamiento es independiente de ZFC, es más, ésta está programada para que itere a través de todos los teoremas de un sistema formal llamado Metamath cuya consistencia es equivalente a la ZFC, por lo tanto el problema de la parada de esta máquina es directamente equivalente a la consistencia de ZFC. O'Rear todavía no ha publicado formalmente su trabajo, pero se puede encontrar en su página web la programación de la máquina [5].

[5] https://github.com/sorear/metamath-turing-machines

3 Indiscernibles y codificación

Presentaremos a continuación el teorema de Paris-Harrington que trata sobre la primera afirmación descubierta, cuyo contenido es puramente matemático, que es verdadera en los números naturales pero no se puede demostrar por la Aritmética de Peano (PA). Resaltaremos dos ideas usadas en la demostración: el uso de indiscernibles y la codificación de la relación de satisfacción. Estas ideas serán primordiales para después desarrollar uno de los resultado de Harvey Friedman, el cual construye un modelo de ZFC con un gran cardinal de una propiedad de combinatoria de grafos de orden-invariante en $\mathbb{Q}$.

3.1. Teorema de Paris-Harrington

3.1.1. Preliminares

Notaremos como $\mathcal{L}_{PA}$ al lenguaje de la aritmética de Peano que consiste en $(+, \cdot, <, 0, 1)$. Usualmente sólo se considera la operación sucesor; pero incluir la suma y la multiplicación en el lenguaje facilitará algunas demostraciones. Los axiomas de la aritmética de Peano (PA) comprenden la unión de la teoría de los anillos ordenados con los siguientes axiomas

- $0 < 1 \wedge \forall x(x \geq 0) \wedge \forall x(x > 0 \rightarrow x \geq 1)$
- Sea $\phi(x, y)$ una $\mathcal{L}_{PA}$ fórmula.

$$\forall y(\phi(0, y) \wedge \forall x(\phi(x, y) \rightarrow \phi(x + 1, y)) \rightarrow \forall x\phi(x, y))$$

El primero nos dice que la estructura es discreta (no hay número entre 0 y 1) y el último es el conocido esquema de inducción. Nos enfocaremos en el siguiente tipo de fórmulas

Definición 3.1.1. Una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula $\phi(x)$ es de tipo Δ_0 si todos sus cuantificadores son de la forma $\forall x \leq t, \exists x \leq t$, donde t es un $\mathcal{L}_{PA}$-término.

La importancia de las Δ_0-fórmulas radica en que la Aritmética de Peano puede codificarlas y definir su relación de satisfacción, es decir, $\models \phi$ está definido en PA cuando ϕ es de tipo Δ_0.

Hecho 3.1.2. Existe una una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula que denominaremos $\mathrm{SAT}_{\Delta_0}(x, y)$, tal que PA $\vdash$ $\mathrm{SAT}_{\Delta_0}(x, z)$, si y sólo si, x es una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula de tipo Δ_0, z es una sucesión finita y para todo modelo $N \models PA$ se cumple que $N \models x((z)_1, ..., (z)_m)$.

Ahora introduciremos la noción de indiscernibles que vamos a usar.

Definición 3.1.3. Sea $M \models PA$. Un conjunto $C \subset M$ es **un conjunto de indiscernibles** si dada $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ Δ_0-fórmula con $n \in \mathbb{N}$; dado $\{c, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n\} \subset C$ donde $c < a_1 < ... < a_n < b_1 < ... < b_n$; y dado $p < c$, se cumple que

$$M \models \phi(p, a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \phi(p, b_1, ..., b_n)$$

Los indiscernibles son una herramienta para construir modelos como lo muestra el siguiente lema.

Lema 3.1.4. *Sea $M \models PA$ un modelo no estándar. Sea $C = \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un conjunto de indiscernibles acotado superiormente. El segmento inicial $I := \{n \in M : n \leq c_i$ para algún $i \in \mathbb{N}\}$ es un modelo de la aritmética de Peano.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que para todo $i, j \in \mathbb{N}$ se tiene que $c_i < c_j$ si $i < j$. Para demostrar que I es modelo de la aritmética de Peano es suficiente demostrar que I es una subestructura de M y que satisface el esquema de la inducción.

Subestructura.

- **Suma.** Primero veamos que $c_1 + c_2 < c_3$. De lo contrario existiría $p < c_1$ tal que $p + c_2 = c_3$, por tanto, como la fórmula $\phi(z, x_1, x_2) : z + x_1 = x_2$ es de tipo Δ_0, por indiscernibilidad se concluiría que $p + c_2 = c_j$ para todo $j \geq 3$, lo cual es una contradicción. Luego $c_1 + c_2 < c_3$, por tanto por indiscernibilidad, para $k, j < l$ naturales se cumple que $c_j + c_k < c_l$. Ahora, dados $m, n \in I$, existen $c_j, c_k \in C$ tales que $m < c_j$ y $n < c_k$; como $c_j + c_k < c_l$ para algún $l > j, k$, se tiene que $m + n < c_l$ y por tanto $m + n \in I$.
- **Multiplicación.** Primero veamos que $c_1 \cdot c_2 < c_3$. De lo contrario existiría $p < c_1$ tal que $p \cdot c_2 \leq c_3 < p \cdot c_2 + c_2$. Por indiscernibilidad se tiene que $c_4 < p \cdot c_2 + c_2$, y como $p \cdot c_2 \leq c_3$, entonces $c_4 < c_3 + c_2$ lo cual contradice el resultado anterior de $c_2 + c_3 < c_4$. Aplicamos el mismo argumento del párrafo anterior para ver que dados $n, m \in I$, entonces $m \cdot n \in I$.

Esquema de inducción. Vamos a demostrar el principio del buen orden que es equivalente al esquema de inducción. Sea $\phi(x)$ una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula tal que $I \models \exists x \phi(x)$. Veamos que existe un mínimo $m \in I$ tal que $I \models \phi(m)$. La idea es traducir ϕ en una Δ_0-fórmula que vale en M y usar el principio del buen orden de este modelo para encontrar nuestro mínimo. Por hipótesis, existe $l \in I$ tal que $I \models \phi(l)$, así existe $c_k \in C$ tal que $l < c_k$.

- Si ϕ es de la forma $\exists x_1 \theta(x_1, x)$ donde θ es libre de cuantificadores, entonces como $I \models \phi(l)$, existe $m \in I$ tal que $I \models \theta(m, l)$. Como θ es libre de cuantificadores, se tiene que $M \models \theta(m, l)$, además, dado que existe $c_{i_1} \in C$ tal que $m, c_k < c_{i_1}$ se concluye que $M \models \exists x_1 < c_{i_1} \theta(x_1, l)$.

- Si ϕ es de la forma $\forall x_1 \theta(x_1, x)$ donde θ es libre de cuantificadores, entonces para todo $m \in I$ se tiene que $I \models \theta(m, l)$. Como θ es libre de cuantificadores, para todo $m \in I$ se tiene que $M \models \theta(m, l)$. Como I es un segmento inicial, en particular para algún $c_{i_1} > c_k$ se tiene que $M \models \forall x_1 < c_{i_1} \theta(x_1, l)$.
- Por inducción sobre el número de cuantificadores, si consideramos a ϕ en su forma prenexa, por ejemplo $\phi(x) : \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ... \exists x_n \theta(x_1, .., x_n, x)$, existen constantes $c_{i_1} < ... < c_{i_n}$ que pertenecen a C mayores que c_k tales que $M \models \exists x_1 < c_{i_1} \forall x_2 < c_{i_2} \exists x_3 < c_{i_3} ... \exists x_n < c_{i_n} \theta(x_1, .., x_n, l)$.

Como M es modelo de PA existe un mínimo $m \in M$ tal que $M \models \exists x_1 < c_{i_1} \forall x_2 < c_{i_2} \exists x_3 < c_{i_3} ... \exists x_n < c_{i_n} \theta(x_1, .., x_n, m)$. Por minimalidad $m \leq l$, y como $l < c_k$ se tiene que $m \in I$. Dado que la anterior fórmula es de tipo Δ_0 y $m < c_k < c_{i_1} < ... < c_{i_n}$, por indiscernibilidad[1] concluimos que $I \models \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ... \exists x_n \theta(x_1, .., x_n, m)$, que es lo mismo que $I \models \phi(m)$.

Observemos que el argumento anterior nos dice que para todo $d \leq l$ se tiene que $I \models \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ... \exists x_n \theta(x_1, .., x_n, d)$ si y sólo si $M \models \exists x_1 < c_{i_1} \forall x_2 < c_{i_2} \exists x_3 < c_{i_3} ... \exists x_n < c_{i_n} \theta(x_1, .., x_n, d)$ (incluso con las mismas constantes por la indiscernibilidad), por tanto m conserva la minimalidad en I.

□

3.1.2. Teorema de Paris-Harrington

No es inusual que muchas de las nociones y teoremas matemáticos que no involucran la noción de "infinito" de manera directa se puedan traducir en el lenguaje de PA y, así mismo, su demostración se puede efectuar en esta axiomatización. Un ejemplo es la siguiente definición

Definición 3.1.5. Sean $n, m, k, c \in \mathbb{N}$. La notación $n \to (m)^k_c$ significa que para toda función $f : [n]^k \to c$ existe un conjunto $H \subset n$ de tamaño m tal que es f-homogéneo, es decir, $f([H]^k)$ es constante.

La traducción de la definición anterior al lenguaje de PA se hace de manera detallada en el libro de Kaye [6], dando como resultado poder expresar el siguiente teorema en $\mathcal{L}_{PA}$.

Teorema 3.1.6 (Ramsey finito). *Sea $N \models PA$. Para todo $k, m, c \in N$ existe $n \in N$ tal que*

$$n \to (m)^k_c$$

La demostración del teorema de Ramsey finito se puede realizar en la aritmética de Peano; lo que hicieron Jeff Paris y Leo Harrington en 1977 fue modificar el anterior teorema añadiendo más condiciones.

[1] El argumento formal es por inducción sobre el número de cuantificadores

Definición 3.1.7. Sean $n, m, k, c \in \mathbb{N}$. La notación $n \to^\star (m)^k_c$ significa que para toda función $f : [n]^k \to c$ existe un conjunto $H \subset n$ de tamaño al menos m y $|H| > \text{mín}\, H$, tal que es f-homogéneo.

La notación $n \to^\star (m)^k_c$ también se puede traducir al lenguaje de PA; esto permite expresar el siguiente teorema en $\mathcal{L}_{PA}$.

Teorema 3.1.8 (Ramsey finito reforzado)**.** *Sea $N \models PA$. Para todo $k, m, c \in N$ existe $n \in N$ tal que*

$$n \to^\star (m)^k_c$$

Sin embargo el teorema anterior no se puede demostrar en la aritmética de Peano, pero es verdadero cuando el modelo es $\mathbb{N}$. Este es el enunciado del teorema de Paris-Harrington. Vamos a demostrarlo vía indiscernibles, pero antes vamos a presentar el teorema de manera distinta, pero equivalente, para hacer más corta la demostración.

Definición 3.1.9. Sea $M \models$ PA. Sean $a, b, k, c, m \in M$, se define $[a, b]^k$ como todos los subconjuntos que tienen tamaño k del intervalo $[a, b]$. La notación $[a, b] \to^\star (m)^k_c$ significa que para toda función $f : [a, b]^k \to c$, existe un conjunto $H \subset [a, b]$ de tamaño al menos m tal que $|H| > \text{mín}\, H$ y es f-homogéneo.

Teorema 3.1.10 (Paris-Harrington)**.** *La afirmación "PH: Para todo a, k, m, c, existe $b > a$ tal que $[a, b] \to^\star (m)^k_c$ " no es demostrable en la Aritmética de Peano.*

Demostración. Dado que en $\mathbb{N}$ vale el teorema de Ramsey finito y el teorema de Ramsey finito reforzado, podemos construir por compacidad un modelo M no estándar de PA, donde vale el teorema de Ramsey finito y el teorema de Ramsey finito reforzado. Sea $e \in M$ un número no estándar y $\{\phi_i(z, x_1, x_2, ..., x_e)\}_{i=1}^{i=e}$ las primeras Δ_0-fórmulas con a lo más e variables libres (recordemos que las fórmulas tiene un orden en PA por medio de su codificación). Notemos que como e es un número no estándar, entonces en la lista estamos considerando todas las Δ_0-fórmulas cuyo número de variables es un número natural.

Sea $r(e) \in M$ el mínimo número tal que $r(e) \to (5e + 1)^{2e+1}_{e+1}$, sea $a > r(e)$ fijo y sea $b \in M$ el mínimo número tal que $[a, b] \to^\star (r(e))^{4e+1}_{3e+1}$. Nuestro objetivo es encontrar un conjunto de indiscernibles entre a y b para poder aplicar el lema 3.1.4, así, en ese modelo de PA no va a valer PH por la minimalidad de b. La manera de encontrar indiscernibles va a ser por medio de coloraciones.

A un elemento que pertenezca a $[a, b]^{2e+1}$ lo vamos a notar como $\{c, \bar{d_1}, \bar{d_2}\}$ que significa $\{c, a_1, a_2, ..., a_e, b_1, b_2, ..., b_e\}$ donde $c < a_1 < a_2 < ... < a_e < b_1 < b_2 < ... < b_e$.

Definimos una función $f : [a, b]^{2e+1} \to e + 2$ tal que $f(c, \bar{d_1}, \bar{d_2})$ sea el índice de la primera fórmula con parámetros menores que c que distingue a las tuplas $\bar{d_1}$ y $\bar{d_2}$, si tal fórmula existe. Formalmente:

$$f(c, \bar{d_1}, \bar{d_2}) = \text{mín}\{i \leq e | \exists p < c(M \models \phi_i(p, \bar{d_1}) \not\leftrightarrow \phi_i(p, \bar{d_2}))\}$$

En el caso que no exista el mínimo entonces $f(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = e + 1$. Notemos que esta función está definida por $\mathcal{L}_{PA}$ gracias al hecho 3.1.2.

Ahora definimos como $h(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2)$ al mínimo parámetro que distingue las tuplas $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ de la fórmula $\phi_{f(c,\bar{d}_1,\bar{d}_2)}$, si tal fórmula existe. Formalmente:

$$h(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = \text{mín}\{p < c | M \models \phi_{f(c,\bar{d}_1,\bar{d}_2)}(p, \bar{d}_1) \not\leftrightarrow \phi_{f(c,\bar{d}_1,\bar{d}_2)}(p, \bar{d}_2)\}$$

si $f(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = e + 1$ entonces $h(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = c$.

Por último vamos a identificar los parámetros módulo $3e$ para así, usando nuestros teoremas de Ramsey y el principio de las casillas, concluir que el conjunto homogéneo es nuestro conjunto de indiscernibles.

Sea $g : [a, b]^{4e+1} \to 3e + 1$ tal que:

$$g(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4) = \begin{cases} 0 \quad si \quad h(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = h(c, \bar{d}_3, \bar{d}_4) \\ \\ j \quad si \quad h(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) \neq h(c, \bar{d}_3, \bar{d}_4) \text{ y } h(c, \bar{d}_1, \bar{d}_2) \equiv j \pmod{3e}, j > 0 \end{cases}$$

Sea $H \subseteq [a, b]$, conjunto g-homogéneo de tamaño al menos $r(e)$ y $|H| > \text{mín}\, H$. Veamos que $g([H]^{4e+1}) = 0$. Para esto usaremos el principio de las casillas, por tanto vamos a organizar los datos que tenemos.

- Por la definición de la función h se tiene que $h(\text{mín}\, H, \bar{d}_1, \bar{d}_2) \leq \text{mín}\, H$ y el número de elementos en $[0, \text{mín}\, H]$ que tienen el mismo residuo al dividir[2] por $3e$ es a lo más $[\frac{\text{mín}\, H}{3e}] + 1$.

- Existen $[\frac{|H|}{2e}] - 1$ opciones al calcular $h(\text{mín}\, H, \bar{d}_i, \bar{d}_j)$ cuando $\bar{d}_i, \bar{d}_j \in H$ y $\bar{d}_i < \bar{d}_j$ y existen $\bar{d}_m, \bar{d}_n \in H$ tales que $\bar{d}_i < \bar{d}_j < \bar{d}_m < \bar{d}_n$. Ver figura **3-1**.

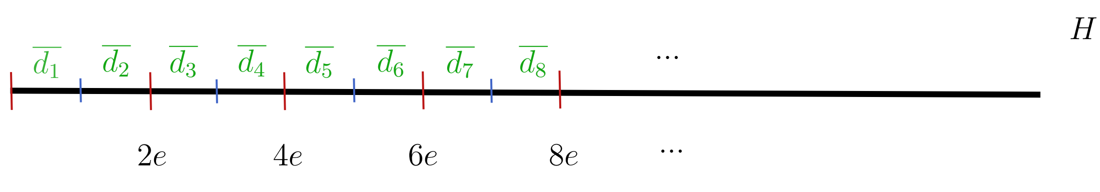

Figura 3-1: División de H

- Podemos suponer que $|H| > 18e - 2$ para que se cumpla la siguiente desigualdad $\frac{|H|}{2e} - 2 > \frac{|H| - 1}{3e} + 1$. El teorema de Ramsey reforzado garantiza que $|H| > \text{mín}\, H$, luego $|H| - 1 \geq \text{mín}\, H$, por tanto se tiene que $[\frac{|H|}{2e}] - 1 > [\frac{\text{mín}\, H}{3e}] + 1$.

[2]la notación $[\frac{a}{b}]$ significa el cociente de la división de a entre b

- Hay más opciones al calcular $h(\min H, \bar{d}_i, \bar{d}_j)$ que número de elementos en $[0, \min H]$ que tienen el mismo residuo al dividir por por $3e$.

- Por el principio de las casillas existen $\bar{d}_i, \bar{d}_j, \bar{d}_m, \bar{d}_n \in H$ con $\bar{d}_i < \bar{d}_j < \bar{d}_m < \bar{d}_n$ tal que $h(\min H, \bar{d}_i, \bar{d}_j) = h(\min H, \bar{d}_m, \bar{d}_n)$, concluyendo que $g([H]^k) = 0$.

Recordemos que $r(e) \to (5e+1)^{2e+1}_{e+1}$ y dado que $|H| \geq r(e)$ entonces existe $C \subseteq H$ tal que $|C| = 5e+1$ y es f-homogéneo. Veamos que $f([C]^{2e+1}) = e+1$. Expresemos a C como $C = \{c_i\}_{i=0}^{i=5e}$ de tal manera que $c_i < c_j$ si $i < j$. Supongamos que $f([C]^{2e+1}) = i$ con $i \neq e+1$. Como $C \subset H$, entonces para todo $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \in C$ tenemos que $h(c_0, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = p$ para algún $p \in M$. Por tanto

$$\phi_i(p, c_1, ..., c_e) \not\leftrightarrow \phi_i(p, c_{e+1}, ..., c_{2e}) \not\leftrightarrow \phi_i(p, c_{2e+1}, ..., c_{3e}) \not\leftrightarrow \phi_i(p, c_1, ..., c_e)$$

Lo cual es una contradicción, (si la primera fuera verdadera, la segunda sería falsa, la tercera verdadera y por tanto la cuarta falsa que es la misma que la primera). En conclusión, $f([C]^{2e+1}) = e+1$, luego el conjunto C es el conjunto de nuestros indiscernibles, así por el lema 3.1.4 se tiene que $I := \{n \in M : n \leq c_i \text{ para algún } i \in \mathbb{N}\}$ es un modelo de PA.

Dado que $b > c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que b es el mínimo en M tal que $[a,b] \to^\star (r(e))^k_c$ se tiene que $I \models PA + \neg PH$. Esto se debe también a que las noción de $[a,b] \to^\star (m)^k_c$ es absoluta para segmentos iniciales.

□

En [7] se pueden encontrar versiones del teorema de Paris-Harrington con condiciones más estrictas sobre el conjunto homogéneo.

3.2. Clique maximal invariante e incompletitud

Vamos a presentar uno de los resultados de los trabajos de Harvey Friedman donde trata de encontrar el fenómeno de incompletitud en sistemas discretos. Él, en el 2011, lo denominó como el más importante caso concreto de incompletitud matemática encontrado hasta el momento. Hay dos ideas que son el pilar de la demostración de este teorema: la primera es definir la relación de satisfacción de fórmulas dentro de una estructura, y la segunda es el uso de indiscernibles; las dos ideas sirven, como en el teorema de Paris-Harrington, para que sea posible construir el modelo que necesitamos. Enunciaremos el teorema de Friedman y daremos un esquema de su demostración. Los términos desconocidos que aparecen en el enunciado son propiedades de combinatoria que serán explicadas en el capítulo 4.

Teorema 3.2.1 (Friedman). *Sean $k, n \in \mathbb{Z}^+$ fijos tales que $n \geq k$ y $k_6 > 10^7$. IMCT(k,n) implica la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal con la propiedad de $([\frac{k_6}{10^4}] - 13)$-SRP*

Estructura de la prueba. Vamos a construir un modelo de ZFC en el que exista un cardinal con la propiedad de $([\frac{k_6}{10^4}]-13)$-SRP. La construcción del modelo se hace de manera análoga a la construcción del universo constructible de Gödel. En éste se usan dos ideas fundamentales: definir la relación de satisfacción e inducción transfinita. La estructura de segundo orden de los ordinales nos puede garantizar esas dos propiedades, por eso, la prueba de a continuación se va a dividir en dos partes, la primera es la construcción de una estructura de ordinales, y la segunda es cómo a partir de ésta se construye el modelo de ZFC.

Nuestros puntos de inicio son el lenguaje $\mathcal{L} = \{<\}$ y la estructura $(\mathbb{Q} \cap [0, n], <)$. La idea de Friedman es definir un grafo en $(\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ y, gracias a nuestra hipótesis de IMCT(k, n), obtener un clique maximal del grafo que nos va a permitir codificar las fórmulas y la relación de satisfacción "$\models$" en $\mathbb{Q} \cap [0, n]$. Esta codificación sólo va a servir para finitas fórmulas, sin embargo nos permitirá crear un modelo que vamos a denotar $M(S)$, donde podemos definir una relación de pertenencia por medio del clique.

El clique que nos proporciona IMCT(k, n) es genérico, por lo tanto no podemos conocer de manera exacta las propiedades de la relación de pertenencia que definimos en base a él, sobre todo si está bien fundamentada, sin embargo, el nuevo modelo satisface una variante del axioma de separación y esto nos va a permitir desarrollar el concepto de pre-(buen orden) que, como los buenos órdenes, forman una clase bien ordenada bajo isomorfismos. Para que esta estructura de los pre-(buenos órdenes) se extienda de manera natural a $M(S)$, definimos una noción similar a la de función rango por medio de los pre-(buenos órdenes). Hacemos una partición en $M(S)$ donde identificamos a los elementos que tienen el mismo rango; el conjunto de las clases de equivalencia lo denotaremos C y será nuestra estructura de segundo orden de los ordinales.

El conjunto C tiene inducción transfinita y además, dentro de C, podemos definir "$\models$" sin ninguna restricción. El modelo de ZFC lo vamos a construir, por medio de inducción transfinita, cerrando bajo conjuntos definibles. Denotaremos a este modelo como $L[\infty, \infty]$. La verificación de que $L[\infty, \infty]$ es modelo de ZFC es análoga a la verificación de que L es modelo de ZFC.

El uso de indiscernibles es vital para la demostración ya que en las construcciones, tanto de $M(S)$, C y $L[\infty, \infty]$, vamos a trabajar con segmentos iniciales de un conjunto ordenado, luego, como en el teorema de Paris-Harrington, la indiscernibilidad nos va a garantizar que los objetos que se construyan con elementos del segmento inicial, queden dentro del segmento inicial.

4 Demostración del teorema de Friedman

4.1. Preliminares

Un grafo sobre un conjunto X lo vamos a denotar como (G, E), donde $G \subset X$ es el conjunto de los vértices y $E \subset X^2$ es el conjunto de los lados.

Definición 4.1.1. Sea X un conjunto. Dado un grafo (G, E) sobre X, un **clique** es un subconjunto de X donde todo par de elementos en X están relacionados por E. Un **clique maximal** es un clique que no es subconjunto propio de otro clique.

Gracias al lema de Zorn todo clique en un grafo está contenido en un clique maximal.

Definición 4.1.2. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Sean $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{Q}^k$. Decimos que x, y son **orden-equivalentes** si para todo $1 \leq i, j \leq k$ se tiene que $x_i \leq x_j$ si y sólo si $y_i \leq y_j$. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{Q}^k$ es **orden-invariante** si para toda pareja x, y orden-equivalentes se tiene que si $x \in S$ entonces $y \in S$

Definición 4.1.3. Decimos que un grafo (G, E) sobre $\mathbb{Q}^k$ es **orden-invariante** si como subconjunto de $\mathbb{Q}^{2k}$ es orden-invariante.

Definición 4.1.4. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Sean $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{Q}^k$. Decimos que x, y son **$\mathbb{Z}^+$-superior-equivalentes** si x, y son orden-equivalentes y para todo $1 \leq i \leq k$, si $x_i \neq y_i$ entonces para todo $x_j \geq x_i$, $y_j \geq y_i$ se tiene que $x_j, y_j \in \mathbb{Z}^+$.

Como se vera más adelante, la definición de la equivalencia $\mathbb{Z}^+$-superior va orientada en poder dar a los enteros positivos un cierto tipo de indiscernibilidad. El siguiente ejemplo ilustrará mejor esta situación

Ejemplo. Sean $0 < i_1, .., i_r, j_1, ..., j_r$ enteros donde $(i_1, ..., i_r)$ es orden-equivalente a $(j_1, ..., j_r)$ y $\text{mín}\{i_1, ..., i_r\} = \text{mín}\{j_1, ..., j_r\}$. Sean $p_1, ..., p_s \in \mathbb{Q}$ tales que $p_1, ..., p_s < \text{mín}\{i_1, ..., i_r\}$. Entonces

$$(i_1, ..., i_r, p_1, ..., p_s) \text{ es } \mathbb{Z}^+\text{-superior-equivalente con } (j_1, ..., j_r, p_1, ..., p_s)$$

Definición 4.1.5. Decimos que $A \subset \mathbb{Q}^k$ es **$\mathbb{Z}^+$-superior-invariante**, si para toda pareja x, y $\mathbb{Z}^+$ superior equivalentes, si $x \in A$ entonces $y \in A$.

Ahora ya podemos el enunciado IMCT(k, n).

Enunciado [Teorema del Clique invariante maximal (IMCT(k,n))] *Sean $k, n \in \mathbb{Z}^+$ fijos. Todo grafo orden-invariante en $(\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ tiene un clique maximal que es $\mathbb{Z}^+$-superior-invariante.*

Recordemos que el teorema de Friedman consiste en demostrar que IMCT(k, n) es equivalente a la consistencia de ZFC más la existencia de un gran cardinal, sin embargo, para poder describir ese gran cardinal necesitamos más definiciones.

Definición 4.1.6. Sea λ un ordinal. Decimos que $C \subset \lambda$ es **no acotado** si para todo $\alpha < \lambda$ existe $\beta \in C$ tal que $\beta \geq \alpha$. Decimos que C es **cerrado** si para todo los ordinales límites $\delta < \lambda$, si $C \cap \delta$ es no acotado en δ entonces $\delta \in C$. Decimos que C es un **c.l.u.b** si es cerrado y no acotado.

Definición 4.1.7. Sea λ un ordinal. Decimos que $C \subset \lambda$ es **estacionario** si intersecta a todos los c.l.u.b de λ.

Definición 4.1.8. Sea $\kappa \geq 1$ y λ ordinal límite. Decimos que λ tiene la **κ-propiedad de Ramsey estacionaria** (κ-SRP) si para toda función $f : [\lambda]^\kappa \to 2$, existe un conjunto estacionario $E \subset \lambda$ tal que E es f-homogéneo.

En [12] se demuestra que la existencia de un ordinal con la 2-propiedad de Ramsey estacionaria implica la existencia de cardinales totalmente indescriptibles, los cuales implica la existencia de cardinales débilmente compactos. Además, como veremos en el teorema 4.7.39, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, la existencia de un ordinal con la k-propiedad de Ramsey estacionaria es consistente con $V = L$.

También trabajaremos con la siguiente clase de ordinales.

Definición 4.1.9. Sean λ, κ ordinales. Una función $f : [\lambda]^\kappa \to \lambda$ es **κ-regresiva** si y sólo si para todo $A \in [\lambda]^\kappa$, si $\min A > 0$ entonces $f(A) < \min A$.

Definición 4.1.10. Sean λ, κ ordinales. Decimos que λ es **puramente κ-sutil** si λ es ordinal límite y para toda función f κ-regresiva, existe $A \in [\lambda \setminus \{0, 1\}]^{\kappa+1}$ tal que f es constante en $[A]^\kappa$

En [12] se demuestra el siguiente hecho.

Hecho 4.1.11. Sea $\kappa \geq 2$ un número natural. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente.

- Existe un ordinal con la κ-propiedad de Ramsey estacionaria.
- Existe un ordinal puramente κ-sutil.
- Existe un ordinal con la $(\kappa - 1)$-propiedad de Ramsey estacionaria.

Para más información de estos cardinales pueden ver [12]. Usaremos la siguiente notación.

Definición 4.1.12. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Definimos como $k_1 := \log_{10}(k)$. Definimos como $k_{n+1} := \log_{10}(k_n)$

Ya con la anterior terminología podemos entender el enunciado del teorema de Friedman.

Teorema 4.1.13 (Friedman). *Sean $k, n \in \mathbb{Z}^+$ fijos tales que $n \geq k$ y $k_6 > 10^7$. IMCT(k,n) implica la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal con la propiedad de $([\frac{k_6}{10^4}] - 13)$-SRP*

Para el resto de las secciones vamos a fijar $k, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n \geq k$, $k_6 > 10^7$ y vamos a suponer IMCT(k,n). Nuestra meta es construir un modelo de ZFC que tenga un cardinal con la propiedad de $([\frac{k_6}{10^4}] - 13)$-SRP.

4.2. El lenguaje $\mathcal{L}(n,k)$ y el grafo $G(n,k)$

Explicaremos antes de definir el grafo $G(n,k)$ qué significa codificar las fórmulas a través del clique. Vamos a suponer que ya existe el grafo y por el teorema IMCT(k,n) fijamos un clique maximal $\mathbb{Z}^+$-invariante de $G(n,k)$ que denominamos S. Ahora introducimos un nuevo lenguaje a partir de nuestro clique S. Lo vamos a denominar $\mathcal{L}(n,k)$ y está compuesto por lo siguiente:

- Constantes $0, 1, ..., n$
- Variables $x_1, ..., x_k$
- Relación binaria $<$ y relación k-aria S.

En la siguiente sección se explicará por qué las variables son finitas. Como no hay símbolos de función, entonces los $\mathcal{L}(n,k)$-términos son sólo las variables y las constantes. Las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas tienen una ligera variación:

- $t < r$ y $S(t_1, ..., t_k)$ son $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas donde $t, r, t_1, ..., t_k$ son $\mathcal{L}(n,k)$-términos.
- Si ϕ, ψ son $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas, entonces $\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ son $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas.
- Si ϕ es una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula, entonces $(\exists v_i < t)\phi$ es una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula donde t es un $\mathcal{L}(n,k)$-término.

Nuestro modelo es $\mathbb{Q} \cap [0,n]$ y las interpretaciones son las esperadas: las constantes $0, 1, ..., n$ como los números $0, 1, ..., n$, la relación $<$ como el orden usual en $\mathbb{Q}$ y la relación k-aria S como nuestro clique.

Definición 4.2.1. Decimos que ϕ es una S**-fórmula** si es de la forma $S(t_1, ..., t_k)$ donde cada t_i es un $\mathcal{L}(n,k)$-término.

Cuando nos referimos a que vamos a codificar las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas queremos decir que dada una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula $\phi(x_1,...,x_r)$ existe una S-fórmula $\psi(x_1,...,x_r)$ tal que

$$\mathbb{Q}\cap[0,n]\models\phi(x_1,...,x_r)\leftrightarrow\psi(x_1,...,x_r)$$

Para lograr la codificación el grafo va a tener 9 condiciones. Según cómo definamos el grafo podemos añadir algunas propiedades al clique. Por ejemplo, si queremos que el elemento $(n,...,n)$ pertenezca al clique, simplemente al definir el grafo relacionamos el elemento $(n,...,n)$ con todos los puntos, así, como S es maximal, se tiene que $(n,...,n)\in S$. Ahora, siguiendo la misma idea podemos codificar la fórmula $x_1<x_2$ por medio del clique definiendo la siguiente condición:

Sean $p,q\in\mathbb{Q}$ y $B\in\mathbb{Q}^k$. El elemento $A=(p,q,....,q)$ se relaciona con el elemento B, si y sólo si $p<q$.

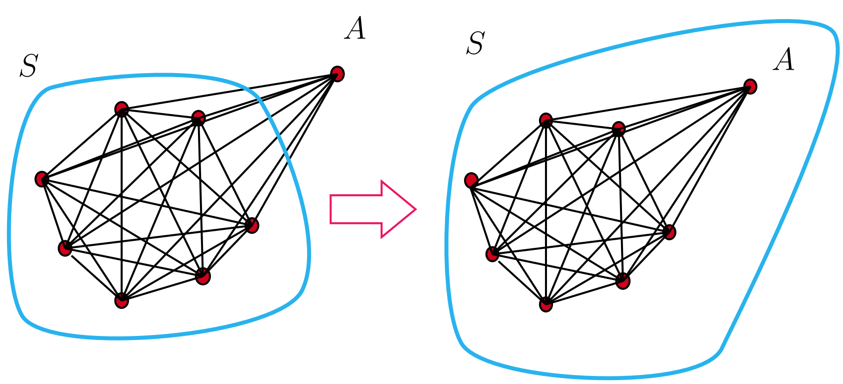

Figura 4-1: Codificación del orden

Luego, si $p<q$ entonces $(p,q,...,q)\in S$ como lo muestra la figura **4-1**. Sin embargo esa condición no garantiza que si $(p,q,...,q)\in S$ entonces $p<q$, quedando incompleta la codificación. Para poder solucionar este problema toca caracterizar de manera unívoca cada condición que se defina en el grafo; esto lo vamos hacer por medio de una "enumeración": vamos a introducir $i-1$ constantes a la condición número i. Por ejemplo, si la condición anterior se cambiara por:

Sean $p,q\in\mathbb{Q}$ menores que n y $B\in\mathbb{Q}^k$. El elemento $A=(n,p,q,...,q)$ se relaciona con el elemento B si y sólo si $p<q$

Ahí sí garantizamos que $(n,p,q,...,q)\in S$ si y sólo si $p<q$, debido a que la única n que aparece en la tupla nos da a entender que estamos trabajando con la segunda condición. Los detalles se verán en la proposición 4.2.5.

Básicamente la anterior condición es la segunda que vamos a definir, y ésta codifica cuando una fórmula es atómica. La tercera, cuarta y quinta condición que vamos a definir codifican cuando una fórmula es una negación, una disyunción y una existencial, respectivamente.

Expliquemos la tercera, cuarta y quinta condición con un ejemplo. Codifiquemos la fórmula $\neg(x_1 < x_2)$. Siguiendo los mismos pasos que hemos mencionado podemos definir una condición que dice:

Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ menores que n y $B \in \mathbb{Q}^k$. El elemento $A = (n, n, p, q, ..., q)$ se relaciona con el elemento B si y sólo si $\neg(p < q)$

Sin embargo ahí no aprovechamos la definición inductiva de las fórmulas. Al cambiar la anterior condición por

Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ menores que n y $B \in \mathbb{Q}^k$. El elemento $A = (n, n, p, q, ..., q)$ se relaciona con el elemento B, si y sólo si B es distinto de $C = (n, p, q, ..., q)$

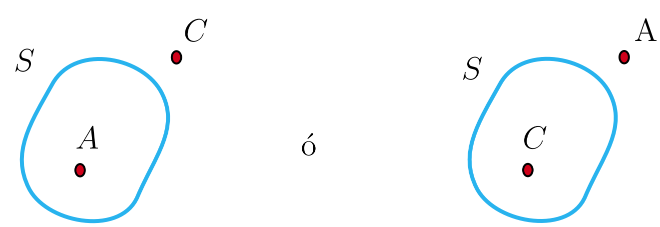

Figura 4-2: Codificación de la negación

Podemos concluir que $(n, n, p, q, ..., q) \in S$ si y sólo si $(n, p, q, ..., q) \notin S$ como lo muestra la figura **4-2**, entonces, por la segunda condición que ya explicamos, $(n, n, p, q, ..., q) \in S$ si y sólo si $\neg(p < q)$. Los detalles se verán en la proposición 4.2.6.

Vamos a ilustrar con otros ejemplos cómo se codifican la disyunción y los cuantificadores.

Codifiquemos la fórmula $x_1 < x_2 \wedge x_1 < x_3$. Ver figura **4-3**.

Sean $p, q, r \in \mathbb{Q}$ menores que n y $B \in \mathbb{Q}^k$. El elemento $A = (n, n, n, p, q, n, p, r, ..., r)$ se relaciona con el elemento B si y sólo si B es distinto de $C = (n, n, p, q, ..., q)$ y $D = (n, n, p, r, ..., r)$.

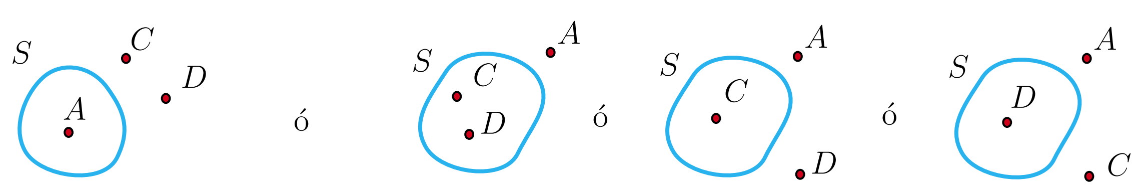

Figura 4-3: Codificación de la conjunción

Codifiquemos la fórmula $\forall x_2 < 1(x_1 < x_2)$. Ver figura **4-4**.

Sean $p \in \mathbb{Q}$ menor que n y $B \in \mathbb{Q}^k$. El elemento $A = (n, n, n, n, p, n, n, 1, ..., 1)$ se relaciona con el elemento B si y sólo si B es distinto de todas las tuplas de la forma $C_q = (n, n, p, q, ..., q)$ donde $q < 1$.

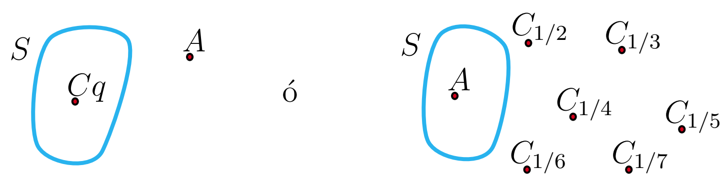

Figura 4-4: Codificación de los cuantificadores

En esta condición, a parte de las contantes de la enumeración, se añaden, después de éstas, nuevas constantes según cuántas veces aparece la variable cuantificada y para separar el número que acota la variable. En este ejemplo se añaden dos constantes adicionales; una para indicar la vez que aparece la incógnita x_2, y la otra para separar el número 1 que es la constante que acota.

Otro detalle que merece explicación es la manera de cómo enunciar las condiciones. Dado que nuestro grafo va a ser de orden-invariante hay que enunciar las condiciones de manera más general, por ejemplo, la primera condición que mencionamos se convertiría en

Sea $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ tal que existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p, x_1, x_2, x_2, ..., x_2)$ donde $p > x_1, x_2$, entonces x se relaciona con otro elemento B si y sólo si $x_1 < x_2$.

La sexta y la séptima condición se explicarán en la siguiente sección. La octava y novena garantizan la simetría y que todo par de elementos en $(\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ se vea afectado por alguna condición, es decir, dados $x, y \in (\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ existe sólo una condición que decide si x y y están relacionados ó no. Vamos a comenzar a definir el grafo y con las proposiciones que se demostrarán a continuación se entenderá mucho mejor la idea. Aquí mejoramos la condición número (5) de la original que propone Friedman para no preocuparnos en la demostración del teorema 4.3.5 del orden de las variables. Dado $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ vamos a denotar mediante $|x|$ a la máxima coordenada de x. Usaremos la notación $x = (..., p^{<i>}, ...)$ para decir que $x = (..., \underbrace{p, ..., p}_{i \text{ veces}}, ...)$.

Definición 4.2.2. Denominamos como $G(n, k)$ como el grafo orden-invariante sobre $(\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ que satisface las siguientes propiedades. Dados $x, y \in (\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$:

1. Si $|x| > |y|$ y existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p, p, p, ..., p, p)$, entonces xEy.

2. Si $|x| > |y|$ y existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p, x_1, x_2, x_2, ..., x_2)$ donde $p > x_1, x_2$ entonces xEy si y sólo si $x_1 < x_2$.

3. Si $|x| > |y|$ y existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p, p, z_1, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$ donde $r \leq k - 2$ y $z_i < p$ para todo $1 \leq i \leq r$. Entonces xEy si y sólo si $y \neq (z_1, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$

4. Si $|x| > |y|$ y y existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p^{<3>}, z_1, ..., z_r, p, w_1, ..., w_r, w_r, ..., w_r)$ donde $2r+4 \leq k$ y $z_i, w_i < p$ para $1 \leq i \leq r$. Entonces xEy si y sólo si $y \neq (z_1, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$ y $y \neq (w_1, ..., w_r, w_r, ..., w_r)$

5. Si $|x| > |y|$ y existen $p \in \mathbb{Q}$; $r, t, i_1, ..., i_t \in \mathbb{Z}^+$ tales que $t \leq r \leq k-6$ y $4 < i_1, ..., i_t \leq r+4$; y se cumple que

$$x = (p^{<4>}, z_1, ..., p^{(i_1)}, ..., p^{(i_s)}, ..., p^{(i_t)}, ..., z_r, p, w, w, ..., w)$$

donde $p^{(i_s)}$ significa que el número p está en la coordenada i_s-ésima; y $w, z_i < p$ para todo $1 \leq i \leq r$. Entonces xEy si y sólo si no existe $q < w$ tal que

$$y = (z_1, ..., q^{(i_1-4)}, ..., q^{(i_s-4)}, ..., q^{(i_t-4)}, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$$

6. Sea $W := \{(x_1, ..., x_k) \in (\mathbb{Q} \cap [0,n])^k | x_5, ..., x_k < x_1 < x_2 < x_3 \text{ y } x_4 < x_2\}$. Si $x, y \in W$, entonces xEy si y sólo si $x \neq y$ y se satisfacen las siguientes dos condiciones:
   - Si se tiene que $x_i = y_i$ para $i \neq 4$ implica que $x_4 = y_4$.
   - Si $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq 4$ implica que $x_i = y_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.

7. Si $|x| > |y|$ y existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p^{<5>}, z_1, ..., z_5, w_1, ..., w_{k_4}, ..., w_{k_4})$ y todo los z's,w's $< p$. Entonces xEy si y sólo si $y \neq (z_1, ..., z_5, d_{k_1+1}, ..., d_{4k_1}, ..., d_{4k_1})$ con $d_{k_1+1}, ..., d_{4k_1} < z_1$ y $\mathbb{Q} \models \theta(w_1, ..., w_{k_4}, d_{k_1+1}, ..., d_{4k_1})$ donde θ es una $\mathcal{L}$-fórmula libre de cuantificadores.

8. Si yEx según las condiciones $1-7$, entonces xEy

9. Si ninguna de la condiciones anteriores aplica, entonces xEy si y sólo si $x \neq y$.

Lema 4.2.3. *Existe un único grafo orden-invariante $G(k,n)$ que satisface las condiciones* $1-9$.

Demostración. Todas las condiciones establecen que no puede haber un elemento que está relacionado con sí mismo, además gracias a la condición 8 la relación es simétrica, así que efectivamente es un grafo. Por otro lado, es fácil ver que las condiciones son mutuamente exclusivas, es decir, dados $x, y \in (\mathbb{Q} \cap [0,n])^k$ existe sólo una condición que decide si xEy ó $\neg(xEy)$. Por ejemplo, si $x = (n, n, n, 1, ..., 1)$, dado un elemento y distinto de x, si $|y| = n$ se tiene que xEy por la condición (9), ó, si $|y| < n$ entonces la única condición que nos dice si x y y están relacionados es la condición (4). Esto establece la unicidad ya que las 9 condiciones controlan todo el comportamiento del grafo.

Falta ver que es orden-invariante. Sean $x, y, w, z \in (\mathbb{Q} \cap [0,n])^k$ tales que xEy y (w,z) es orden-equivalente a (x,y). Si xEy debido a la condición (2), entonces, sin pérdida de generalidad $|x| > |y|$ y existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x = (p, x_1, x_2, ..., x_2)$ con $p > x_1, x_2$ y $x_1 < x_2$. Por la equivalencia de orden, se tiene que $|w| > |z|$ y existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $w = (q, w_1, w_2, ..., w_2)$ con $w_1 < w_2$ y $q > w_2, w_1$, es decir que wEz. La demostración de los otros casos es análoga dado que todas las condiciones se basan en el orden.

□

Veamos los efectos que tienen las primeras cinco condiciones sobre S. Es importante recordar que dados $x, y \in (\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$ existe sólo una condición que decide si xEy ó $\neg(xEy)$

Proposición 4.2.4. *Para todo natural* $1 \leq m \leq n$ *se tiene que* $(m, m, ..., m) \in S$

Demostración. Sea $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, n])^k$. Si $|x| < n$, por la condición (1) tenemos que $(n, ..., n)Ex$. Si $|x| = n$ y $x \neq (n, ..., n)$ entonces por la condición (9) se tiene nuevamente que $(n, ..., n)Ex$. Por tanto el elemento $(n, ..., n)$ se relaciona con todos los demás elementos, por tanto debe pertenecer a S dado que el clique es maximal. Recordemos que para todo natural $1 \leq m \leq n$ se tiene que $(m, ..., m)$ es $\mathbb{Z}^+$ superior equivalente con $(n, ..., n)$, luego, como S es $\mathbb{Z}^+$ superior invariante se obtiene que $(m, ..., m) \in S$.

□

Proposición 4.2.5. *Sean* $0 \leq p, q < n$. *Entonces,* $p < q$ *si y sólo si* $(n, p, q, ..., q) \in S$

Demostración. Supongamos que $(n, p, q, ..., q) \in S$. Si $p \geq q$ entonces por la condición (2) se tiene que $(n, p, q, ..., q)$ no está relacionado con $(1, ..., 1)$, pero por la proposición anterior $(1, ..., 1) \in S$, lo cual contradice que S es un clique. Por tanto $p < q$.
Supongamos que $(n, p, q, ..., q) \notin S$, luego existe algún $y \in S$ que no está relacionado con $(n, p, q, ..., q)$. Si $|y| = n$ por la condición (9) estarían relacionados, por tanto $|y| < n$ y así, por la condición (2), se concluye que $p \geq q$ de lo contrario estarían relacionados.

□

Proposición 4.2.6. *Sea* $r \leq k - 2$ *y* $z_1, ..., z_r \in \mathbb{Q} \cap [0, n)$. *Entonces* $(n, n, z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r) \in S$ *si y sólo si* $(z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r) \notin S$.

Demostración. Supongamos que $(n, n, z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r) \in S$, luego por la condición (3) se tiene que $(n, n, z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$ y $(z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$ no están relacionados, por tanto como S es un clique se tiene que $(z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r) \notin S$.
Supongamos que $(n, n, z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r) \notin S$, luego existe algún $y \in S$ que no está relacionado con $(n, n, z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$. Si $|y| = n$ por la condición (9) estarían relacionados, por tanto $|y| < n$ y así, por la condición (3), se concluye que $y = (z_1, z_2, ..., z_r, z_r, ..., z_r)$.

□

Vamos a mencionar las siguientes propiedades de nuestro clique S sin demostración, pero diciendo cuál condición usar para aplicar la misma idea de las demostraciones de las proposiciones anteriores.

Proposición 4.2.7. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $2r+4 \leq k$ y $z_1, ..., z_r, w_1, ..., w_r \in \mathbb{Q} \cap [0, n)$. Entonces $(n^{<3>}, z_1, ..., z_r, n, w_1, ..., w_r, ..., w_r) \in S$ si y sólo si $(z_1, ..., z_r, ..., z_r) \notin S$ y $(w_1, ..., w_r, ..., w_r) \notin S$.*

Demostración. Usar condición (4) □

Proposición 4.2.8. *Sean $t, r, i_1, ..., i_t \in \mathbb{N}$ tales que $t \leq r \leq k-6$ y $4 < i_1, ..., i_t \leq r+4$. Sean $w, z_1, ..., z_r \in \mathbb{Q} \cap [0, n)$. Entonces*

$$(n^{<4>}, z_1, ..., n^{(i_1)}, ..., n^{(i_s)}, ..., n^{(i_t)}, ..., z_r, n, w, w, ..., w) \in S$$

si y sólo si no existe $q < w$ tal que

$$(z_1, ..., q^{(i_1-4)}, ..., q^{(i_s-4)}, ..., q^{(i_t-4)}, ..., z_r, z_r, ..., z_r) \in S$$

Demostración. Usar condición (5) □

4.3. Codificación

Codificación de $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas. Vamos a ver que efectivamente nuestro clique va a codificar las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas, sin embargo, esto va a tener ciertas restricciones. Recordemos que nuestro clique es una relación k-aria , por tanto una S-fórmula no puede tener más de k variables libres. Lo anterior implica que si una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula tiene más de k variables libres no puede ser equivalente a una S-fórmula. Esto explica la razón por la cual trabajamos con tan sólo k variables. Para poder distinguir las fórmulas que se puedan codificar necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.3.1. Sea ϕ una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula. Definimos **la complejidad de** ϕ (la denotamos como $\sharp(\phi)$) como la suma de:

- El número de veces que aparecen los símbolos $\neg, \wedge, \exists$.
- El mayor i tal que la variable v_i aparece en ϕ (0 si no tiene variables).
- El menor $m \geq 0$ tal que para toda S-subfórmula $S(t_1, ..., t_k)$ se tiene que $t_m = ... = t_k$.

Otro problema que enfrentamos es que la codificación no puede valer en todo el modelo $\mathbb{Q} \cap [0, n]$, así que tenemos que hacer algunas restricciones.

Definición 4.3.2. Sean $0 \leq p \leq n$, y $\phi(\bar{x}), \varphi(\bar{x})$ $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas . Decimos que ϕ, φ son **p-equivalentes** si para todo $y \in \mathbb{Q} \cap [0, p)$ se tiene que $\mathbb{Q} \cap [0, n] \models \phi(\bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{y})$.

Para encontrar el número p indicado para la codificación de una fórmula ϕ, tenemos que ajustar las constantes de la S-fórmula que queremos que codifique a ϕ. Para ello la proposición 4.3.4 nos va a ayudar.

Definición 4.3.3. Sea t un $\mathcal{L}(n,k)$-término. Si t es una variable ó la constante 0 ó la constante 1, definimos como $t^\star := t$. Si t es una constante m donde $2 \leq m \leq r$, entonces definimos como $t^\star := m-1$.

Proposición 4.3.4. *Sea $S(t_1,...,t_k)$ una S-fórmula que tiene contantes entre $n, n-1, ..., n-r$ donde $r \leq n-2$. Entonces $S(t_1,...,t_k)$ es $(n-r-1)$-equivalente a $S(t_1^\star,...,t_k^\star)$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata dado que el clique S es $\mathbb{Z}^+$-superior -invariante. □

Ahora veamos cómo se codifican las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas.

Teorema 4.3.5 (Codificación de $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas). *Sea ϕ una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula sin constantes tal que $\sharp(\phi) = r$ donde $10^r \leq k_1$. Entonces ϕ es $(n-2r)$-equivalente a una S-fórmula φ con $\sharp(\varphi) \leq 10^r$ que puede tener constantes entre $n, ..., n-2r$.*

Demostración. La demostración se va a hacer por inducción en $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas.

Atómicas Supongamos que ϕ es de la forma $x_i < x_j$, entonces, como $\sharp(\phi) = r$, se tiene que $\max\{i,j\} \leq r$. Por la proposición 4.2.5 se tiene que $x_i < x_j$ es n-equivalente a la S-fórmula $S(n, x_i, x_j, ..., x_j)$, la cual su complejidad es $\max\{i,j\}+3$ que es menor a 10^r.

Si ϕ es de la forma $S(t_1,...,t_k)$, entonces ella misma sirve dado que es una S-fórmula.

Caso negación. Supongamos que ϕ es de la forma $\neg\psi$ donde $\sharp(\phi) = r$. Dado que $\sharp(\psi) = r-1$, por inducción existe γ S-fórmula que es $(n-2(r-1))$-equivalente a ψ. Además, por inducción, la complejidad de γ es menor que 10^{r-1}, luego γ es de la forma $S(t_1, ..., t_{10^{r-1}}, ..., t_{10^{r-1}})$. Como γ puede tener constantes entre $n, ..., n-2(r-1)$, por la proposición 4.3.4 se tiene que

$$S(t_1, ..., t_{10^{r-1}}, ..., t_{10^{r-1}}) \text{ es } (n-2r+1)\text{-equivalente a } S(t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$$

Dado que $10^r \leq k_1 \leq k-2$ y la fórmula $S(t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$ tiene sus constantes entre $n-1, ..., n-2r+1$, podemos aplicar la proposición 4.2.6, y así

$$\neg S(t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star) \text{ es } n\text{-equivalente a } S(n, n, t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$$

Concluimos que

$$\phi \text{ es } (n-2r+1)\text{-equivalente a } S(n, n, t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$$

Notemos que la complejidad de la última S-fórmula es menor o igual que $r + 10^{r-1} + 2$ (tiene a los más r variables y en la posición $10^{r-1}+2$ los términos se igualan) que es menor que 10^r.

Caso disyunción. Usar el mismo argumento del caso de la negación, pero esta vez aplicando la proposición 4.2.7.

Caso existencial. Supongamos que ϕ es de la forma $(\exists x_i < x_j)\psi$ donde $\sharp(\phi) = r$. Dado que $\sharp(\psi) = r-1$, por inducción existe γ S-fórmula que es $(n-2(r-1))$-equivalente a ψ. Además, por inducción, la complejidad de γ es menor que 10^{r-1}, luego γ es de la forma $S(t_1, ..., t_{10^{r-1}}, ..., t_{10^{r-1}})$. Como γ puede tener constantes entre $n, ..., n-2(r-1)$, por la proposición 4.3.4 se tiene que

$$S(t_1, ..., t_{10^{r-1}}, ..., t_{10^{r-1}}) \text{ es } (n-2r+1)\text{-equivalente a } S(t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$$

Dado que $10^{r-1} < k-6$ y la fórmula $S(t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$ tiene sus constantes entre $n-1, ..., n-2r+1$, podemos usar la proposición 4.2.8. Si consideramos los índices i_s donde el término $t_{i_s}^\star = x_i$; por la proposición 4.2.8 se tiene que

$$(\exists x_i < x_j) S(t_1^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star, ..., t_{10^{r-1}}^\star)$$

es n-equivalente a

$$\neg S(n^{<4>}, t_1^\star, ..., n^{(i_1)}, ..., n^{(i_s)}, ..., n^{(i_t)}, ..., t_{10^{r-1}}^\star, n, x_j, ..., x_j) \tag{4-1}$$

Como la S-fórmula 4-1 tiene constantes entre $n, ..., n-2r+1$, por la proposición 4.3.4 es $(n-2r)$-equivalente a

$$S((n-1)^{<4>}, t_1^{\star\star}, ..., (n-1)^{(i_1)}, ..., (n-1)^{(i_s)}, ..., (n-1)^{(i_t)}, ..., t_{10^{r-1}}^{\star\star}, n-1, x_j, ..., x_j)$$

Como $6 + 10^{r-1} < k-2$, por la proposición 4.2.6 se tiene que

$$\neg S((n-1)^{<4>}, t_1^{\star\star}, ..., (n-1)^{(i_1)}, ..., (n-1)^{(i_s)}, ..., (n-1)^{(i_t)}, ..., t_{10^{r-1}}^{\star\star}, n-1, x_j, ..., x_j)$$

es n-equivalente a

$$S(n, n, (n-1)^{<4>}, t_1^{\star\star}, ..., (n-1)^{(i_1)}, ..., (n-1)^{(i_s)}, ..., (n-1)^{(i_t)}, ..., t_{10^{r-1}}^{\star\star}, n-1, x_j, ..., x_j)$$

Concluimos que ϕ es $(n-2r)$-equivalente a

$$S(n, n, (n-1)^{<4>}, t_1^{\star\star}, ..., (n-1)^{(i_1)}, ..., (n-1)^{(i_s)}, ..., (n-1)^{(i_t)}, ..., t_{10^{r-1}}^{\star\star}, n-1, x_j, ..., x_j)$$

La anterior S-fórmula tiene sus constantes entre $n, ..., n-2r$ y su complejidad es menor o igual que $r + 10^{r-1} + 8$ (tiene a lo más r variables y en la coordenada $10^{r-1} + 8$ se igualan sus términos) que es menor que 10^r.

□

El siguiente corolario mejora el anterior teorema

Corolario 4.3.6. *Sea ϕ una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas sin constantes tal que $\sharp(\phi) = r$ donde $r \leq k_2$. Entonces ϕ es r-equivalente a una S-fórmula φ con $\sharp(\varphi) \leq 10^r$ que puede tener constantes entre $r, ..., 3r$.*

Demostración. Notemos que $r \leq k_2$ implica que $10^r \leq k_1$. Por tanto aplicamos el teorema anterior y usamos $n - 3r$ veces la proposición 4.3.4 para llegar al resultado.

□

Codificación de la relación de satisfacción. Ahora vamos a dar una noción de satisfacción basada en nuestro clique S. Esto lo vamos a hacer en dos pasos. Primero vamos a definir "$\models$" y después vamos a ver que efectivamente se puede traducir en una S-fórmula. Para el primer paso vamos a usar la condición (6) del grafo y para el segundo la condición (7).

Nuevamente vamos a tener restricciones para definir "$\models$". El mejor alcance que podemos tener son las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas con complejidad menor o igual que $10k_6$. La razón se debe a las siguientes cuentas. Por el corolario 4.3.6 este tipo de $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas son equivalentes a S-fórmulas con complejidad menor que 10^{10k_6}. Notemos que 10^{10k_6} es menor que k_4. Dado que necesitamos usar parámetros y las constantes se van a cambiar por nuevas variables, vamos a añadir otras k_4 variables. ¿Cuántas S-fórmulas sin constantes hay con complejidad menor que $2k_4$? La respuesta, por conteo, es menor que $2k_4^{2k_4}$ (hay $2k_4$ espacios y $2k_4$ variables) y gracias a que k es un número muy grande es sencillo verificar que $2k_4^{2k_4} < k_2$.

Definición 4.3.7. Sea X el conjunto de todas las S-fórmulas tales que sus complejidades son menores que $2k_4$, sin constantes y con variables entre $x_5, ..., x_{2k_4}$. Por el anterior párrafo podemos enumerar a X de la siguiente manera $X = \{\phi_i\}_{i=1}^{i=k_2}$.

Así, si queremos definir "$\models$" para las $\mathcal{L}(n,k)$ con complejidad menor o igual que $10k_6$, antes tenemos que definir "$\models$" para el conjunto X. La idea es enumerar el conjunto X por medio de tuplas, es decir, a la fórmula ϕ_j le asociamos la tupla $(0^{<j>}, 1/2, ..., 1/2)$, esto se debe a que el lenguaje $\mathcal{L}(n,k)$ puede diferenciar esa tupla por medio de la fórmula $\rho_j : x_1 = ... = x_j \neq x_{j+1}$. Luego, gracias a la condición (6), podemos lograr codificar esta enumeración por medio del clique haciendo que la correspondencia sea biunívoca. Las siguientes proposiciones nos muestran cómo se hace esta codificación. Recordemos que $W := \{(x_1, ..., x_k) \in (\mathbb{Q} \cap [0,n])^k | x_5, ..., x_k < x_1 < x_2 < x_3 \text{ y } x_4 < x_2\}$

Proposición 4.3.8. *Sean $i \in \mathbb{Z}^+$ y $p_5, ..., p_k \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq p_5, ..., p_k < i \leq n-4$. Entonces existe un único $q \in \mathbb{Q}$ con $q < i+2$ tal que $(i, i+2, i+3, q, p_5, ..., p_k) \in S$*

Demostración. Denotemos como A al elemento $(i, i+2, n, i+1, p_5, ..., p_k)$. Si $A \in S$ entonces, como S es $\mathbb{Z}^+$-superior-invariante, $(i, i+3, n, i+2, p_5, ..., p_k), (i, i+3, n, i+1, p_5, ..., p_k)$ pertenecerían a S, pero por la condición (6) del grafo $(i, i+3, n, i+2, p_5, ..., p_k)$ y $(i, i+3, n, i+1, p_5, ..., p_k)$ no están relacionados lo cual es una contradicción dado que S es un clique. Así se concluye que $A \notin S$, luego existe $B \in S$ tal que no está relacionado con A. Notemos que $|A| = n$ y $A \in W$, por tanto A y B no están relacionados por la condición (6), (no pueden ser las otras condiciones) y así $B \in W$. Supongamos que $B = (y_1, ..., y_k)$, entonces como falla la condición (6), alguna de las siguientes opciones sucede

- $i = y_1, i + 2 = y_2, n = y_3, i + 1 \neq y_4, p_5 = y_5, ..., p_k = y_k$
- $i = y_1, i + 2 = y_2, n = y_3, i + 1 = y_4, p_i \neq y_i$ para algún $5 \leq i \leq k$

Supongamos que sucede la segunda opción. Dado que $B \in W$ se tiene que $y_5, ..., y_k < y_1$, por tanto podemos usar el mismo argumento del principio de la demostración y deducir que $B \notin S$ lo cual es una contradicción. Así, se tiene que cumplir la primera opción, por lo tanto existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $B = (i, i + 2, n, q, p_5, ..., p_k) \in S \cap W$. Como $B \in W$, se tiene que $q < i + 2$ concluyendo que $(i, i + 2, n, q, p_5, ..., p_k)$ es $\mathbb{Z}^+$-superior-equivalente con $(i, i + 2, i + 3, q, p_5, ..., p_k)$, luego como S es $\mathbb{Z}^+$-superior-invariante se tiene que $(i, i + 2, i + 3, q, p_5, ..., p_k) \in S$. Si existe otra $q' < i + 2$ tal que $(i, i + 2, i + 3, q', p_5, ..., p_k) \in S \cap W$, por la condición (6) se concluye que $q' = q$.

□

Proposición 4.3.9. *Sean $i \in \mathbb{Z}^+$ y $q, p_5, ..., p_k, q_5, ..., q_k \in \mathbb{Q}$ tales que $0 \leq p_5, ..., p_k, q_5, ..., q_k < i \leq n - 4$ y $q < i + 2$. Si $(i, i + 2, i + 3, q, p_5, ..., p_k), (i, i + 2, i + 3, q, q_5, ..., q_k) \in S$ entonces $p_5 = q_5$, ..., $p_k = q_k$*

Demostración. Inmediato por la condición (6).

□

Gracias a las anteriores proposiciones, a la tupla $(0^{<j>}, 1/2, ..., 1/2)$ le vamos a asociar 4 racionales de manera biunívoca, por lo tanto esos 4 racionales van a codificar la fórmula ϕ_j. Ahora vamos a desarrollar formalmente lo que hemos mencionado.

Definición 4.3.10. Consideremos para $1 \leq i < k_2$ las siguientes fórmulas

$$\rho_i : x_{2k_4+1} = ... = x_{2k_4+i} \neq x_{2k_4+i+1}$$

Además $\rho_{k_2} : x_{2k_4+1} = ... = x_{2k_4+k_2}$. La fórmula $\Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$ expresa

$$(\exists x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2} < x_1)(\bigvee_{j=1}^{j=k_2} \phi_j(x_5, ..., x_{2k_4}) \wedge \rho_j \wedge$$

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2}, ..., x_{2k_4+k_2}))$$

Como se verá en la proposición 4.3.11, $\Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$ enumera las fórmulas de X por medio de las fórmulas ρ_j, y éstas están codificadas a través de la tupla de racionales que nos proporciona las proposiciones 4.3.8 y 4.3.9.

Proposición 4.3.11. *Sean $i \in \mathbb{Z}^+$ menor que $n-4$ y sea $\varphi \in X$. Dados $p_{k_4+1},...,p_{2k_4}$ parámetros menores que i existen $q_1,...,q_4$ racionales menores que $i+4$ tales que para todo $x_5,...,x_{k_4} < i$ se tiene que*

$$\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \varphi(x_5,...,x_{k_4},p_{k_4+1},...,p_{2k_4}) \textit{ si y sólo si } \mathbb{Q}\cap[0,n] \models \Gamma(q_1,q_2,q_3,q_4,x_5,...,x_{k_4})$$

Demostración. Como $\varphi \in X$ entonces existe $j \leq k_2$ tal que $\varphi = \phi_j$. Por la proposición 4.3.8 existe un único $q < i+2$ tal que $(i, i+2, i+3, q, p_{k_4+1},...,p_{2k_4}, 0^{<j>}, 1/2, \ ..., 1/2) \in S$. Sean $x_5,...,x_{k_4} \in \mathbb{Q}\cap[0,i]$. Veamos la i-equivalencia.

Supongamos que $\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \phi_j(x_5,...,x_{k_4},p_{k_4+1},...,p_{2k_4})$. Notemos que por el párrafo anterior $\mathbb{Q}\cap[0,n] \models S(i,i+2,i+3,q,p_{k_4+1},...,p_{2k_4},0^{<j>},1/2,...,1/2)$ entonces uniendo estos dos argumentos se tiene que $\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \Gamma(i,i+2,i+3,q,x_5,...,x_{k_4})$.

Ahora supongamos que $\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \Gamma(i,i+2,i+3,q,x_5,...,x_{k_4})$, luego existen $j', p'_{k_4+1},...,p'_{2k_4}$, $q_{k_4+1},..., \ q_{k_4+k_2} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\mathbb{Q}\cap[0,n] \models S(i,i+2,i+3,q,p'_{k_4+1},...,p'_{2k_4},q_{2k_4+1},...,q_{k_4+k_2}) \wedge \rho_{j'} \wedge \phi_{j'}$$

Por la proposición 4.3.9 se tiene que $p'_{k_4+1} = p_{k_4+1},...,p'_{2k_4} = p_{2k_4}$ y $q_{2k_4+1} = ... = q_{2k_4+j} = 0$, y $q_{2k_4+j+1} = ... = q_{2k_4+k_2} = 1/2$, por tanto, como $\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \rho_{j'}$ se concluye que $j = j'$ y $\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \phi_j(x_5,...,x_{k_4},p_{k_4+1},...,p_{2k_4})$.

$\square$

Ahora demostremos que la fórmula Γ es nuestra relación de satisfacción.

Lema 4.3.12. *Sea ϕ una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula sin constantes tal que $\sharp(\phi) = r \leq 10k_6$, con variables entre $x_5,...,x_r$. Sea $j \in \mathbb{Z}^+$ menor que r. Dados $p_{j+1},...,p_r$ parámetros menores que r existen $q_1,...,q_4$ racionales menores que $3r+5$ tales que para todo $x_5,...,x_j < r$ se tiene que*

$$\mathbb{Q}\cap[0,n] \models \phi(x_5,...,x_j,p_{j+1},...,p_r) \textit{ si y sólo si } \mathbb{Q}\cap[0,n] \models \Gamma(q_1,q_2,q_3,q_4,x_5,...,x_j,...,x_j)$$

Demostración. Por el corolario 4.3.6 se tiene que ϕ es r-equivalente a una S-fórmula φ con $\sharp(\varphi) \leq 10^r$, con constantes entre $r,...,3r$. Como mencionamos al principio de la sección, tenemos que $\sharp(\varphi) < k_4$. Consideremos una nueva S-fórmula φ' que resulta al reemplazar las variables $x_{j+1},...,x_r$ por $x_{k_4+1},...,x_{k_4+r-j}$ y al reemplazar las constantes de φ por nuevas variables entre $x_{k_4+r-j+1}$ y $x_{k_4+r-j+2r}$. Notemos que $\varphi' \in X$, entonces aplicamos la proposición 4.3.11 a φ' con $3r+1$ en el rol de i y con $p_{j+1},...,p_r,r,...,3r$ como parámetros. Al reemplazar nuevamente las constantes a φ' obtenemos a φ y como ésta es r-equivalente a ϕ se tiene el resultado.

$\square$

Ahora veamos cómo se traduce la fórmula $\Gamma(x_1,...,x_{k_4})$ en una S-fórmula.

Lema 4.3.13. *Existe una $\mathcal{L}$-fórmula ρ libre de cuantificadores, cuyas variables están entre $x_1, ..., x_{k_4}, x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1}$ tal que para todo $x_1, ..., x_{k_4} \in \mathbb{Q}$ se tiene*

$$\Gamma(x_1, ..., x_{k_4}) \leftrightarrow (\exists x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1} < v_1)(S(x_{k_1+1}, ..., x_{2k_1}, ..., x_{2k_1}) \wedge S(x_{2k_1+1}, ..., x_{3k_1}, ..., x_{3k_1}) \wedge \rho)$$

Demostración. La definición de Γ es equivalente a

$$(\exists x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2} < x_1)$$

$$(S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2}, ..., x_{2k_4+k_2}) \wedge \bigvee_{j=1}^{j=k_2} \phi_j(x_5, ..., x_{2k_4}) \wedge \rho_j)$$

Por otra parte, si la fórmula $\phi_j(x_5, ..., x_{2k_4})$ es de la forma $S(x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_{2k_4}}, ..., x_{\alpha_{2k_4}})$ donde $x_{\alpha_i} \in \{x_1, ..., x_{2k_4}\}$, entonces, si denotamos como δ_j a la fórmula $(x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4}) = (x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_{2k_4}})$ se tiene que ϕ_j es equivalente a $S(x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4}, ..., x_{k_1+2k_4}) \wedge \delta_j$. Notemos que δ_j es una $\mathcal{L}$-fórmula libre de cuantificadores. Por lo anterior $\Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$ es equivalente a

$$(\exists x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2}, x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4} < x_1)$$

$$(S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2}, ..., x_{2k_4+k_2}) \wedge \bigvee_{j=1}^{j=k_2} S(x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4}, ..., x_{k_1+2k_4}) \wedge \delta_j \wedge \rho_j)$$

que es equivalente a

$$(\exists x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2}, x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4} < x_1)$$

$$(S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{k_4+1}, ..., x_{2k_4+k_2}, ..., x_{2k_4+k_2}) \wedge S(x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4}, ..., x_{k_1+2k_4}) \wedge \bigvee_{j=1}^{j=k_2} \delta_j \wedge \rho_j)$$

Con un cambio de variables y definiendo a ρ como la fórmula $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{2k_1+1}, x_{2k_1+2}, x_{2k_1+3}, x_{2k_1+4}) \wedge \bigvee_{j=1}^{j=k_2} \delta_j \wedge \rho_j$ lo anterior es equivalente a

$$(\exists x_{2k_1+1}, ..., x_{2k_1+k_2+k_4+5}, x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4} < x_1)$$

$$(S(x_{2k_1+1}, ..., x_{2k_1+k_2+k_4+5}, ..., x_{2k_1+k_2+k_4+5}) \wedge S(x_{k_1+1}, ..., x_{k_1+2k_4}, ..., x_{k_1+2k_4}) \wedge \rho)$$

Agregándole las variables que faltan, que no afectan la anterior expresión, obtenemos el resultado.

□

Denotamos como ρ a la $\mathcal{L}$-fórmula libre de cuantificadores del lema 4.3.13. Usando las proposiciones 4.2.6 y 4.2.7 es fácil demostrar el siguiente hecho.

Hecho 4.3.14. La $\mathcal{L}(n, k)$-fórmula $S(x_{k_1+1}, ..., x_{2k_1}, ..., x_{2k_1}) \wedge S(x_{2k_1+1}, ..., x_{3k_1}, ..., x_{3k_1})$ es $(n-1)$-equivalente a $S(n^{<3>}, n-1, n-1, x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1}, ..., x_{3k_1})$.

Corolario 4.3.15. *$\Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$ es $(n-2)$-equivalente a $(\exists x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1} < x_1)(S((n-1)^{<3>}, n-2, n-2, x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1}, ..., x_{3k_1}) \wedge \rho)$*

Demostración. Usar el hecho 4.3.14, el lema 4.3.13 y la proposición 4.3.4.

□

Acá es donde usamos nuestra séptima condición del grafo para dejar $\Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$ en términos únicamente de nuestro clique.

Proposición 4.3.16. *Sean $z_1, ..., z_5, w_1, ..., w_{k_4} \in \mathbb{Q} \cap [0, n)$. Entonces $(n^{<5>}, z_1, ..., z_5, w_1, ..., w_{k_4}, ..., w_{k_4}) \in S$ si y sólo si no existen $d_{k_1+1}, ..., d_{4k_1} < z_1$ tales que $(z_1, ..., z_5, d_{k_1+1}, ..., d_{4k_1}) \in S$ y $\mathbb{Q} \models \theta(w_1, ..., w_{k_4},\ d_{k_1+1}, ..., d_{4k_1})$ donde θ es una fórmula sin cuantificadores en el lenguaje $\mathcal{L} = \{<\}$.*

Demostración. Utilizar el mismo argumento, esta vez con la condición (7), que se usó para demostrar las proposiciones 4.2.5 y 4.2.6.

□

Ahora ya podemos traducir Γ en una S-fórmula.

Lema 4.3.17. *Sea $1 \leq i \leq n-4$. Entonces para todo $x_1, ..., x_{k_4} < i$ se tiene que*

$$\mathbb{Q} \cap [0, n] \models \Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$$

si y sólo si

$$\mathbb{Q} \cap [0, n] \models S((i+3)^{<2>}, (i+2)^{<5>}, (i+1)^{<3>}, i, i, x_1, ..., x_{k_4}, ..., x_{k_4})$$

Demostración. Por la proposición 4.3.16 se tiene que $(\exists x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1} < v_1)(S((n-1)^{<3>}, n-2,\ n-2, x_{k_1+1}, ..., x_{3k_1}, ..., x_{3k_1}) \wedge \rho)$ es n-equivalente a $\neg S(n^{<5>}, (n-1)^{<3>}, n-2, n-2, x_1, ..., x_{k_4},\ ..., x_{k_4})$, que por la proposición 4.3.4 es $(n-1)$-equivalente a $\neg S((n-1)^{<5>}, (n-2)^{<3>}, n-3, n-3, x_1, ..., x_{k_4},\ ..., x_{k_4})$, que por la proposición 4.2.6 es n-equivalente a $S(n^{<2>}, (n-1)^{<5>}, (n-2)^{<3>}, n-3, n-3, x_1, ..., x_{k_4},\ ..., x_{k_4})$. Por el corolario 4.3.15 se tiene que $\Gamma(x_1, ..., x_{k_4})$ es $(n-3)$-equivalente a $S(n^{<2>}, (n-1)^{<5>}, (n-2)^{<3>}, n-3, n-3, x_1, ..., x_{k_4}, ..., x_{k_4})$, así, usando la proposición 4.3.4 podemos reemplazar n con $i+3$.

□

Ahora nuestra relación de satisfacción se define usando únicamente nuestro clique S como se ve en el siguiente lema.

Lema 4.3.18. *Sea ϕ una $\mathcal{L}(n, k)$-fórmula sin constantes tal que $\sharp(\phi) \leq r \leq 10k_6$ con variables entre $x_5, ..., x_r$. Sea $j \in \mathbb{Z}^+$ menor que r. Dados $p_{j+1}, ..., p_r$ parámetros menores que r existen $q_1, ..., q_{16}$ racionales menores que $3r+9$ tal que para todo $x_5, ..., x_j < r$ se tiene que*

$$\mathbb{Q} \cap [0, n] \models \phi(x_5, ..., x_j, p_{j+1}, ..., p_r) \text{ si y sólo si } \mathbb{Q} \cap [0, n] \models S(q_1, ..., q_{16}, x_5, ..., x_j, ..., x_j)$$

Demostración. Por el lema 4.3.12 existen $q_1, ..., q_4$ racionales menores que $3r+5$ tales $\phi(x_5, ..., x_j, p_{j+1}, ..., p_r)$ es r-equivalente a $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4,\ x_5, ..., x_j, ..., x_j)$. Por el lema 4.3.17, $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4 x_5, ..., x_j, ..., x_j)$ es $(3r+5)$-equivalente a $S((3r+8)^{<2>}, (3r+7)^{<5>}, (3r+6)^{<3>}, 3r+5, 3r+5, q_1, q_2, q_3,\ q_4, x_5, ..., x_j, ..., x_j)$, por tanto juntando estas dos equivalencias obtenemos el resultado.

□

Nos va a ser más útil presentar el anterior lema de la siguiente manera.

Teorema 4.3.19 (Definibilidad finita)**.** *Sea ϕ una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula tal que $\sharp(\phi) \leq r \leq k_6$ sin constantes. Sean $s, j \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1 \leq s, j \leq r$. Dados $p_{j+1}, ..., p_r$ parámetros existen $q_1, ..., q_{16}$ racionales menores que $15r+57$ tales que para todos $x_1, ..., x_j < r$ se tiene que*

$$\mathbb{Q} \cap [0,n] \models ((\phi(x_1, ..., x_j, p_{j+1}, ..., p_r) \wedge x_1, ..., x_j < s) \leftrightarrow S(q_1, ..., q_{16}, x_1, ..., x_j, ..., x_j))$$

Demostración. Consideremos la fórmula $\phi' = \phi \wedge x_1, ..., x_j < x_r$. Además a cada variable x_i de ϕ' la reemplazamos por x_{i+4}. Notemos que a los más tiene $r+4$ variables y por cada una se agregaron a lo más 3 símbolos lógicos y no se cambiaron las S-fórmulas, luego $\sharp(\phi') \leq (r+4) + 3(r+4) + r = 5r + 16 \leq 10k_6$. Así aplicamos el lema anterior con ϕ' y obtenemos el teorema.

□

4.4. Teoría de conjuntos linealmente ordenada

Antes de proseguir vamos a definir la teoría de conjuntos linealmente ordenada que vamos a denotar como LOST(k). Aquí vamos a presentar de manera distinta del artículo de Friedman el axioma de indiscernibilidad acotada porque consideramos que así se simplifican algunas demostraciones. Además incluimos un teorema que denominamos teorema de la definibilidad acotada que, aunque Friedman da las ideas de cómo hacerlo, él no lo desarrolla.

LOST(k) cuenta con una variación del axioma de separación lo cual nos va a permitir hacer construcciones como la noción de pre-(buen orden) que se desarrollará en la siguiente sección. La clase de los pre-(buenos órdenes) es bien ordenada bajo isomorfismos, y básicamente ésta será nuestra estructura de segundo orden de los ordinales.

La existencia del modelo de LOST(K) es consecuencia a la codificación que hemos logrado de las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas y la relación de satisfacción como se verá en el teorema 4.4.4. De hecho las restricción que aparece en sus axiomas se debe a la restricción que tenemos en las codificaciones. El lenguaje en el que se va a escribir LOST(K) lo vamos a notar como $\mathcal{L}(k)$ y se basa en:

- Símbolos de relación binarios: $\in', \prec$
- Constantes $0, 1, ..., k$

- Variables x_i para $i \in \mathbb{Z}^+$

Esta vez no hay restricción en las variables y además una $\mathcal{L}(k)$-fórmula es una fórmula construida en el lenguaje $\mathcal{L}(k)$ en el sentido clásico. Va a existir una relación muy estrecha entre las $\mathcal{L}(k)$-fórmulas y las $\mathcal{L}(n,k)$-fórmulas, así que necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.4.1. Sea ϕ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula. Definimos como **la complejidad de** ϕ, que denotamos como $c(\phi)$, como la suma de:

- Número de veces que aparecen los símbolos lógicos $(\neg, \wedge, \exists)$.
- El mayor i el cual la variable x_i aparece en ϕ.

Dada una $\mathcal{L}(k)$-fórmula ϕ, notaremos como $\phi^{\prec i}$ a la fórmula resultante al acotar por i los cuantificadores de ϕ. (es decir, $\exists x \psi$ lo reemplazamos por $\exists x(x \prec i \wedge \psi)$).

Definición 4.4.2. Los axiomas de LOST(k) son los siguientes:

Básicos.
- $\prec$ es un orden lineal con elemento mínimo 0 y sin elemento máximo.
- $0 \prec 1 \prec 2 \prec ... \prec k$
- $\forall x, y(x \in' y \to x \prec y)$

Separación acotada. Sea $\phi(x_1, ..., x_i)$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula sin constantes donde $c(\phi) \leq i \leq k_6/10^4$. El axioma es

$$\forall x_2, ..., x_i \prec i(\exists x_{i+1} \prec 10^6 i)(\forall x_1)(x_1 \in' x_{i+1} \leftrightarrow \phi^{\prec i}(x_1, ..., x_i) \wedge x_1 \prec i)$$

Indiscernibilidad acotada. Sea $i \in \mathbb{Z}^+$ con $i \leq k_3 - 1$. Sea $\phi(x_1, ..., x_{k_3}, x_{k_3+1}, ..., x_{2k_3-1})$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula sin constantes donde $c(\phi) \leq 2k_3 - 1$. Sean $i \leq a_i, ..., a_{k_3-1}, b_i, ..., b_{k_3-1} \leq k_3 - 1$ números naturales tales que $(a_i, ..., a_{k_3-1})$ es orden equivalente a $(b_i, ..., b_{k_3-1})$. Si denotamos como $\bar{x} = (x_1, ..., x_{k_3}, x_{k_3+1}, ..., x_{k_3+i-1})$, el axioma es

$$\forall \bar{x} \prec i(\phi^{\prec k_3}(\bar{x}, a_i, ..., a_{k_3-1}) \leftrightarrow \phi^{\prec k_3}(\bar{x}, b_i, ..., b_{k_3-1}))$$

El axioma de separación acotada nos permite construir elementos e indiscernibilidad acotada sirve para ver que el elemento construido lo podamos seguir usando como parámetro para poder crear más objetos. Esto se entenderá mejor en el lema 4.4.6 pero antes veamos que existe un modelo de LOST(k).

La elección de ese modelo se debe principalmente a los 16 parámetros que resultaron al definir la relación "$\models$" en el teorema de la definibilidad finita.

Definición 4.4.3. Sea la estructura $M(S) := ((\mathbb{Q} \cap [0,k])^{16}, \in', \prec, 0', 1', ..., k')$. Las interpretaciones son

- $x \in' y$ si y sólo si $|x| < |y|$ y $S(y_1, ..., y_{16}, x_1, ..., x_{16}, ..., x_{16})$.
- $x \prec y$ si y sólo si, $|x| < |y|$ ó $|x| = |y|$ y $x <_{lex} y$.
- Para $0 \leq i \leq k$ se tiene que $i' := (0, 0, ..., 0, i)$.

Teorema 4.4.4. $M(S) \models$ *LOST(k)*

Demostración. **Básicos.** Es fácil ver que $\prec$ es un orden lineal y que $0'$ es el elemento mínimo. Por la misma definición se ve que $M(S) \models \forall x, y(x \in' y \to x \prec y)$.

Separación acotada. Sea $\phi(x_1, ..., x_i)$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula sin constantes donde $c(\phi) \leq i \leq k_6/10^4$. La idea es encontrar para $\phi^{\prec i}$ una $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula ψ a la cual sería equivalente y poder aplicar la teoría ya desarrollada. Con ser equivalentes nos referimos a que dado $a = (a_1, ..., a_{16}) \in (\mathbb{Q} \cap [0,k])^{16}$:

$$M(S) \models \phi^{\prec i}(a) \text{ si y sólo si } \mathbb{Q} \models \psi(a_1, ..., a_{16})$$

Para esto, a cada variable x_j le vamos a asociar 16 variables $v_{16j-15}, v_{16j-14}, ..., v_{16j}$ y vamos a proceder por inducción.

- Si ϕ es de la forma $x_k \prec x_j$, entonces ψ queda de la forma:

$$(\bigvee_{a=0}^{a=15} \bigwedge_{b=0}^{b=15} v_{16k-a} < v_{16j-b})\vee$$

$$(\neg(\bigvee_{a=0}^{a=15} \bigwedge_{b=0}^{b=15} v_{16k-a} < v_{16j-b} \vee \bigvee_{a=0}^{a=15} \bigwedge_{b=0}^{b=15} v_{16j-a} < v_{16k-b}) \wedge x_k <_{lex} x_j)$$

  donde $x_k <_{lex} x_j$ también se puede expresar en $\mathcal{L}(n,k)$ pero es bastante extenso por lo que lo dejamos como ejercicio.

- Si ϕ es de la forma $x_k \in' x_j$ entonces ψ queda de la forma:

$$(\bigvee_{a=0}^{a=15} \bigwedge_{b=0}^{b=15} v_{16k-a} < v_{16j-b}) \wedge S(v_{16j-15}, ..., v_{16j}, v_{16k-15}, ..., v_{16k}, ..., v_{16k})$$

- Los casos de negación, disyunción y existencial se hace de manera inductiva.

Es fácil ver que la fórmula ψ es equivalente con $\phi^{\prec i}$ de la forma que ya mencionamos. Para saber cuánto es $\sharp(\psi)$, notemos que sólo en las fórmulas atómicas se agregan símbolos lógicos y con toda certeza podemos asegurar que $\sharp(\psi) \leq 10^4 i$. Por lo tanto aplicamos el teorema 4.3.19 a ψ donde $10^4 i, 16, i$ toman el rol de r, j, s, respectivamente. Entonces dados $p_{17}, ..., p_{10^4 i} < 10^4 i$ parámetros existen $q_1, ..., q_{16}$ racionales menores que $10^6 i$ tales que para todos $v_1, ..., v_{16} < 10^4 i$ se tiene

$$\mathbb{Q} \models S(q_1, ..., q_{16}, v_1, ..., v_{16}, ..., v_{16}) \leftrightarrow (\psi(v_1, ..., v_{16}, p_{17}, ..., p_{10^4 i}) \wedge v_1, ..., v_{16} < i)$$

Dado que ψ es equivalente con $\phi^{\prec i}$, tenemos que dados $p_2, ..., p_i \prec i'$ parámetros en $M(S)$, existe $q \in M(S)$ menor que $(10^6 i)'$ tal que para todo $x_1 \in M(S)$

$$M(S) \models x_1 \in' q \leftrightarrow (\phi^{<i}(x_1, p_2, ..., p_i) \wedge x_1 \prec i')$$

Lo cual es justo el axioma de separación acotada.

Indiscernibilidad acotada. Sea $i \in \mathbb{Z}^+$ con $i \leq k_3 - 1$. Sea $\phi(x_1, ..., x_{k_3}, x_{k_3+1}, ..., x_{2k_3-1})$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula sin constantes donde $c(\phi) \leq 2k_3 - 1$. Como en la demostración anterior, consideramos la $\mathcal{L}(n,k)$-fórmula ψ que es equivalente ala fórmula $\phi^{\prec k_3}$. Así la fórmula resultante cumple que $\sharp(\psi) \leq 10^5 k_3$, además sus variables están entre $v_1, ..., v_{16(2k_3-1)}$.

Ahora aplicamos el corolario 4.3.6 a la fórmula ψ y así obtenemos una S-fórmula γ la cual es $10^5 k_3$-equivalente a ψ. Sean $i \leq a_i, ..., a_{k_3-1}, b_i, ..., b_{k_3-1} \leq k_3 - 1$ números naturales tales que $\bar{a} := (a_i, ..., a_{k_3-1})$ es orden equivalente a $\bar{b} := (b_i, ..., b_{k_3-1})$. Notemos que si $\bar{c}$ es una tupla de racionales menores que i, dado que S es $\mathbb{Z}^+$-invariante se tiene que

$$(\bar{c}, \bar{a}) \in S \text{ si y sólo si } (\bar{c}, \bar{b}) \in S$$

Por tanto, como γ es una S-fórmula se sigue manteniendo la equivalencia

$$\gamma(\bar{c}, \bar{a}) \text{ es equivalente a } \gamma(\bar{c}, \bar{b})$$

Como γ es $10^5 k_3$-equivalente a ψ, y ésta es equivalente a la fórmula $\phi^{\prec k_3}$, se tiene que

$$\phi^{\prec k_3}(\bar{c}, \bar{a}) \text{ es equivalente a } \phi^{\prec k_3}(\bar{c}, \bar{b})$$

□

El siguiente lema nos mostrará cómo vamos a construir elementos usando LOST(k).

Definición 4.4.5. Sean $x, x_1, ..., x_k \in M(S)$ usaremos la notación $x \simeq \{x_1, ..., x_k\}$ cuando $M(S) \models \forall z(z \in' x \leftrightarrow (z = x_1 \vee ... \vee z = x_k))$.

Lema 4.4.6. *Sea $\phi(y, z, w_1, ..., w_i)$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula acotada sin constantes tal que $c(\phi) \leq i \leq k_6/10^4$. Sean $q, p_1, ..., p_r \in M(S)$ menores que i. Entonces existe $p \in M(S)$ menor que i tal que $p \simeq \{y \preceq q : M(S) \models \phi(y, q, p_1, ..., p_r)\}$.*

Demostración. Aplicando separación acotada a la fórmula $\phi(y, z, w_1, ..., w_r) \wedge y \preceq z$ tenemos que

$$M(S) \models (\exists x \prec 10^6 i)(\forall y)(y \in' x \leftrightarrow \phi^{\prec i}(y, q, p_1, ..., p_r) \wedge y \preceq q \wedge y \prec i)$$

Dado que ϕ es acotada y $q \prec i$, la anterior fórmula es equivalente a

$$M(S) \models (\exists x \prec 10^6 i)(\forall y)(y \in' x \leftrightarrow \phi(y, q, p_1, ..., p_r) \wedge y \preceq q)$$

Dado que todos los parámetros usados son menores que i, podemos aplicar indiscernibilidad acotada y así tenemos que

$$M(S) \models (\exists x \prec i)(\forall y)(y \in' x \leftrightarrow \phi(y, q, p_1, ..., p_r) \wedge y \preceq q)$$

Lo cual es justo lo que necesitamos.

$\square$

Como podemos apreciar en el lema 4.4.6, LOST(k) tiene una considerable restricción en las fórmulas la cual en cierto momento nos impedirá avanzar, dado que éstas cada vez van a tener mayor complejidad. No obstante, esta restricción nos va a permitir construir la noción de sucesión finita y ya con esto podemos definir "$\models$"para todas las fórmulas y no sólo para un conjunto finito. Esto nos quitará las restricciones. Primero vamos a desarrollar la noción de función en $M(S)$.

Definición 4.4.7. Sean $a, b, p \in M(S)$. Usaremos la notación $p \simeq (a, b)$ si existen $x, y \in M(S)$ tales que

- $p \simeq \{x, y\}$
- $x \simeq \{a\}$
- $y \simeq \{a, b\}$

Veamos que existe en $M(S)$ la noción de pareja ordenada.

Proposición 4.4.8. *Sea $i \leq k_6/10^4$. Sean $a_1, ..., a_r \in M(S)$ tales que $a_1, ..., a_r \prec i$. Existe $q \in M(S)$ tal que $q \prec i$ y $q \simeq \{a_1, ..., a_r\}$.*

Demostración. Primero supongamos que $4 \leq i$. Notemos que la fórmula $\phi(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in' x_2 \vee x_1 \in' x_3$ tiene complejidad 4, por tanto por el lema 4.4.6 dados $p_2, p_3 \prec i$ existe un elemento $q \prec i$ tal que $q \simeq \{z : z \in' p_2 \vee z \in' p_3\}$ es decir $z = p_2 \cup^{M(S)} p_3$.

Para incluir los casos en que $i \in \{1, 2, 3\}$ usamos nuevamente indiscernibilidad acotada a la fórmula $\forall x_2, x_3 \prec 4 \exists x_4 \prec 4 \forall x_1 (x_1 \in' x_4 \leftrightarrow x_1 \in' x_2 \vee x_1 \in' x_3)$. Por inducción se puede ver que dados $p_1, ..., p_r \prec i$ existe $\bigcup_{j=1}^{j=r\,M(S)} p_j$. Aplicando el mismo procedimiento anterior con la fórmula $\psi(x_1, x_2) : x_1 = x_2$ podemos concluir que dado $i \leq k_6/10$ y $p \prec i$ existe $q \prec i$ tal que $q \simeq \{p\}$.

Así, dados $a_1, ..., a_r \prec i$ elementos de $M(S)$, existen $b_1, ..., b_r \in M(S)$ menores que i tales que $b_1 \simeq \{a_1\}, ..., b_r \simeq \{a_r\}$, así al unirlos, existe un elemento $c \in M(S)$ con $c \prec i$ tal que $c \simeq \{a_1, ..., a_r\}$.

$\square$

Corolario 4.4.9. *Sea $i \leq k_6/10^4$. Sean $a, b \in M(S)$ tales que $a, b \prec i$. Existe $p \in M(S)$ tal que $p \prec i$ y $p \simeq (a, b)$*

Demostración. Sean $a, b \in M(S)$ menores que i, por la proposición anterior existen $x, y \in M(S)$ menores que i tales que $x \simeq \{a\}$ y $y \simeq \{a, b\}$, y así mismo existe $p \in M(S)$ menor que i tal que $p \simeq \{x, y\}$.

□

Definición 4.4.10. Sea $r \geq 2$. Inductivamente definimos $p \simeq (a_1, ..., a_{r+1})$ si existe b tal que $p \simeq (b, a_3, ..., a_{r+1})$ y $b \simeq (a_1, a_2)$.

Por inducción se puede demostrar el siguiente hecho.

Hecho 4.4.11. Sea $i \leq k_6/10^4$. Para todo $a_1, ..., a_r \prec i$ existe $p \in M(S)$ tal que $p \prec i$ y $p \simeq (a_1, ..., a_r)$. Además si existen otros $b_1, ..., b_r$ tales que $p \simeq (b_1, ..., b_r)$, entonces $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i \leq r$.

Ahora ya teniendo la noción de pareja ordenada podemos definir en $M(S)$ qué es una relación y una función.

Definición 4.4.12. Sea $i \leq k_6/10^4$. Sea $R \in M(S)$.

- Decimos que R es una (i, r)**-relación** si y sólo si para todo $p \in' R$ existen $a_1, ..., a_r \prec i$ tales que $p \simeq (a_1, ..., a_r)$. Denotaremos como $R(a_1, ..., a_r)$ si y sólo si existe $p \in' R$ tal que $p \simeq (a_1, ..., a_r)$.

- Decimos que R es una (i, r)**-función** si es una $(i, r+1)$-relación tal que, dados $a_1, ..., a_r$, $b, c \in M(S)$, si $R(a_1, ..., a_r, b)$ y $R(a_1, ..., a_r, c)$ entonces $b = c$.

Ahora necesitamos la noción de número natural para definir en $M(S)$ el concepto de sucesión finita. A diferencia de las definiciones anteriores, la definición de número natural en $M(S)$ es distinta a la noción clásica, esto se debe a que no sabemos a ciencia cierta cómo se comporta la relación $\in'$ ya que depende de un clique genérico. Así, vamos abstraer la idea principal de número natural: un conjunto dotado con una relación de orden total entre sus elementos que verifica que dado cualquier subconjunto no vacío, éste posee un elemento mínimo y un elemento máximo. Además para poder usar los número naturales como parámetros en separación acotada es conveniente que sean menores que 1.

Definición 4.4.13. Decimos que $R \in M(S)$ es un **número natural en** $M(S)$ si:

- $R \prec 1$

- R es una $(1, 2)$-relación de orden total en $M(S)$.

- Sea $A \prec k_3 - 1$ tal que existe $x \in' A$ que cumpla $R(x, x)$. Entonces existen $a, b \in' A$ tales que $R(a, a)$, $R(b, b)$, y para todo $w \in' A$, si $R(w, a)$ entonces $w = a$, y, si $R(b, w)$ entonces $w = b$.

Básicamente la última condición nos dice que todo conjunto no vacío que tiene elementos en R, tiene un R-elemento mínimo y un R-elemento máximo. Notemos que por esto mismo R tiene máximo y mínimo. Usaremos la notación $a \leq_R b$ para indicar que $R(a,b)$.

Demostremos que existen los números naturales en $M(S)$.

Definición 4.4.14. Sea R, W números naturales en $M(S)$. Decimos que W **extiende a** R si $R \subset^{M(S)} W$.

Lema 4.4.15. *Sea R un número natural en $M(S)$ y $a \prec 1$, donde $\neg R(a,a)$. Entonces existe un número natural W en $M(S)$ tal que a es su máximo y además extiende a R. Luego para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ existe un número natural en $M(S)$ cuyo dominio tiene cardinalidad m.*

Demostración. Sea R un número natural y $a \prec 1$, donde $\neg R(a,a)$. Para empezar, primero veamos que $(\mathrm{Dom}(R))^{M(S)}$ existe. Para ello consideramos la fórmula $\phi(x_1, x_2, x_3) : \exists x_2(x_2 \in' x_3 \wedge x_2 \simeq (x_1, x_1))$. Por el lema 4.4.6 existe $p \in M(S)$ tal que $p \simeq \{x_1 :$ existe x_2 tal que $x_2 \in' R$ y $x_2 \simeq (x_1, x_1)\}$. Recordemos que como R es menor que 1 lo podemos usar como parámetro sin problema y, como es el único parámetro que usamos, garantizamos que $p \prec 1$. Notemos que $p =(\mathrm{Dom}(R))^{M(S)}$.

Ahora, aplicando nuevamente el lema 4.4.6 a la fórmula $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1 \in' x_2 \vee x_1 \simeq (x_3, x_3) \vee \exists y(y \in' x_4 \wedge x_1 \simeq (y, x_3)))$ existe $W \in M(S)$ tal que si $W \simeq \{x_1 : x_1 \in' R \vee x_1 \simeq (a,a) \vee \exists y(y \in' (\mathrm{Dom}(R))^{M(S)} \wedge x_1 \simeq (y,a))$. Como R, a y $(\mathrm{Dom}(R))^{M(S)}$ son menores que 1 los podemos usar como parámetros sin ningún problema y así mismo garantizar que $W \prec 1$. Es fácil ver que W extiende a R y a es su máximo.

Notemos que $\{(0', 0')\}^{M(S)}$ es un número natural en $M(S)$. Así, dado $m \in \mathbb{Z}^+$, aplicamos este resultado m veces a partir del número $\{(0', 0')\}^{M(S)}$ para garantizar la existencia de un número natural en $M(S)$ cuyo dominio tenga cardinalidad m.

$\square$

Ahora vamos a ordenar los números naturales en $M(S)$.

Definición 4.4.16. Sean $a, b \in M(S)$. Usaremos la notación $a \equiv b$ cuando $M(S) \models \forall z(z \in' a \leftrightarrow z \in' b)$.

Definición 4.4.17. Sean $W, R \in M(S)$ números naturales. **Una función de comparación parcial** f **entre** R **y** W es una $(1,1)$-función tal que

- $\mathrm{Dom}(f) \subset^{M(S)} \mathrm{Dom}(R)$ y $\mathrm{Ran}(f) \subset^{M(S)} \mathrm{Dom}(W)$.
- $a \leq_R b$ si y sólo si $f(a) \leq_W f(b)$ para todo $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$
- Si $a \in' \mathrm{Dom}(f)$ y existe $b \in' \mathrm{Dom}(R)$ tal que $b \leq_R a$, entonces $b \in' \mathrm{Dom}(f)$.
- Si $a \in' \mathrm{Ran}(f)$ y existe $b \in' \mathrm{Dom}(W)$ tal que $b \leq_W a$, entonces $b \in' \mathrm{Ran}(f)$.

Se dice que f es una **función de comparación entre** R **y** W, si es una función comparación parcial y además $\mathrm{Dom}(f) \equiv \mathrm{Dom}(R)$ y $\mathrm{Ran}(f) \subset^{M(S)} \mathrm{Dom}(W)$, o, $\mathrm{Dom}(f) \subset^{M(S)} \mathrm{Dom}(R)$ y $\mathrm{Ran}(f) \equiv \mathrm{Dom}(W)$.

Por medio de funciones de comparación podemos comparar los números naturales en $M(S)$. Veamos que existen.

Observación. Dado que se vuelve complicado y tedioso determinar la complejidades de las fórmulas que usaremos en adelante vamos a omitir ese proceso, sin embargo no hay que preocuparnos ya que $k_6/10^4$ es un número mayor que 1000 y las complejidades de las fórmulas que vamos a usar hasta quitarnos la restricción no llegan a tener una complejidad mayor que 500.

Lema 4.4.18. *Sean R, W números naturales en $M(S)$. Existe una función de comparación entre R, W menor que* 1. *Además es única según* $\equiv$

Demostración. Notemos que los parámetros que se usan en la definición de función de comparación parcial son menores que 1, luego por el lema 4.4.6 existe $\Lambda \in M(S)$ menor que 2 tal que

$$\Lambda \simeq \{f \prec 1 : f \text{ es una función de comparación parcial entre } R \text{ y } W\ \}$$

Gracias a la proposición 4.4.8 y el corolario 4.4.9 creamos la función de comparación parcial que envía el menor elemento de R al menor elemento de W, y además es menor que 1, luego se tiene que $\Lambda \neq \emptyset^{M(S)}$. Como Λ es menor que 2, nuevamente por el lema 4.4.6 existe $\Omega \in M(S)$ menor que 2 tal que $x \in' \Omega$ si y sólo si existe $y \in \Lambda$ tal que x es el máximo R-elemento del $\mathrm{Dom}(y)$. Notemos que $\Omega \neq \emptyset^{M(S)}$ ya que $\Lambda \neq \emptyset^{M(S)}$, por tanto tiene un R-elemento máximo δ. Sea f función de comparación parcial entre R y W tal que el R-máximo de su dominio sea δ. Veamos que f es una función de comparación.

Si f no es una función de comparación entonces $\mathrm{dom}(f) \not\equiv \mathrm{dom}(R)$ y $\mathrm{ran}(f) \not\equiv \mathrm{dom}(W)$, luego existe α tal que es el R-elemento mínimo que cumple: $\alpha \in' \mathrm{dom}(R)$ y $\alpha \notin' \mathrm{dom}(f)$. Así mismo existe β tal que es el W-elemento mínimo que cumple: $\beta \in' \mathrm{dom}(W)$ y $\beta \notin' \mathrm{ran}(f)$. Por la proposición 4.4.8 y el corolario 4.4.9, existe $z \in M(S)$ menor que 1 tal que $z \simeq \{(\alpha, \beta)\}$, luego $f \cup^{M(S)} z$ sería una función de comparación menor que 1 lo que contradice la R-maximalidad de δ. Por lo tanto f efectivamente es nuestra función de comparación. Usando un argumento similar al de este párrafo podemos ver que f es única .

$\square$

Recordemos que una sucesión finita en el sentido clásico es una función de un número natural a otro conjunto. Siguiendo la misma idea vamos a definir sucesión finita en $M(S)$. Necesitamos que sea menor que 1 para poder usar la sucesión como parámetro en separación acotada si ningún problema.

Definición 4.4.19. Sea $i \leq k_6/10^4$. Decimos que α es una **i-sucesión finita** si y sólo si $\alpha \simeq (R, f)$ donde

- $\alpha \prec 1$
- R es un número natural en $M(S)$
- f es una $(i, 1)$-función cuyo dominio es el dominio de R.

Adicionalmente decimos que α es una i-sucesión finita de longitud r si $\mathrm{dom}(R)$ tiene tamaño r. El rango de una i-sucesión finita es el rango de f.

Es sencillo demostrar por inducción y por nuestro lema 4.4.6 el siguiente hecho.

Hecho 4.4.20. Sea $r, i \in \mathbb{Z}^+$ donde $i \leq k_6/10^4$. Dados $p_1, ..., p_r \in M(S)$ menores que i existe una i-sucesión finita $\alpha = (R, f)$ menor que i tal que $f(a_j) = p_j$ para todo $1 \leq j \leq r$, donde $\{a_1, ..., a_r\}^{M(s)}$ es el dominio de R que cumple que $a_k <_R a_j$ si $k < j$.

Ahora empecemos a definir "$\models$" dentro de $M(S)$.

Definición 4.4.21. Sea $i \leq k_6/10^4$ y $\phi(x_1, ..., x_r)$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula. Sea $\alpha = (R, f)$ una i-sucesión finita de longitud r cuyo dominio es $\{a_1, ..., a_r\}^{M(S)}$ y cumple que si $p < q$ entonces $a_p \leq_R a_q$. Decimos que α **satisface a** ϕ si $M(S) \models \phi(f(a_1), ..., f(a_r))$.

Definición 4.4.22. Sea $i \leq k_6/10^4$ y $\phi(x_1, ..., x_r)$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula. Decimos que $G \in M(S)$ es el (i, r)**-grafo de** $\phi^{\prec i}$ cuando se cumple que $x \in' G$ si y sólo si x es una i-sucesión finita de longitud r que satisface a $\phi^{\prec i}$.

Un (i, r)-grafo de una fórmula es simplemente el conjunto de elementos menores que i que satisfacen la fórmula, pero entendido dentro de $M(S)$. Veamos que existe.

Teorema 4.4.23. *Sea $i \leq k_6/10^4 - 1$ y $\phi(x_1, ..., x_r)$ una $\mathcal{L}(k)$-fórmula sin constantes. Existe un (i, r)-grafo de $\phi^{\prec i}$ tal que es menor que $i + 1$.*

Demostración. Fijemos $i \leq k_6/10^4$. La demostración se desarrollará por inducción sobre $\mathcal{L}(k)$-fórmulas.

Atómicas .

- Supongamos que ϕ es de la forma $x_p \in' x_q$ donde $p, q \leq r$. Notemos que esta vez no hay restricción en la complejidad de la fórmula, así que no podemos usar directamente nuestro lema 4.4.6, sin embargo podemos expresar: "la i-sucesión de longitud r donde la p-ésima coordenada pertenezca a la q-ésima coordenada" en una fórmula, con complejidad permitida para aplicar el lema 4.4.6, por medio de números naturales en $M(S)$ y funciones de comparación. Esto se hace de la siguiente manera. Por el lema 4.4.15 existen números naturales $P, Q, R \in M(S)$ cuyos dominios tienen tamaño p, q, r, respectivamente. Por el lema 4.4.6 existe $W \in M(S)$ tal que para todo $x \in M(S)$, $x \in' W$ si y sólo si

- $x = (T, f)$ es una i-sucesión finita
- Existe una función de comparación entre T y R biyectiva (esto implica que la sucesión sea de tamaño r).
- Sea α el máximo elemento de P, y β el máximo elemento de Q. Sea f_p la función de comparación entre P y T, y sea f_q la función de comparación entre Q y T. Entonces $f(f_p(\alpha)) \in' f(f_q(\beta))$. (esto implica que la p-ésima coordenada de x pertenezca a la q-ésima coordenada)

Como el mayor parámetro que usamos fue i, (tanto los números naturales y las funciones de comparación son menores que 1), podemos garantizar que $W \prec i+1$.

- Supongamos que ϕ es de la forma $x_p \prec x_q$. Usamos el mismo argumento del caso de la pertenencia.

Negación. Supongamos que ϕ es de la forma $\neg\psi$ y existe W_ψ (i, r)-grafo de $\psi^{\prec i}$. Por el lema 4.4.15 existe un número natural $R \in M(S)$ tal que su dominio tiene tamaño r. Por el lema 4.4.6 existe $W \in M(S)$ tal que para todo $x \in M(S)$, $x \in W$ si y sólo si

- $x = (T, f)$ es una i-sucesión finita
- Existe una función de comparación entre T y R biyectiva.
- $x \notin' W_\psi$

Es fácil ver que W es (i, r)-grafo de ϕ. Podemos garantizar que $W \prec i + 1$ dado que el mayor parámetro que se usó fue W_ψ que por inducción es menor que $i + 1$.

Disyunción Supongamos que ϕ es de la forma $\psi_1 \vee \psi_2$ y existen W_{ψ_1} (i, r)-grafo de $\psi_1^{\prec i}$ y W_{ψ_2} (i, r)-grafo de $\psi_2^{\prec i}$. Aplicamos el mismo argumento del caso de la negación pero la tercera condición la cambiamos por $x \in' W_{\psi_1}$ o $x \in' W_{\psi_2}$.

Existencial Supongamos que ϕ es de la forma $\exists x_p \psi(x_1, ..., x_p, ..., x_r)$ y existe W_ψ $(i, r+1)$-grafo de $\psi^{\prec i}$. El conjunto que necesitamos tiene que contener los elemento de W_ψ pero quitándoles su p-ésima coordenada. Nuevamente para crear este conjunto se usan funciones de comparación. Por el lema 4.4.15 existen números naturales $P, R \in M(S)$ cuyos dominios tienen tamaño p, r, respectivamente. Así, por el lema 4.4.6 existe $W \in M(S)$ tal que para todo $x \in M(S)$, $x \in W$ si y sólo si:

- $x = (T, f)$ es una i-sucesión finita. Existe una función de comparación entre T y R biyectiva.
- Existe $y \in W_\psi$ donde $y = (V, g)$. Sea f_P la función de comparación entre P y V. Sea α el mayor elemento de P y consideramos el conjunto V' que resulta al eliminar del número V el elemento $f_P(\alpha)$. Es un ejercicio sencillo comprobar que esto sigue siendo un número natural.

- Sea f_T la función de comparación entre T y V'. Entonces $f \equiv g(f_T)$. (La misma sucesión y pero sin su p-ésima coordenada).

Podemos garantizar que $W \prec i+1$ dado que el mayor parámetro que se usó fue W_ψ que por inducción es menor que $i+1$.

□

Ya con el anterior teorema podemos quitarle la restricción al axioma de separación acotada. Por comodidad tenemos que eliminar algunas constantes.

Definición 4.4.24. Abreviamos como $t := k_6/10^4 - 3$. Denominamos como el lenguaje $\mathcal{L}(k)^\star$ al lenguaje $\mathcal{L}(k)$ pero con constantes $0, .., t$.

Teorema 4.4.25 (Separación acotada*)**.** *Sea $\phi(x_1, ..., x_r)$ una $\mathcal{L}(k)^\star$-fórmula sin constantes. Sea $i \prec t$. Entonces*

$$M(S) \models \forall x_2, ..., x_r \prec i(\exists x_{r+1} \prec i+1)(\forall x_1)(x_1 \in' x_{r+1} \leftrightarrow \phi^{\prec i}(x_1, ..., x_r) \wedge x_1 \prec i)$$

Demostración. Sea $\phi(x_1, ..., x_r)$ una $\mathcal{L}(k)^\star$-fórmula sin constantes. Sea $i \prec t$. Por el teorema 4.4.23 existe W (i, r)-grafo de $\phi^{\prec i}$ tal que es menor que $i+1$. Sean $p_2, ..., p_r \in M(S)$ parámetros menores que i fijos. El elemento que necesitamos encontrar es el conjunto de las primeras componentes de las i-sucesiones de la forma $(x, p_2, ..., p_r)$ que pertenece a W. Vamos a describir cómo se consigue ese conjunto. Sea R número natural con dominio de tamaño r. Por el hecho 4.4.20 existe la i-sucesión $\alpha = (R, g)$ tal que su rango es $\{0, p_2, ..., p_r\}$, además α es menor que i. Por el lema 4.4.6 existe $Z \in M(S)$ tal que para todo $p \in M(S)$, $p \in' Z$ si y sólo si existe $y = (T, f) \in W$ tal que

- Sea a el mínimo elemento de T. Entonces $f(a) = p$.
- Sea f_T función de comparación entre T y R biyectiva. Entonces $f(b) = g(f_T(b))$ para todo $b \in' \mathrm{dom}(T)$ con $b \neq a$ (esto garantiza que la sucesión termina en $p_2, ..., p_r$).

Se puede garantizar que $Z \prec i+1$ dado que el mayor parámetro que usamos fue W que es menor que $i+1$. Como W es el (i, r)-grafo de $\phi^{\prec i}$ entonces $Z \simeq \{p \prec i : M(S) \models \phi^{\prec i}(p, p_2, ..., p_r)\}$.

□

Ahora sí vamos a presentar la noción de "$\models$" en $M(S)$ y ya con esto podemos quitarle la restricción de las fórmulas a indsicernibilidad acotada. Como ya mencionamos, el siguiente teorema no está desarrollado a su totalidad en [4], sin embargo, basándonos en las ideas que propone, presentamos la siguiente demostración.

Teorema 4.4.26 (Definibilidad acotada)**.** *Sea $s \in \mathbb{Z}^+$. Existe una $\mathcal{L}(k)$-fórmula acotada $\Phi_s(x, z)$ con parámetros menores que 1 y complejidad menor que k_3 tal que define "x es una fórmula acotada sin constantes, z es una tupla de parámetros menores que t y $M(S) \models x(z)$ para todas las $\mathcal{L}(k)$-fórmulas x con complejidad menor que s".*

Demostración. Esto es muy parecido a cuando uno define la relación de satisfacción "$\models$" de manera clásica, así que sólo vamos a dar unas pautas de cómo hacerlo.

- Para definir una fórmula dentro de $M(S)$, le asociamos a cada símbolo lógico una tupla entre $0'$ y $1'$, y a cada variable v_i un número natural en $M(S)$ cuyo dominio tenga tamaño i. Por inducción sobre la complejidad de las fórmulas y por separación acotada* construimos los bloques de fórmulas, para así obtener un elemento $B_s \in M(S)$ tal que $B_s \prec 1$ y , $x \in B_s$ si y sólo si x es una fórmula acotada sin constantes de complejidad menor o igual que s.

- T es una s-relación de satisfacción si para todo $z \in' T$, $z = (f, g)$ donde $f \in' B_s$ y g es una t-sucesión, además
  - $(x_i \in' x_j, g) \in T$ si y sólo si $g(i) \in' g(j)$.
  - $(x_i \prec x_j, g) \in T$ si y sólo si $g(i) \prec g(j)$.
  - $(x_i = x_j, g) \in T$ si y sólo si $g(i) = g(j)$.
  - Si $(\neg\psi, g) \in' T$ entonces $(\psi, g) \notin' T$.
  - Si $(\psi_1 \vee \psi_2, g) \in' T$ entonces $(\psi_1, g) \in' T$ o $(\psi_2, g) \in' T$.
  - Si $((\exists x_j \prec x_i)\psi, g) \in' T$ entonces $(\psi, g') \in' T$, donde $g(y) = g'(y)$ si $y \neq j$ y existe $a \prec g(i)$ tal que $g'(j) = a$.

- Para garantizar la existencia de una s-relación de satisfacción dentro de $M(S)$ nuevamente es por inducción sobre la complejidad de las fórmulas y separación acotada*. Notemos que la definición de la s-relación de satisfacción sólo usa parámetros menores que 1, y las única constante usada es t, entonces podemos garantizar que $T \prec t + 1$.

La $\mathcal{L}(k)$-fórmula $\Phi_s(x, z)$ es

$$\exists T \prec k_3(T \text{ es } s\text{-relación de satisfacción } \wedge (x, z) \in T)$$

$\square$

Ahora ya tenemos la suficientes herramientas para quitarle la restricción a la complejidad de las fórmulas a indsicernibilidad acotada.

Teorema 4.4.27 (Indiscernibilidad acotada*.). *Sea $i \in \mathbb{Z}^+$ con $i \leq t - 1$. Sea $\phi(x_1, ..., x_r)$ una $\mathcal{L}(k)^\star$-fórmula sin constantes. Sean $i \leq a_i, ..., a_{t-1}, b_i, ..., b_{t-1} \leq t - 1$ números naturales tales que $\bar{a} := (a_i, ..., a_{t-1})$ es orden equivalente a $\bar{b} := (b_i, ..., b_{t-1})$. Entonces*

$$M(S) \models \forall \bar{x} \prec i(\phi^{\prec k_3}(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \phi^{\prec k_3}(\bar{x}, \bar{b}))$$

Demostración. Supongamos que la complejidad de ϕ es menor que s. Observemos que dados dos número naturales R, W en $M(S)$, podemos formar el número $R^\frown W$, colocando todo los elementos de W por encima de los de R, luego dadas dos sucesiones x, y, las podemos concatenar de manera natural usando separación acotada*. Denotamos como $x^\frown y$ la sucesión concatenada.

Consideremos la fórmula $\Phi_s(x, y)$ del teorema de la definibilidad acotada. Como esta fórmula tiene complejidad menor que k_3, parámetros menores que 1 y no tiene constantes (la constante t que posee la podemos considerar entre los números $\bar{a}$ y $\bar{b}$, y la podemos mantener en un lugar fijo ya que éstos son menores estrictamente que t) le podemos aplicar indiscernibilidad acotada:

$$M(S) \models \forall y, z \prec i(\Phi_s(y, z^\frown \bar{a}) \leftrightarrow \Phi_s(y, z^\frown \bar{b}))$$

Así, traduciendo lo que quiere decir Φ_s con $y = \phi^{\prec k_3}$ y $z = \bar{x}$ (recordemos que toda fórmula y tupla en $M(S)$ es menor que 1 y por tanto las podemos usar como parámetros) tenemos que

$$M(S) \models \forall \bar{x} \prec i(\phi^{\prec k_3}(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow M(S) \models \phi^{\prec k_3}(\bar{x}, \bar{b}))$$

□

4.5. Pre-(buenos órdenes)

Ahora que ya no tenemos restricción al momento de construir objetos, nuestra próxima meta es crear la estructura de segundo orden de los ordinales. Con la relación de pertenencia de $M(S)$ no podemos tratar directamente ya que, como hemos mencionado en la sección 4.4, desconocemos cómo se comporta. Por esto, de la misma manera que definimos los números naturales en $M(S)$, vamos a extraer las ideas principales de la noción de ordinal y, con éstas, definir en $M(S)$ el concepto de pre-(buen orden). Presentamos la definición de pre-(buen orden) con una ligera corrección de la definición original de [8]: cambiamos la constante de la cuarta condición para dar más rigurosidad a la demostración del corolario 4.5.16.

Para empezar vamos a enunciar el siguiente hecho que se deriva de quitarle la restricción de fórmulas al lema 4.4.6.

Definición 4.5.1. Sea $x \prec t$. Denominamos como $\mathrm{rk}(x)$ el menor $i \preceq t$ tal que $x \prec i$.

Hecho 4.5.2. Sea $i \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\phi(y, z, w_1, ..., w_r)$ una $\mathcal{L}(k)^\star$-fórmula acotada sin constantes. Sean $q, p_1, ..., p_r \in M(S)$ tales $\mathrm{rk}(q) \prec i$ y para todo $j \leq r$, $\mathrm{rk}(p_j)$ es menor que i. Entonces existe $p \in M(S)$ menor que i tal que $p \simeq \{y \prec q : M(S) \models \phi(y, q, p_1, ..., p_r)\}$.

Como en los números naturales en $M(S)$, un pre-(buen orden) va a ser una relación, así que necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.5.3. Sea $R \in M(S)$ una relación binaria. Definimos como **el campo de** R al elemento $\mathrm{fld}(R) \simeq \{x : \exists y(R(x, y) \vee R(y, x)\}$.

Es importante observar que, gracias al hecho 4.5.2, dada una relación binaria R se tiene que $\mathrm{dom}(R)$, $\mathrm{ran}(R)$ y $\mathrm{fld}(R)$ existen y son menores que $\mathrm{rk}(R)$.

Vamos a definir qué es un pre-(buen orden). Recordemos que en esencia un ordinal es un conjunto bien ordenado, sin embargo, nosotros vamos a prescindir de la condición de antisimetría dado que tampoco sabemos a ciencia cierta si la relación $\in'$ es extensional.

Definición 4.5.4. Un **pre-(buen orden)** es una relación binaria menor que $t-1$ tal que

- $(\forall x \in' \mathrm{fld}(R))(R(x,x))$
- $(\forall x, y, z \in' \mathrm{fld}(R))((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$
- $(\forall x, y \in' \mathrm{fld}(R))(R(x,y) \vee R(y,x))$
- $(\forall x \subset^{M(S)} \mathrm{fld}(R))(x \not\equiv \emptyset^{M(S)} \wedge x \prec t-1) \rightarrow (\exists z \in' x)(\forall w \in' x)(R(z,w)))$

En otras palabras, R es un pre-(buen orden) si es una relación reflexiva, transitiva, total, y todo subconjunto menor que $t-1$ del campo de R tiene un R-mínimo elemento.

Usaremos la siguiente notación al tratar con relaciones.

Definición 4.5.5. Sea R una relación binaria. Escribiremos como $x \leq_R y$ si $R(x,y)$. Escribiremos $x =_R y$ si $R(x,y)$ y $R(y,x)$. Escribiremos como $x <_R y$ si $x \leq_R y$ y $x \neq_R y$.

Vamos a dotar con un orden a la clase de los pre-(buenos órdenes). Para esto vamos a introducir el concepto de isomorfismo y segmento inicial.

Definición 4.5.6. Sea R un pre-(buen orden) y $x \in' \mathrm{fld}(R)$. Definimos la relación $R|^{<x}$ como

$$\forall y, z(y \leq_{R|^{<x}} z \leftrightarrow y \leq_R z \wedge z <_R x)$$

Decimos que $R|^{<x}$ es **un segmento de** R

Usando el hecho 4.5.2 se puede demostrar que dado R pre-(buen orden) y $x \in' \mathrm{fld}(R)$ se cumple que $R|^{<x}$ existe, es menor que $\mathrm{rk}(R)$, y además es un pre-(buen orden).

Definición 4.5.7. Sean R, S pre-(buenos órdenes). Decimos que T es un **isomorfismo de** R **a** S si y sólo si

1. $T \prec \text{máx}\{\ \mathrm{rk}(R), \mathrm{rk}(S)\}$ es una relación binaria.
2. $\mathrm{Dom}(T) \equiv \mathrm{Dom}\ (R)$ y $\mathrm{Ran}(T) \equiv \mathrm{Dom}(S)$.
3. Si $T(x,y)$, $T(z,w)$ y $x \leq_R z$, entonces $y \leq_S w$
4. Sean $x =_R u$ y $y =_S v$. Entonces $T(x,y)$ si y sólo si $T(u,v)$.

La clase de los pre-(buenos órdenes), como sucede en la clase de los buenos ordenes, se puede ordenar como lo muestra el siguiente lema. Su demostración la decidimos omitir dado que su desarrollo es un poco largo y es muy parecida al caso de los buenos ordenes. La prueba se encuentra en las páginas 681-687 de [3].

Hecho 4.5.8. Sean R, S pre-(buenos órdenes). Exactamente uno de los siguientes casos sucede:

1. R, S son isomorfos.

2. Existe $y \in'$Dom(S) tal que R es isomorfo a $S|^{<y}$. El elemento y es único según $=_S$.

3. Existe $x \in'$Dom(R) tal que $R|^{<x}$ es isomorfo a S. El elemento x es único según $=_R$.

Ahora vamos a organizar la clase de los pre-(buenos órdenes) de una manera natural que está bien definida gracias al hecho 4.5.8.

Definición 4.5.9. Sean R, S pre-(buenos órdenes). Denotamos como $R \sim S$ si existe un isomorfismo entre R y S. Denotamos como $R \triangleleft S$ si existe $y \in'$Dom(S) tal que R es isomorfo a $S|^{<y}$

Gracias al hecho 4.5.8 se infieren las siguiente propiedades de la anterior definición.

Hecho 4.5.10. La relación $\triangleleft$ es irreflexiva, transitiva y total. La relación $\sim$ es de equivalencia.

La clase de los pre-(buenos órdenes) con la relación $\triangleleft$ es una estructura bien ordenada.

Proposición 4.5.11. *Sea $A \in M(S)$ menor que $t-1$ distinto de $\emptyset^{M(S)}$ tal que todo $x \in' A$ es un pre-(buen orden). Entonces A tiene un $\triangleleft$-mínimo elemento*

Demostración. Sea $R \in' A$. Si R ya es el elemento $\triangleleft$-mínimo de A ya tenemos el resultado, de lo contrario, consideremos, por el hecho 4.5.2, el conjunto $B \simeq \{y \in'\mathrm{Dom}(R) :$ existe $x \in' A$ con $R|^{<y} \sim x\}$. El conjunto B es menor que $t-1$ ya que $\mathrm{rk}(A)$ y $\mathrm{rk}(R)$ son menores que $t-1$. Como R es un pre-(buen orden), existe $z \in' B$ tal que es R-elemento mínimo, por tanto existe $\gamma \in A$ tal que $\gamma \sim R|^{<z}$. Es sencillo comprobar que γ es el $\triangleleft$-mínimo elemento de A.

□

La estructura de los pre-(buenos órdenes) con la relación $\triangleleft$ no es acotada superiormente gracias a la siguiente definición.

Definición 4.5.12. Sea R un pre-(buen orden). Consideramos R^+ como la relación que cumple que $\mathrm{Dom}(R^+) \equiv \mathrm{Dom}(R) \cup^{M(S)} \{R\}$ y para todo $x \in' \mathrm{Dom}(R^+)$ se tiene que $x \leq_{R^+} R$.

Gracias al hecho 4.5.2, dado R pre-(buen orden), el elemento R^+ existe y $\mathrm{rk}(R^+) \preceq \mathrm{rk}(R)$. Además es sencillo comprobar que R^+ es un pre-(buen orden) y que $R \lhd R^+$.

Por la proposición 4.5.11, la clase de los pre-(buenos órdenes) con la relación $\lhd$ está dotada con inducción interna, que es lo que nos faltaba para empezar a construir el modelo de ZFC. Ahora vamos a "extender" esta estructura a todo el modelo $M(S)$ con el motivo de involucrar a nuestro conjunto de indiscernibles, los enteros positivos, dado que estos no necesariamente son pre-(buenos órdenes). Para realizar la "extensión" vamos a definir en $M(S)$ una noción de función rango usando los pre-(buenos órdenes).

Definición 4.5.13. Sean $x \in M(S)$ tal que $x \prec t-1$. Decimos que S es un **punto x-crítico** si y sólo si

- $S \prec \mathrm{rk}(x)$.
- S es un pre-(buen orden).
- Para todo los pre-(buenos órdenes) $R \preceq x$ se tiene que $R \lhd S$.
- Para todo $y \in' \mathrm{Dom}(S)$ existe $R \preceq x$ pre-(buen orden) tal que $S|^{<y} \lhd R$ ó $S|^{<y} \sim R$.

Veamos que existen los puntos críticos.

Lema 4.5.14. *Sea $A \in M(S)$ tal que $A \prec t-1$ y para todo $w \in' A$ se tiene que w es un pre-(buen orden). Entonces existe un pre-(buen orden) $S \prec$ rk(A) tal que para todo $R \in' A$ se tiene que $R \lhd S$ ó $R \sim S$, y para todo $u \in'$ Dom(S) existe $R \in' A$ tal que $S|^{<u} \lhd R$.*

Demostración. Por el hecho 4.5.2 existe el conjunto $E \prec \mathrm{rk}\ (A)$ tal que $E \simeq \{R|^{<z} : R \in' A$ y $z \in' \mathrm{Dom}(R)\}$, así, nuevamente por el hecho 4.5.2 existe la relación $S \prec \mathrm{rk}(A)$ tal que

$$S(u,v) \leftrightarrow u, v \in' E \wedge (u \lhd v \vee u \sim v)$$

Por el hecho 4.5.10 y la proposición 4.5.11 se cumple que S es un pre-(buen orden). Veamos que S es el elemento que necesitamos. Sea $R \in' A$. Definamos un isomorfismo T_R de R a S (ó a un segmento de S) tal que

$$\text{Para todo } z \in' \ \mathrm{Dom}(R) \text{ y } W \in' E \text{ se tiene que } T_R(z,W) \text{ si y sólo si } W \sim R|^{<z}$$

Es claro que $\mathrm{Dom}(T_R) \equiv \mathrm{Dom}(R)$. Veamos que el $\mathrm{Ran}(T_R)$ es un segmento de S. Sea $W \in' \mathrm{Ran}(T_R)$. Sea $z \in' \ \mathrm{Dom}(R)$ tal que $T_R(z,W)$. Sea W' elemento de E tal que $W' \lhd W$. Como $T_R(z,W)$ entonces $W \sim R|^{<z}$, luego, por transitividad, se tiene que $W' \lhd R$, por tanto existe $y \in' \mathrm{Dom}(R)$ tal que $W' \sim R|^{<y}$, es decir que $T(y,W')$, luego $W' \in' \mathrm{Ran}(T_R)$. Concluimos que $\mathrm{Ran}(T_R) \equiv E$ ó $\mathrm{Ran}(T_R) \equiv S|^{<v}$ para algún $v \in' E$. Por el hecho 4.5.10 es fácil ver que T_R cumple las otras propiedades de isomorfismo, luego $R \lhd S$ ó $R \sim S$.

Veamos que S cumple la otra condición del enunciado del lema. Sea $u \in' \mathrm{Dom}(S)$, luego existe $R \in' A$ y $z \in' \mathrm{Dom}(R)$ tal que $u = R|^{<z}$. Usando un argumento parecido al párrafo anterior, creamos un isomorfismo que cumpla que $S|^{<u} \sim R|^{<z}$, concluyendo que $S|^{<u} \lhd R$.

□

Corolario 4.5.15. *Sea $A \in M(S)$ tal que $A \prec t-1$ y para todo $w \in' A$ se tiene que w es un pre-(buen orden). Entonces, existe un pre-(buen orden) $S \prec rk(A)$ tal que para todo $R \in' A$ se tiene que $R \lhd S$, y para todo $U \lhd S$ existe $R \in' A$ tal que $U \lhd R$ o $U \sim R$.*

Demostración. Si A tiene un $\lhd$-máximo elemento R, entonces $S = R^+$. De lo contrario aplicamos el lema 4.5.14 al conjunto A.

□

Corolario 4.5.16. *Para todo $x \prec t-2$ existe un punto x-crítico. Además, si S es punto x-crítico entonces $x \prec S$.*

Demostración. Primero notemos que dado $R \prec t-2$ se tiene que, por indiscernibilidad acotada*, R es un pre-(buen orden) si y sólo si, R es una relación reflexiva, transitiva, total, y todo subconjunto menor que $t-2$ del campo de R tiene un R-mínimo elemento. Usamos esta definición para concluir, por el hecho 4.5.2, que existe un conjunto $A \prec t-1$ tal que $A \simeq \{R \preceq x : R \text{ es un pre-(buen orden) }\}$. Aplicamos el corolario 4.5.15 al conjunto A y así obtenemos el punto x-crítico.

Sea S punto x-crítico. Si $S \preceq x$, entonces, por la definición de punto crítico se tendría que $S \lhd S$, lo que es una contradicción, por lo tanto $x \prec S$.

□

Proposición 4.5.17. *Para todo $x \prec t-2$, todos los puntos x-críticos son isomorfos.*

Demostración. Sean R, S puntos x-críticos. Veamos que son isomorfos. Supongamos que $R \lhd S$. Existe $u \in' \mathrm{Dom}(S)$ tal que $R \sim S|^{<u}$, luego por la última condición de la definición de punto x-crítico, existe $W \preceq x$ pre buen orden tal que $S|^{<u} \lhd W$ o $S|^{<u} \sim W$, lo cual implica que $R \lhd W$ ó $R \sim W$, pero esto es una contradicción dado que, por la tercera condición de la definición de punto crítico, se tiene que $W \lhd R$. El mismo argumento vale si suponemos que $S \lhd R$, por tanto se concluye que $R \sim S$.

□

Para "extender" la estructura bien ordenada de los pre-(buenos órdenes) al modelo $M(S)$, vamos a definir un orden en $M(S)$ según la noción de punto crítico. Gracias a la proposición 4.5.17, las siguientes definiciones están bien definidas.

Definición 4.5.18. Sean $x, y \in M(S)$ tal que $x, y \prec t-2$. Decimos que $x \prec^\sharp y$ si y sólo si el punto x-crítico R y el punto y-crítico S satisfacen que $R \lhd S$.

Definición 4.5.19. Sean $x, y \prec t-2$. Definimos como $x =^\sharp y$ si y sólo si el punto x-crítico R y el punto y-crítico S satisfacen que $R \sim S$.

Denotamos como $x \preceq^\sharp y$ si $x \prec^\sharp y$ ó $x =^\sharp y$. Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de $\prec^\sharp$.

Hecho 4.5.20. Sean $x, y, z \in M(S)$ tal que $x, y, z \prec t-2$

1. $\prec^\sharp$ es una relación irreflexiva y transitiva.
2. La relación $=^\sharp$ es una relación de equivalencia.
3. Si $x \preceq^\sharp z$ y $z \prec^\sharp y$, entonces $x \prec^\sharp y$
4. Si $x \prec^\sharp z$ y $z \preceq^\sharp y$, entonces $x \prec^\sharp y$
5. Se cumple que $x \prec^\sharp y$ ó $x =^\sharp y$ ó $y \prec^\sharp x$.
6. Si $x \preceq y$ entonces $x \preceq^\sharp y$, además si $x \prec^\sharp y$ entonces $x \prec y$.
7. Si $x \prec y \prec z$ y $x =^\sharp z$, entonces $x =^\sharp y =^\sharp z$.

La relación $\prec^\sharp$ ya nos va a permitir bien ordenar a $M(S)$.

Proposición 4.5.21. *Sea $x \in M(S)$ tal que $x \prec t-2$ y distinto de $\emptyset^{M(S)}$. Entonces x tiene un elemento $\prec^\sharp$-mínimo.*

Demostración. Usando el mismo argumento de la demostración 4.5.16, existe $A \prec t-1$ tal que $A \simeq \{S : S$ es punto y-crítico para algún $y \in' x\}$. Notemos que A es distinto de $\emptyset^{M(S)}$ dado que x es distinto de $\emptyset^{M(S)}$, luego por la proposición 4.5.11 existe $S \in' A$ tal que S es $\lhd$-mínimo de A. Sea $y \in' x$ tal que S es elemento y-crítico. Es sencillo comprobar que y es elemento $\prec^\sharp$-mínimo de x.

□

Corolario 4.5.22. *Sea $\phi(x)$ una $\mathcal{L}(k)^\star$-fórmula acotada que puede tener parámetros y constantes menores que $t-2$. Si existe $z \prec t-2$ tal que $M(S) \models \phi(z)$, entonces existe $y \in M(S)$ tal que es el $\prec^\sharp$-mínimo elemento en $M(S)$ que cumple que $M(S) \models \phi(y)$.*

Demostración. Viendo las constantes como si fueran parámetros, por el hecho 4.5.2 existe $A \in M(S)$ menor que $t-2$ tal que $A \simeq \{y \preceq z : M(S) \models \phi(y)\}$. Como, por hipótesis, A es distinto de $\emptyset^{M(S)}$, por la proposición 4.5.21 existe $y \in' A$ tal que y es $\prec^\sharp$-mínimo elemento de A. Es sencillo comprobar que y es el $\prec^\sharp$-mínimo elemento en $M(S)$ que cumple que $M(S) \models \phi(y)$.

□

Ahora, para terminar la construcción de nuestra estructura de segundo orden de los ordinales, vamos a hacer una partición en $M(S)$ según la relación $=^\sharp$.

Definición 4.5.23. Sea $x \in M(S)$ tal que $x \prec t-2$. Denotaremos como $[x]$ a la clase de equivalencia de x según la relación $=^\sharp$.

Definición 4.5.24. Denotaremos como C al conjunto $\{[x] : x \in M(S) \wedge x \prec t-4\}$.

Veamos unas propiedades para darle forma al conjunto C. En la siguiente sección veremos que C, como los ordinales, tiene elementos sucesores y elementos límites. Ver figura **4-5**.

Lema 4.5.25. *Sean $x, y, w \in M(S)$ tales que $x, y, w \prec t-4$.*

1. *Si $y, w \in [x]$ y existe $z \in M(S)$ tal que $y \prec z \prec w$, entonces $z \in [x]$ (Las clases son intervalos).*
2. *$x \prec^\sharp y$, si y sólo si, para todo $z \in [x]$ y para todo $w \in [y]$ se cumple que $z \prec w$.*
3. *0 es el elemento $\prec^\sharp$-mínimo y se cumple que $0 \prec^\sharp 1 \prec^\sharp \ldots \prec^\sharp t-5$.*
4. *En $[0, t-4)$ no existe elemento $\prec^\sharp$-máximo.*

Demostración. (1) y (2) son implicaciones directas del hecho 4.5.20. Demostremos (3) y (4).

(3) Sean $i, j \in \mathbb{Z}^+$ tales que $i \prec j$. Consideremos como S el punto i-crítico y como W el punto j-crítico. Recordemos que, gracias a el corolario 4.5.16 y la definición de punto crítico, se cumple que $i \prec S \prec \mathrm{rk}(i) = i+1$ y $j \prec W \prec \mathrm{rk}(j) = j+1$, luego $S \prec W$ concluyendo que $i \prec^\sharp j$. Como $0 \prec x$ para todo $x \neq 0$, entonces, por el hecho 4.5.20, se cumple que $0 \preceq^\sharp x$ para todo $x \in M(S)$.

(4) Sea $x \in M(S)$ tal que $x \prec t-4$. Consideremos como R el punto x-crítico y como S el punto R-crítico. Por el corolario 4.5.16, se cumple que $R \prec S$, luego, como S es el punto R-crítico, se tiene que $R \lhd S$, por lo tanto $x \prec^\sharp R$. Como R es menor que $\mathrm{rk}(x) \preceq t-4$, se concluye que en $[0, t-4)$ no existe elemento $\prec^\sharp$-máximo.

□

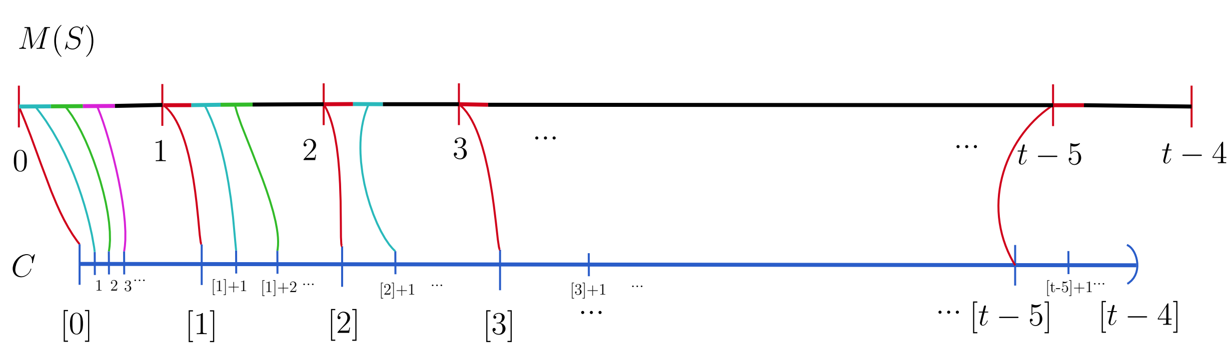

Figura 4-5: Partición de $M(S)$

4.6. Ordinales

Dado que muchas propiedades del conjunto C necesitan un lenguaje de segundo orden para poder describirlas, introduciremos el siguiente lenguaje.

Definición 4.6.1. Denotamos como $\mathcal{L}^2$ al lenguaje de segundo orden que consiste en:

- Relación binaria $<^\sharp$
- Símbolos de constante $0, 1, ..., t-5$
- Variables de primer orden
- Variables de segundo orden B_n^m donde $n, n \in \mathbb{Z}^+$

Las fórmulas atómicas de $\mathcal{L}^2$ son de la forma $s = t$, $s <^\sharp t$ ó $B_n^m(s_1, ..., s_n)$ donde $s, t, s_1, ..., s_n$ son variables de primer orden o constantes. Las fórmulas de $\mathcal{L}^2$ son construidas de la manera clásica, clausurando con conectivos y cuantificadores de primer y segundo orden.

Ahora definamos la estructura.

Definición 4.6.2. Denotamos como $M^\star := (C, <^\sharp, 0, 1, ..., t-5, Y_1, Y_2, ...)$ donde

- $C := \{[x] : x \in M(S) \wedge x \prec t-4\}$
- $i := [i]$ para cada $i \in \{0, ..., t-5\}$.
- Dado $[x], [y] \in C$, definimos como $[x] <^\sharp [y]$ si y sólo si $x \prec^\sharp y$.
- Y_m es el conjunto de todas las relaciones m-arias de C tales que $R \in Y_m$ si y sólo si existe $R' \in M(S)$ donde $R' \prec t-3$ y (es relación m-aria)$^{M(S)}$ tal que

$$R'(x_1, ..., x_m) \text{ si y sólo si } x_1, ..., x_m \prec t-4 \text{ y } R([x_1], ..., [x_m])$$

Es importante observar que la relación $<^\sharp$ está bien definida gracias al hecho 4.5.20. Dado que toda la definición de la estructura $M^\star$ se puede hacer usando el lenguaje $\mathcal{L}(k)^\star$, obtenemos el siguiente lema:

Lema 4.6.3. *Sea $\phi(x_1, ..., x_m)$ una $\mathcal{L}^2$-fórmula sin variables libres de segundo orden que puede tener parámetros de segundo orden. Existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(x_1, ..., x_m)$ que puede tener parámetros, que es equivalente a $\phi(x_1, ..., x_m)$, es decir, dados $a_1, ..., a_m \in M(S)$ menores que $t-4$ se cumple que*

$$M^\star \models \phi([a_1], ..., [a_m]) \text{ si y sólo si } M(S) \models \psi(a_1, ..., a_m)$$

Además, las constantes de $\psi(x_1, ..., x_m)$ son $t-3$ o $t-4$, y, si $\phi(x_1, ..., x_m)$ no tiene parámetros entonces $\psi(x_1, ..., x_m)$ tampoco.

Demostración. La demostración se realizará por inducción.

Fórmulas atómicas. Supongamos que $\phi(x_i, x_j)$ es de la forma $x_i = x_j$. Sean $[a], [b] \in C$. Notemos que $[a] = [b]$, si y sólo si el punto a-crítico es isomorfo al punto b-crítico, luego la $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(x_i, x_j)$ es

$$(\exists w, z \prec t-4)(\ w \text{ es punto } x_i\text{-crítico, } z \text{ es punto crítico y } w \text{ es isomorfo a } z)$$

Razonamos de la misma manera si $\phi(x_i, x_j)$ es de la forma $x_i <^\sharp x_j$. Supongamos que $\phi(x_1, ..., x_m)$ es de la forma $R(x_1, ..., x_m)$ donde $R \in Y_m$. Por definición de Y_m, existe $R' \prec t-3$ tal que es (relación m-aria)$^{M(S)}$ y cumple que $R'(a_1, ..., a_m)$ si y sólo si $a_1, ..., a_m \prec t-4$ y $R([a_1], ..., [a_m])$, luego la $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(R', x_1, ..., x_m)$ es

$$(\exists z \prec t-4)(z \simeq (x_1, ..., x_m) \wedge z \in' R')$$

Negación y conjunción. Dejamos este caso como ejercicio.

Existencial de primero orden. Supongamos que $\phi(x_1, ..., x_m)$ es de la forma $\exists w \varphi(w, x_1, ..., x_m)$ y existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\gamma(w, x_1, ..., x_m)$ equivalente a φ. Notemos que la $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula $(\exists w \prec t-4)\gamma(w, x_1, ..., x_m)$ es equivalente a $\phi(x_1, ..., x_m)$.

Existencial de segundo orden. Supongamos que $\phi(x_1, ..., x_m)$ es de la forma $\exists B_i^j \varphi(B_i^j, x_1, ..., x_m)$, y existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada γ tal que para todo $R \in Y_j$, existe $R' \prec t-3$ tal que es (relación j-aria)$^{M(S)}$, y se cumple que $\gamma(R', x_1, ..., x_m)$ es equivalente a $\varphi(R, x_1, ..., x_m)$. Consideremos como $\psi(x_1, ..., x_m)$ la siguiente $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada:

$$(\exists R \prec t-3)((\forall x \in' R)(x \prec t-4) \wedge R \text{ es relación j-aria } \wedge \gamma(R, x_1, ..., x_m))$$

Es sencillo comprobar que $\psi(x_1, ..., x_m)$ es equivalente a $\phi(x_1, ..., x_m)$.

$\square$

La estructura $M^\star$ es la estructura de segundo orden de los ordinales que hemos estado mencionando desde el principio de la demostración. En la sección 4.5 mostramos cómo la noción de ordinal sirvió para construir la estructura $M^\star$; ahora demostraremos en el teorema 4.6.4 que efectivamente ésta es un conjunto bien ordenado que no tiene máximo, además, como también mencionamos en la sección 4.5, va a preservar las propiedades de separación e indiscernibilidad. Hicimos una pequeña variación de la demostración original: dividimos en dos casos el cuarto ítem del lema 5.7.20 de [8] dado que, según nuestras cuentas, los dos casos no se pueden unir. Les dimos el nombre de separación de primer orden y separación de segundo orden.

Teorema 4.6.4. *La estructura* $M^\star := (C, <^\sharp, 0, 1, ..., t-5, Y_1, Y_2, ...)$ *satisface lo siguiente*

1. $(C, <^\sharp)$ *es un orden lineal sin elemento máximo.*

2. $0 <^\sharp 1 <^\sharp ... <^\sharp t-5$ *y* 0 *es el elemento mínimo.*

3. ***Inducción.*** *Todo subconjunto no vacío de* C *que es* $\mathcal{L}^2$*-definible con parámetros de primer y segundo orden tiene un elemento* $<^\sharp$*-mínimo.*

4. ***Separación de primer orden.*** *Sea* $[p] \in C$*. Sea* $\phi(x_1, ..., x_m)$ *una* $\mathcal{L}^2$*-fórmula sin cuantificadores de segundo orden, que puede tener parámetros de primer y segundo orden. Entonces*

$$M^\star \models (\exists B_r^m)(\forall x_1, ..., x_m)(B_r^m(x_1, ..., x_m) \leftrightarrow (x_1, ..., x_m <^\sharp [p] \wedge \phi(x_1, ..., x_m)))$$

5. ***Separación de segundo orden.*** *Denotemos como* $\bar{z}$ *la tupla* $(z_1, ..., z_n)$*. Sea* $\phi(\bar{z}, x_1, ..., x_m)$ *una* $\mathcal{L}^2$*-fórmula sin parámetros de segundo orden. Sean* $q_1, ..., q_n \prec t-5$*. Entonces*

$$M^\star \models (\exists B_r^m)(\forall x_1, ..., x_m)(B_r^m(x_1, ..., x_m) \leftrightarrow (x_1, ..., x_m <^\sharp [q_1] \wedge \phi([\bar{q}], x_1, ..., x_m)))$$

6. ***Indiscernibilidad.*** *Sea* $r \in \mathbb{Z}^+$ *y* $\phi(x_1, ..., x_{2r})$ *una* $\mathcal{L}^2$*-fórmula sin variables libres de segundo orden ni parámetros. Sean* $0 < i_1, .., i_r, j_1, ..., j_r \leq t-5$ *enteros donde* $(i_1, ..., i_r)$ *es orden equivalente a* $(j_1, ..., j_r)$ *y* $\text{mín}\{i_1, ..., i_r\} = \text{mín}\{j_1, ..., j_r\}$*. Sean* $[p_1], ..., [p_r] \in C$ *tales que* $[p_1], ..., [p_r] <^\sharp \text{mín}\{[i_1], ..., [i_r]\}$*. Entonces*

$$M^\star \models \phi([i_1], ..., [i_r], [p_1], ..., [p_r]) \leftrightarrow \phi([j_1], ..., [j_r], [p_1], ..., [p_r])$$

Demostración. 1. Por el hecho 4.5.20, dados $x, y \in M(S)$ se tiene que $x \prec^\sharp y$ ó $x =^\sharp y$ ó $y \prec^\sharp x$, luego, al partir por la relación de equivalencia, el orden $<^\sharp$ se convierte en un orden lineal. Por el lema 4.5.25, la estructura $(C, <^\sharp)$ no tiene elemento máximo.

2. Consecuencia directa del lema 4.5.25.

3. Sea $A \subseteq C$ un conjunto no vacío $\mathcal{L}^2$ definible, luego existen una $\mathcal{L}^2$-fórmula $\phi(w, x_1, ..., x_n)$ que puede tener parámetros de segundo orden y $[a_1], ..., [a_n] \in C$ tales que $A = \{[y] : M^\star \models \phi([y], [a_1], ..., [a_n])\}$. Por el lema 4.6.3, existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(w, x_1, ..., x_n)$ con constantes y parámetros menores que $t-2$ tal que para todo $y \prec t-4$ se cumple que:

$$M^\star \models \phi([y], [a_1], ..., [a_m]) \text{ si y sólo si } M(S) \models \psi(y, a_1, ..., a_m)$$

Como A no es vacío, por el corolario 4.5.22 existe $a \in M(S)$ elemento $\prec^\sharp$-mínimo tal que $M(S) \models \psi(a, a_1, ..., a_m)$, luego $M^\star \models \phi([a], [a_1], ..., [a_m])$ y así $[a] \in A$. Notemos que $[a]$ es el $<^\sharp$-mínimo elemento de A.

4. Por el lema 4.6.3 existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(x_1,...,x_m)$ tal que para todo $x_1,...,x_m \prec t-4$ se cumple que

$$M^\star \models \phi([x_1],...,[x_m]) \wedge [x_1],...,[x_m] <^\sharp [p] \text{ si y sólo si } M(S) \models \psi(x_1,...,x_m)$$

Se puede observar en la demostración del lema 4.6.3, como ϕ no tiene cuantificadores de segundo orden, que la fórmula ψ tiene parámetros y constantes menores que $t-3$, luego, por el hecho 4.5.2, existe $R' \in M(S)$ tal que $R' \prec t-3$ y $R' \simeq \{z : (\exists x_1,...,x_m \prec p)\psi(x_1,...,x_m) \wedge z \simeq (x_1,...,x_m)\ \}$. Por construcción se cumple que $R' \simeq \{(x_1,...,x_m) : M^\star \models \phi([x_1],...,[x_m]) \wedge [x_1],...,[x_m] <^\sharp [p]\}$. Para terminar, definimos $R \subset C^m$ de la siguiente manera:

$$R([x_1],...,[x_m]) \text{ si y sólo si } R'(x_1,...,x_m)$$

Por lo tanto $R \in Y_m$ y se cumple que $R([x_1],...,[x_m])$ si y sólo si $M^\star \models \phi([x_1],...,[x_m]) \wedge [x_1],...,[x_m] <^\sharp [p]$.

5. Por el lema 4.6.3 existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(\bar{z},x_1,...,x_m)$ sin parámetros tal que para todo $x_1,...,x_m \prec t-4$ se cumple que

$$M^\star \models \phi(\bar{[q]},[x_1],...,[x_m]) \wedge [x_1],...,[x_m] <^\sharp [q_1] \text{ si y sólo si } M(S) \models \psi(\bar{q},x_1,...,x_m)$$

Consideremos como $\psi'(x_1,...,x_m)$ a la $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula que resulta al cambiar $t-3$ por $t-4$, y $t-4$ por $t-5$ a ψ. Como $q_1,...,q_n \prec t-5$, por indiscernibilidad acotada*

$$M(S) \models (\forall x_1,...,x_m \prec t-5)(\psi(\bar{q},x_1,...,x_m) \leftrightarrow \psi'(\bar{q},x_1,...,x_m)$$

Por el hecho 4.5.2, existe $R' \in M(S)$ tal que $R' \prec t-3$ y $R' \simeq \{z : (\exists x_1,...,x_m \prec q_1)\psi'(\bar{q},x_1,...,x_m) \wedge z \simeq (x_1,...,x_m)\}$. Como $q_1 \prec t-5$, se tiene que $R' \simeq \{z : (\exists x_1,...,x_m \prec q_1)\psi(\bar{q},x_1,...,x_m) \wedge z \simeq (x_1,...,x_m)\}$, luego $R' \simeq \{(x_1,...,x_m) : M^\star \models \phi(\bar{[q]},[x_1],...,[x_m]) \wedge [x_1],...,[x_m] <^\sharp [q_1]\}$. Para terminar, definimos $R \subset C^m$ de la siguiente manera:

$$R([x_1],...,[x_m]) \text{ si y sólo si } R'(x_1,...,x_m)$$

Por lo tanto $R \in Y_m$ y se cumple que $R([x_1],...,[x_m])$ si y sólo si $M^\star \models \phi(\bar{[q]},[x_1],..., [x_m]) \wedge [x_1],...,[x_m] <^\sharp [q_1]$.

6. Sea $\phi(x_1,...,x_{2r})$ una $\mathcal{L}^2$-fórmula sin variables libres de segundo orden ni parámetros. Sean $0 < i_1,..,i_r,\ j_1,...,j_r \leq t-5$ enteros donde $(i_1,...,i_r)$ es orden equivalente a $(j_1,...,j_r)$ y $\text{mín}\{i_1,...,i_r\} = \text{mín}\{j_1,...,j_r\}$. Sean $[p_1],...,[p_r] \in C$ tales que $[p_1],...,[p_r] <^\sharp \text{mín}\{[i_1],\ ...,[i_r]\}$. Por el lema 4.6.3 existe una $\mathcal{L}^\star(k)$-fórmula acotada $\psi(x_1,...,x_{2r})$ sin parámetros y con constantes mayores que $t-5$, tal que tal que para todo $x_1,...,x_{2r} \prec t-4$ se cumple que

$$M^\star \models \phi([x_1],...,[x_{2r}]) \text{ si y sólo si } M(S) \models \psi(x_1,...,x_{2r})$$

Por el hecho 4.5.20 se tiene que $[p_1], ..., [p_r] <^\sharp \text{mín}\{[i_1], ..., [i_r]\}$ implica que $p_1, ..., p_r \prec \text{mín}\{i_1, ..., i_r\}$. Como ψ tiene constantes mayores que $t-5$, podemos aplicar indiscernibilidad acotada* y obtener que

$$M(S) \models \psi(i_1, ..., i_r, p_1, ..., p_r) \leftrightarrow \psi(j_1, ..., j_r, p_1, ..., p_r)$$

Por lo tanto

$$M^\star \models \phi([i_1], ..., [i_r], [p_1], ..., [p_r]) \leftrightarrow \phi([j_1], ..., [j_r], [p_1], ..., [p_r])$$

□

Vamos a explicar cómo vamos a realizar un argumento de inducción en la estructura $M^\star$. Esto es muy parecido a la inducción transfinita. Primero veamos que en C existen elementos sucesores y límites.

Definición 4.6.5. Sean $a, b \in C$. Decimos que a es **el sucesor de** b si $a <^\sharp b$ y no existe $z \in C$ tal que $a <^\sharp z <^\sharp b$. Denotamos como a^+ al sucesor de a. Decimos que a es **un punto límite** si no es 0 ni el sucesor de ningún elemento.

Proposición 4.6.6. *Para todo $a \in C$ existe a^+.*

Demostración. Sea $a \in C$, entonces $a = [z]$ para algún $z \in M(S)$. Consideremos el conjunto $A := \{[y] \in C : [z] <^\sharp [y]\}$. Notemos que A es $\mathcal{L}^2$-definible y no vacío dado que C no es acotado superiormente, luego por el teorema 4.6.4 existe un elemento $<^\sharp$-mínimo en A. Es sencillo comprobar que ese elemento es a^+.

□

Proposición 4.6.7. *Los elementos* $[1], [2], ..., [t-5]$ *son puntos limites*

Demostración. Primero veamos que $[1]$ es punto límite. Sea $x \in M(S)$ tal que $[x] <^\sharp [1]$. Consideremos como R el punto x-crítico y como S el punto R-crítico. Como vimos en la demostración del cuarto ítem del lema 4.5.25, se cumple que $[x] <^\sharp [R] <^\sharp [S] <^\sharp [1]$, luego $[1]$ no puede ser sucesor de ningún elemento, por lo tanto, $[1]$ es punto límite. Por indiscernibilidad todos elementos $[1], [2], ..., [t-5]$ son puntos limites.

□

Definición 4.6.8. Vamos a denotar como ω al menor punto límite de C.

Proposición 4.6.9. *Existe ω y además $\omega <^\sharp [1]$.*

Demostración. Dado que $[1]$ es punto límite, se cumple que $M^\star \models (\exists x <^\sharp [2])(x$ es punto límite$)$; luego al aplicar indiscernibilidad se cumple que $M^\star \models (\exists x <^\sharp [1])(x$ es punto límite$)$. Por lo tanto el conjunto $A := \{z : z <^\sharp [1]$ y z es punto límite $\}$ es $\mathcal{L}^2$-definible y no vacío, luego existe un elemento $<^\sharp$-mínimo en A. Ese elemento es ω.

□

Para demostrar por inducción que una propiedad $P(x)$ vale en $M^\star$, se divide el proceso en tres casos: caso base, el caso sucesor y el caso límite. Esto se puede hacer gracias al teorema 4.6.4 que nos dice que $M^\star$ es una estructura bien ordenada. Hay que tener en cuenta que la propiedad $P(x)$ tiene que estar expresada en una $\mathcal{L}^2$-fórmula para poder aplicar inducción.

Ya con inducción transfinita podemos construir nuestro universo contructible, pero antes necesitamos nuevamente definir, ahora dentro de C, la noción de "$\models$". Para esto necesitamos codificar las fórmulas y las sucesiones finitas, aunque el caso de las fórmulas ya está hecho dado que, como veremos en la sección 4.7, ω es un modelo de la aritmética de Peano y por tanto puede codificar las fórmulas por medio de la codificación de Gödel. El caso de las sucesiones finitas lo vamos a realizar a continuación. Como las sucesiones finitas viven en $C \times C$ vamos a ordenar este conjunto de la forma canónica (ver 4.6.10) de tal manera que resulte isomorfo a C. Gracias a este isomorfismo se podrá codificar las sucesiones finitas por medio de iteraciones como se verá en el lema 4.6.17 y la definición 4.6.19.

Recordemos cómo se ordena $C \times C$.

Definición 4.6.10. Sean $x, y, z, w \in C$. Definimos como $(x, y) \prec (z, w)$ si y sólo si

- $\text{máx}\{x, y\} <^\sharp \text{máx}\{z, w\}$
- Si $\text{máx}\{x, y\} = \text{máx}\{z, w\}$ entonces (x, y) precede lexicográficamente a (z, w).

Es sencillo verificar que $(C \times C, \prec)$ es un orden total, además es un buen orden:

Proposición 4.6.11. *Sea R una relación binaria no vacía que es $\mathcal{L}^2$-definible. Entonces existe $(u, v) \in R$ tal que (u, v) es $\prec$-mínimo en R.*

Demostración. Consideremos el conjunto $M := \{x \in C : (\exists y \leq^\sharp x)((x, y) \in R \text{ o } (y, x) \in R\}$. Notemos que M es $\mathcal{L}^2$-definible, luego tiene un elemento $<^\sharp$-mínimo. Sea u el $<^\sharp$-mínimo de M, y consideremos el conjunto $A := \{x \leq^\sharp u : (x, u) \in R \text{ o } (u, x) \in R\}$. Sea v el $<^\sharp$-mínimo de M de A. Así (u, v) ó (v, u) es el elemento $\prec$-mínimo de R. □

Para no sobrecargar la notación, escribiremos sin corchetes las contantes de $\mathcal{L}^2$. Usaremos las notaciones $[x, y)$ para describir el conjunto $\{z : x <^\sharp z \leq^\sharp y\}$. Recordemos que una relación r-aria R es $\mathcal{L}^2$-definible si existe $\phi(x_1, ..., x_r)$ $\mathcal{L}^2$-fórmula que puede tener parámetros tal que $R = \{(x_1, ..., x_r) : C \models \phi(x_1, ..., x_r)\}$. Como vamos a trabajar con funciones, no será de gran de utilidad acotarlas.

Proposición 4.6.12. *Sea $F : [0, t-6)^m \to [0, t-6)$ una función que $\mathcal{L}^2$-definible con parámetros menores que 1 y constantes mayores o iguales que $t-6$. Entonces para todo $a <^\sharp t-6$ el conjunto $\{F(w_1, ..., w_m) : w_1, ..., w_m <^\sharp a\}$ es acotado en $[0, t-6)$.*

Demostración. Razonamos por contradicción. Si

$$M^\star \models (\exists x <^\sharp t-6)(\forall z <^\sharp t-6)(\exists w_1, ..., w_m <^\sharp x)(f(w_1, ..., w_m) >^\sharp z)$$

Por indiscernibilidad

$$M^\star \models (\exists x <^\sharp t-7)(\forall z <^\sharp t-7)(\exists w_1, ..., w_m <^\sharp x)(f'(w_1, ..., w_m) >^\sharp z)$$

Donde f' es la función que resulta al cambiar por indiscernibilidad las constantes a f, en constantes mayores o iguales que $t-7$. Sea $\alpha <^\sharp t-7$ tal que

$$M^\star \models (\forall z <^\sharp t-7)(\exists w_1, ..., w_m <^\sharp \alpha)(f'(w_1, ..., w_m) >^\sharp z)$$

Por indiscernibilidad

$$M^\star \models (\forall z <^\sharp t-6)(\exists w_1, ..., w_m <^\sharp \alpha)(f(w_1, ..., w_m) >^\sharp z)$$

En particular, existen $b_1, ..., b_m <^\sharp \alpha$ tal que $f(b_1, ..., b_m) >^\sharp t-7$. Por otro lado, como el rango de f está contenido en $[0, t-6)$, se cumple que

$$M^\star \models (\exists z <^\sharp t-6)(f(b_1, ..., b_m) <^\sharp z)$$

Dado que $b_1, ..., b_m <^\sharp t-7$, aplicamos indiscernibilidad

$$M^\star \models (\exists z <^\sharp t-7)(f'(b_1, ..., b_m) <^\sharp z)$$

Por tanto existe $\beta <^\sharp t-7$ tal que

$$M^\star \models f'(b_1, ..., b_m) <^\sharp \beta$$

Luego, nuevamente por indiscernibilidad

$$M^\star \models f(b_1, ..., b_m) <^\sharp \beta$$

Lo cual es una contradicción ya que $t-7 <^\sharp f(b_1, ..., b_m) <^\sharp \beta <^\sharp t-7$. Entonces para todo $a <^\sharp t-6$ el conjunto $\{F(w_1, ..., w_m) : w_1, ..., w_m <^\sharp a\}$ es acotado en $[0, t-6)$.

$\square$

Demostremos que efectivamente $(C, <^\sharp)$ es isomorfo a $(C \times C, \prec)$.

Proposición 4.6.13. *Sean $a, b \in C$ con $0 <^\sharp a$ tal que $a, b <^\sharp t-6$. Existe una única función estrictamente creciente f tal que $f \in Y_2$, $Dom(f) = [0, a)$, $f(0) = b$ y $Ran(f) = [b, z)$ para algún $z <^\sharp t-6$.*

Demostración. Primero demostremos la unicidad. Supongamos que existen $f, g \in Y_2$ estrictamente creciente tal que $f(0) = g(0) = b$. Si $f \neq g$ consideremos el conjunto $A = \{z <^\sharp a : f(z) \neq g(z)\}$. Como A es no vacío existe $c \in A$ tal que es $<^\sharp$-mínimo. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(c) <^\sharp g(c)$. Como el rango de g es un intervalo, existe $w <^\sharp c$ tal que $f(c) = g(w)$, pero como c es el $<^\sharp$-mínimo de A se tiene que $f(w) = g(w)$, lo cual contradice que f es estrictamente creciente.

Veamos la existencia. Veamos por inducción que todo elemento a menor que $t-6$ satisface la fórmula $\Phi(a) : (\exists B_1^2)(\exists z <^\sharp t-6)(B_1^2$ *es función estrictamente creciente,* $Dom(B_1^2) = [0, a)$, $B_1^2(0, b)$ *y* $Ran(B_1^2) = [b, z))$.

Caso base. Supongamos que $a = 0^+$. La función f que envía el 0 al elemento b satisface todas las condiciones. Por separación de primer orden, esa función pertenece a Y_2.

Caso sucesor. Supongamos que $a = u^+$ para algún $u \in C$ y existe f_u que pertenece a Y_2 estrictamente creciente con dominio $[0, u)$, $f_u(0) = b$ y $\mathrm{Ran}(f) = [b, z)$ para algún $z \in C$. La función $f_u \cup \{(u, z)\}$ satisface todas las condiciones y pertenece a Y_2 por separación de primer orden usando la fórmula $f_u(x_1, x_2) \vee (u = x_1 \wedge z = x_2)$.

Caso límite. Supongamos que a es un punto límite y para todo $u <^\sharp a$ existen f_u funciones que pertenecen a Y_2 estrictamente creciente con dominio $[0, u)$ y $f_u(0) = b$. La función que necesitamos es la unión de esas funciones dado que, por la unicidad ya demostrada, todas esas funciones son par a par compatibles. Para ver que la unión existe, consideremos la fórmula

$$\exists B_1^2(B_1^2(x_1, x_2) \wedge (\exists u <^\sharp t-6)(\exists z <^\sharp t-6)$$

$$(B_1^2 \text{ es función estrictamente creciente con dominio } [0, u) \text{ y rango } [b, z)))$$

Por separación de segundo orden existe una relación f que pertenece a Y_2 tal que $(u, v) \in f$ si y sólo si (u, v) satisface la anterior fórmula. Por separación de primer orden, la restricción de f en a pertenece a Y_2 con la fórmula $f(u, v) \wedge u <^\sharp a$ y gracias a la proposición 4.6.12 la restricción de f en a es acotado. Por la unicidad podemos ver que $f|^{<^\sharp a} = \bigcup_{u <^\sharp a} f_u$.

□

Lema 4.6.14. *Existe una única función biyectiva* $P : [0, t-6)^2 \to [0, t-6)$ *estrictamente creciente tal que* $P \in Y_3$. *Además,* P *es* $\mathcal{L}^2$*-definible por una fórmula que no tiene parámetros de primer ni de segundo orden y su única constante es* $t-6$.

Demostración. La demostración es por inducción. Primero consideremos la siguiente fórmula $\gamma(\alpha, P_\alpha)$

Existe $z <^\sharp t-6$ *tal que* $P_\alpha : [0, \alpha)^2 \to [0, z)$ *es una función biyectiva estrictamente creciente.*

Veamos primero que si existen $P'_\alpha, P_\alpha \in Y_3$ tales que satisfacen $\gamma(\alpha, P'_\alpha)$ y $\gamma(\alpha, P_\alpha)$ entonces $P'_\alpha = P_\alpha$. Supongamos que $P'_\alpha \neq P_\alpha$, entonces podemos considerar el conjunto $A = \{(x,y) : P'_\alpha(x,y) \neq P_\alpha(x,y)\}$ el cual es $\mathcal{L}^2$-definible, luego existe (u,v) elemento $\prec$-mínimo en A. Sin pérdida de generalidad suponemos que $P'_\alpha(u,v) <^\sharp P_\alpha(u,v)$, así, como el rango de P_α es un intervalo, existe $(a,b) \prec (u,v)$ tal que $P_\alpha(a,b) = P'_\alpha(u,v)$, pero como (u,v) es el elemento $\prec$-mínimo de A entonces $P_\alpha(a,b) = P'_\alpha(a,b)$ lo cual implicaría que $P'_\alpha(a,b) = P'_\alpha(u,v)$; esto es una contradicción dado que P'_α es estrictamente creciente, por tanto $P'_\alpha = P_\alpha$. Notemos que por lo anterior, si $\alpha <^\sharp \beta$, entonces $P_\alpha = P_\beta|^{<\alpha}$.

Ahora veamos que la fórmula $\exists P_\alpha \gamma(\alpha, P_\alpha)$ se cumple para todo $\alpha <^\sharp t-6$. Esto se hace por inducción.

Caso base. Si $\alpha = 0^+$, la función que envía la pareja $(0,0)$ al 0 satisface todas las condiciones y pertenece a Y_3 por separación de primer orden.

Caso sucesor. Supongamos que α es de la forma β^+ y existe P_β que cumple $\gamma(\beta, P_\beta)$. Sea $z <^\sharp t-6$ tal que que el rango de P_β es $[0,z)$. Por la proposición 4.6.13 existen $f, h \in Y_2$ funciones estrictamente crecientes donde $f : [0,\beta) \to [z, u_1)$ y $h : [0,\beta^+) \to [u_1, u_2)$.

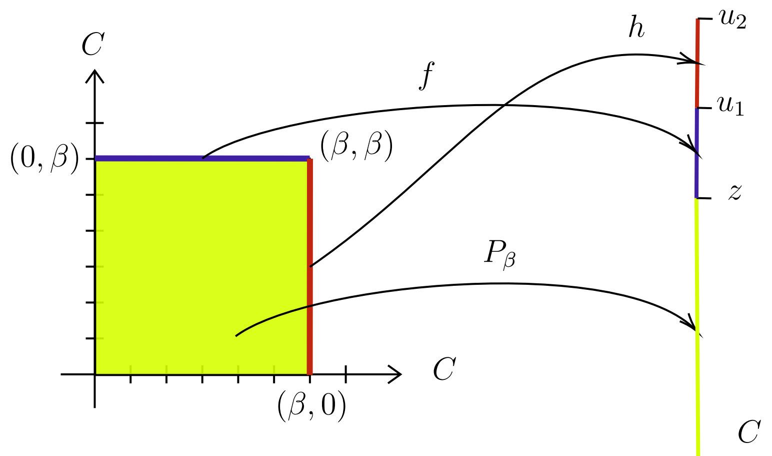

Figura 4-6: Función P_α

Ahora definimos P_α como

- $P_\alpha(x,y) = P_\beta(x,y)$ si $x, y <^\sharp \beta$
- $P_\alpha(x,\beta) = f(x)$ si $x <^\sharp \beta$
- $P_\alpha(\beta,y) = h(y)$ si $y \leq^\sharp \beta$

La gráfica **4-6** muestra lo que hace P_α. Es fácil verificar que P_α es estrictamente creciente y además pertenece a Y_3 por separación de primer orden, dado que $f, h \in Y_2$ y por inducción $P_\beta \in Y_3$.

Caso límite Si α es un punto límite, aplicamos el argumento que usamos en la proposición 4.6.13 en el caso límite y consideramos como $P_\alpha = \bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} P_\beta$.

La función P la definimos como $\bigcup_{\beta <^\sharp t-6} P_\beta$. Ésta pertenece a Y_3 por separación de segundo orden, ya que $(x_1, x_2, x_3) \in P$ si y sólo si

$$\exists B_1^3 (B_1^2(x_1, x_2, x_3) \wedge (\exists u <^\sharp t-6)(\exists z <^\sharp t-6)$$

$$(B_1^3 \text{ es función estrictamente creciente con dominio } [0,u)^2 \text{ y rango } [0,z)))$$

Gracias a la unicidad P está bien definido. Para ver que el rango de P es $[0, t-6)$, primero observemos que el rango de todas las funciones P_α está contenido en $[0, t-6)$, luego el rango de P está contenido en $[0, t-6)$, por otro lado, por inducción podemos demostrar que $x \leq^\sharp P(0, x)$ para todo $x <^\sharp t-6$, por tanto, como el rango es un intervalo, éste debe ser $[0, t-6)$.

□

De ahora en adelante, cuando mencionemos a P haremos referencia a la función del lema 4.6.14. Vamos a enunciar las propiedades de P. Las dos primeras se demuestran por inducción y la tercera es consecuencia de indiscernibilidad.

Hecho 4.6.15. Sean $x, y \in C$ tales que $x, y <^\sharp t-6$. Se tiene que

- Si $0 <^\sharp x$ entonces $x <^\sharp P(0, x)$
- Si $0 <^\sharp x$, entonces $y <^\sharp P(x, y)$ y $x <^\sharp P(x, y)$.
- Si $x, y <^\sharp i$ entonces $P(x, y) <^\sharp i$

La función P nos ayudará a codificar sucesiones finitas por medio de iteraciones como lo muestra el lema 4.6.17 y la definición 4.6.19.

Definición 4.6.16. Denotaremos como $\bar{1}$ al sucesor del 0 en C. **Una sucesión finita** es una función que pertenece a Y_2 y cuyo dominio es $[\bar{1}, m]$ para algún $m <^\sharp \omega$ y su rango está contenido en $[0, t-6)$.

Lema 4.6.17. *Sea f una sucesión finita cuyo dominio es $[\bar{1}, m]$ para algún $m <^\sharp \omega$. Entonces existe una única sucesión finita G_f con dominio $[\bar{1}, m]$ tal que para todo $u \in [1, m)$ se cumple que*

1. $G_f(\bar{1}) = f(\bar{1})$
2. $G_f(u^+) = P(G_f(u), f(u^+))$

Demostración. La prueba se hace por inducción. No la vamos a desarrollar dado que el argumento que se usa es el mismo que hemos aplicado en las demostraciones de la proposición 4.6.13 y el lema 4.6.14, pero esta vez se considera la afirmación $\gamma(z)$: *Existe una sucesión finita* g_z *cuyo dominio es* $[\bar{1}, z]$ *que cumple las condiciones* (1) *y* (2). Se demuestra por inducción que para todo $z \leq^\sharp m$ se cumple $\gamma(z)$, y no se considera el caso límite dado que $m <^\sharp \omega$.

□

Definición 4.6.18. Dada una sucesión finita f, denotamos como G_f a la función que nos proporciona el lema 4.6.17.

Definición 4.6.19. Sea f una sucesión finita con dominio $[\bar{1}, m]$ para algún $m <^\sharp \omega$. Definimos como **el código de** f al elemento $P(m, G_f(m))^+$ y lo denotamos como $\sharp(f)$. Si f es vacía entonces $\sharp(f) = 0$.

Veamos que la codificación de las sucesiones finitas está bien definida.

Proposición 4.6.20. *Sean* f, f' *sucesiones finitas. Si* $\sharp(f) = \sharp(f')$ *entonces* $f = f'$

Demostración. La prueba se va a desarrollar por inducción sobre el dominio de f.

Caso Base. Supongamos que f tiene dominio $[\bar{1}, \bar{1}]$. Sea f' una sucesión finita con dominio $[\bar{1}, y]$ tal que $\sharp(f) = \sharp(f')$, entonces $P(\bar{1}, G_f(\bar{1})) = P(y, G_{f'}(y))$. Como P es biyectiva se tiene que $\bar{1} = y$ y además $G_f(\bar{1}) = G_{f'}(\bar{1})$, lo que es igual a $f(\bar{1}) = f'(\bar{1})$, concluyendo que $f = f'$.

Caso sucesor. Supongamos que f tiene dominio $[\bar{1}, u^+]$ y para todas las sucesiones finitas con dominio $[\bar{1}, u]$ se cumple la proposición. Sea f' una sucesión finita con dominio $[\bar{1}, y]$ tal que $\sharp(f) = \sharp(f')$, entonces $P(u^+, G_f(u^+)) = P(y, G_{f'}(y))$. Como P es biyectiva, se tiene que $u^+ = y$ y además $G_f(u^+) = G_{f'}(u^+)$. Como $G_f(u^+) = P(G_f(u), f(u^+))$ y $G_{f'}(u^+) = P(G_{f'}(u), f'(u^+))$, se concluye que $G_f(u) = G_{f'}(u)$ y $f(u^+) = f'(u^+)$. Lo anterior implica que $\sharp(f|^{\leq u}) = \sharp(f'|^{\leq u})$, luego por hipótesis de inducción se cumple que $f|^{\leq u} = f'|^{\leq u}$, además, dado que $f(u+1) = f'(u+1)$, podemos concluir que $f = f'$.

□

Al momento de trabajar con las codificaciones de las sucesiones finitas necesitaremos distinguir cuáles son las sucesiones cuyo rango se encuentre contenido en conjunto determinado. Para esto vamos a dar la siguiente definición.

Definición 4.6.21. Sea $a <^\sharp t - 6$. Denotamos como $P^\star(a)$ al menor $b <^\sharp t - 6$ tal que $a, \omega <^\sharp b$ y para todo $\alpha, \beta <^\sharp b$ se tiene que $P(\alpha, \beta) <^\sharp b$.

Proposición 4.6.22. *Sea* f *una sucesión con dominio* $[\bar{1}, m]$ *y rango contenido en el intervalo* $[0, z]$. *Entonces.*

$$\text{máx}(f) <^\sharp \sharp(f) <^\sharp P^\star(z)$$

Demostración. Por el hecho 4.6.15 se puede ver que $G_f(w) \geq^\sharp f(w)$ para todo $w \leq^\sharp m$ y que G_f es creciente, luego $G_f(m) \geq^\sharp \text{máx}(f)$. Como $\sharp(f) = P(m, G_f(m))^+$ y $P(m, G_f(m)) \geq^\sharp G_f(m)$, entonces $\sharp(f) \geq^\sharp \text{máx}(f)$. Por otro lado, por inducción se puede demostrar que $G_f(w) < P^\star(z)$ para todo $w \leq^\sharp m$, luego, como P es creciente y $\omega <^\sharp P^\star(z)$, se cumple que $\sharp(f) = P(m, G_f(m))^+ \leq^\sharp P(\omega, G_f(m)) <^\sharp P^\star(z)$.

□

También es útil usar la codificación para etiquetar los valores que toma la sucesión.

Definición 4.6.23. Sea $y \in [0, t-6)$. Sean $i, n \in [\bar{1}, \omega)$ donde $i <^\sharp n$. Si existe f sucesión finita con dominio $[1, n]$ tal que $\sharp(f) = y$, entonces denotamos como $y_n(i)$ al elemento $f(i)$.

El siguiente hecho es consecuencia de las proposiciones 4.6.20 y 4.6.22.

Hecho 4.6.24. Sea f una sucesión finita con dominio $[\bar{1}, n]$. Existe un único $y \in [0, t-6)$ tal que $y_n(i) = f(i)$ para todo $i \leq^\sharp n$. Además $\text{máx}(f) <^\sharp y <^\sharp P^\star(\text{máx}(f))$.

La codificación es $\mathcal{L}^2$-definible.

Proposición 4.6.25. *La función parcial*

$$\begin{array}{rccc} COD: & [0, t-6) \times [0, \omega)^2 & \longrightarrow & [0, t-6) \\ & (y, n, i) & \mapsto & y_n(i) \end{array}$$

pertenece a Y_4. Además, es $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula que no tiene parámetros de segundo orden, su única constante es $t-6$ y tiene parámetros de primer orden menores que 1.

Demostración. Por separación de segundo orden existe $COD \in Y_4$ tal que $(y, n, i, z) \in COD$, si y sólo si

$$i \leq^\sharp n <^\sharp \omega \wedge \exists B_1^2(B_1^2 \text{ tiene dominio } [\bar{1}, n] \ \wedge B_1^2(i, z) \wedge \sharp(B_1^2) = y).$$

En la anterior fórmula $\sharp(f)$ se puede expresar, en vez de utilizar a P como parámetro, usando la $\mathcal{L}^2$-fórmula del lema 4.6.14 que define a P.

□

Para finalizar, dado que en la sección 4.7 vamos a codificar tuplas, necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.6.26. Sea $r \in \mathbb{Z}^+$. Definimos inductivamente como $P_2 := P$ y $P_{r+1}(x_1, ..., x_{r+1}) := P_r(P_2(x_1, x_2), x_3, ..., x_{r+1})$. También definimos como $P(x) := x$.

Por inducción se puede demostrar las siguientes propiedades.

Hecho 4.6.27. Para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ y $x_1, ..., x_r <^\sharp t-6$ se tiene que

- $x_1, ..., x_r \leq^\sharp P_r(x_1, ..., x_r)$
- P_r es una biyección y pertenece a Y_{r+1}, además, es $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula que no tiene parámetros de primer ni de segundo orden y su única constante es $t-6$.
- Si $x_1, ..., x_r <^\sharp i$ entonces $P_r(x_1, ..., x_r) <^\sharp i$

4.7. Modelo final

Ahora vamos a terminar la demostración construyendo el modelo de ZFC. Este va a ser un universo constructible, así que para armarlo toca cerrar bajo conjuntos definibles. Para esto necesitamos definir "$\models$" dentro de C. Ya tenemos la codificación de las sucesiones finitas, ahora nos falta codificar nuevamente las fórmulas, no obstante, como lo muestra el hecho 4.7.1, nuestro elemento ω tiene una estructura aritmética que nos permite usar la codificación de Gödel. El siguiente hecho es consecuencia de la inducción de $M^\star$ que ya varias veces hemos usado en la sección 4.6.

Hecho 4.7.1. Sea A un conjunto $\mathcal{L}^2$-definible tal que $0 \in A$ y para todo $x \in A$, se cumple que $x^+ \in A$. Entonces para todo $x <^\sharp \omega$ se tiene que $x \in A$.

El hecho 4.7.1 dota a ω de una estructura aritmética: Tiene elemento 0, todos tienen sucesor y tiene inducción. Luego, en ω podemos definir una suma, multiplicación, exponenciación sin ningún problema. Esto nos va a permitir codificar las fórmulas a través de la numeración de Gödel; no lo vamos a hacer en detalle dado que asumimos que el lector está familiarizado con estos temas, sin embargo, para repasarlos pueden ver el capitulo 9 de [6].

Definición 4.7.2. Definimos como $\mathcal{L}(\epsilon)$ al lenguaje de primer orden que sólo tiene un símbolo de relación binario $\in$.

Definición 4.7.3. Sea ϕ una $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmula. Denotamos como $[\phi]$ al número de Gödel de ϕ.

Usando el mismo argumento de la demostración del lema 4.6.14, podemos demostrar que las operaciones aritméticas pertenecen a Y_3 y son $\mathcal{L}^2$-definibles por fórmulas que no tienen parámetros de segundo orden y tienen parámetros de primer orden menores que 1, dado que $\omega <^\sharp 1$. Gracias a esto podemos obtener el siguiente resultado.

Hecho 4.7.4. El conjunto de los números de Gödel es $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula que tiene parámetros de primer orden menores que 1 y no tiene parámetros de segundo orden. Gracias a separación de segundo orden, existe $G \in Y_1$ tal que $x \in G$ si y sólo si x es el número de Gödel de una $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmula.

Ahora vamos a empezar a definir la relación de satisfacción.

Definición 4.7.5. Sea $R \in Y_2$. Definimos como SAT_R a la relación ternaria que satisface que $(n, x, m) \in \mathrm{SAT}_R$ si y sólo si

- Existe una $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmula ϕ tal que $[\phi] = n$.
- Existe una sucesión finita f con dominio $[\bar{1}, m]$ tal que $\sharp(f) = x$.
- $(\mathrm{fld}(R), R) \models \phi(x_m(1), ..., x_m(m))$

Teorema 4.7.6 (Definibilidad)**.** *Sea R una relación cuyo campo es acotado por $t-6$ que es $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula ϕ que no tiene parámetros de segundo orden . Entonces SAT_R es $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula que no tiene parámetros de segundo orden.*

Demostración. Consideremos como B_0 al siguiente conjunto

$$\{([x_i \in x_j], x, m) | i, j \leq^\sharp m \wedge (x_m(k) \in \text{ Fld}(R) \text{ para todo } k \leq^\star m) \wedge R(x_m(i), x_m(j))\}$$

$$\cup$$

$$\{([x_i = x_j], x, m) | i, j \leq^\sharp m \wedge (x_m(k) \in \text{ Fld}(R) \text{ para todo } k \leq^\star m) \wedge x_m(i) = x_m(j)\}$$

Notemos que el conjunto B_0 es $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula que no tiene parámetros de segundo orden gracias a la proposición 4.6.25. Ahora consideremos la siguiente $\mathcal{L}^2$-fórmula $\phi(k, X)$: Para todo n, x, m se tiene que $(n, x, m) \in X$ si y solo si:

- $n \in G$ y la fórmula que codifica n tiene longitud menor que k
- Existe una sucesión finita f tal que $\sharp(f) = x$.
- $(n, x, m) \in B_0$, ó,
  - Si $([\neg\psi], x, m) \in X$ entonces $([\psi], x, m) \notin X$.
  - Si $([\psi_1 \wedge \psi_2], x, m) \in X$ entonces $([\psi_1], x, m) \in X$ y $([\psi_2], x, m) \in X$.
  - Si $([\exists x_j \psi], x, m) \in X$ entonces existe y que cumple que $y_{m+1}(i) = x_m(i)$ para todo $i <^\sharp j$ y $y_{m+1}(i+1) = x_m(i)$ para todo $j <^\sharp i \leq^\sharp m$; tal que $([\psi], y, m^+) \in X$

No es complicado demostrar por inducción y por separación de primer orden que para todo $3 \leq^\sharp k <^\sharp \omega$ se cumple $\exists X(\phi(k, X))$. Definimos como SAT_R al conjunto que satisface que $(n, x, m) \in \text{SAT}_R$ si y sólo si

$$(\exists B_1^3)(\exists k < \omega)(\phi(k, B_1^3) \wedge B_1^3(n, x, m))$$

En esta fórmula no usamos los parámetros de segundo orden COD, G, y R, sino las $\mathcal{L}^2$-fórmulas sin parámetros de segundo orden que los definen.

□

Ahora ya con nuestro lema de la definibilidad vamos a comenzar a definir la noción de conjunto definible. Sólo consideramos las relaciones cuyo campo este acotado por $t-6$.

Definición 4.7.7. Denotamos como $Y_i^\star$ al conjunto de las relaciones R que pertenecen a Y_i que son $\mathcal{L}^2$-definibles por fórmulas que tienen parámetros de primer orden menores que $t-5$ y no tienen parámetros de segundo orden; y cumplen que $\sup\{x : x \in \text{Fld}(R)\} <^\sharp t-6$.

Definición 4.7.8. Sea $R \in Y_2^\star$. Denotamos como $\hat{R}$ al elemento $P^\star(z)$ donde $z = \sup\{x : x \in \text{Fld}(R)\}^+$.

Definición 4.7.9. Sea $R \in Y_2^\star$. Decimos que (n, x, m) es **un código para** R si $n \in G$, $m <^\sharp \omega$ y $\sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\} <^\sharp x <^\sharp \hat{R}$.

La condición de que el $\sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\} <^\sharp x <^\sharp \hat{R}$ sirve para que el código de la sucesión no interfiera con los elementos de R. Definimos qué es un conjunto definible por una fórmula.

Definición 4.7.10. Sae $R \in Y_2^\star$. Sea $([\phi], x, m)$ un código para R. Definimos

$$H_R([\phi], x, m) := \{y : (\mathrm{Fld}(R), R) \models \phi(y, x_m(2), ..., x_m(m))\}$$

Gracias al teorema de la definibilidad se tiene que $H_R([\phi], x, m) \in Y_1$.

Notemos que los conjuntos definibles de los conjuntos definibles ya creados no los podemos considerar en nuestro lenguaje. Para solucionar este problema usaremos nuestra función P_3, ya que cada conjunto definible tiene asociada una tupla que podemos codificar nuevamente en C. Para que esa asociación sea biunívoca necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.7.11. Decimos que (n, x, m) es **un código minimal de** R si y sólo si (n, x, m) es un código de R y:

- Si (n', x', m') es un código de R tal que $H_R(n, x, m) = H_R(n', x', m')$, entonces $P_3(n, x, m) \leq^\sharp P_3(n', x', m')$
- Para todo $y \in \mathrm{Fld}(R)$ se cumple que $H_R(n, x, m) \neq \{z : z \in_R y\}$

Notemos que por la primera condición de la definición de código minimal se cumple que dos códigos minimales distintos definen distintos conjuntos, y por la segunda, los códigos minimales van a codificar conjuntos definibles que no sean elementos de R. Veamos que los códigos minimales existen.

Proposición 4.7.12. *Sea $R \in Y_2^\star$ y (n, x, m) código de R tal que para todo $w \in Fld(R)$ se cumple que $H_R(n, x, m) \neq \{z : z \in_R w\}$. Entonces existe un código minimal (n', x', m') de R tal que $H_R(n, x, m) = H_R(n', x', m')$.*

Demostración. Recordemos que por el hecho 4.6.27 se tiene que $P_3 \in Y_4$, además, gracias al teorema de la definibilidad, el conjunto $\{P^3(n', x', m') : H_R(n, x, m) = H_R(n', x', m')\}$ es $\mathcal{L}^2$-definible y por tanto tiene un $<^\sharp$-mínimo elemento. La preimagen de ese elemento es el código minimal que buscamos.

□

Ahora veamos la definición de los conjuntos definibles según una relación dada.

Definición 4.7.13. Sea $R \in Y_2^\star$. Definimos como **los conjuntos definibles según** R a la relación $\mathrm{CD}(R)$ que satisface que $u \in_{\mathrm{CD}(R)} v$, si y sólo si, $u \in_R v$ o existe un código minimal (n, x, m) de R tal que $v = P_3(n, x, m)$ y $u \in H_R(n, x, m)$.

La proposición 4.7.18 muestra lo que realmente significa la definición anterior. Notemos que $\mathrm{CD}(R) \in Y_2^\star$ gracias al teorema de la definibilidad y la proposición 4.6.12, dado que garantiza que el conjunto $\{P_3(n,x,m) : (n,x,m)$ es código minimal de $R\}$ es acotado en $[0, t-6)$ ya que el campo de R es acotado. Veamos las propiedades que tienen los conjuntos definibles según R.

Definición 4.7.14. Sea $R \in Y_2^\star$.

- Decimos que R es **extensional** si y sólo si $(\mathrm{Fld}(R), R) \models (\forall x, y, z)((z \in_R x \leftrightarrow z \in_R y) \rightarrow x = y)$.
- Decimos que R **preserva el orden** si para todo $x, y \in \mathrm{Fld}(R)$ se tiene que si $x \in_R y$ entonces $x <^\sharp y$.
- Decimos que R es **una relación adecuada** si $0, 1 \in \mathrm{Fld}(R)$, $0 \in_R \bar{1}$ y para todo $z \in \mathrm{Fld}(R)$ se tiene que $z \notin_R 0$

Definición 4.7.15. Sean $R, S \in Y_2^\star$. Decimos que S **extiende debidamente a** R si y sólo si

- $\mathrm{Fld}(R) \subsetneq \mathrm{Fld}(S)$.
- Para todo $x, y \in \mathrm{Fld}(R)$ se cumple que $x \in_R y$ si y sólo si $x \in_S y$.
- Si $x \in_S z$ y $z \in \mathrm{Fld}(R)$, entonces $x \in \mathrm{Fld}(R)$.
- Para todo $x \in \mathrm{Fld}(S) \setminus \mathrm{Fld}(R)$ y para todo $y \in \mathrm{Fld}(R)$ se cumple que $y <^\sharp x$.

Las anteriores propiedades que puede tener un orden son cerradas bajo cadenas crecientes como lo muestra el hecho 4.7.16. Su demostración no es complicada pero dado que es larga la omitiremos.

Hecho 4.7.16. Sea $\alpha < t - 6$.Sea $\{R_\beta\}_{\beta <^\sharp \alpha}$ una cadena creciente de relaciones adecuadas, extensionales y que preservan el orden, además, R_j extiende debidamente a R_i si $i <^\sharp j$. Entonces $\bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} R_\beta$ es adecuada, extensional, preserva el orden y extiende debidamente a R_β para todo $\beta <^\sharp \alpha$.

En la construcción del modelo empezamos con una relación adecuada, extensional y que preserva el orden, luego el hecho 4.7.16 junto con el lema 4.7.17 hacen que esas propiedades se mantengan cuando definamos nuestra la relación final. Esto va a permitir que nuestro modelo cumpla el axioma de extensionalidad y fundamentación.

Lema 4.7.17. *Sea $R \in Y_2^\star$ una relación adecuada, extensional y preserva el orden, entonces $CD(R)$ es una relación adecuada, extensional y preserva el orden. Además $CD(R)$ extiende debidamente a R.*

Demostración. **Observación.** Notemos que si (n, x, m) es código minimal de R entonces $P_3(n, x, m) \notin \mathrm{Fld}(R)$ ya que, por el hecho 4.6.27, $x \leq^\sharp P_3(n, x, m)$ y, por la definición de código de R, se cumple que $\sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\} <^\sharp x$.

Veamos que $\mathrm{CD}(R)$ extiende debidamente a R.

- Consideremos la fórmula $\phi(x) : x = x$ y la sucesión $f := \{(\bar{1}, \sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\})\}$. Por la proposición 4.6.22 se tiene que $\sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\} <^\sharp \sharp(f) <^\sharp \hat{R}$, luego podemos considerar como código de R la tupla $([\phi], \sharp(f), \bar{1})$. Notemos que $H_R([\phi], \sharp(f), \bar{1}) = R$. Si existiera $w \in \mathrm{Fld}(R)$ tal que $R = \{z : z \in_R w\}$, entonces $w \in_R w$ y, como R preserva el orden, se tendría que $w <^\sharp w$ lo cual es una contradicción. Luego, por la proposición 4.7.12, existe un código minimal de R (n', x', m') tal que $H_R([\phi], \sharp(f), \bar{1}) = H_R(n', x', m')$, entonces $P_3(n', x', m')$ pertenece a $\mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R)))$ y por la observación del principio no pertenece a $\mathrm{Fld}(R)$. Por tanto $\mathrm{Fld}(R) \subsetneq \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R)))$.

- Sean $u, v \in \mathrm{Fld}(R)$. Si $u \in_R v$ entonces por definición de $\mathrm{CD}(R)$ se tiene que $u \in_{\mathrm{CD}(R)} v$. Supongamos que $u \in_{\mathrm{CD}(R)} v$ pero $u \notin_R v$, por tanto, por definición de $\mathrm{CD}(R)$, existe una tupla (n, x, m) que es código minimal de R tal que $v = P_3(n, x, m)$, pero por la observación que hicimos concluiríamos que $v \notin \mathrm{Fld}(R)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $u \in_R v$ si y sólo si $u \in_{\mathrm{CD}(R)} v$.

- Sea $v \in \mathrm{Fld}(R)$. Si $u \in_{\mathrm{CD}(R)} v$ entonces, aplicando el mismo argumento del párrafo anterior, podemos concluir que $u \in_R v$ y así $u \in \mathrm{Fld}(R)$.

- Sea $v \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R)) \setminus \mathrm{Fld}(R)$. Por la observación del principio se tiene que $\sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\} <^\sharp v$, luego para todo $u \in \mathrm{Fld}(R)$ se cumple que $u <^\sharp v$.

Es sencillo concluir del hecho de que $\mathrm{CD}(R)$ extiende debidamente a R, que la relación $\mathrm{CD}(R)$ es una relación adecuada y preserva el orden. Falta ver que $\mathrm{CD}(R)$ es extensional.

Sean $u, v \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R))$ tal que para todo $z \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R))$ se cumple que $z \in_{\mathrm{CD}(R)} u$ si y sólo si $z \in_{\mathrm{CD}(R)} v$.

- Si $u, v \in \mathrm{Fld}(R)$ entonces como $\mathrm{CD}(R)$ extiende debidamente a R, y ésta relación es extensional se concluye que $u = v$.

- Si $u \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R)) \setminus \mathrm{Fld}(R)$ y $v \in \mathrm{Fld}(R)$, entonces existe una tupla (n, x, m) que es código minimal de R tal que $u = P_3(n, x, m)$, pero como $z \in_{\mathrm{CD}(R)} u$ si y sólo si $z \in_{\mathrm{CD}(R)} v$ y $\mathrm{CD}(R)$ extiende debidamente a R, se concluiría que $H_R(n, x, m) = \{y : y \in_R v\}$, lo que contradice la definición de código minimal. Lo mismo pasa si $v \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R)) \setminus \mathrm{Fld}(R)$ y $u \in \mathrm{Fld}(R)$.

- Si $u, v \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R)) \setminus \mathrm{Fld}(R)$ entonces por la unicidad de código minimal se concluye que $u = v$.

□

Ahora podemos presentar de una mejor manera cómo son los conjuntos definibles según R.

Proposición 4.7.18. *Sea $R \in Y_2^\star$ una relación adecuada. Entonces todo conjunto definible en $(Fld(R), R)$ es de la forma $\{x : x \in_{CD(R)} y\}$ donde $y \in$ Fld(CD(R)).*

Demostración. Sea A un conjunto definible de $(\mathrm{Fld}(R), R)$, luego existe (n, x, m) código de R tal que $A = H_R(n, x, m)$. Si existe $w \in \mathrm{Fld}(R)$ tal que $A = \{z : z \in_R w\}$, entonces como $\mathrm{CD}(R)$ extiende debidamente a R, tenemos que $w \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R))$ y $A = \{z : z \in_{\mathrm{CD}(R)} w\}$. Si para todo $w \in \mathrm{Fld}(R)$ se cumple que $A \neq \{z : z \in_R w\}$, entonces por la proposición 4.7.12 existe un código minimal (n', x', m') de R tal que $H_R(n, x, m) = H_R(n', x', m')$. Denominemos como $v := P_3(n', x', m')$, luego $v \in \mathrm{Fld}(\mathrm{CD}(R))$. Notemos que $v \notin R$ ya que, por el hecho 4.6.27, $x' <^\sharp P_3(n', x', m') = v$, y en la definición de código de R nosotros exigimos que $\sup\{y : y \in \mathrm{Fld}(R)\} <^\sharp x'$, por lo tanto, por la definición de $\mathrm{CD}(R)$, se cumple que $A = \{z : z \in_{\mathrm{CD}(R)} v\}$.

□

Construcción del modelo. Ahora vamos a construir el universo. Empezamos con la relación R_0 cuyo campo es $\{0, \bar{1}\}$ y consta de

$$0 \in_{R_0} \bar{1}$$

Lo que vamos hacer, es clausurar la relación R_0 bajo la operación “CD”, lo cual equivale a cerrar bajo conjuntos definibles. Esto es parecido cuando se construye el universo L de Gödel, el problema que tenemos es que para clausurar tenemos que hacer inducción interna, y acá los objetos con lo que tratamos son elementos de Y_2 y no de C, sin embargo, tenemos un truco para poder codificar esos elementos y poder hacer inducción dentro de C. Básicamente vamos agregar una nueva coordenada la cual nos va a guiar en la inducción como lo muestra el teorema 4.7.20.

Definición 4.7.19. Sea T una relación $(k+1)$-aria. Para $\alpha \in C$, denotamos como T_α al conjunto $\{(y_1, ..., y_k) : (\alpha, y_1, ..., y_k) \in T\}$. Notemos que si $T \in Y_{k+1}^\star$ entonces $T_\alpha \in Y_k^\star$.

Teorema 4.7.20. *Sea $\alpha <^\sharp t - 6$. Existe una única relación $T^\alpha \in Y_3^\star$ tal que*

1. *$T_0^\alpha = R_0$*
2. *Para todo $\beta <^\sharp \alpha$, se tiene que $T_{\beta+}^\alpha = CD(T_\beta^\alpha)$*
3. *Para todos los puntos límites $\beta \leq^\sharp \alpha$ se tiene que $T_\beta^\alpha = \bigcup_{\gamma <^\sharp \beta} T_\gamma^\alpha$*
4. *Para todo $\beta \leq^\sharp \alpha$, T_β^α es una relación adecuada*
5. *Para todo $\beta >^\sharp \alpha$ se tiene que $T_\beta^\alpha = \emptyset$*

Demostración. Vamos a hacer la demostración por inducción. Consideremos la fórmula

$$\Phi(B_1^3, \alpha) : B_1^3 \text{ cumple las condiciones } (1) - (5)$$

Vamos a ver que para todo $\alpha \leq^\sharp t-6$ satisface $\exists B_1^3 \Phi(B_1^3, \alpha)$. Antes notemos que, como todas las definiciones usadas se pueden escribir en $\mathcal{L}^2$-fórmulas, Φ es una $\mathcal{L}^2$-fórmula por lo tanto le podemos aplicar inducción.

La demostración es parecida a algunas que ya hemos hecho; primero vamos a ver la unicidad y después la existencia, sin embargo para demostrar la unicidad también vamos a usar un argumento inductivo a la fórmula

$$\Psi(x) : (\forall B_1^3, B_2^3)((\Phi(B_1^3, x) \wedge \Phi(B_2^3, x)) \to B_1^3 = B_2^3)$$

Veamos que para todo $\alpha \leq^\sharp t-6$ se cumple que $\Psi(\alpha)$

Caso base. Si $\alpha = 0$, la condición (1) y (5) obliga a que $T^0 = \{(0, 0, \bar{1}\}$.

Caso sucesor. Supongamos que $\alpha = u^+$ y se cumple $\Psi(u)$. Dado $T \in Y_3^\star$ tal que $M^\star$ satisface $\Phi(T, \alpha)$ podemos considerar la relación $\bar{T} := \{(a, b, c) \in T : a <^\sharp \alpha\}$ y es sencillo verificar que $M^\star$ satisface $\Phi(\bar{T}, u)$, además notemos que $T = (\{\alpha\} \times T_\alpha) \cup \bar{T}$.

Supongamos que existen T, T' tales que $M^\star$ satisface $\Phi(T, \alpha)$ y $\Phi(T', \alpha)$, entonces, por el párrafo anterior y por hipótesis de inducción se concluye que $\bar{T} = \bar{T}'$, luego, como $T_u = \bar{T}_u$ y $\bar{T}'_u = T'_u$, se tiene que $T_u = T'_u$ y así mismo $\mathrm{CD}(T_u) = \mathrm{CD}(T'_u)$. Por la segunda condición del enunciado del teorema, se cumple que $T_{u^+} = \mathrm{CD}(T_u)$ y $T'_{u^+} = \mathrm{CD}(T'_u)$, entonces $T_{u^+} = T'_{u^+}$, por tanto, como $T = (\{\alpha\} \times T_\alpha) \cup \bar{T}$, se concluye que $T = T'$.

Caso límite. Supongamos que α es un punto limite y para todo $\beta <^\sharp \alpha$ se cumple $\Psi(\beta)$. Dado $T \in Y_3^\star$ tal que $M^\star$ vale $\Phi(T, \alpha)$, entonces para todo $\beta <^\sharp \alpha$ podemos considerar las siguientes relaciones $T^\beta = \{(a, b, c) \in T : a \leq^\sharp \beta\}$ y es sencillo verificar que $M^\star$ satisface $\Phi(T^\beta, \beta)$, además notemos que $T = (\{\alpha\} \times T_\alpha) \cup \bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} T^\beta$.

Supongamos que existen T, T' tales que $M^\star$ satisface $\Phi(T, \alpha)$ y $\Phi(T', \alpha)$, entonces por el párrafo anterior y por hipótesis de inducción se concluye que $T^\beta = T'^\beta$ para todo $\beta <^\sharp \alpha$. Notemos que $T_\beta^\beta = T_\beta$ para todo $\beta <^\sharp \alpha$, luego, como $T_\alpha = \bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} T_\beta$ por la tercera condición del enunciado del teorema, se tiene que $T_\alpha = T'_\alpha$. Como $T = (\{\alpha\} \times T_\alpha) \cup \bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} T^\beta$, por los argumentos anteriores se concluye que $T = T'$.

Ya tenemos la unicidad. Veamos que para todo $\alpha \leq^\sharp t-6$ se cumple que $\exists B_1^3 \Phi(B_1^3, \alpha)$

Caso base. Si $\alpha = 0$ definimos como T^0 a la relación que satisface que $(a, b, c) \in T$ si y sólo si $a = b = 0$ y $c = \bar{1}$

Caso Sucesor. Supongamos que $\alpha = u^+$ y $M^\star$ satisface $\exists B_1^3 \Phi(B_1^3, u)$. Sea $T^u \in Y_3^\star$ tal que $M^\star$ satisface $\Phi(T^u, u)$. Sea T^α la relación que satisface que $(a, b, c) \in T^\alpha$ si y sólo si, $(a, b, c) \in T^u$ ó, $a = u^+$ y $b \in_{\mathrm{CD}(T_u^u)} c$. Como $T^u \in Y_3^\star$ entonces $T_u^u \in Y_2^\star$ y por tanto la relación $\mathrm{CD}(T_u^u)$ pertenece a $Y_2^\star$, luego se concluye que $T^\alpha \in Y_3^\star$. Es sencillo verificar que $M^\star$ satisface $\Phi(T^\alpha, \alpha)$.

Caso límite. Supongamos que α es punto límite y para todo $\beta <^\sharp \alpha$ se cumple que $M^\star$ satisface $\exists B_1^3 \Phi(B_1^3, \beta)$. Sea T' la unión de las relaciones ya encontradas por la hipótesis de inducción. Formalmente $(a, b, c) \in T'$ si y sólo si

$$a <^\sharp \alpha \wedge (\exists B_1^3)(\Phi(B_1^3, a) \wedge B_1^3(a, b, c))$$

Por la unicidad está bien definido T' y por separación de segundo orden se tiene que $T' \in Y_3$. Por otro lado, definimos una función $f(\beta) = \gamma$ de la siguiente manera.

$$(\exists B_1^3)(\Phi(B_1^3, \beta) \wedge \gamma \text{ es el mínimo que cumple que } (\forall x, y, z)(B_1^3(x, y, z) \rightarrow x, y, z <^\sharp \gamma))$$

Por hipótesis de inducción, para todo $\beta <^\sharp \alpha$ se tiene que el campo de T^β es acotado, por lo tanto la función f existe, luego por la proposición 4.6.12, se tiene que el campo de T' es acotado concluyendo que $T' \in Y_3^\star$. Ahora nos falta incluir el punto α, para esto definimos la relación T^α que satisface que $(a, b, c) \in T$ si y sólo si, $(a, b, c) \in T'$, ó, $a = \alpha$ y existe $a' <^\sharp \alpha$ tal que $(a', b, c) \in T'$. Como $T' \in Y_3^\star$ entonces $T^\alpha \in Y_3^\star$ y es sencillo comprobar que $M^\star$ satisface $\Phi(T^\alpha, \alpha)$.

□

Definición 4.7.21. Sea $\alpha <^\sharp t - 6$. Denotamos como $\in_\alpha$ a la relación T_α^α, donde T^α es la relación ternaria dada por el teorema 4.7.20. Como $T^\alpha \in Y_3^\star$ entonces $\in_\alpha \in Y_2^\star$.

Definición 4.7.22. Sea $\alpha <^\sharp t - 6$. Denotamos como $L[\alpha]$ al campo de la relación $\in_\alpha$. Notemos que $L[\alpha] \in Y_1^\star$

Definición 4.7.23. Definimos como $L[\infty] := \bigcup_{\alpha <^\sharp t-6} L[\alpha]$ y como $\in_\infty := \bigcup_{\alpha <^\sharp t-6} \in_\alpha$.

La demostración del teorema 4.7.20 nos proporciona $\mathcal{L}^2$-fórmulas que no tienen parámetros de segundo orden y tienen parámetros de primer orden menores que 1, que definen $L[\infty]$ y $\in_\infty$. Por separación de segundo orden podemos concluir que $L[\infty] \in Y_1$ y $\in_\infty \in Y_2$. Por construcción así está constituido $L[\infty]$.

Hecho 4.7.24. Se cumplen las siguientes propiedades

- $\in_0 = R_0$.
- $\in_{\alpha^+} = \mathrm{CD}(\epsilon_\alpha)$.

- Si α es punto límite $\in_\alpha = \bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} \in_\alpha$.

Además así se comporta la relación $\in_\infty$.

Proposición 4.7.25.
- *Para todo $\beta <^\sharp \alpha$, se tiene que $\in_\alpha$ extiende debidamente a $\in_\beta$*
- *Cada $\in_\alpha$ es adecuada, extensional y preserva el orden.*

Demostración. La prueba se hace por inducción.

Caso base. Si $\alpha = 0$ entonces $\in_0 = R_0$ que claramente es adecuada, extensional y preserva el orden.

Caso sucesor. Supongamos que $\alpha = u^+$ y la relación $\in_u$ es adecuada, extensional, preserva el orden. Dado que $\in_{u^+} = \mathrm{CD}(\epsilon_u)$ y por el lema 4.7.17, se tiene que la relación $\in_\alpha$ es adecuada, extensional, preserva el orden y extiende debidamente a $\in_u$.

Caso límite. Supongamos que α es punto límite y para todo $\beta <^\sharp \alpha$ las relaciones $\in_\beta$ cumplen las afirmaciones hechas. Dado que $\in_\alpha = \bigcup_{\beta <^\sharp \alpha} \in_\alpha$, gracias a la hipótesis de inducción y el hecho 4.7.16, se tiene que $\in_\alpha$ es adecuada, extensional, preserva el orden y extiende debidamente a $\in_\beta$ para todo $\beta <^\sharp \alpha$.

□

Ahora veamos que $(L[\infty], \in_\infty) \models \mathrm{ZFC}$.

Definición 4.7.26. Sea $x \in L[\infty]$. Denotamos como $\mathrm{lrk}(x)$ al menor α tal que $x \in L[\alpha + 1]$.

Es sencillo verificar lo siguiente

Hecho 4.7.27. Si $x \in_\infty y$ entonces $\mathrm{lrk}(x) <^\sharp \mathrm{lrk}(y)$.

Recordemos que ϕ es una Δ_0-fórmula si todos sus cuantificadores son acotados. El siguiente hecho es una versión de la absoluticidad de las Δ_0-fórmulas al trabajar con L, y su demostración, igual que en el caso de L, se hace por inducción sobre las Δ_0-fórmulas.

Hecho 4.7.28. Sea $\phi(x_1, ..., x_m)$ una $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmula de tipo Δ_0. Sean $a_1, ..., a_m \in L[z]$. Entonces

$$(L[\infty], \in_\infty) \models \phi(a_1, ..., a_m) \text{ si y sólo si } (L[z], \in_z) \models \phi(a_1, ..., a_m)$$

Dado que algunos axiomas de ZFC se puede traducir a Δ_0-fórmulas podemos obtener lo siguiente.

Lema 4.7.29. *Los axiomas de extensionalidad, de pares, de uniones valen en $(L[\infty], \in_\infty)$.*

Demostración. Sean $a, b \in L[\infty]$, por tanto existe $\alpha <^{\sharp} t-6$ tal que $a, b \in L[\alpha]$. Recodemos que $\in_\alpha$ es una relación extensional, por tanto, traduciendo esta propiedad a una Δ_0-fórmula se tiene que

$$(L[\alpha], \in_\alpha) \models (\neg \exists z \in a(z \notin b) \wedge \neg \exists z \in b(z \notin a)) \rightarrow a = b$$

Por el hecho 4.7.28 podemos subir la anterior fórmula a $L[\infty]$, así como a, b eran arbitrarios se tiene que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface extensionalidad.

Veamos que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface pares. Sean $a, b \in L[\infty]$, por tanto existe $\alpha <^{\sharp} t-6$ tal que $a, b \in L[\alpha]$. El conjunto $\{w | w = a \vee w = b\}$ es $\mathcal{L}(\epsilon)$-definible, por lo tanto, por la proposición 4.7.18, existe $z \in L[\alpha+1]$ tal que

$$(L[\alpha+1], \in_{\alpha+1}) \models \forall w \in z(z = a \vee z = b)$$

Como la anterior es una Δ_0-fórmula, por el hecho 4.7.28 se tiene que

$$(L[\infty], \in_\infty) \models \forall w \in z(z = a \vee z = b)$$

Como a, b eran arbitrarios se tiene que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface pares. Por un argumento similar se puede ver que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface uniones.

□

Lema 4.7.30. *El axioma de fundamentación vale en* $(L[\infty], \in_\infty)$

Demostración. Sea $a \in L[\infty]$, así existe $\alpha <^{\sharp} t-6$ tal que $a \in L[\alpha]$. Si $a = 0$ entonces como $\in_\infty$ es adecuada se tiene que ese es el conjunto vacío en $(L[\infty], \in_\infty)$. Si $a \neq 0$ entonces el conjunto $A = \{z : z \in_\alpha a\}$ es un conjunto no vacío y es $\mathcal{L}^2$-definible pues $\in_\alpha \in Y_2$, por tanto A tiene un elemento $<^{\sharp}$-mínimo w. Si existe z tal que $z \in_\alpha w$ y $z \in_\alpha a$, entonces como $\in_\alpha$ preserva el orden, se tendría que $z \in A$ y $z <^{\sharp} w$ contradiciendo que w es el elemento $<^{\sharp}$-mínimo de A. Así

$$(L[\alpha], \in_\alpha) \models (\exists w \in a)(\neg(\exists z \in a)(z \in w))$$

La anterior es una Δ_0-fórmula, luego por el hecho 4.7.28 se puede subir a $(L[\infty], \in_\infty)$. Como a era arbitrario entonces $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface fundamentación.

□

Lema 4.7.31. *El axioma del infinito vale en* $(L[\infty], \in_\infty)$.

Demostración. El axioma del infinito nos dice que existe z que satisface

$$\emptyset \in z \wedge (\forall y \in z)(y \cup \{y\} \in z)$$

Ya tiene sentido la notación dado que ya demostramos pares y uniones. El lugar de $\emptyset$ lo ocupa 0. Demostraremos que existe el conjunto de los número naturales en $(L[\infty], \in_\infty)$. Esto se va a hacer usando la definición: “conjunto transitivo y linealmente ordenado por $\in$” ya que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface fundamentación. Formalmente consideramos el siguiente conjunto

$$A := \{a \in L[\omega] : \forall x \in_\infty a \forall z \in_\infty x (z \in_\infty a) \wedge \forall x \in_\infty a \forall y \in_\infty a (x \in_\infty y \vee y \in_\infty x)\}$$

Como A es definible por una Δ_0-fórmula no hay ambigüedad si usamos $\in_\infty$ o $\in_\omega$, además, por la proposición 4.7.18 existe $N \in L[\omega+1]$ tal que $a \in_{\omega+1} N$ si y sólo si $a \in A$. Es claro que $0 \in_{\omega+1} N$. Si $a \in_{\omega+1} N$ entonces $a \in L[\omega]$, luego existe $n <^\sharp \omega$ tal que $a \in L[n]$. Como el conjunto $\{z \in L[n] : z = a \vee z \in_\infty a\}$ es $\mathcal{L}(\epsilon)$-definible por una Δ_0-fórmula, por la proposición 4.7.18 se tiene que $(a \cup \{a\})^{L[\infty]} \in L[n+1]$. Es sencillo verificar que $(a \cup \{a\})^{L[\infty]} \in A$, por tanto $(a \cup \{a\})^{L[\infty]} \in_{\omega+1} N$. Entonces

$$(L[\omega+1], \in_{\omega+1}) \models \emptyset \in N \wedge (\forall y \in N)(\exists w \in N)(\forall x \in w)(x = y \vee x \in y)$$

Lo anterior es el axioma del infinito expresado en una Δ_0-fórmula, luego, por el hecho 4.7.28, $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface el axioma del infinito.

□

El siguiente teorema es similar al teorema de reflexión que se presenta en teoría de conjuntos[1], e incluso su demostración es idéntica a éste, ya que todas las construcciones que se hacen allá se pueden hacer acá gracias a nuestra inducción interna. Por esta razón vamos a omitir su demostración.

Hecho 4.7.32 (Reflexión). Sean $\phi_1, ..., \phi_m$ $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmulas. Entonces para todo $\alpha < t - 6$ existe $\beta >^\sharp \alpha$ tal que para todo $i \in \{1, ..., m\}$

$$\forall x_1, ..., x_k \in L[\beta][(L[\beta], \in_\beta) \models \phi_i(x_1, ..., x_k) \text{ si y sólo si } (L[\infty], \in_\infty) \models \phi_i(x_1, ..., x_k)]$$

Observación. En la demostración clásica de teorema de reflexión hay que considerar el supremo del rango de una función de los ordinales a los ordinales, que en ese contexto existía gracias al axioma de reemplazo. Nosotros no tenemos de base ese axioma, sin embargo podemos usar la proposición 4.6.12 para acotar esas funciones.

Ahora vamos a demostrar que reemplazo y separación vale en $(L[\infty], \in_\infty)$.

Lema 4.7.33. *El axioma de reemplazo y separación vale en* $(L[\infty], \in_\infty)$.

Demostración. **Separación.** Sea $\phi(y, x, x_1, ..., x_m)$ una $\mathcal{L}(\epsilon)$ fórmula y $A, a_1, ..., a_m \in L[\infty]$. Así existe $\alpha <^\sharp t - 6$ tal que $A, a_1, ..., a_m \in L[\alpha]$. Por reflexión consideremos $\beta >^\sharp \alpha$ tal que

$$(L[\beta], \in_\beta) \models x \in A \wedge \phi(x, A, a, a_1, ..., a_m) \text{ si y sólo si } (L[\infty], \in_\infty) \models x \in A \wedge \phi(x, A, a_1, ..., a_m)$$

Por la proposición 4.7.18, existe $z \in L[\beta+1]$ tal que $x \in_{\beta+1} z$ si y sólo si $(L[\beta], \in_\beta) \models x \in A \wedge \phi(x, a, a_1, ..., a_m)$. Luego, como $x \in_{\beta+1} z$ si y sólo si $x \in_\infty z$, se tiene que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface separación.

[1] Ver [10] páginas 136-137

Reemplazo. Sea $\phi(y, x, x_1, ..., x_m)$ una $\mathcal{L}(\epsilon)$ fórmula y $A, a_1, ..., a_m \in L[\infty]$ tal que

$$(L[\infty], \in_\infty) \models \forall x \in A \exists! y \phi(x, y, A, a_1, ..., a_m)$$

Sea $\alpha <^\sharp t-6$ tal que $A, a_1, ..., a_m \in L[\alpha]$. Consideremos la función $f : L[\alpha]^{m+2} \to C$ tal que

$$f(x_1, ..., x_{m+2}) = \text{mín}\{\text{lrk}(y) : (L[\infty], \in_\infty) \models \phi(x_1, y, x_2, ..., x_{m+2})\}$$

Notemos que f es una función $\mathcal{L}^2$-definible por una fórmula que no tiene parámetros de segundo orden y con parámetros menores que 1 y constantes mayores o iguales a $t-6$ gracias a que, como hemos mencionado, $L[\infty]$ y $\in_\infty$ lo son. Por la proposición 4.6.12 existe $\beta <^\sharp t-6$ tal que acota el conjunto $B = \{f(x_1, ..., x_{m+2}) : x_1, ..., x_{m+2} <^\sharp \text{máx}\{A, a_1, .., a_m\}^+\}$. Veamos que $\{y : (L[\infty], \in_\infty) \models \exists x \in A \phi(x, y, A, a_1, ..., a_m)\} \subset L[\beta]$. Sea $y \in L[\infty]$ tal que existe $x \in_\infty A$ que cumpla $(L[\infty], \in_\infty) \models \phi(x, y, A, a_1, ..., a_m)$. Como $\in_\infty$ preserva el orden entonces $x <^\sharp A$, luego $\text{lrk}(y) \in B$ ya que $f(x, A, a_1, .., a_m) = \text{lrk}(y)$ por la unicidad de y. Luego como β acota a B se tiene que $\text{lrk}(y) <^\sharp \beta$ y por tanto $y \in L[\beta]$.

Dado que $L[\beta]$ es un conjunto definible en $L[\beta]$, por la proposición 4.7.18 existe $w \in L[\beta+1]$ tal que $x \in_\infty w$ si y sólo si $x \in L[\beta]$, luego podemos aplicar separación a w para obtener un elemento $\gamma \in L[\infty]$ tal que $y \in_\infty \gamma$ si y sólo si $(L[\infty], \in_\infty) \models \exists x \in A \phi(x, y, A, a_1, ..., a_m)$.

□

La demostración de que $(L[\infty], \in_\infty)$ satisface el axioma de partes es distinta a la demostración en el caso de L, ya que en ese contexto tienen el axioma de reemplazo como base. Nosotros tenemos otras herramientas: vamos a buscar una cota usando indiscernibilidad para sabe hasta qué nivel se encuentran los subconjuntos de un elemento dado.

Definición 4.7.34. Sean $a, \alpha \in L[\infty]$. Decimos que $a \subset^\star \alpha$ si para todo $z \in_\infty a$ entonces $z \in L[\alpha]$.

Por inducción transfinita se puede verificar lo siguiente.

Hecho 4.7.35. Sea $\alpha <^\sharp t-6$. Entonces $L[\infty] \cap [0, \alpha) \subset L[\alpha]$

Proposición 4.7.36. *Sea $i \in \mathbb{Z}^+$ tal que $i <^\sharp t-6$ se tiene que $L[i] \subset [0, i+1)$*

Demostración. Dado que $L[i] \in Y_1^\star$, entonces es acotado, por tanto existe $z <^\sharp t-6$ tal que para todo $x \in L[i]$ se cumple que $x <^\sharp z$, por indiscernibilidad, existe $z <^\sharp i+1$ tal que para todo $x \in L[i]$ se tiene que $x <^\sharp z$.

□

Proposición 4.7.37. *Sea $x \in L[\infty]$. Si $x \subset^\star t-8$ entonces $x <^\sharp t-7$*

Demostración. Razonemos por contradicción. Sea x el $<^\sharp$-mínimo que satisface

$$t-7 \leq^\sharp x <^\sharp t-6 \text{ y } x \subset^\star t-8$$

Por indiscernibilidad, consideremos como w el $<^\sharp$-mínimo que satisface

$$t-8 \leq^\sharp w <^\sharp t-7 \text{ y } w \subset^\star t-9$$

Y así mismo consideremos como z el $<^\sharp$-mínimo que satisface

$$t-7 \leq^\sharp z <^\sharp t-6 \text{ y } z \subset^\star t-9$$

Sea $a \in_\infty z$. Como $z \subset^\star t-9$, entonces $a \in L[t-9]$, luego, por la proposición 4.7.36, $a <^\sharp t-8$. Además, traduciendo la definición de z en una fórmula se cumple que

$$M^\star \models (\exists b <^\sharp t-6)(\forall y <^\sharp t-6)(a \in_\infty b \wedge (y \subset^\star t-9 \wedge t-7 \leq^\sharp y) \to b \leq^\sharp y)$$

Por lo tanto, como $a <^\sharp t-8$, por indiscernibilidad lo anterior es equivalente

$$M^\star \models (\exists b <^\sharp t-7)(\forall y <^\sharp t-7)(a \in_\infty b \wedge (y \subset^\star t-9 \wedge t-8 \leq^\sharp y) \to b \leq^\sharp y)$$

Que es la definición de w. Lo anterior significa que $a \in_\infty z$ si y sólo si $a \in_\infty w$, luego, por extensionalidad, se tiene que $z = w$, lo que es una contradicción dado que $w <^\sharp z$.

□

Lema 4.7.38. *El axioma de partes vale en* $(L[\infty], \in_\infty)$

Demostración. Razonemos por contradicción. Si se cumple que

$$M^\star \models (\exists a <^\sharp t-6)(\neg(\exists y <^\sharp t-6)(\forall x <^\sharp t-6)(x \subset^{L[\infty]} a \to x \in_\infty y))$$

Por indiscernibilidad se tiene que

$$M^\star \models (\exists a <^\sharp t-8)(\neg(\exists y <^\sharp t-8)(\forall x <^\sharp t-8)(x \subset^{L[t-8]} a \to x \in_{t-8} y))$$

Sea $\alpha <^\sharp t-8$ tal que.

$$M^\star \models \neg(\exists y <^\sharp t-8)(\forall x <^\sharp t-8)(x \subset^{L[t-8]} \alpha \to x \in_{t-8} y)$$

Nuevamente por indiscernibilidad

$$M^\star \models \neg(\exists y <^\sharp t-6)(\forall x <^\sharp t-6)(x \subset^{L[\infty]} \alpha \to x \in_\infty y)$$

Por otro lado, consideremos $b \subset^{L[\infty]} \alpha$. Se cumple que para todo $z \in_\infty b$ se tiene que $z \in_\infty \alpha$, y como $\in_\infty$ preserva el orden, $z <^\sharp t-8$, luego, por el hecho 4.7.35, $z \in L[t-8]$, por lo tanto $b \subset^\star t-8$. Por la proposición 4.7.37, $b <^\sharp t-7$, luego por el hecho 4.7.35 se tiene que $b \in L[t-7]$. El argumento anterior implica que para todo $b \subset^{L[\infty]} \alpha$ se cumple que $b \in L[t-7]$. Dado que, por la proposición 4.7.18, existe $w \in L[(t-7)^+]$ tal que $z \in_\infty w$ si y sólo si $z \in L[t-7]$, se concluye que si $b \subset^{L[\infty]} \alpha$ entonces $b \in_\infty w$. La existencia de w contradice lo que habíamos supuesto, luego el axioma de partes vale en $(L[\infty], \in_\infty)$.

□

Teorema 4.7.39. *Existe un modelo M contable de ZFC + V=L con constantes $c_1, ..., c_{t-7}$ tal que satisface*

- $c_1 < ... < c_{t-7}$ *son ordinales*
- *Sea $r \in \mathbb{Z}^+$ y $\phi(x_1, ..., x_{2r})$ una $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmula. Sean $0 < i_1, .., i_r, j_1, ..., j_r \leq t-7$ enteros donde $(i_1, ..., i_r)$ es orden equivalente a $(j_1, ..., j_r)$ y $\text{mín}\{i_1, ..., i_r\} = \text{mín}\{j_1, ..., j_r\}$. Sean $p_1, ..., p_r \in M$ tales que $p_1, ..., p_r <^\sharp \text{mín}\{i_1, ..., i_r\}$. Entonces*

$$M \models \phi(c_{i_1}, ..., c_{i_r}, p_1, ..., p_r) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, ..., c_{j_r}, p_1, ..., p_r)$$

- *El ordinal c_{t-7} es puramente $(t-9)$-sutil.*
- *Existe un ordinal con la $(t-10)$-propiedad de Ramsey estacionaria.*

Demostración.

- Empezamos con nuestro modelo $(L[\infty], \in_\infty)$. Consideramos como c_i el menor ordinal tal que $c_i \notin L[i]$. Ahora consideramos el universo constructible de $L[\infty]$ y lo denominamos M. Recordemos que M conserva los ordinales y la relación de pertenencia es la misma.
- Sea ϕ una $\mathcal{L}(\epsilon)$-fórmula. Si

$$M \models \phi(c_{i_1}, ..., c_{i_r}, p_1, ..., p_r)$$

Gracias a nuestro teorema de la definibilidad lo anterior es equivalente a

$$M^\star \models \text{“}(M, \in_\infty) \models \phi(x_{i_1}, ..., x_{i_r}, p_1, ..., p_r)\text{”} \wedge \bigwedge_{k=1}^{k=r} x_{i_k} \text{ es el menor ordinal tal que } x_{i_k} \notin L[i_k]$$

Donde “$(M, \in_\infty) \models \phi(x_{i_1}, ..., x_{i_r}, p_1, ..., p_r)$” es la fórmula que nos proporciona nuestro teorema de la definibilidad. Además recordemos que $L[i]$ también se puede expresar en una $\mathcal{L}^2$-fórmula. Como $p_1, ..., p_r <^\sharp \text{mín}\{i_1, ..., i_r\}$, aplicamos indiscernibilidad y obtenemos

$$M^\star \models \text{“}(M, \in_\infty) \models \phi(x_{i_1}, ..., x_{i_r}, p_1, ..., p_r)\text{”} \wedge \bigwedge_{k=1}^{k=r} x_{i_k} \text{ es el menor ordinal tal que } x_{i_k} \notin L[j_k]$$

Que es equivalente a

$$M \models \phi(c_{j_1}, ..., c_{j_r}, p_1, ..., p_r)$$

- Sea $f : [c_{t-7}]^{t-9} \to c_{t-7}$ una función $(t-9)$-regresiva, es decir que para todo $A \in [c_{t-7}]^{t-9}$ se tiene que $f(A) < \text{mín}\, A$. Como M satisface $V = L$, la función f es definible por una fórmula cuyo parámetros son c_{t-7} y $t-9$, donde $t-9 < \omega < c_1$. Consideremos el conjunto $C = \{c_1, ..., c_{t-8}\}$. Veamos que f es constante en $[C]^{t-9}$. Sean $A = \{c_{i_1}, ..., c_{i_{t-9}}\}$ y $B = \{c_{j_1}, ..., c_{i_{t-9}}\}$ elementos de $[C]^{t-9}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que mín $A \leq$ mín B. Sea $\alpha = f(A)$, luego, como f es regresiva, se cumple que $\alpha <$ mín $A \leq$ mín B. Por indiscernibilidad se cumple que

$$M \models f(c_{i_1}, ..., c_{i_{t-9}}) = \alpha \leftrightarrow f(c_{j_1}, ..., c_{i_{t-9}}) = \alpha$$

Por lo tanto f es constante en $[C]^{t-9}$. Luego, se cumple que el ordinal c_{t-7} es puramente $(t-9)$-sutil.

- Como existe un ordinal puramente $(t-9)$-sutil, por el hecho 4.1.11, existe un ordinal con la $(t-10)$-propiedad de Ramsey estacionaria.

□

Lista de Figuras

Bibliografía

[1] A. Yedidia, S. Aaronson, *A Relatively Small Turing Machine Whose Behavior Is Independent of Set Theory.*, Complex Systems, 2016.

[2] G. Chaitin, *The limits of Mathematics.*, Springer, 1998.

[3] H. Friedman, *Boolean Relation Theory and Incompleteness.*, 2011.

[4] H. Friedman, *Order Invariant Graphs and Finite Incompleteness.*, 2014.

[5] M. Davis, *The Incompleteness Theorem.*, American Mathematical Society, Vol. 53, Number 4, pp 414-418, 2006.

[6] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic.*, Oxford Logic Guides.

[7] A. Bovykin, *Brief introduction to unprovability*

[8] H. Friedman, *Invariant Maximal Cliques and Incompleteness*, 2011.

[9] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer, 1994.

[10] K. Kunen, *Set theory: An introduction to Independece Proofs* , North-Holland, 1980.

[11] A. Enayat, *Variations on a theme by Friedman* , 2013.

[12] H. Friedman, *Subtle cardinals and linear orderings*, 2001.