ALGUNAS CONEXIONES ENTRE ESTABILIDAD EN CLASES NO ELEMENTALES Y ESTUDIO DE ESTRUCTURAS ANALITICAS

HERMES JACKSON MARTINEZ NAVAS

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director
ANDRES VILLAVECES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2003

Índice General

Introducción

En este trabajo pretendo llevar a cabo un estudio de categoricidad en un contexto más amplio que primer orden, llamado clases excelentes, y estudiar una demostración de un teorema al estilo de Morley en este contexto. Para ello se introduce una noción de modelo pleno que juega el papel de modelo saturado en primer orden. Una clase excelente consiste de los modelos atómicos de una teoría de primer orden que satisface las propiedades de $(\aleph_0, n)$-bondad, $(\aleph_0, n)$-existencia y $(\aleph_0, n)$-unicidad para cada $n < \omega$. Shelah introdujo esta noción en sus artículos [13] con el fin de analizar $Mod(\psi)$, $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$. El siguiente ejemplo dado por Zilber, nos muestra una interacción entre la noción de excelencia y teoría de números. Sea,

$$\mathcal{K}_{pexp} = \{\langle F, +, ., exp\rangle : \text{F es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero,} \\ \forall x \forall y[exp(x+y) = exp(x).exp(y)], ker(exp) = \pi\mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{K}_{exp} = \{\langle F, +, ., exp\rangle : \langle F, +, ., exp\rangle \text{ satisface EC, CC y SCH }\},$$

donde EC quiere decir que el modelo es existencialmente cerrado,
CC denota propiedad de clausura contable y
SCH denota la conjetura de Schanuel.
Zilber demostró por el método de construcción de Fraïssé, el siguiente resultado

Teorema 0.1. *$\mathcal{K}_{exp}$ es categórica en $\aleph_1$.*

Además, Zilber probó el siguiente teorema usando teoría de ideales fraccionales, divisores de Weil y el teorema de normalización, y notó que el contenido de teoría de modelos del resultado es que $\mathcal{K}_{exp}$ es una clase excelente.

Teorema 0.2. *Si $L_1, ..., L_n \subseteq \mathbb{C}$ son cuerpos algebraicamente cerrados y $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}^{\times}$. Entonces el grupo multiplicativo del cuerpo,*

$$\mathbb{Q}(L_1, ..., L_n, a_1, ..., a_n)$$

es de la forma,

$$A.T.L_1^{\times}...L_n^{\times},$$

donde A es un grupo abeliano libre y T es un grupo de Torsión(cuando n=0).

Además, usando el hecho que cada clase excelente tiene modelos arbitrariamente grandes y el teorema 3.30, Zilber concluyó lo siguiente,

Teorema 0.3. *$\mathcal{K}_{exp}$ tiene un único elemento de cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Así para probar la conjetura de Schanuel se sugiere demostrar que la función $exp(x)$ definida sobre $\mathbb{C}$ es la función exponencial e^x.*

Un bosquejo de los hechos necesarios para la prueba del teorema de categoricidad en clases excelentes es el siguiente,

(1) Definir una buena noción de independencia que llamaremos *amalgamación estable*,

(2) Estudiar algunos teoremas de transferencia de las propiedades de *bondad, existencia y unicidad*. Esto permite demostrar que es suficiente tener un conocimiento de estas propiedades sobre sistemas cuyos modelos son contables,

(3) Mostrar que en cada clase excelente existe un modelo pleno de cardinalidad λ, para cada cardinal λ, y dicho modelo es único,

(4) Mostrar que para cada clase excelente, y cada $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema S,
$\mathcal{S} = \{M_s : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$, existe un modelo primario sobre el conjunto $\bigcup_{s\in\mathcal{P}^-(n)} M_s$.

La idea de la demostración es un argumento por contradicción, es decir, suponemos que la clase excelente $\mathcal{K}$ es categórica en un cardinal no contable μ y no es categórica en un cardinal $\lambda > \aleph_0$. Por lo tanto, por (3), existe un modelo que no es pleno de cardinal λ y un tipo p que lo atestigua, es decir, existe un tipo estacionario $p \in S(B)$, B un subconjunto finito de M, y un conjunto A, $B \subseteq A \subseteq M$, $|A| < \|M\|$, tal que la estacionarización q de p sobre A no es realizada en M. Luego se construye un modelo N de cardinalidad μ, como una unión de modelos primarios que omite un tipo $q^* \subseteq q$, donde $dom(q^*)$ es contable. Así N no es pleno, y contradice la hipótesis que $\mathcal{K}$ es categórica en μ.

En el capítulo 3, se introduce la definición de conjunto bueno, y se muestran algunos resultados concernientes a estos, tales como la existencia de modelos primarios sobre conjuntos contables buenos. Además mostramos que en la clase de modelos atómicos $\mathcal{K}$ existe un modelo de cardinalidad $\aleph_2$. La estrategia de la prueba radica en la posibilidad de poder extender elementalmente un modelo dado de cardinalidad $\aleph_1$(al menos uno existe) a otro de la misma cardinalidad en la clase $\mathcal{K}$. Esto es suficiente, pues como $\mathcal{K}$ es una clase elemental abstracta podemos repetir este procedimiento y construir una cadena elemental creciente, $(M_i^*)_i$, de longitud ω_2 de modelos de cardinalidad $\aleph_1$. Así $M^* = \bigcup_{i<\omega_2} M_i^*$ está en $\mathcal{K}$ y es de cardinalidad $\aleph_2$. La idea de la demostración de esta última parte es tomar una resolución M_i, $i < \omega_1$, de modelos contables para un modelo M de cardinalidad $\aleph_1$ y mostrar que existe una extensión elemental propia N de M, donde N es la unión de una cadena elemental de modelos N_i en $\mathcal{K}$, tal que $M_i \precneqq N_i$ y $N_0 \nsubseteq M$. Esto es posible usando amalgamación estable. Así en este capítulo desarrollamos lo enunciado en el inciso (1), y avanzamos un poco sobre el inciso (4), pues obtenemos existencia de modelos primarios aunque solamente sobre conjuntos contables buenos.

En el capítulo 4, se introduce la noción de $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas, la cual está atada a las nociones de amalgamación estable, bondad y plenitud. En este capítulo discutiremos las nociones de bondad, existencia, unicidad y se prueban los teoremas 4.14 y 4.15, que son teoremas de transferencia para estas propiedades. De esto obtenemos, que si deseamos conocer las propiedades acerca de $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas es suficiente conocer las propiedades acerca de $(\aleph_0, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas, para cada $n < \omega$. Esto conduce al teorema 4.18, que dice que cada clase excelente $\mathcal{K}$ tiene las propiedades de (λ, n)-existencia, (λ, n)-bondad y (λ, n)-unicidad, para cada λ y cada $n < \omega$. Además, veremos que en clases excelentes, podemos garantizar la existencia de modelos primarios sobre $\bigcup_{s\in\mathcal{P}^-(n)} M_s$, donde $\mathcal{S} = \{M_s : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ es un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema, y la unicidad de modelos plenos de la misma cardinalidad λ, para cada λ. Así, en este capítulo se desarrolla los incisos (2), (3) y (4) y concluímos con la demostración del teorema de categoricidad para clases excelentes mencionado en el inicio de la introducción.

En el capítulo 5, estudiaremos la noción de clases cuasiminimales excelentes. Mostraremos que si K es cuasiminimal excelente y contiene un conjunto infinito $cl-$independiente, entonces la clase de K-estructuras que satisfacen la condición de clausura contable es categórica en cada cardinal no contable. La presentación del contenido de este capítulo está basado en unas lecturas de Baldwin, cuya presentación es ligeramente diferente a la dada originalmente por Zilber. Su diferencia radica en que Baldwin usó el principio de intercambio para demostrar el teorema de categoricidad para clases cuasiminimales excelentes, 5.10, que no fue usado en la descripión dada por Zilber.

Este trabajo es un estudio principalmente de los artículos [1], [13], en el que apareció por primera vez la noción de excelencia dada por Shelah. Igualmente el libro [10] fue vital en el desarrollo del capítulo 2. Además los artículos [7] y [11] fueron un gran complemento para el capítulo 3 y 4, pues en ellos se dan dos versiones distintas para la noción de excelencia. El primero se desarrolla en el contexto de clases elementales abstractas y el segundo en teoría de modelos homogéneos. Además, algunas pruebas se explicarón más detalladamente, completando algunas de ellas, pues la forma como fueron expuestas originalmente son algunas veces poco claras o no aparecen demostradas, tales como los lemas 3.22, 3.24, 4.3, 4.6, 4.8, 4.19, el corolario 4.10 y el teorema 3.30

Capítulo 1

Preliminares

A continuación, veremos algunos resultados obtenidos por Shelah en [15] para la lógica $L_{\omega_1,\omega}(Q)$, en el que trata los conceptos de estabilidad, simetría, propiedad del orden y algunas relaciones entre estas bajo ciertas suposiciones de teoría de conjuntos.

Lema 1.1. *Sea $L \subseteq L^{'}$, $\psi \in L_{\omega_1,\omega}(Q)$, y L^* un fragmento de $L_{\omega_1,\omega}(Q)$. Entonces,*

1) *Si en algún modelo M de ψ, $\|M\| \geq \aleph_1$, no contable L^*-tipos son realizados, entonces $I(\aleph_1, \psi, L) = 2^{\aleph_1}$,*

2) *Si $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ y para algún modelo M de ψ, $\|M\| \geq \aleph_1$, existe un conjunto contable $A \subseteq |M|$, tal que en M, no contables tipos son realizados sobre A, entonces $I(\aleph_1, \psi, L) = 2^{\aleph_1}$*

Demostración. Ver [15]. □

Lema 1.2. *Sea $L \subseteq L^{'}, \psi \in L^{'}_{\omega_1,\omega}(Q)$, L^* un fragmento de $L_{\omega_1,\omega}(Q)$. Supongamos $\{p : p$ es un L^*-tipo y existe un modelo no contable de ψ que realiza $p\}$ es no contable. Entonces $I(\aleph_1, \psi, L) \geq 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Ver [15] □

Teorema 1.3. *Sea $L \subseteq L^{'}$, $\psi \in L^{'}_{\omega_1,\omega}(Q)$, $M \models \psi$, $\|M\| = \aleph_1$.*

1) *Si para cada fragmento L^*, en M solamente contable L^*-tipos son realizados, entonces ψ tiene un modelo N, $\|N\| = \aleph_1$, en el que solamente contable $L_{\omega_1,\omega}(Q)$-tipos son realizados*

2) *Si para cada fragmento L^*, y conjunto contable $A \subseteq |M|$, solamente contable L^*-tipos son realizados en M, entonces ψ tiene un modelo N, $\|N\| = \aleph_1$, en el que solamente contable $L_{\omega_1,\omega}$-tipos son realizados sobre cada $A \subseteq |N|$.*

Demostración. Ver [15] ☐

Lema 1.4. *Si $I(\aleph_1, \psi, L) \leq \aleph_0$, $M \models \psi$, entonces en M solamente contable $L_{\omega_1,\omega}(Q)$-tipos son realizados.*

Demostración. Ver [15] ☐

Definición 1.5. Decimos que $\psi \in L_{\omega_1,\omega}(Q)$ es ***buena*** si,

1) $\psi \vdash Qx(x = x)$, ψ tiene un modelo y es $L_{\omega_1,\omega}(Q)$-completa,

2) Cada modelo de ψ es $(L, \aleph_0)$-homogéneo,

3) Si $M \models \psi$, $\bar{a} \in |M|$, entonces existe $\phi(\bar{x}) \in L$ tal que $M \models \phi[\bar{a}]$ y $\phi(\bar{x})$ es $L_{\omega_1,\omega}(Q)$-completa y atómica.

Definición 1.6. $M \models$ "ψ" si M es un modelo atómico de $T(\psi) = \{\phi : \phi \in L, M \models \psi$ implica $M \models \phi\}$.

Definición 1.7. Sea ψ buena, $M \models$ "ψ", $N \models$ "ψ". $M \prec^* N$ si $M \prec N$ y si $R(\bar{x}, \bar{y}) \in L$, $\bar{a} \in |M|$, y $M \models$ "$\neg(Qx)R(\bar{x}, \bar{a})$" entonces no existe $\bar{c} \in |N| \setminus |M|$ tal que $N \models R[\bar{c}, \bar{a}]$.

Lema 1.8. *Supongamos que tenemos $V = L$ ó $\diamond_{\aleph_1}$. Si ψ es buena y $Mod(\psi)$ no tiene la propiedad de $\aleph_0$-amalgamación entonces $I(\aleph_1, \psi) = 2^{\aleph_1}$.*

Demostración. Ver [15] ☐

Definición 1.9. Decimos que ψ es λ-***estable*** si ψ es buena y dado $M \models$ "ψ", $A \subseteq |M|$, $|A| \leq \lambda$ implica $|\{tp(\bar{a}, A, L, N) : \bar{a} \in N, N \models \text{“}\psi\text{”}, M \prec^* N\}| \leq \lambda$.

Definición 1.10. Sea ψ buena y $\aleph_0$-estable. Decimos que ψ tiene la ***propiedad del orden*** si existe un modelo $M \models \psi$ y $\bar{a}_\alpha \in |M|(\alpha < \omega_1)$ y una fórmula $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L$ tal que $M \models \phi[\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta]$, si y sólo si, $\alpha \leq \beta$.

Definición 1.11. Sea ψ buena y $\aleph_0$ estable.

a) Decimos que ψ tiene la ***propiedad simétrica*** si dados modelos M, N tal que $M \prec^* N$, $N \models$ "ψ", $M \models$ "ψ" y $\bar{a}, \bar{b} \in |N|$ tenemos,

$$R[tp(\bar{a}, |M| \cup \bar{b}, L, N)] = R[tp(\bar{a}, |M|, L, N)]$$

si y sólo si,

$$R[tp(\bar{b}, |M| \cup \bar{a}, L, N)] = R[tp(\bar{b}, |M|, L, N)]$$

b) Decimos que ψ tiene la ***propiedad asimétrica*** si existen $M, N, \bar{a}, \bar{b}$ como en a) y además se tiene,

1) $R[tp(\bar{a}, |M| \cup \bar{b}, L, N)] = R[tp(\bar{a}, |M|, L, N)]$,

2) Para algún $E = E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{z}) \in L$, $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{a})$ una relación de equivalencia con contable clases de equivalencia y no existe $\bar{c} \in |M|$ tal que $E(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$.

Lema 1.12. *1) $R^m(\phi(\bar{x}, \bar{a}), M)$ depende solamente de $tp(\bar{a}, \emptyset, L, M)$,*

2) Si $p \vdash q$, entonces $R^m(p) \leq R^m(q)$,

3) Si $R^m(p) \geq \omega$, entonces $R^m(p) = \infty$,

Demostración. Ver [15] □

Teorema 1.13. *Sea ψ $\aleph_0$-estable. Las siguientes son equivalentes,*

1) ψ tiene la propiedad del orden,

2) ψ no tiene la propiedad simétrica,

3) ψ tiene la propiedad asimetrica.

Demostración. Ver [15] □

Teorema 1.14. *Si ψ es buena, $\aleph_0$-estable y tiene la propiedad asimétrica, entonces $I(\aleph_1, \psi) = 2^{\aleph_1}$.*

Demostración. Ver [15] □

Teorema 1.15. *Supongamos $I(\aleph_1, \mathcal{K}) < 2^{\aleph_1}$, $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Entonces, para cada tipo completo $p = tp(\bar{a}, A)$, $A \cup \bar{a}$ atómico. El rango es $< \infty$*

Demostración. Ver [15] □

Ahora definiremos una noción de independencia dada por una noción de rango. Aunque la siguiente definición no concuerda con la definición original dada por Shelah en [15], las propiedades obtenidas son similares. Así para efectos practicos mostaremos el contenido de esta noción desde este punto de vista. La diferencia de el rango que se presentará a continuación que fue introducido por Lessman y el de Shelah, radica que Shelah dedujo todo el contenido de ω-estabilidad bajo ciertas suposiciones de teoría de conjuntos tales como: $\diamond$ y $V = L$ y Lessman desarrolla el contenido de estabilidad bajo cierta noción de homeneidad.

Definición 1.16. Para cada fórmula $\phi(x)$ con parametros en $M \in \mathcal{K}$ definimos el rango $R_M[\phi]$, a ser un ordinal, -1, ó ∞. Definimos $R_M[\phi] \geq \alpha$ por inducción en α,

1) $R_M[\phi] \geq 0$, si ϕ es realizado en M,

2) $R_M[\phi] \geq \delta$, donde δ es un ordinal limite, si $R_M[\phi] \geq \alpha$ para cada $\alpha < \delta$,

3) $R_M[\phi] \geq \alpha + 1$, si las siguientes condiciones se tienen,

   a) Existe $a \in M$ y una fórmula $\psi(x, y)$ tal que,

   $R_M[\phi(x) \wedge \psi(x, a)] \geq \alpha$ y $R_M[\phi \wedge \neg\psi(x, a)] \geq \alpha$,

   b) Para cada $c \in M$, existe una fórmula $\chi(x, c)$ que aisla un tipo completo sobre c tal que,

   $$R_m[\phi(x) \wedge \chi(x, c)] \geq \alpha$$

Además,
$R_M[\phi] = -1$, si ϕ no es realizado en M,
$R_M[\phi] = \alpha$, si $R_M[\phi] \geq \alpha$ y no se tiene que $R_M[\phi] \geq \alpha + 1$,
$R_M[\phi] = \infty$, si $R_M[\phi] \geq \alpha$, para cada ordinal α.
Para cualquier conjunto de fórmulas $p(x)$ sobre $A \subseteq M$,

$$R_M[p] = min\{R_M[\phi] : \phi = \wedge q, q \subseteq p, q \text{ finito } \}$$

El siguiente hecho muestra los hechos básicos obtenidos acerca de las propiedades del rango, como son las propiedades de caracter finito, monotonía y continuidad del rango.

Lema 1.17. *1) $R_M[\phi(x, b)]$ depende solamente de $\phi(x, y)$ y $tp(b, \emptyset)$,*

2) Si p es sobre M y N con $M, N \in \mathcal{K}$ entonces $R_M[p] = R_N[p]$,

3) Si p es finito y ϕ es la conjunción de todas sus fórmula, entonces $R_M[p] = R_N[p]$,

4) Para cada p, existe un subconjunto finito q de p tal que $R[p] = R[q]$.

5) Si $p \subseteq q$, entonces $R[p] \geq R[q]$,

6) Si $R[p] = \alpha$ y $\beta < \alpha$, entonces existe q tal que $R[q] = \beta$,

7) Existe un ordinal $\alpha < \omega_1$, tal que si $R[p] \geq \alpha$ implica $R[p] = \infty$.

Teorema 1.18. *$R[p] < \infty$ para cada p.*

Definición 1.19. Dado A $\subseteq$ B, diremos que $tp(\bar{a}, B)$ *no rompe* sobre A si para cada $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en B, tp($\bar{b}$,B)=tp($\bar{c}, B$) implica $tp(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}, A)$=$tp(\bar{a}\hat{\ }\bar{c}, A)$.

El siguiente resultado permite relacionar las nociones de rango y no ruptura.

Teorema 1.20. *Si $p \in S_{at}(M)$, $M \in \mathcal{K}$ y $\phi(x, b) \in p$ tal que $R[p] = R[\phi(x, b)]$. Entonces p no rompe sobre b. Además, p es el único tipo en $S_{at}(M)$ que extiende $\phi(x, b)$ con el mismo rango.*

Demostración. Supongamos que p rompe sobre b. Sea $\psi(x, y)$, $c, d \in M$ tal que $tp(c, b) = tp(d, b)$ y $\psi(x, c) \in p$ y $\neg\psi(x, d) \in p$. Sea α, tal que $R[p] = \alpha$. Por monotonía, tenemos $R[\phi(x, b) \wedge \psi(x, c)] = R[\phi(x, b) \wedge \neg\psi(x, d)]$. Como $tp(c, b) = tp(d, b)$, existe una función elemental que es la identidad sobre b y envia c en d. Así, $R[\phi] \geq \alpha + 1$. Verifiquemos ahora la condición b) de la definición de rango. Sea $c \in M$. Por monotonía tenemos: $R[p \upharpoonright bc] \geq \alpha$. Como $p \in S_{at}(M)$, $b, c \in |M|$ entonces existe $\chi \in p \upharpoonright bc$ que aisla $p \upharpoonright bc$. Por monotonía, $R[\phi \wedge \chi] \geq \alpha$. Por lo tanto $R[\phi] \geq \alpha + 1$. Esto contradice que $R[p] = R[\phi] = \alpha$. Veamos ahora la unicidad. Supongamos $q \neq p \in S_{at}(M)$ y contienen $\phi(x, b)$. Sean $\psi(x, y)$ una fórmula y $b \in M$ tal que $\psi(x, c) \in q$ y $\neg\psi(x, c) \in p$. Por monotonía tenemos: $R[\phi(x, b) \wedge \psi(x, c)] \geq \alpha$. Nuevamente por monotonía tenemos: $R[p \upharpoonright bc] \geq \alpha$. Luego existe $\chi \in p \upharpoonright bc$ que aisla $p \upharpoonright bc$. Así, por monotonía, $R[\phi \wedge \chi] \geq \alpha$. Por lo tanto $R[\phi] \geq \alpha + 1$. Una contradicción. □

Teorema 1.21. *Sea $p \in S_{at}(M)$, $M \in \mathcal{K}$ y sea $\phi(x, b) \in p$ tal que $R[p] = R[\phi]$. Sea $C \supseteq M$ un conjunto atómico, entonces existe un único $q \in S_{at}(C)$ que contiene ϕ y $R[p] = R[q]$.*

Demostración. Ver **??** □

Ahora probaremos un teorema que en primer orden fué un hecho fundamental en la prueba del teorema de Morley. Este muestra la conexión entre el rango y la noción de estabilidad.

Definición 1.22. Decimos que la clase $\mathcal{K}$ es λ-estable si $|S_{at}(M)| \leq \lambda$ para cada $M \in \mathcal{K}_\lambda$, donde $\mathcal{K}_\lambda = \{M \in \mathcal{K} : \|M\| = \lambda\}$ y $S_{at}(M) = \{tp(\bar{a}, M) : M \cup \bar{a}$ es un conjunto atómico $\}$.

Teorema 1.23. *Si $R[p] < \infty$ para cada tipo p , entonces $\mathcal{K}$ es λ estable para cada infinito λ.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{K}$. Sea $p \in S_{at}(M)$ y $\phi(x,b) \in p$, tal que $R[p] = R[\phi]$. Como p es la única extensión de $\phi(x,b)$ con el mismo rango, entonces el número de tipos de $S_{at}(M)$ esta acotado por el número de fórmulas sobre M. Así $\mathcal{K}$ es $\|M\|$-estable. $\square$

Definición 1.24. Un tipo $p \in S_{at}(A)$ es estacionario si existe $B \subseteq A$, $M \in \mathcal{M}$ que contiene A y $q \in S_{at}(M)$, $p \subseteq q$, tal que $R[p \upharpoonright B] = R[p] = [q]$.

Definición 1.25. Decimos que $\mathcal{K}$ tiene la ***propiedad del orden*** si existe un modelo $M \in \mathcal{K}$, una fórmula $\phi(x,y)$ y $(d_i : i < \beth_{\omega_1}) \subseteq M$ tal que,

$$M \models \phi(d_i, d_j), \text{ si y sólo si, } i < j.$$

Teorema 1.26. *$\mathcal{K}$ no tiene la propiedad del orden.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K}$ no tiene la propiedad del orden. Sea $(d_i : i < \beth_{\omega_1}) \subseteq M \in \mathcal{K}$, tal que $M \models \phi(d_i, d_j)$, si y sólo si, $i < j$. Por lema **??**, existe $(b_n : n < \omega)$ una sucesión indiscrnible tal que $\models \phi(b_n, b_m)$, si y sólo si $n < m$, y además $Hull((b_n : n < \omega)) \upharpoonright L \in \mathcal{K}$. Por compacidad, podemos encontrar $(b_i : i \in \mathbb{Q})$ L^*-indiscenible, tal que cualquier subsucesión finita de esta satisface el mismo L^*-tipo que cualquier sucesión finita de $(b_n : n < \omega)$ de la misma longitud. Sea $N = Hull((b_i : i \in \mathbb{R})) \upharpoonright L \in \mathcal{K}$. Además $N \models \phi(b_i, b_j)$, si y sólo si, $i < j$. Sea $B = \bigcup_{i \in \mathbb{Q}} b_i$, el cual es contable y es un subconjunto de N. Veamos que si $i \neq j$, entonces $tp_\phi(b_i, B) \neq tp(b_j, B)$. Sea c tal que $i < c < j$. Entonces $N \models \phi(b_i, b_c)$ y $N \models \neg\phi(b_j, b_c)$. Por lo tanto, $\phi(x, b_c) \in tp(b_i, B)$, $\neg\phi(x, b_c) \in tp(b_j, B)$. Así existen $2^{\aleph_0}$ tipos sobre B que son realizados en N. Esto contradice que $\mathcal{K}$ es ω-estable. $\square$

Además, como en primer orden, tenemos un lema de simetría para los rangos pero sobre modelos en $\mathcal{K}$.

Teorema 1.27. *Sean a, c y $M \in \mathcal{K}$ tal que Mac es un conjunto atómico. Entonces $R[tp(a, Mc)] = R[tp(a, M)]$, si y sólo si, $R[tp(c, Ma)] = R[tp(c, M)]$.*

Demostración. Por la propiedad de carácter finito y monotonía, podemos suponer que M es contable. Supongamos que la conclusión del teorema no se tiene. Sea $\psi(x,y)$ una fórmula sobre M tal que,

$$R[tp(a, Mc)] = R[\psi(x,c)] = R[tp(a, M)],$$

y,

$$R[tp(c, Ma)] = R[\psi(a,y)] < R[tp(c, M)].$$

Definamos $(a_i, c_i : i < \beth_{\omega_1}) \subseteq \mathbb{C}$ y $B_i = M \cup \{a_j, c_j : j < i\}$ tal que,

1) $c_i \in \mathbb{C}$ realiza $tp(c, M)$ y $R[tp(c_i, B_i)] = R[tp(c, M)]$,

2) $a_i \in N$ realiza $tp(a, M)$ y $R[tp(a_i, B_i c_i)] = R[tp(a, M)]$.

Como $tp(a, M)$ y $tp(c, M)$ son estacionarios, entonces 1) y 2) se pueden construir. Veamos que tenemos la propiedad del orden. Supongamos $i > j$. Entonces $a_j \in B_i$. Si $\models \psi(a : j, c_i)$, entonces $R[tp(c_i, B_i)] \leq R[\psi(a_i, y)] = R[\psi(a, y)] < R[tp(c_i, B_i)]$. Esto contradice 1). Así, $\models \neg\psi(a_j, c_i)$, si $i > j$. Ahora si $i \leq j$, entonces tenemos $tp(a_j, Mc) = tp(a, Mc)$, por unicidad de extensiones de rango. Así $\models \psi(a_j, c)$. Por 2) tenemos que $tp(a_j, B_j c_j)$ no rompe sobre M, y como $tp(c_i, M) = tp(c, M)$, entonces $\models \psi(a_j, c_i)$. Por lo tanto la fórmula $\phi(x_1, x_2; y_1, y_2) = \psi(x_1, y_2)$ y $d_i = c_i a_i$ para $i < \beth_{\omega_1}$ atestigua que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad del orden.

□

Antes de finalizar este capítulo, es necesario introducir una noción importante que será fundamental en el desarrollo de categoridad para clases excelentes, al igual que lo fue en la prueba del teorema de Morley para teorías contables de primer orden.

Definición 1.28. Un modelo M es *primario* sobre A, si existe $\{a_i : i < \|M\|\}$ tal que,

1) $M = A \cup \{a_i : i < \|M\|$,

2) $tp(a_i, A \cup B_i)$ es aislado,

donde $B_i = \{a_j : j < i\}$.

Definición 1.29. Un modelo M es *atómico* sobre A, si para cada $b \in M$, $tp(b, A)$ es aislado.

El siguiente teorema es un hecho importante acerca de modelos primarios y atómicos que será clave para el desarrollo de este trabajo, por ejemplo en la existencia de modelos primarios sobre ciertos conjuntos contables que llamaremos buenos.

Teorema 1.30. *1) Si sobre A existe un modelo primario, entonces es único salvo isomorfismo(sobre A), y además es primo sobre A.*

2) Si $tp(\bar{c}, A)$ es aislado, A un conjunto atómico, entonces $A \cup \bar{c}$ es un conunto atómico. Si M es un modelo atómico sobre A, M contable, entonces M es primario sobre A.

3) Si M es primario sobre A, entonces M es atómico sobre A.

Capítulo 2

La lógica infinitaria $L_{\omega_1,\omega}$

Dos teoremas importantes en el desarrollo de la teoría de primer orden, como son el teorema de compacidad y el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente fallan cuando extendemos la logica de primer orden, por ejemplo en $L_{\omega_1,\omega}$. En este capítulo trataremos algunos hechos importantes en la lógica infinitaria $L_{\omega_1,\omega}$, como por ejemplo, probaremos que el número de Hanf para ésta lógica es $\beth_{\omega_1}$.

2.1 Teorema de completitud

En esta sección hablaremos acerca de los sistemas de consistencia, los cuales permiten garantizar la existencia de modelos para cada elemento de dichos sistemas. Luego probaremos el teorema de completitud para la lógica $L_{\omega_1,\omega}$, cuya prueba esta apoyada en la existencia de modelos para sistemas de consistencia.

Comenzaremos este cápitulo con el siguiente ejemplo que muestra la falla de los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente.

Ejemplo 2.1. Sean $c_0, c_1, ..., c_n, ..., c_\omega$ símbolos de constantes en L. Sea Φ el siguiente conjunto de sentencias

$$(\forall x) \bigvee_{n<\omega} (x = c_n), \; c_\omega \neq c_0, \; c_\omega \neq c_1, ...$$

Claramente cada subconjunto finito de Φ tiene modelo, pero Φ no tiene modelo. Además todo modelo de Φ es contable.

Notación C denotará un conjunto nuevo contable de símbolos de constantes(es decir, no está en el lenguaje L), y M el lenguaje formado adicionando cada c al lenguaje L y $M_{\omega_1,\omega}$ la lógica infinitaria correspondiente a M.

Definición 2.2. Dada una fórmula ϕ, $\phi\neg$ es definido como sigue:
Si ϕ es atómica, $\phi\neg$ es $\neg\phi$,
$(\neg\phi)\neg$ es ϕ,
$(\bigwedge_{\phi\in\Phi}\phi)\neg$ es $\bigvee_{\phi\in\Phi}\neg\phi$,
$(\bigvee_{\phi\in\Phi}\phi)\neg$ es $\bigwedge_{\phi\in\Phi}\neg\phi$,
$(\forall x\phi)\neg$ es $\exists x(\neg\phi)$,
$(\exists x\phi)\neg$ es $\forall x(\neg\phi)$.

Definición 2.3. Sea S un conjunto contable de sentencias de $M_{\omega_1,\omega}$. S es un ***sistema de consistencia***, si para cada $s\in S$ se tiene lo siguiente,

C1) $\phi\notin s$ ó $\neg\phi\notin s$,

C2) Si $\neg\phi\in s$ entonces $s\cup\{\phi\neg\}\in S$,

C3) Si $\bigwedge\Phi\in s$ entonces para cada $\phi\in\Phi$, $s\cup\{\phi\}\in S$,

C4) Si $\forall x\phi(x)\in S$, entonces para todo $c\in C$, $s\cup\{\phi(c)\}\in S$,

C5) Si $\bigvee\Phi\in s$, entonces para algún $\phi\in\Phi$, $s\cup\{\phi\}\in S$,

C6) Si $\exists x\phi(x)\in s$, entonces para algún $c\in C$, $s\cup\{\phi(c)\}\in S$,

C7) Sea t un término básico y $c,\ d\in C$.
Si $(c=d)\in s$, entonces $s\cup\{d=c\}\in S$,
Si $c=t,\ \phi(t)\in s$, entonces $s\cup\{\phi(c)\}\in S$,
Para algún $e\in C$, $s\cup\{e=t\}\in S$.

Los siguientes teoremas muestran la importancia de los sistemas de consistencia, pues nos permiten garantizar la existencia de modelos.

Teorema 2.4. *Si S es una propiedad de consistencia y $s_0\in S$, entonces s_0 tiene un modelo.*

Corolario 2.5. *Sea S es un propiedad de consistencia y Γ un conjunto contable de sentencias en el lenguaje $M_{\omega_1,\omega}$. Supongamos que para cada $s\in S$ y $\phi\in\Gamma$, $s\cup\{\phi\}\in S$. Entonces para cada $s\in S$, $s\cup\Gamma$ tiene un modelo.*

AXIOMAS PARA $L_{\omega_1,\omega}$

1) Cada instancia de una tautología de la lógica proposicional de primer orden es un axioma.

2) $(\neg\phi) \leftrightarrow (\phi\neg)$,

3) $\bigwedge \Phi \longrightarrow \phi$, donde $\phi \in \Phi$,

4) $\forall x\phi(x) \longrightarrow \phi(t)$, donde $\phi(x)$ es una fórmula, t es un término que no ocurre en $\phi(x)$, y $\phi(t)$ es obtenido reemplazando cada ocurrencia libre de x por t,

5) $x = x$,

6) $x = y \longrightarrow y = x$,

7) $\phi(x) \wedge (t = x) \longrightarrow \phi(t)$, donde $\phi(x)$ y $\phi(t)$ son como en 3.

REGLAS DE INFERENCIA PARA $L_{\omega_1,\omega}$

1) De ϕ, $\phi \longrightarrow \psi$, se infiere ψ,

2) De $\psi \longrightarrow \phi(x)$, se infiere $\psi \longrightarrow \forall x\phi(x)$, donde x ocurre libre en ψ,

3) De $\psi \longrightarrow \phi$, para todo Φ, se infiere $\psi \longrightarrow \bigwedge \Phi$.

El conjunto de *teoremas* de $L_{\omega_1,\omega}$ es el menor conjunto de fórmulas de $L_{\omega_1,\omega}$ que contiene todos los axiomas y es cerrado bajo las reglas de inferencia.

Notación $\vdash_{L_{\omega_1,\omega}} \phi$ significa que ϕ es un teorema de $L_{\omega_1,\omega}$.

Teorema 2.6. *(Teorema de Completitud) Si ϕ es una sentencia de $L_{\omega_1,\omega}$ entonces $\vdash_{L_{\omega_1,\omega}} \phi$, si y sólo si, $\models \phi$.*

Demostración. Cualquier teorema de $L_{\omega_1,\omega}$ es válido, dado que los axiomas son válidos y las reglas de inferencia preservan validez. Para cualquier sentencia ϕ de $L_{\omega_1,\omega}$, tenemos $\vdash_{L_{\omega_1,\omega}}$ si y sólo si $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}}$, dado que cualquier prueba en $L_{\omega_1,\omega}$ es una prueba en $M_{\omega_1,\omega}$y como para cualquier prueba en $M_{\omega_1,\omega}$, sólo un número contable de variables ocurren, podemos obtener una prueba en $L_{\omega_1,\omega}$ reemplazando cada ocurrencia de $c \in C$ por una variable que no ocurre en la prueba. Sea S el conjunto de todos los conjuntos finitos s(consistente) de sentencias de $M_{\omega_1,\omega}$ tal que sólo un número finito de $c \in C$ ocurre en s y no se tiene $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge s$. Veremos que S es una propiedad de consistencia.
$C1)$ y $C2)$ son fáciles.

$C3)$ Supongamos que $(\bigwedge \Phi) \in s \in S$ y existe $\phi \in \Phi$, $s \cup \{\phi\} \notin S$. Como $(\bigwedge \Phi) \in s \in S$, entonces $s \cup \{\phi\}$ tiene sólo un número finito de $c \in C$. Luego $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge(s \cup \{\phi\})$, es decir, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge(s \wedge \{\phi\})$. Como s es finito, tenemos que $\neg(\bigwedge s \wedge \phi) \leftrightarrow (\wedge s \longrightarrow \neg\phi)$ es un axioma de $L_{\omega_1,\omega}$. Luego, por regla 1, deducimos que $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \wedge s \longrightarrow \neg\phi$. Por lo tanto, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \wedge s \longrightarrow \bigvee_{\phi\in\Phi} \neg\phi$, y por el axioma 2, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \wedge s \longrightarrow \neg \bigwedge \Phi$. Así, por axioma 1 y regla 1, tenemos $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \wedge s$. Esto contradice que $(\bigwedge \Phi \in s \in S)$.

$C4)$. Es similar a $C6)$.

$C5)$. Supongamos $(\bigvee \Phi) \in s \in S$, y para cada $\phi \in \Phi$, $s \cup \{\phi\} \notin S$. Como $(\bigvee \Phi) \in s \in S$ tiene sólo un número finito de $c \in C$, entonces $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge(s \cup \{\phi\})$ para cada $\phi \in \Phi$, es decir, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge(s \wedge \{\phi\})$. Como s es finito, tenemos que $\neg(\bigwedge s \wedge \phi) \leftrightarrow (\wedge s \longrightarrow \neg\phi)$ es un axioma de $L_{\omega_1,\omega}$. Luego, por regla 1, deducimos que $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \wedge s \longrightarrow \neg\phi$. Por regla 3, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \wedge s \longrightarrow \bigwedge_{\phi\in\Phi} \neg\phi$, y por el axioma 2, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \wedge s \longrightarrow \neg \bigvee \Phi$. Así, por axioma 1, y regla 1, tenemos $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \wedge s$. Esto contradice que $(\bigvee \Phi \in s \in S)$.

C6). Supongamos $(\exists x\phi(x)) \in s \in S$ y para cada $c \in C$, $s \cup \{\phi(c)\} \notin S$. Sea $c \in C$ que no ocurre en s. Entonces $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg(\bigwedge s \cup \{\phi(c)\})$, así $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg(\bigwedge s \wedge \phi(c))$. Luego $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \bigwedge s \longrightarrow \neg\phi(c)$. Sea y una variable que no aparece en s. Entonces reemplazando c por y tenemos $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \bigwedge s \longrightarrow \neg\phi(y)$. Luego tenemos $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \bigwedge s \longrightarrow \neg\exists x\phi(x)$ y así $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge s$. Una contradicción.

C7) sea t un término básico y $s \in S$. Sea $d \in C$ que no aparece en s ni en t, y supongamos que $s \cup \{d = t\} \notin S$. Entonces $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg(s \cup \{d = t\})$. Además, por axiomas 4, 1 y regla 1, tenemos que $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \bigwedge s \longrightarrow (t \neq t)$. Luego por axioma 5, $\vdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg \bigwedge s$

Supongamos ahora que $\models \phi$ y $\nvdash_{M_{\omega_1,\omega}} \phi$. Como ϕ es consistente, sólo un número finito de $c \in C$ aparecen en ϕ. Por hipótesis $\nvdash_{M_{\omega_1,\omega}} \neg(\neg\phi)$, entonces $\{\neg\phi\} \in S$. Luego por teorema 2.4, existe un modelo M que satisface $\neg\phi$. Esto contradice que $\models \phi$. □

2.2 Skolemización

En esta sección presentaremos un método de construir modelos bien conocido en primer orden, a saber por medio de funciones de Skolem. Este método, nos permitirá demostrar el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente para fragmentos contables.

Definición 2.7. Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$.
Decimos que $L_{\mathcal{A}}^{sk}$ es el *lenguaje de Skolem* para $L_{\mathcal{A}}$ si $L_{\mathcal{A}}^{sk} = \bigcup_{n<\omega} L_{\mathcal{A}}^{(n)}$, donde $L_{\mathcal{A}}^{(n)}$ es construido inductivamente como sigue:

$$L_{\mathcal{A}}^{(1)} = \bigcap\{L'_{\mathcal{A}} : L'_{\mathcal{A}} \text{ es un fragmento contable, } L_{\mathcal{A}} \cup F_{\mathcal{A}} \subseteq L'_{\mathcal{A}}\},$$

y

$$F_{\mathcal{A}} = \bigcup\{F_\psi : F_\psi \text{ es un símbolo de función}, \psi = \exists x\phi \in L_{\mathcal{A}}\}.$$

Para cada $n < \omega$, $n \geq 1$, definimos inductivamente $L_{\mathcal{A}}^{(n+1)} = L_{\mathcal{A}}^{(n)(1)}$.

Definición 2.8. Decimos que la teoría T^{sk} en el lenguaje $L_{\mathcal{A}}^{sk}$, es la *teoría de Skolem* para $L_{\mathcal{A}}$ si sus axiomas son todas la fórmulas de la forma

$$\exists x\phi(x, y_1, ..., y_n) \longrightarrow \phi(F_{\exists x\phi}(y_1, ..., y_n), y_1, ..., y_n),$$

donde $\exists x\phi$ es una fórmula en $L_{\mathcal{A}}^{sk}$, y $y_1, ..., y_n$ no están acotados en $\exists x\phi$.

Definición 2.9. Sea M un modelo en el lenguaje L. M^{sk} es una *expansión de Skolem* de M si

$$M^{sk} = (M, F_{\exists x\phi})_{\exists x\phi \in L_{\mathcal{A}}^{sk}}$$

es un modelo de T^{sk}.

El siguiente resultado es el lema de $Tarski - Vaught$ para fragmentos contables, cuya prueba omitiré, por tratarse de un argumento similar al dado en primer orden.

Lema 2.10. *Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento de $L_{\omega_1,\omega}$ y sean M, N modelos en el lenguaje L. Entonces $M \prec_{L_{\mathcal{A}}} N$, si y sólo si, $M \subseteq N$ y para cada fórmula $\exists x\phi(x, y_1, ..., y_n) \in L_{\mathcal{A}}$ y $b_1, b_2, ..., b_n \in B$, si $N \models \exists x\phi(x, b_1, ..., b_n)$, entonces existe $a \in M$ tal que $M \models \phi[a, b_1, ..., b_n]$.*

Teorema 2.11. *Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$ y sea $L_{\mathcal{A}}^{sk}$ su lenguaje de Skolem.*

1) *Cada modelo M en el lenguale L tiene una expansión de Skolem con respecto al lenguaje $L_{\mathcal{A}}$.*

2) *Sea $N \models T^{sk}$ en el lenguaje $L_{\mathcal{A}}^{sk}$. Entonces cada submodelo $M \subseteq N$, es submodelo elemental.*

Demostración. 1) Sea $M^{(0)} = M, L_{\mathcal{A}}^{(0)} = L_{\mathcal{A}}$. Supongamos $n < \omega$ y $M^{(n)}$ una expansión de M que es modelo de $T^{sk} \cap L_{\mathcal{A}}^{(n)}$. Sea $(\exists x\phi(x, y_1, ..., y_n))$ una fórmula en $L_{\mathcal{A}}^{(n)}$ tal que los y no están acotados. Sea $M = \{a_i : i < \|M\|\}$ una enumeración de M, y definamos $F_{\exists x\phi}$ como sigue,

$$F_{\exists x\phi}(b_1, ..., b_n) = \begin{cases} min\{a_i : i < \|M\|\}, & \text{si } M \models \phi[a_i, b_1, ..., b_n], \\ a_0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tal que $b_1, ..., b_n \in M$. Sea $M^{(n+1)} = (M, F_{\exists x\phi})_{\exists x\phi \in L_{\mathcal{A}}^{(n+1)}}$, y así $M^{(n+1)}$ es un modelo de $T^{sk} \cap L_{\mathcal{A}}^{(n+1)}$. Por lo tanto $M^{sk} = \bigcup_{n<\omega} M^n$ es un modelo de T^{sk}.

2) Sea $(\exists x)\phi(x, y_1, ..., y_n)$ una fórmula en $L_{\mathcal{A}}^*$. Supongamos $b_1, ..., b_n \in |M|$ y $N \models \exists x\phi(x, b_1, ..., b_n)$. Así $N \models \phi(F_{\exists x\phi}(b_1, ..., b_n)b_1, ..., b_n)$, dado que N es un modelo de T^{sk}. Sea $a = F_{\exists x\phi}(b_1, ..., b_n)$. Entonces,

$$N \models \phi[a, b_1, ..., b_n].$$

Como $b_1, ..., b_n \in |M|$, entonces $a \in |M|$. Luego, por el lema 2.10, concluímos que $M \prec_{L_{\mathcal{A}}} N$. $\square$

Corolario 2.12 (Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente). *Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$. Sea N un modelo en el lenguaje L, $X \subseteq |N|$, y κ un cardinal infinito, tal que $|X| \leq \kappa \leq \|N\|$. Entonces existe un modelo $M \prec_{L_{\mathcal{A}}} N$, tal que $X \subseteq |M|$ y $\|M\| = \kappa$.*

Demostración. Sea $Y \supseteq X$, tal que $\|Y\| = \kappa$, y $Y \subseteq |N|$. Sea N^{sk} una expansión de Skolem de N. Sea M el submodelo de N generado por Y. Entonces $M \prec_{L_{\mathcal{A}}^{sk}} N$. Consideremos ahora el modelo $M = M^{sk} \restriction L$. Por lo tanto $M \prec_{L_{\mathcal{A}}} N$, y como $L_{\mathcal{A}}$ es contable y κ infinito, tenemos $\|M\| = |Y| = \kappa$. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra la no posibilidad de probar el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente, como en primer orden, incluso para fragmentos contables.

Ejemplo 2.13 (Morley). Sea $\alpha < \omega_1$. Entonces existe una sentencia $\phi \in L_{\omega_1,\omega}$ que tiene un modelo de cardinalidad $\beth_\alpha$, pero no tiene modelos de cardinalidad mayor que $\beth_\alpha$.

Demostración. Como α es contable, entonces $\omega + \alpha$ es contable. Así podemos escribir $\omega + \alpha = \{\beta_n : n < \omega\}$. Sea L, el lenguaje que contiene el símbolo de relación binario $\in$, el símbolo de relación unario r, y constantes c_{β_n}, para cada $n < \omega$. Sea ϕ la conjunción de las siguientes sentencias:

1) $(\forall x)(x \in c_{\beta_n} \leftrightarrow \bigvee_{\beta_m<\beta_n}(x = c_{\beta_m}))$,
2) $(\forall x)(\bigcup_{n<\omega} r(x) = c_{\beta_n})$,
3) $r(c_{\beta_n}) = c_{\beta_n}$, para cada $n < \omega$,
4) $(\forall x)(\forall y)(x \in y \longrightarrow r(x) \in r(y))$,
5) $(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$

Como $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$, tenemos que ϕ tiene un modelo de cardinalidad $\beth_\alpha$. $\square$

Las demostraciones de los siguientes lemas, pueden ser encontradas en [**?**]. Estos permiten encontrar indiscernibles para cualquier conjunto linealmente ordenado de cualquier cardinalidad, si existe un conjunto de indiscernibles en un modelo de T^{sk}.

Teorema 2.14. *Supongamos que M, N son modelos de T^{sk} para un fragmento contable $L_{\mathcal{A}}$, $\langle X, < \rangle$ y $\langle Y, < \rangle$ son conjuntos de indiscernibles en M, N respectivamente, y sucesiones crecientes finitas de X y Y realizan los mismos tipos en $L_{\mathcal{A}}^{sk}$. Entonces cada monomorfismo f de $\langle X, < \rangle$ en $\langle Y, < \rangle$ puede ser extendido a una inmersión elemental g de $Hull_M(X)$ en $Hull_N(Y)$.*

Teorema 2.15. *Sea M un modelo de T^{sk} para un fragmento contable $L_{\mathcal{A}}$, $\langle X, < \rangle$ un conjunto infinito de indiscernibles en M, y sea Y un conjunto infinito arbitrario linealmente ordenado. Entonces existe un modelo N tal que $\langle Y, < \rangle$ es un conjunto infinito de indiscernibles en N, y las sucesiones finitas de X y Y realizan los mismos tipos.*

En el siguiente hecho mostraremos una manera de obtener conjuntos infinitos de indiscernibles, al igual que en primer orden, usando el famoso teorema de Erdös-Rado.

Teorema 2.16 (Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski). *Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$, y T un conjunto de sentencias de $L_{\mathcal{A}}$. Supongamos que para cada $\alpha < \omega_1$, T tiene un modelo de cardinalidad $\beth_\alpha$. Entonces:*

1) T tiene un modelo que contiene un conjunto infinito de indiscernibles en $L_{\mathcal{A}}$,

2) T tiene modelos de todas las cardinalidades infinitas.

Demostración. Probaremos primero la implicación 1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que 1) se tiene para cada fragmento contable $L_{\mathcal{A}}$ y cada T. Consideremos el lenguaje de Skolem $L_{\mathcal{A}}^{sk}$ y la teoría de Skolem T^{sk}. Entonces $L_{\mathcal{A}}^{sk}$ es un fragmento contable y $T_{\mathcal{A}}^{sk}$ es un conjunto de sentencias en el lenguaje $L_{\mathcal{A}}^{sk}$. Por teorema **??**, cada modelo de T puede ser expandido a un modelo de T^{sk}. Así T^{sk} tiene modelos de cardinalidad $\beth_\alpha$, para cada $\alpha < \omega_1$. Luego, por 1), T^{sk} tiene un modelo M' que contiene un conjunto infinito de indiscernibles $\langle X, < \rangle$. Sea κ un cardinal infinito arbitrario y $\langle Y, < \rangle$ un conjunto linealmente ordenado de cardinalidad κ. Por teorema 2.15, existe un modelo N que contiene $\langle Y, < \rangle$ como un conjunto de indiscernibles. Por lo tanto, $\|N\| = \kappa$. Sea $M = M' \restriction L$, y así M es un modelo de T, tal que $\|M\| = \kappa$.

Ahora probaremos 1). Formemos el lenguaje M adicionando dos conjuntos contables, $D = \{d_1, d_2, ...\}$ y C un conjunto nuevo de constantes. Sea $M_{\mathcal{A}}$ el menor fragmento contable de $M_{\omega_1,\omega}$ que contiene $L_{\mathcal{A}}$. Consideremos ahora,

$$I = \{\theta(d_{i_1}, ..., d_{i_p}) \leftrightarrow \theta(d_{j_1}, ..., d_{j_p}), d_i \neq d_j : \theta(v_1, ..., v_p) \in L_{\mathcal{A}}, 1 \leq i_1 < ... < i_p < \omega, 1 \leq j_1 < ... < j_p < \omega, i \neq j\}$$

Ahora encontraremos un modelo M para L que contiene elementos $a_1, a_2, ...$ tal que $(M, a_1, a_2, ..)$ es un modelo de I, dado que entonces conjunto $X = \{a_1, a_2, ...\}$ es un conjunto indiscernible, y $a_i < a_j$, si y sólo si, $i < j$. Por el teorema 2.5, se sugiere encontrar un sistema de consistencia S en $M_{\mathcal{A}}$ no vacío tal que, para cada $\phi \in T \cup I$ y $s \in S$, $s \cup \{\phi\} \in S$.
Sea S el conjunto de todos los conjuntos finitos s de sentencias de $M_{\mathcal{A}}$ tal que sólo un número finito de $c \in C$ y $d \in D$ aparecen en s, y para cada $\alpha < \omega_1$, existen un modelo $M \models T$ y un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$ tal que $X \subseteq |M|$ $|X| = \beth_\alpha$ y para cada $a_1 < ... < a_n$ en X,

$$(M, a_1, ..., a_n) \models (\exists u_1 ... u_m) \bigwedge s(u_i, ..., u_m, d_1, ..., d_n) \ (*)_1$$

Veamos que S es no vacío. Como para cada $\alpha < \omega_1$, existe un modelo de cardinalidad $\beth_\alpha$, que satisface $S = \{(\exists x)x = x\}$. Entonces $\{(\exists x)x = x\} \in S$. Veamos que S es una propiedad de consistencia
C5) Supongamos que $\bigvee \Theta \in s \in S$. Así $s = s(c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n)$ y $\theta = \theta(c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_m)$. Sea $\alpha < \omega_1$. Entonces $\alpha + n < \omega_1$. Luego, por definición de S, existe un modelo M_α de T, y un conjunto linealmente ordenado $\langle X_\alpha, < \rangle$, $|X_\alpha| = \beth_{\alpha+n}$, $X_\alpha \subseteq |M_\alpha|$, tal que para cada $a_1 < ... < a_n$ en X_α,

$$M_\alpha \models \bigvee_{\theta \in \Theta} (\exists u_1, ..., u_m) \bigwedge s(u_1, ..., u_m, d_1, ..., d_n).$$

Además, como $\bigvee \Theta \in s$, para cada $a_1 < ... < a_n$ en X_α,

$$M_\alpha \models \bigvee (\exists u_1, ..., u_m)(\bigwedge s \wedge \theta)(u_1, ..., u_m, d_1, ..., d_n)$$

Sea $f : [X_\alpha]^n \longrightarrow \Theta$ una función, tal que si $a_1 < ... < a_n$ en X_α y $f(a_1, ..., a_n) = \theta$,

$$M_\alpha \models (\exists u_1, ..., u_m)(\bigwedge s \wedge \theta)(u_1, ..., u_m, d_1, ..., d_n)$$

Como $\beth_{\alpha+n} = \beth_n(\beth_\alpha) \geq \beth_{n-1}(\beth_\alpha)^+$ y el teorema de Erdös-Rado,

$$\beth_{n-1}(\beth_\alpha)^+ \longrightarrow (\beth_\alpha^+)^n_{\beth_\alpha}.$$

tenemos,

$$\beth_{\alpha+n} \longrightarrow (\beth_\alpha)^n_\omega.$$

Luego, como $|\Theta| \leq \omega$, existe un conjunto $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$ de cardinalidad $\beth_\alpha$, y un elemento $\theta_\alpha \in \Theta$, tal que para cada $a_1 < ... < a_n$ en Y_α, $f(a_1, ..., a_n) = \theta_\alpha$.
Como Θ es contable, entonces existe $\theta' \in \Theta$ tal que para $\alpha < \omega_1$ arbitrariamente grande, $\theta' = \theta_\alpha$. Así, para $\alpha < \omega_1$ arbitrariamente grande el conjunto $s \cup \{\theta'\}$ satisface $(*)_1$.

Veamos que $s \cup \{\theta'\} \in S$. Sea $\beta < \omega_1$, y tomemos $\alpha \geq \beta$ tal que existe un modelo M_α, y un conjunto linealmente ordenado $X_\alpha \subseteq |M_\alpha|$, $|X_\alpha| = \beth_\alpha$ y para cada $a_1 < ... < a_n$ en X_α,

$$(M_\alpha, a_1, ..., a_n) \models (\exists u_1, ..., u_m) \bigwedge (s \wedge \theta')(u_1, ..., u_m, d_1, ..., d_n) \ (*)_2$$

Sea $Y \subseteq X_\alpha$, $|Y| = \beth_\beta$. Por lo tanto, tenemos que para cada $a_1 < ... < a_n$ en Y, se tiene $(*)_2$. Así, $s \cup \{\theta'\} \in S$
Debemos ahora mostrar que para cada $\phi \in T \cup I$ y $s \in S$, $s \cup \{\phi\} \in S$. Si ϕ es de la forma $d_i \neq d_j$, es claro. Supongamos que $\phi \in I$, es decir, ϕ es

$$\theta(d_{i_1}, ..., d_{i_p}) \leftrightarrow \theta(d_{j_1}, ..., d_{j_p})$$

Como $s \in S$, entonces existe un modelo M de T, y un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$, $|X| = \beth_{\alpha+p}$, $X \subseteq A$, tal que para cada $a_1 < ... < a_n$ en X,

$$(M, a_1, ..., a_n) \models (\exists u_1, ..., u_m) \bigwedge s(u_1, ..., u_m, d_1, ..., d_n).$$

Sea $g : [X]^p \longrightarrow 2$ la función tal que $g(a_1, ..., a_p) = 1$, si y sólo si, $M \models \theta[a_1, ..., a_p]$. Como,

$$\beth_{p-1}(\beth_\alpha)^+ \longrightarrow (\beth_\alpha^+)^p_{\beth_\alpha},$$

entonces,

$$\beth_{\alpha+p} \longrightarrow (\beth_\alpha)^p_2.$$

Por lo tanto, podemos elejir un conjunto $Y \subseteq X$, $|Y| = \beth_\alpha$, tal que la restricción de g a $[Y]^p$ es constante. Entonces para cada $a_1 < ... < a_p$ y $b_1 < ... < b_p$ en Y, tenemos,

$$M \models \theta[a_1, ..., a_p], \text{ si y sólo si, } M \models \theta[b_1, ..., b_p].$$

Sea $q = max\{n, i_p, j_p\}$. Luego, para cada $a_1 < ...a_q$ en Y,

$$(M, a_1, ..., a_q) \models (\exists u_1, ..., u_m) \bigwedge s(u_1, ..., u_m, d_1, ..., d_n) \wedge \theta(d_{i_1}, ..., d_{i_p}) \leftrightarrow \theta(d_{j_1}, ..., d_{j_p}).$$

Por lo tanto, $s \cup \{\phi\} \in S$. Así queda demostrado el teorema. $\square$

Ahora probaremos que si existe un modelo de cardinalidad $\geq \beth_{\omega_1}$, entonces para cada λ existe al menos un modelo de cardinalidad λ, es decir, el número de Hanf de $L_{\omega_1,\omega}$ es $\beth_{\omega_1}$.

Corolario 2.17. *El número de Hanf del lenguaje $L_{\omega_1,\omega}$ es $\beth_{\omega_1}$.*

Demostración. Por el ejemplo 2.13, tenemos que el número de Hanf es $\geq \beth_{\omega_1}$. Sea ϕ una sentencia en $L_{\omega_1,\omega}$ que tiene un modelo de cardinalidad $\geq \beth_{\omega_1}$. Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable tal que $\phi \in L_{\mathcal{A}}$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, tenemos que ϕ tiene modelos de cardinalidad $\beth_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$. Así, por teorema 2.16, ϕ tiene modelos arbitrariamente grandes. Por lo tanto el número de Hanf es $\leq \beth_{\omega_1}$. $\square$

2.3 Modelos primos

En esta sección introduciremos las nociones de fórmulas completa e incompletables, con las cuales se pretende capturar la noción de modelo primo y así garantizar su existencia, para teorías completas $T \subseteq L_{\mathcal{A}}$ que tiene a lo más un número contable de tipos, donde $L_{\mathcal{A}}$ es un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$.
El siguiente teorema es fundamental para la existencia de modelos primos. Para un prueba, ver [10].

Teorema 2.18 (Teorema de omisión de tipos). *Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$. Sea $T \subseteq L_{\mathcal{A}}$ un conjunto de sentencias, y para cada $n < \omega$, sea $\Phi_n(x_1, ..., x_{p_n})$ un conjunto de fórmulas de $L_{\mathcal{A}}$ cuyas variable libres son a lo más $x_1, ..., x_{p_n}$. Supongamos que T tiene un modelo, y para cada $n < \omega$ y cada fórmula $\psi(x_1, ..., x_{p_n})$ en $L_{\mathcal{A}}$, $T \cup \{(\exists x_1, ..., x_{p_n})\psi\}$ tiene un modelo. Entonces para cada $n < \omega$, existe $\phi \in \Phi_n$ tal que $T \cup \{(\exists x_1, ..., x_{p_n})\psi \wedge \phi\}$ tiene un modelo.*

Definición 2.19. Sea $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento de $L_{\omega_1,\omega}$. Una ***teoría completa*** T, es un conjunto de sentencias $T \subseteq L_{\mathcal{A}}$ maximal y consistente.

Desde ahora, T denotará un teoría completa,

Definición 2.20. Una fórmula $\phi(x_1, ..., x_n) \in L_{\mathcal{A}}$ es consitente con T, si y sólo si, $T \models (\exists x_1, ..., x_n)\phi$

Definición 2.21.

1) Una fórmula $\phi(x_1, ..., x_n)$ es ***completa*** en $L_{\mathcal{A}}$ respecto a T, si $\phi \in L_{\mathcal{A}}$, ϕ es consistente con T, y para cada fórmula $\psi(x_1, ..., x_n) \in L_{\mathcal{A}}$,

$$T \models \phi \longrightarrow \psi, \text{ ó }, T \models \phi \longrightarrow \neg\psi.$$

2) Una fórmula $\phi(x_1, ..., x_n)$ es ***incompletable*** en $L_{\mathcal{A}}$, si ϕ es consistente con T, y no existe fórmula completa $\theta(x_1, ..., x_n) \in L_{\mathcal{A}}$ tal que $T \models \theta \longrightarrow \phi$.

Definición 2.22. Un conjunto de fórmulas $p(x_1, ..., x_n) \subseteq L_{\mathcal{A}}$ es un ***tipo*** en $L_{\mathcal{A}}$, respecto a T, si existe un modelo M de T y elementos $a_1, ..., a_n \in |M|$ tal que,

$$p = \{\phi(x_1, ..., x_n) \in L_{\mathcal{A}} : M \models \phi[a_1, ..., a_n]\}$$

y decimos que la n-tupla $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ ***realiza*** el tipo p. Además diremos que M ***realiza*** el tipo $p(x_1, ..., x_n)$, si existe un n-tupla en $|M|$ que realiza Φ, caso contrario diremos que M ***omite*** p.

Lema 2.23. *Sea I un conjunto contable, y para cada $i \in I$, $p_i(x_1, ..., x_{p_i})$ un tipo que no contiene fórmulas completas con respecto a T. Entonces T tiene un modelo contable que omite cada tipo p_i.*

Demostración. Debemos mostrar que,

$$T \cup \{\bigwedge_{i \in I}(\forall x_1, ..., x_{l_i}) \bigvee_{\phi \in p_i} \neg\phi\}$$

tiene un modelo. Sea $i \in I$, y $\psi(x_1, ..., x_{l_i})$ consistente con T. Si $\psi \notin \Phi_i$, entonces $(\neg\psi) \in p_i$ y $\phi \wedge \neg\neg\phi$ es consistente con T. Supongamos ahora $\psi \in p_i$. Entonces ψ no es completa respecto a T. Por lo tanto, existe una fórmula $\theta(x_1, ..., x_{l_i}) \in L_{\mathcal{A}}$ tal que $\psi \wedge \theta$ y $\psi \wedge \neg\theta$ son consistentes con T. Como $\theta \in p_i$ ó $\neg\theta \in p_i$, entonces $\psi \wedge \theta \in p_i$ ó $\psi \wedge \neg\theta \in p_i$. Así, hemos probado que para cada $i \in I$, ψ consistente con T, existe $\phi \in p_i$, tal que $\psi \wedge \neg\phi$ es consistente. Luego, por el teorema de omisión de tipos concluímos la demostración. □

Lema 2.24. *T tiene un modelo contable M tal que para cada $n < \omega$, cada n-tupla en $|M|$ satisface una fórmula completa ó una fórmula incompletable.*

Demostración. Para cada $n < \omega$, sea $p_n(x_1, ..., x_n)$ el conjunto de todas las fórmulas completas ó incompletables en las variable libres $x_1, ..., x_n$. Sea $\psi(x_1, ..., x_n) \in L_{\mathcal{A}}$ consistente con T. Si ψ es incompletable, entonces $\psi \in p_n$, y si no es incompletable, existe una fórmula completa $\phi(x_1, ..., x_n) \in p_n$ tal que $T \models \phi \longrightarrow \psi$. Así, $\psi \wedge \phi$ es consistente con T. Por el teorema de omisión de tipos, T tiene un modelo contable M que satisface,

$$\bigwedge_{n<\omega}(\forall x_1, ..., x_n) \bigvee p_n$$

Por definición de p_n tenemos que cada n-tupla en $|M|$ realiza una fórmula completa ó una fórmula incompletable. □

Teorema 2.25. *1) M es un modelo primo de T, si y sólo si, M es un modelo de T de cardinalidad contable y cada n-tupla de elementos de $|M|$ satisface una fórmula completa en M.*

2) Si M, N son modelos primos de T, entonces M y N son isomorfos.

3) T tiene un modelo primo, si y sólo si, no existen fórmulas incompletables ψ con respecto a T.

Demostración. 1) Sea M un modelo primo de T. Si $\|M\| > \aleph_0$, entonces, por el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, existe $N \prec M$, $\|M\| = \aleph_0$. Así, como M es primo, existe una copia de M en N. Esto contradice que $\|M\| > \aleph_0$. Sea $a_1, ..., a_n \in |M|$, y sea $p(x_1, ..., x_n)$ el tipo realizado por $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ en M. Si p no contien fórmulas completas, entonces, por el lema 2.23, existe un modelo N de T que omite p. Como M es primo, entonces existe una inmersión elemental f de M en N. Así la imagen de $a_1, ..., a_n$ por f debe realizar p. Esto contradice que N omite p. Por lo tanto concluímos que cada n-tupla de $|M|$ realiza una fórmula completa.
Supongamos ahora que M es un modelo contable de T, y cada n-tupla de $|M|$ satisface una fórmula completa. Sea $|M| = \{a_i : i < \omega\}$ una enumeración de M. Para cada $n < \omega$, sea $\phi_n(x_1, ..., x_n)$ una fórmula completa satisfecha por $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ en M. Sea N modelo de T. Como $T \models \exists x_1 \phi_1(x_1)$, entonces existe b_1 tal que $N \models \phi_1[b_1]$. Luego, si $N \models \phi_n[b_1, ..., b_n]$, entonces, como ϕ_n es completa, tenemos $T \models \phi_n \longrightarrow (\exists x_{n+1})\phi_{n+1}$. Así, para algún b_{n+1}, $N \models \phi_{n+1}[b_1, ..., b_{n+1}]$. La función de $|M|$ en $|N|$ que envia a_n en b_n es una función elemental de M en N, dado que cualquier n-tupla satisface una fórmula completa, así satisface las mismas fórmulas de $L_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto M es un modelo primo de T.

2) Por un argumento de Back-Forth dado como en 1) se sigue el resultado.

3) Supongamos que existe un fórmula incompletable $\phi(x_1, ..., x_n)$ con respecto a T. Entonces, para cada modelo M de T, existe una n-tupla que satisface $\phi(x_1, ..., x_n)$ en M, y así no satisface ninguna fórmula completa. Por lo tanto, por 1), M no es primo. Supongamos ahora que no existen fórmulas incompletables con respecto a T. Por lema 2.24, existe un modelo M que satisface sólo fórmulas completas con respecto a T. Así, por 1) tenemos que M es un modelo primo. □

Corolario 2.26. *Si para cada $n < \omega$, T tiene a lo más un numero contable de tipos p, entonces T tiene un modelo primo.*

Demostración. Supongamos que $\phi(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula incompletable con respecto a T. Sea $p_i, i \in I$ todos los tipos en T que contienen ϕ. Entonces I es contable. Dado que ϕ es incompletable, cada p_i no contiene fórmulas completas. Por teorema 2.23, existe un modelo de T que omite cada p_i, $i \in I$. Como $T \models (\exists x_1, ..., x_n)\phi$, entoces, existen $a_1, ..., a_n$ en $|M|$ que satisfacen ϕ. Luego, el tipo realizado por $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ contiene a

ϕ. Esto contradice que M omite cada tipo que contiene a ϕ. Por lo tanto T no tiene fórmulas incompletables. Luego, por teorema 2.25(3), T tiene un modelo primo. $\square$

2.4 Teorema de dos cardinales

En esta sección se pretende presentar una generalización del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente, al estudio de pares de cardinales.
Notación U denotará un predicado unario de L, y $L_{\mathcal{A}}$ un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$.

Definición 2.27. Sea $M = \langle |M|, U, ...\rangle$ un modelo en el lenguaje L, y $\langle X, <\rangle$ un conjunto linealmente ordenado, $X \subseteq |M|$. Decimos que $\langle X, <\rangle$ es un ***conjunto de indiscernibles sobre*** U, si y sólo si, para cada $u_1, ..., u_q \in U$ y cada par de p-tuplas crecientes $x_1 < ... < x_p$, $y_1 < ... < y_p$ en $\langle X, <\rangle$, se tiene,

$$(M, u_1, ..., u_q, x_1, ..., x_p) \equiv_{L_{\mathcal{A}}} (M, u_1, ..., u_q, y_1, ..., y_p)$$

Definición 2.28. $M = \langle |M|, U, ...\rangle$ es un ***modelo de tipo*** (κ, λ), si $\|M\| = \kappa$ y $|U| = \lambda$. Un conjunto de sentencias T de $L_{\mathcal{A}}$ ***admite*** (κ, λ), si T tiene un modelo de tipo (κ, λ).

Teorema 2.29. *Sea T un conjunto de sentencias de $L_{\mathcal{A}}$. Supongamos que para cada $\alpha < \omega_1$ existe un cardinal infinito κ, tal que T admite $(\beth_\alpha(\kappa), \kappa)$. Entonces,*

1) T tiene un modelo $M = \langle |M|, U, ...\rangle$ tal que U es infinito y existe un conjunto infinito de indiscernibles sobre U,

2) Para cada cardinal infinito λ, T admite (λ, ω).

Demostración. Al igual que en teorema 2.16, primero probamos la implicación 1) $\Rightarrow$ 2). Formamos el lenguaje de Skolem $L^{sk}_{\mathcal{A}}$ y sea $T^* = T \cup T^{sk}$. Entonces, para cada $\alpha < \omega_1$, existe $\kappa \geq \omega$, tal que T^* admite $(\beth_\alpha(\kappa), \kappa)$. Por 1) tenemos que existe un modelo $M^* = \langle M, U, ...\rangle$ de T^* con un conjunto infinito de indiscernibles sobre U, en $L^*_{\mathcal{A}}$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, podemos suponer que M es un modelo contable. Como U es infinito, entonces $|U| = \aleph_0$. Para cada $u \in U$, adicionemos un nuevo símbolo de constante c_u al lenguaje $L^*_{\mathcal{A}}$, y denominemos el nuevo lenguaje $N_{\mathcal{A}}$, y formamos el modelo $(M, c_u)_{u\in U}$. Como cada fórmula en $N_{\mathcal{A}}$ contiene sólo un número finito de c_u, entonces $\langle X, <\rangle$ es un conjunto de indiscernibles en $N_{\mathcal{A}}$. Sea $\langle Y, <\rangle$ un conjunto linealmente ordenado de cardinalidad λ. Por el teorema 2.15, existe un modelo $(N^*, b_u)_{u\in U}$ que contiene a $\langle Y, <\rangle$ como un conjunto de indiscernibles, $(N^*, b_u)_{u\in U} = Hull(Y)$, y p-tuplas crecientes de X y Y realizan el mismo tipo en $N_{\mathcal{A}}$.

Sea $N = \langle |N|, V, ...\rangle$ la restricción de $Hull(Y)$ al lenguaje L. Entonces N es un modelo de T, de cardinalidad $|Y| = \lambda$. Veamos que $V = \{b_u : u \in U\}$. Sea $b \in V$, entonces existe un término $t(v_1, ..., v_p)$ de $N_{\mathcal{A}}$ y $y_1 < ... < y_p$ en Y, $b = t(y_1, ..., y_p)$. Sea $x_1 < ... < x_p$ en X. Dado que $t(y_1, ..., y_p) \in V$, entonces $t(x_1, ..., x_p) \in U$. Así, para algún $u \in U$, $t(x_1, ..., x_p) = u$ y $t(y_1, ..., y_p) = b_u$. Por lo tanto $V = \{b_u : u \in U\}$ y T admite (λ, ω). La prueba de 1), es idéntica a la prueba de la parte 1) del teorema 2.16.

$\square$

Corolario 2.30. *Sea T un conjunto de sentencias de $L_{\mathcal{A}}$. Si existe $\kappa \geq \omega$ tal que T admite $(\beth_{\omega_1}(\kappa, \kappa))$, entonces para cada $\lambda \geq \omega$ T admite (λ, ω).*

Demostración. Por el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, para cada $\alpha < \omega_1$, T admite $\beth_\alpha(\kappa, \kappa)$. Luego por el teorema 2.29, T admite (λ, ω). $\square$

Definición 2.31. Una clase $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ de modelos de L es una PC_δ clase si existe una expansión L' de L formada adicionando una colección contable o finita de nuevos símbolos de relación, función, ó símbolos de constantes, y un conjunto T' de sentencias de L', tal que $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es la clase de todas las restricciones a L de modelos de T'.

El siguiente ejemplo muestra que el teorema de Morley no se tiene para PC_δ clases.

Ejemplo 2.32 (Silver). Sea $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ la clase de todos los modelos $M = \langle |M|, U\rangle$ tal que $\|M\| \leq 2^{|U|}$. Entonces $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es una PC_δ clase. Veamos que $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es κ-categórica, si y sólo si, $\kappa = \beth_\alpha$, para algún limite ordinal α. Supongamos que $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es κ-categórica, y existe α ordinal tal que $\beth_\alpha \leq \kappa \leq \beth_{\alpha+1}$, con α un ordinal sucesor. Sea N un modelo de cardinalidad κ. Consideramos U, U' subconjuntos de $|N|$, $|U| = \beth_\alpha$, $|U'| = \lambda$, $\lambda < \beth_\alpha$. Entonces, $\langle |N|, U\rangle$, y $\langle |N'|, U'\rangle$ están en $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, pero no son isomorfos.
Veamos la otra dirección. Supongamos $\kappa = \beth_\alpha$, α limite ordinal y $N = \langle |N|, U\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{M}}$. Entonces $\beth_\alpha = \|N\| \leq 2^{|U|}$, implica que $|U| = \beth_\alpha = \kappa$. Así, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es categórica en κ.

Lema 2.33. *1) Si κ, $\mu > \omega$, entonces cada PC_δ clase $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ κ-categórica tiene un modelo ω_1-saturado de cardinalidad μ,*

2) Si M' un modelo κ-saturado para una expansión L' de L, entonces la reducción a L es un modelo κ-saturado,

3) Si M, N son modelos saturados, $\|M\| = \|N\|$ y si $M \equiv N$, entonces $M \cong N$.

Teorema 2.34. *Sean κ, λ cardinales tal que $\kappa > \omega$ y $\lambda = \beth_{\omega_1.\alpha}$ para algún $\alpha \geq 1$. Entonces cada PC_δ clase κ-categórica es λ categórica.*

Capítulo 3

Conjuntos buenos

En este capítulo mostraremos usando la hipótesis: $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ y la falla de $\aleph_0$-amalgamación que la clase $\mathcal{K}$, de modelos atómicos, no tiene modelos universales en $\aleph_1$ y tiene $2^{\aleph_1}$ modelos no isomorfos de cardinalidad $\aleph_1$. Este resultado generaliza un resultado similar obtenido por Shelah que dice que la clase $\mathcal{K}$ de modelos de una sentencia buena ψ tiene $2^{\aleph_1}$ modelos no isomorfos de cardinalidad $\aleph_1$ si suponemos: V=L ó $\diamond_{\aleph_1}$ y no $\aleph_0$-amalgamación. Además introduciremos una noción de bondad para ciertos conjuntos que nos permitirá garantizar la existencia de modelos primarios sobre conjuntos contables buenos. Así, el siguiente paso sería poder garantizar la existencia de modelos primarios sobre conjuntos de cardinalidad arbitraria para ciertas clases elementales abstractas $\mathcal{K}$. La noción de excelencia que será estudiada en el próximo capítulo es un gran avance al estudio de este tipo de clases, es decir, dentro de éstas es posible garantizar la existencia de modelos primarios sobre ciertos conjuntos que resultan de la unión de un conjunto de modelos que satisfacen una relación de independencia que llamaremos amalgamación estable. Este capítulo pretende llevar a cabo un estudio de esta relación de independencia, para ello se estudiará la noción de d-estacionarización y su comportamiento sobre los conjuntos buenos. Vale la pena mencionar un trabajo anterior al de clases excelentes realizado por Keisler, pues éste llevo a cabo un estudio de categoricidad que concluyó en la demostración de una generalización del teorema de Morley para cada clase $\mathcal{K}$ de modelos de una sentencia $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$ que satisface las dos condiciones siguientes:

1) Cada modelo $M \in \mathcal{K}$ de ψ tiene extensiones arbitrariamente grandes en $\mathcal{K}$,

2) Cada modelo $M \in \mathcal{K}$ de ψ es $\aleph_1$-homogéneo.

Posteriormente, Marcus en [12] demostró la existencia de una sentencia $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$ no categórica en cada cardinal cuyos modelos no son $(L_{\omega_1,\omega}, \aleph_1)$-homogéneos. Una modificación de éste condujo a un ejemplo de Shelah de una sentencia totalmente categórica $\phi \in L_{\omega_1,\omega}$ que no tiene modelos $\aleph_1$-homogéneos. Por lo tanto, es necesario reemplazar la noción de homogeneidad por una noción más débil a la que denominaremos *plenitud*. Este juega el papel de los modelos homogéneos en el anñálisis de categoricidad de Keisler y el de modelo saturado en el estudio de Morley.

3.1 Conjuntos buenos

Sabemos que en primer orden, la noción de modelo primario es una noción fundamental en el estudio de categoricidad y en el estudio del comportamiento de la función $I(.,T)$, donde T es una teoría de primer orden. Por lo tanto, trataremos la noción de conjuntos buenos, pues para esta clase de conjuntos es posible garantizar la existencia de modelos primarios restrigiendonos al caso contable.
Shelah, en [15], demostró el siguiente resultado,

Teorema 3.1. *Supongamos* $2^{\aleph_0} + I(\aleph_1, \mathcal{K}_1) < 2^{\aleph_1}$ *y* $\mathcal{K}_1 = Mod(\psi)$ *con* $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$. *Entonces existe una teoría contable de primer orden* T *tal que, si* $\mathcal{K}$ *es la clase de modelos atómicos de* T*:*

1) *Si existe* $M_1 \in \mathcal{K}_1$ *no contable, entonces existe* $M \in \mathcal{K}$ *no contable,*

2) *Si* $I(\beth_{\omega_1}, \mathcal{K}_1) \geq 1$ *entonces* $I(\beth_{\omega_1}, \mathcal{K}) \geq 1$,

3) *para cada* λ, $I(\lambda, \mathcal{K}) \leq I(\lambda, \mathcal{K}_1)$ *y para algún* $M \in \mathcal{K}_1$ *no contable, para cada* λ, $I(\lambda, \mathcal{K}) = I(\lambda, \{N \in \mathcal{K}_1 : N \equiv_{\infty,\omega} M\})$,

4) $\mathcal{K}$ *es categórica en* $\aleph_0$ *y para cada* $M \in \mathcal{K}_{\aleph_0}$, *existe* $M' \in \mathcal{K}_{\aleph_0}$ *con* $M \precneqq M'$

Definición 3.2. $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de λ-***amalgamación*** si dados $M \prec M_l (l = 0, 1)$ en $\mathcal{K}$, $\|M\| = \|M_l\|$, entonces existe un modelo N en K, y funciones elementales f_l de M_l en N, $f_0 \restriction M = f_1 \restriction M$.

Lema 3.3 (Devlin-Shelah). . *Si* $2^{\lambda} < 2^{\lambda^+}$, *entonces existe* λ^+ *subconjuntos estacionarios de* λ^+ *tal que para cualesquier* S *de esos conjuntos* $\Phi^2_{\lambda^+}(S)$ *se tiene, donde* $\Phi^2_{\lambda^+}(S)$*es: Para todo* $F : 2^{<\lambda^+} \longrightarrow 2$ *existe* $g : \lambda^+ \longrightarrow 2$, *tal que para cada* $f : \lambda^+ \longrightarrow 2$ *el conjunto* $\{\delta \in S : F(f \restriction \delta) = g(\delta)\}$ *es estacionario.*

Definición 3.4. Θ_λ se tiene , si y sólo si, para todo $\{f_\eta : \eta \in {}^{\lambda^+}2$ y $f_\eta : \lambda^+ \longrightarrow \lambda^+\}$ y para cada *club* C $\subseteq \lambda^+$, existe $\eta \neq \nu \in {}^{\lambda^+}2$, y existe un $\delta \in C$, tal que,
$\eta \restriction \delta = \nu \restriction \delta, \quad f_\eta \restriction \delta = f_\delta \restriction \delta$ y $\eta[\delta] \neq \nu[\delta]$

Teorema 3.5 **($2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$).** *Supongamos $\mathcal{K}$ no tiene la propiedad de $\aleph_0$-amalgamación, $I\,(\aleph_0, \mathcal{K})$=1. Entonces $I\,(\aleph_1, \mathcal{K}) = 2^{\aleph_1}$. Además $\mathcal{K}$ no tiene un elemento universal de cardinalidad $\aleph_1$.*

Demostración. Probemos primero la no existencia de un elemento universal en $K_{\aleph_1}$. Por hipótesis, existen $M \prec M_l (l = 0, 1)$ modelos enumerables en K que no pueden ser amalgamados. Ahora definimos, por inducción sobre $\alpha < \omega_1$ modelos M_η, para $\eta \in {}^{\alpha}2$ tal que,

(i) M_η es enumerable. $|M_\eta| = \omega(1 + l(\eta))$

(ii) $\eta \lessdot \nu$ implica $M_\eta \prec M_\nu$.

(iii) Para δ limite, y $\eta \in {}^{\delta}2$, $\quad M_\eta = \bigcup\limits_{\alpha<\delta} M_{\eta\restriction\alpha}$.

Sea $\alpha = \beta + 1$. Para cada $\eta \in {}^{\beta}2$, elijamos un isomorfismo f_η, de M en M_η, y definamos una función f^l_η, para $l = 0, 1$, y un modelo $M_{\eta\hat{}\langle l\rangle}$ tal que f^l_η extiende f_η y es un isomorfismo de M_l en $M_{\eta\hat{}\langle l\rangle}$. Para $\alpha = 0$, α limite se sigue fácilmente. Ahora, para $\eta \in {}^{\omega_1}2$ sea $M_\eta = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_{\eta\restriction\alpha}$. Sea $M^* \in K_{\aleph_1}$. Sin perdida de generalidad, $|M^*| = \omega_1$. Luego para cada $\eta \in {}^{\omega_1}2$ existe una inmersión elemental g_η de M_η en M^*. Por el lema 3.3, existen $\eta, \nu \in {}^{\omega_1}2$ y $\alpha < \omega_1$, $\omega\alpha = \alpha$, tal que, $\eta \restriction \alpha = \nu \restriction \alpha$, $0 = \eta(\alpha) \neq \nu(\alpha)$ y $g_\eta \restriction M_{\eta\restriction\alpha} = g_\nu \restriction M_{\nu\restriction\alpha}$. (Pues el conjunto $C = \{\delta < \omega_1 : \delta = \omega(1 + \delta)\}$ contiene un club). Esto es una contradicción pues, $(g_\eta \restriction M_{\eta\restriction(\alpha+1)}) f^0_{\eta\restriction(\alpha+1)} : M_0 \longrightarrow M^*$, $(g_\nu \restriction M_{\nu\restriction(\alpha+1)}) f^0_{\nu\restriction(\alpha+1)} : M_1 \longrightarrow M^*$, muestra que M, M_0, M_1 pueden ser amalgados. Veamos ahora que $I(\aleph_1, \mathcal{K}) = 2^{\aleph_1}$. Podemos suponer que M_l son tomados tal que,

$$\{tp(\bar{a}, |M|) : \bar{a} \in |M|\} \text{ son maximales y distintos.}$$

Además, el ideal de los subconjuntos pequeños de ω_1 forman un ideal normal no trivial, el cual es ω_1-completo. Por el teorema de Ulam, existen $S_\alpha \subseteq \omega_1 (\alpha < \omega_1)$ conjuntos no pequeños que son disyuntos dos a dos. Sean M, M_l, M_η, f_η como en la demostración de la primera parte. Definamos $F(\eta, \nu, h) = 1$ si $\delta < \omega_1$, $\eta, \nu \in 2^\delta, \omega\delta = \delta$, $h : \delta \longrightarrow \delta$ una inmersión elemental de M_η en M_ν y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_{\eta\hat{}\langle 0\rangle} & \\
M_\eta \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h"'] & M_{\nu\hat{}\langle 0\rangle}
\end{tikzcd}$$

puede ser amalgamado. En cualquier otro caso $F(\eta, \nu, h) = 0$. Como S_α no es pequeño, existe $\rho_\alpha \in {}^{\omega_1}2$, tal que para cada $\eta, \nu \in {}^{\omega_1}2$, $h : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$, $\{i < \omega_1 : F(\eta \restriction i, \nu \restriction i, h \restriction i) = \rho_\alpha(i)\} \cap S_\alpha$ es estacionario. Ahora definiremos un conjunto de funciones en ${}^{\omega_1}2$ de cardinalidad $2^{\aleph_1}$ que está asociado únicamente a un modelo. Para cada $I \subseteq \omega_1$ definimos $\eta_I \in {}^{\omega_1}2$:

$$\eta_I(i) = \begin{cases} \rho_\alpha(i), & \text{si } i \in S_\alpha \text{ y } \alpha \in I, \\ 0, & \text{si } i \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} S_\alpha \text{ ó } i \in S_\alpha, \alpha \notin I. \end{cases}$$

Ahora mostraremos que si $I, J \subseteq \omega_1$, $I \neq J$ entonces M_{η_I} no es isomorfo a M_{η_J}. Supongamos que existen $I, J \subseteq \omega_1$, $I \neq J$ tal que existe $h : M_{\eta_I} \longrightarrow M_{\eta_J}$ un isomorfismo. Sea $\gamma \in I$, $\gamma \notin J$. Sea $S = \{\delta < \omega_1 : h \restriction \delta \subseteq \delta, \delta = \omega\delta\}$. Como S es un club entonces $S \cap S_\gamma \neq \emptyset$. Luego, para cada $\delta \in S \cap S^\gamma$ tenemos: $\eta_J(\delta) = 0$, $\eta_I(\delta) = \rho_\gamma(\delta)$. Así por la definición de los ρ_α se tiene que

$$S' = \{\delta \in S_\gamma : F(\eta_I \restriction \delta, \eta_J \restriction \delta, h \restriction \delta) = \rho_\gamma(\delta)\}$$

es un conjunto estacionario. Así existe $\delta \in S \cap S'$. Denotemos $\eta := \eta_i \restriction \delta$ y $\nu = \eta_J \restriction \delta$. Si $\rho_\gamma(\delta) = 0$ entonces $\eta_I(\delta) = 0$ y $F(\eta, \nu, h \restriction \delta) = 0$. Como

$$\begin{tikzcd} M_{\eta_I \restriction (\delta+1)} & \\ M_\eta \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h \restriction \delta"'] & M_{\eta_J \restriction (\delta+1)} \end{tikzcd}$$

puede ser amalgamado via $h \restriction \omega(\delta+1)$. Esto contradice la definición de F. Por lo tanto $\rho_\gamma(\delta) = 1$, de lo que concluímos: $\eta_I(\delta) = 1$, $F(\eta, \nu, h \restriction \delta) = 1$. Luego, por definición de F tenemos que

$$\begin{tikzcd} M_{\eta\hat{}\langle 0\rangle} & \\ M_\eta \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h \restriction \delta"'] & M_{\nu\hat{}\langle 0\rangle} \end{tikzcd}$$

puede ser amalgamado. Además via $h \restriction \omega(\delta+1)$ tenemos que

$$\begin{tikzcd}
M_{\eta\hat{}\langle 1\rangle} & \\
M_\eta \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h \restriction \delta"'] & M_{\nu\hat{}\langle 0\rangle}
\end{tikzcd}$$

puede ser amalgamado. Veamos ahora que esto es suficiente para contradecir $(*)$. Sean $N := h(M_\eta), N_1 := h(M_{\eta\hat{}\langle 0\rangle})$. Como el último diagrama puede ser amalgamado, existe un modelos N^*, $M_{\nu\hat{}\langle 0\rangle} \prec N^*$ y una inmersión elemetal $f : M_{\eta\hat{}\langle 0\rangle} \longrightarrow N^*$ que extiende $h \restriction \delta$. Denotemos $N_0 = f(M_{\eta\hat{}\langle 0\rangle})$. Por $(*)$, $\{tp(\bar{a}, N) : \bar{a} \in N_l\}(l = 0, 1)$ son maximales y distintos. Sea $\bar{a}_0 \in N_0$ tal que $p = tp(\bar{a}_0, M_\nu) \notin \{tp(\bar{a}, N) : \bar{a} \in N_1\}$. Por definición de $M_{\nu\hat{}\langle 0\rangle}$ tenemos que el tipo $tp(\bar{a}_0, M_\nu)$ es realizado en $M_\nu\hat{}\langle 0\rangle$ por algún $\bar{a}_1$. Así, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $N_1 \cup \{\bar{a}_1\} \subseteq M_{\eta_J \restriction \alpha}$. Como $\{tp(\bar{a}, N) : \bar{a} \in N_1\}$ es maximal entonces p pertenece a este. Esto contradice la elección de p. Igualmente si existe $\bar{a}_1 \in N_1$ tal que $p = tp(\bar{a}_1, N) \notin \{tp(\bar{a}, N) : \bar{a} \in N_0\}$ tenemos una contradicción siguiendo el mismo procedimiento.

$\square$

Notación: Para el resto de este capítulo supondremos $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, $I(\aleph_1, \mathcal{K}) < 2^{\aleph_1}$ y $\mathcal{K}$ denotará una clase de modelos atómicos.

Observación La clase $\mathcal{K}$ satisface la propiedad de $\aleph_0$-amalgamación(esto se tiene por el teorema 3.5).

Definición 3.6. Un conjunto atómico A es *bueno* si dado $\bar{a} \in A$, $\models (\exists \bar{x})\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, entonces existe un tipo aislado completo p sobre A, $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$.
Para cualquier conjunto A, $S_{at}(A) := \{$ tp $(\bar{a}, A) : A \cup \bar{a}$ es atómico $\}$.

Observación En primer orden tenemos que si T es una teoría contable categórica en un cardinal no contable, entonces todo conjunto es bueno. Esto se tiene , ya que la categoricidad de T implica ω-estabilidad. Por lo tanto, tenemos que T es λ-estable, para cada $\lambda \geq \aleph_0$. Esto garantiza la existencia de modelos primarios sobre cualquier conjunto. Así, cada conjunto es bueno.

Lema 3.7. *Sea A un conjunto contable atómico. Si $S_{at}(A)$ es contable, entonces A es bueno.*

Demostración. Supongamos que A no es bueno. Luego, existe $\phi(x,a)$ con $a \in A$ y $\models \exists x\phi(x,a)$, pero ningún tipo aislado en $S_{at}(A)$ contiene $\phi(x,a)$. Así, para cada $\psi(x,b)$, $b \in A$, tal que $\models \forall x(\psi(x,b) \longrightarrow \phi(x,a))$, existe $b' \in A$ tal que $\psi(x,b)$ tiene como minimo dos extensiones en $S_{at}(abb')$. Sea $A = \{a_i : i < \omega\}$. Sean $\psi(x,b_\eta)$ para $\eta \in 2^{<\omega}$ tal que $\psi_{\langle\rangle}(x,b_{\langle\rangle}) = \phi(x,a)$, y si $\eta \lessdot \nu$, entonces $\models \forall x(\psi_\eta(x,b_\eta)) \longrightarrow \psi_\nu(x,b_\nu)$. Además, cada $\psi_\eta(x,b_\eta)$ aisla un tipo completo sobre b_η, y si $l(\eta) > i$ entonces $b_\eta \supseteq a_i$ con $\psi_{\eta\hat{}0}(x,b_{\eta\hat{}0})$ y $\psi_{\eta\hat{}1}(x,b_{\eta\hat{}1})$ contradictorios. Así la cardinalidad de $S_{at}(A)$ es $2^{\aleph_0}$. $\square$

Lema 3.8. *Si existe un modelo universal N_A sobre un conjunto atómico contable A, entonces $S_{at}(A)$ es contable.*

Demostración. Para cada $p \in S_{at}(A)$, elijamos a una realización de p. Como $A \cup a$ es contable y atómico, entonces existe un modelo contable $N \supseteq A \cup a$, así N puede ser sumergido elementalmente en N_A sobre A. Por lo tanto tenemos que $|S_{at}(A)| \leq \|N_A\| \leq \aleph_0$. $\square$

Lema 3.9. *Si M es contable, entonces existe un modelo contable universal N sobre M.*

Demostración. Definiremos $(M_n : n < \omega)$, una sucesión creciente de modelos contables tal que $M_0 = M$, y M_{n+1} realiza todos lo tipos en $S_{at}(M_n)$. Supongamos que hemos definido $(M_j : j \leq n)$. Sea $\{p_i : i < \omega\}$ una enumeración de $S_{at}(M_n)$, a_0 una realización de p_0, y M_0' un modelo primario sobre $M_n \cup a_0$, el cual existe dado que $M_n \cup a_0$ es bueno. Dado que p_1 es estacionario, existe una extensión q_1 sobre M_0' el cual no rompe sobre un conjunto finito de M. Sea a_1 una realización de q_1 y M_1' modelo primario sobre $M_0' \cup a_1$. Luego procedemos inductivamente de la misma manera, y definimos $M_{n+1} = \bigcup_{i<\omega} M_i'$. Sea $N = \bigcup_{n<\omega} M_n$. Veamos que N es universal sobre M. Sea M' un modelo contable tal que $M \subseteq M'$. Tomemos una enumeración de $M' = \{a_i : i < \omega\}$. Construiremos una sucesión creciente de funciones elementales

$$f_i : M \cup \{a_0, ..., a_i\} \longrightarrow N,$$

el cual es la identidad sobre M. Si $i = 0$, se b_0 una realización de $tp(a_0, M) \in D_M$, el cual existe en N(por definición de N), y sea f_0 una función elemental parcial de $M \cup a_0$ el cual es la identidad sobre M y envia a_0 en b_0. Supongamos que hemos construido f_i. Sea $M^\star$ un modelo primario sobre $M \cup \{a_0, ..., a_i\}$(existe, dado que $M \cup \{a_0, ..., a_i\}$ es bueno). Sea $k < \omega$ tal que $a_0, ..., a_i \in M_k$.
Como podemos extender f_i a $f_i^\star : M^\star \longrightarrow M_k$, el cual es la identidad sobre M. Entonces $f^\star(tp(a_{i+1}, M^\star))$ puede ser extendido aun tipo sobre D_{M_k}, el cual es realizado por algún elemento $b_{i+1} \in M_{k+1}$. Sea f_{i+1} la función elemental que extiende f_i y envia a_{i+1} en b_{i+1}. $\square$

El siguiente lema nos garantiza la existencia de modelos primarios sobre cualquier conjunto bueno contable.

Lema 3.10. *Si A es un conjunto bueno y contable entonces existe un modelo primario sobre A.*

Demostración. Sea T_A la teoría de primer orden obtenida por una expansión de T agregando nuevos símbolos de constantes c_a para cada $a \in A$. Dado que A es bueno, tenemos que T_A es una teoría atómica, y por el teorema de omisión de tipos de Henkin obtenemos un modelo contable atómico $M_A^{'}$ de la teoría T_A. Así el restricción de M_A al lenguaje $L(T)$ es un modelo atómico sobre A, luego es un modelo primario sobre A. $\square$

Lema 3.11. *Sea A un conjunto bueno contable. $p \in S_{at}(A)$ si y sólo si existen $\bar{b}, \bar{c}$, tal que el tipo $tp(\bar{b}, A)$ es aislado, $tp(\bar{c}, A \cup \bar{b})$ es una estacionarización de $tp(\bar{c}, \bar{b})$ y $p = tp(\bar{a}, A)$ para algún $\bar{a} \subseteq \bar{b} \cup \bar{c}$. Además, cada $p \in S_{at}(A)$ no rompe sobre algún subconjunto finito de A.*

Demostración. Supongamos $p \in S_{at}(A)$. Luego para algún $\bar{a}$, $p = \mathrm{tp}(\bar{a}, A)$ y $A \cup \bar{a}$ es atómico. Sea $M \supseteq A \cup \bar{a}$. Como A es bueno, por el lema 3.10 existe un modelo primario M' sobre A. Así, podemos suponer que $A \subseteq M' \subseteq M$. Sea $\bar{a} \subseteq \bar{c} \subseteq M$, luego $M' \cup \bar{c}$ es atómico. Así el rango para el tipo $\mathrm{tp}(\bar{c}, M')$ es definido y es estacionario. Sea $B \subseteq M'$ un conjunto finito, tal que $R[tp(\bar{c}, M')] = R[tp(\bar{c}, B)]$. Si $\bar{b}$ denotamos con $\bar{b}$ una enumeración de B, entonces $tp(\bar{b}, A)$ es aislado, y $tp(\bar{c}, \bar{b})$ es estacionario. Por monotonía del rango, tenemos que $tp(\bar{c}, A \cup \bar{b})$ es la estacionarización de $tp(\bar{c}, \bar{b})$. Así, hemos probado la suficiencia. Veamos la otra dirección. Supongamos que $\bar{a} \subseteq \bar{b} \cup \bar{c}$, $tp(\bar{c}, A \cup \bar{b})$ es una estacionarización de $tp(\bar{c}, \bar{b})$. Como $tp(\bar{b}, A)$ es aislado, entonces $A \cup \bar{b}$ es atómico. Como $tp(\bar{c}, A \cup \bar{b})$ es una estacionarización de $tp(\bar{c}, \bar{b})$, tenemos que $(A \cup \bar{b}) \cup \bar{c}$ es un conjunto atómico. Así $A \cup \bar{a}$ es un conjunto atómico. Sea $p \in S_{at}(A)$, es decir, existe $\bar{a}$ tal que $p = tp(\bar{a}, A)$. Sea M_A modelo primario sobre A. Como $A \cup \bar{a}$ es un conjunto atómico, existe $M \supseteq A \cup \bar{a}$. Podemos suponer que $M_A \subseteq M$. Sea $C \subseteq M_A$ conjunto finito, tal que $tp(\bar{a}, M_A)$ es estacionario sobre C. Así $tp(\bar{a}, M_a)$ no rompe sobre C. Tomemos $\bar{c}$ una enumeración de C. Así $tp(\bar{c}, A)$ es un tipo aislado. Sea $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ una fórmula, tal que $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ aisla $tp(\bar{c}, \bar{b})$. Así $tp(\bar{c}, A)$ no rompe sobre $\bar{b}$. Debemos ver que p no rompe sobre B. En caso contrario, existen $d_1, d_2, \psi(\bar{x}, y)$ tal que $tp(d_1, B) = tp(d_2, B)$ y $\psi(\bar{x}, d_1), \neg\psi(\bar{x}, d_2) \in p$. Dado que $tp(\bar{c}, A)$ no rompe sobre B tenemos $tp(d_1, C) = tp(d_2, C)$. Como p es estacionario sobre C, entonces $\psi(\bar{x}, d_1), \psi(\bar{x} d_2) \in p$. Así obtenemos una contradicción. $\square$

El siguiente lema dice que si unimos un conjunto bueno con cualquier conjunto finito, entonces dicha unión es un conjunto bueno si se tiene además que la unión es un conjunto atómico.

Lema 3.12. *Para cada a, si $A \cup a$ es atómico, entonces $A \cup a$ es bueno.*

Demostración. Por el lema 3.8, se sugiere probar que $S_{at}(A \cup a)$ es contable. Primero veamos que $S_{at}(A)$ es contable. Dado que A es un conjunto bueno, existe M' un modelo contable primario sobre A. Sea N_A un modelo contable universal sobre M'. Debemos ver que N_A es un modelo universal sobre A. Sea $N \supseteq A$ un modelo arbitrario contable. Sea $N' \subseteq N$ modelo primario sobre A, el cual es isomorfo a M' sobre A. Como N_A es universal sobre M' podemos extender este isomorfismo a una inmersión elemental de N en N_A. Así, hemos probado que $S_{at}(A)$ es contable. Dado que $A \cup a$ es atómico esta bien definido la función inyectiva inducida por lo siguiente:

$$tp(b, A \cup a) \in S_{at}(A \cup a) \Leftrightarrow tp(a\hat{}b, A) \in S_{at}(A).$$

Por lo tanto $S_{at}(A \cup a)$ es contable. □

Veamos ahora que para cualquier conjunto bueno contable A, su diagrama atómico $S_{at}(A)$ captura una noción de densidad.

Lema 3.13. *Sea A un conjunto bueno contable, si $\models (\exists \bar{x})\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ entonces $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ para algún $p \in S_{at}(A)$.*

Demostración. Si $\models \exists x \phi(x, a)$, $a \in A$, entonces como A es bueno, existe b, tal que $\phi(x, a) \in tp(b, A)$, y $tp(b, A)$ es aislado. Por lo tanto, $A \cup b$ es un conjunto atómico, así $tp(b, A) \in S_{at}(A)$. □

3.2 Modelos plenos y amalgamación estable

En esta sección, introduciremos la definición de modelo pleno, el cual está atado a una noción de dimensión que mide el grado de saturación de estos modelos. Estudiaremos algunas propiedades de modelos, bajo cierta noción de independencia, que llamaremos amalgamación estable. Esta noción de independencia, nos permitirá preservar plenitud en uniones de cadenas crecientes de modelos plenos. Esto es muy similar en primer orden, cuando consideramos una unión creciente de longitud δ de modelos M_i κ-saturados, tal que $k(T) \leq cf(\delta)$, y obtener que $\bigcup_{i<\delta} M_i$ es un modelo κ-saturado. Además probaremos la existencia de un modelo de cardinalidad $\aleph_2$ en la clase $\mathcal{K}$.

Definición 3.14. Sea $p \in S^m(B)$ un tipo estacionario. La ***dimensión*** de p para (A_1, A_2, A_3) es el primer cardinal κ, tal que existe $C \subseteq A_2$, $|C| = \kappa$, y una estacionarización $q \in S^m(A_1 \cup C)$ de p que no es realizada en A_3, con $B \subseteq A_1 \cup A_2$, y $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ un conjunto atómico.

Definición 3.15. Un modelo M se dice λ-*pleno sobre* A, si

1) A es un conjunto bueno, $A \subseteq M$,

2) M es $(S_{at}(A), \aleph_0)$-homogéneo sobre A,

3) M es λ-*débilmente pleno sobre* A, es decir, $A \subseteq M$, y para cada tipo estacionario $p \in S^1(B)$, $B \subseteq M$, B un conjunto finito, la dimensión de p para (A, M, M) es $\geq \lambda$.

4) Decimos M *pleno sobre*[*débilmente pleno*] A, si M es λ-pleno[λ-débilmente pleno] sobre A, con $\lambda = \|M\|$.

Lema 3.16. *Sea A un conjunto contable atómico. Entonces existe un modelo contable M el cual es débilmente pleno sobre A.*

Demostración. Como A es atómico, existe un modelo contable $M_0 \supseteq A$. Sea M_{n+1} un modelo contable realizando cada tipo en $S_{at}(M_n)$. Sea $N = \bigcup_{n<\omega} M_n$. Entonces N es un modelo atómico que contiene a A. Sea $p \in S_{at}(A \cup c)$ la estacionarización de un tipo estacionario en $S(c)$. Entonces existe $n < \omega$ tal que $c \in M_n$. Así $A \cup c \subseteq M_n$. Como existe una extensión de p en $S(M_n)$, y ésta es realizada en M_{n+1}, luego es realizada en N. $\square$

Lema 3.17. *Supongamos que A es bueno y contable y M, N son modelos contables y plenos sobre A. Entonces M es isomorfo a N sobre A.*

Demostración. Sea $M = A \cup \{a_i : i < \omega\}$ y $N = A \cup \{b_i ; i < \omega\}$. Construiremos una sucesión de funciones elementales parciales $f_i : M \longrightarrow N$ tal que $dom(f_i) = B_i$, $f_i \restriction A = id_A$ y $a_i \in A_{2i}$, $b_i \in B_{2i+1}$, $A_i \cup B_i \setminus A$ es finito, donde $A_i = A \bigcup \{a_j : j < i\}$ y $B_i = B \bigcup \{b_j : j < i\}$. Dado que A es bueno, existe modelo primario M' sobre A. Podemos suponer $M' \prec M$. Existe una función elemental $f : M' \longrightarrow N$, $f \restriction A = id_A$. Además, como $tp(a_0, M')$ es estacionario, existe $c \in M'$, tal que la estacionarización de $tp(a_0, A \cup c)$ es $tp(a_0, M')$. Luego, dado que N es pleno $f((a_0, A \cup c))$ es realizado en N, por algún b. Definamos f_0, la función elemental que extiende la identidad sobre A y envia a_0 en b.
Sea M'' primario sobre $A \cup b$. Luego existe una función elemental $g : M'' \longrightarrow M$ que extiende la inversa de f_0. El tipo estacionario $tp(b_0, M')$ es la única estacionarización de algún $q \in S(A \cup b \cup d)$, con $d \in M''$. Luego $g(q)$ es realizado en M, dado que M es pleno. Así la función que extiende f_0 y envia una realización de $g(q)$ en b_0 es elemental. Supongamos que f_{2i+1} ha sido construido. Luego, como $A_{2i+1} \setminus A$ es finito, tenemos que A_{2i+1} es bueno. Por lo tanto, existe un modelo primario $M' \supseteq A_{2i+1}$. Como el tipo

$tp(a_{i+1}, M')$ es estacionario, es la estacionarización de algún tipo $p = tp(a_{i+1}, A_{2i+1} \cup c)$ para algún $c \in M'$. Así, existe $f : M' \longrightarrow N$ que extiende f_{2i+1}. Como N es pleno, $f(p)$ es realizado en N por algún b', luego la función f_{2i+2} que extiende f_{2i+1} y envia a_{i+1} en b' es elemental. Igualmente podemos construir f_{2i+3}, de la misma manera que se construyo f_1, pero aplicado ahora a f_{2i+2}. □

Definición 3.18. Decimos que *(A,B) satisface la condición de Tarski-Vaught*, si para cada $\bar{b} \in B$, $\bar{a} \in A$, si $\models \phi[\bar{b}, \bar{a}]$, entonces existe $\bar{b}' \in A$ tal que $\models \phi[\bar{b}', \bar{a}]$

Lema 3.19. *1) Si (A, B), (B, C) satisfacen la condición de Tarski-Vaught, y $A \subseteq B$, entonces (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught.*

2) Si $A_i(i < \alpha)$ es creciente y $(B, A_i)[(A_i, B)]$ satisface la condición de Tarski-Vaught para cada $i < \alpha$, entonces $(B, \bigcup_{i<\alpha} A_i)[(\bigcup_{i<\alpha} A_i, B)]$ satisface la condición de Tarski-Vaught.

Demostración. De la definición 3.18, se sigue fácilmente 1) y 2). □

Lema 3.20. *Sea M un modelo y $M \cup B$ un conjunto atómico, entonces $(M, M \cup B)$ satisface la condición de Tarski-Vaught.*

Demostración. Supongamos $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in B$, tal que $\models \phi[\bar{b}, \bar{a}]$. Como $M \cup B$ es atómico, existe una fórmula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ que aisla el tipo $tp(\bar{b}\hat{\ }\bar{a}, \emptyset)$. Dado que $\models \exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{a})$, existe $\bar{b}' \in M$, tal que $M \models \psi[\bar{b}', \bar{a}]$, y como $\models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}, \bar{a}) \longrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a}))$, entonces $M \models \phi[b', \bar{a}]$. □

Definición 3.21. 1) Si (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught, $p \in S_{at}(C)$ *es la d-estacionarización de* $q \in S_{at}(A)$, si $q \subseteq p$ y p no rompe sobre algún subconjunto finito de A.

2) La tripla A, B, C están en *amalgamación estable* si A es un conjunto bueno, (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught, y para cada $\bar{b} \in B$, $\text{tp}(\bar{b}, C \cup A)$ es la d-estacionarización de $\text{tp}(\bar{b}, A)$.

El siguiente lema nos garantiza la existencia y unicidad de d-estacionarizaciones, cuando se cumple la condición de Tarski-Vaught.

Lema 3.22. *Si A es bueno y (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught entonces, para cada $q \in S_{at}(A)$, existe $p \in S_{at}(C \cup A)$ una única d-estacionarización, y si q es aislado, entonces, p también lo es.*

Demostración. Sea $q \in S_{at}(A)$ y definiremos un tipo p que cumple con las condiciones del enunciado. Dado que A es bueno, existe $B \subseteq A$ finito tal que q no rompe sobre B. Definamos p como sigue:

$$p = \{\varphi(\bar{x}, \bar{c}) : \bar{c} \in C \cup A, \bar{a} \in A, tp(\bar{c}, B) = tp(\bar{a}, B), \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in q\}$$

Sea $\Psi = \{\varphi_i(\bar{x}, \bar{c}_i) : i < n\}$. Como (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught, existen $\bar{b}_i \in A$, tal que tp($\bar{c}_0\hat{}\bar{c}_1\hat{}...\hat{}\bar{c}_{n-1}, B$)=tp($\bar{b}_0\hat{}\bar{b}_1\hat{}...\hat{}\bar{b}_{n-1}, B$), luego existe una función elemental f tal que $f(\bar{b}_i) = \bar{c}_i$. Dado que q es consistente, tenemos

$$\models (\exists x)[\varphi_0(x, \bar{b}_0) \wedge \varphi_1(x, \bar{b}_1) \wedge ... \wedge \varphi_{n-1}(x, \bar{b}_{n-1})],$$

y como f es una función elemental

$$\models (\exists x)[\varphi_0(x, \bar{c}_0) \wedge \varphi_1(x, \bar{c}_1) \wedge ... \wedge \varphi_{n-1}(x, \bar{c}_{n-1})].$$

Así concluímos que Ψ es consistente. Veamos ahora que p es completo. Sea $\bar{c} \in C \cup A$ y supongamos que $\varphi(x, \bar{c}) \notin p$. Sea $\bar{b} \in A$ tal que tp($\bar{c}, B$)=tp($\bar{b}, B$), y por definición de p tenemos que $\varphi(x, \bar{b}) \notin q$, y como q es completo, $\neg\varphi(x, \bar{b}) \in q$. Así $\neg\varphi(x, \bar{b}) \in p$. Además p no rompe sobre B. Pues de lo contrario, existen $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in A \cup C$ y $\varphi(x, \bar{y})$ tal que tp($\bar{c}_1, B$)=tp($\bar{c}_2, B$) y $\varphi(x, \bar{c}_1)$, $\neg\varphi(x, \bar{c}_2) \in p$. Sean b_1, b_2 tal que tp$(\bar{b}_1, B) =$ tp$(\bar{c}_1, B) =$ tp($\bar{c}_2, B$)=tp($\bar{b}_2, B$) y por definición de p tenemos que $\varphi(x, \bar{b}_1)$, $\neg\varphi(x, \bar{b}_2)$$\in q$.
Así q rompe sobre B, contradicción. Sean $p_1, p_2 \in S_{at}(A \cup C)$ dos distintas d-estacionarizaciones de q. Sea $\varphi(x, \bar{y})$ y $\bar{c}$ tal que $\varphi(x, \bar{c}) \in p_1$ y $\neg\varphi(x, \bar{c}) \in p_2$. Sea B finito tal que p_1, p_2 no rompen sobre B, y como (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught, existe $\bar{a} \in A$ tal que tp$(\bar{a}, B) =$ tp$(\bar{c}, B)$. Dado que $\varphi(x, \bar{c}) \in p_1$, $\neg\varphi(x, \bar{a})$ no puede pertenecer a q, pues en caso contrario p_1 rompería sobre B. Igualmente concluímos que $\varphi(x, \bar{a}) \notin q$. Esto contradice la completitud de q.
Probemos ahora la segunda parte del enunciado. Sea $\varphi(x, \bar{a})$ la fórmula que aisla q. Veamos que esta aisla p. Sea q =tp($\bar{b}, A$) y p= tp($\bar{b}, A \cup C$) y supongamos que $\varphi(x, \bar{a})$ no aisla p. Así existe $\phi(x, \bar{c}) \in p$ tal que,

$$\models (\exists x)[\varphi(x, \bar{a}) \wedge \phi(x, \bar{c}) \wedge (\exists x)[\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\phi(x, \bar{c})] \qquad (*)$$

Como (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught, y $\bar{a} \in A, \bar{c} \in C$, existe $\bar{c}' \in A$ tal que

$$\models (\exists x)[\varphi(x, \bar{a}) \wedge \phi(x, \bar{c}'] \wedge (\exists x)[\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\phi(x, \bar{c}')] \qquad (**)$$

Como $\bar{c}' \in A$ y q es completo, $\phi(x, \bar{c}')$ ó $\neg\phi(x, \bar{c}' \in q$ y así tenemos que $\phi(x, \bar{a}) \vdash \phi(x, \bar{c}')$ ó $\varphi(x, \bar{a}) \vdash \neg\phi(x, \bar{c}')$. Esto contradice $(**)$. $\square$

Lema 3.23. *Sea $A_i(i < \alpha)$ creciente, continua, tal que cada A_i es bueno y (A_i, A_{i+1}) satisface la condición de Tarski-Vaught. Si $tp(\bar{a}, A_{i+1})$ es la d-estacionarización de $tp(\bar{a}, A_i)$, entonces $tp(\bar{a}, \bigcup_{i<\alpha} A_i)$ es la d-estacionarización de $tp(\bar{a}, A_0)$.*

Demostración. Supongamos que tp$(\bar{a}, \bigcup_{i<\alpha} A_i)$ rompe sobre cada conjunto finito $B \subseteq A_0$. Sea $B \subseteq A_0$ finito tal que $tp(\bar{a}, A_0)$ no rompe sobre B. Luego por definición, existen $\bar{c}, \bar{d} \in \bigcup_{i<\alpha} A_i$ y $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ tal que tp$(\bar{c}, B)$= tp$(\bar{d}, B)$ y $\phi(\bar{x}, \bar{c}), \neg\phi(\bar{x}, \bar{d}) \in$ tp$(\bar{a}, \bigcup_{i<\alpha} A_i)$. Sea $j < \alpha$ tal que $\bar{c}, \bar{d} \in A_j$. Así $\phi(\bar{x}, \bar{c}), \neg\phi(\bar{x}, \bar{d}) \in$ tp$(\bar{a}, A_j)$. Luego tp$(\bar{a}, A_j)$ rompe sobre B. Probemos por inducción sobre $i < \alpha$ que

$$(*)_i \text{ tp}(\bar{a}, A_i) \text{ no rompe sobre } B.$$

Supongamos como hipótesis de inducción que tenemos $(*)_i$. Por la prueba de 3.22, existe $p \in S_{at}(A_{i+1})$ una única d-estacionarización de tp$(\bar{a}, A_i)$ que no rompe sobre B. Así, p = tp$(\bar{a}, A_{i+1})$ y concluímos $(*)_{i+1}$. Como caso particular tenemos que tp$(\bar{a}, A_j)$ no rompe sobre B. Esto es una contradicción. □

Ahora probaremos la existencia de triplas que están en amalgamación estable.

Lema 3.24. *Supongamos que (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught. Dado B, $A \subseteq B$, entonces, existe una función elemental f,$f \restriction A = id_A, B = Domf$, y $A, f(B), C$ están en amalgamación estable.*

Demostración. Sea $B = \{b_i : i < \alpha\}$, y para cada $i(0), i(1), ..., i(n) < \alpha$, sea $q_{i(0),i(1),...,i(n)}(x_{i(0)}, ..., x_{i(n)})$ la d-estacionarización de tp$(\langle b_{i(0)}, ..., b_{i(n)}\rangle, A)$ sobre $A \cup C$. Por 1) podemos concluir que si $\{i(0), i(1), ..., i(n)\} \subseteq \{i(0), i(1), ..., i(n)\}$ entonces

$$q_{i(0),i(1),...,i(n)}(x_{i(0)}, ..., x_{i(n)}) \subseteq q_{j(0),j(1),...,j(m)}(x_{j(0)}, ..., x_{j(m)}).$$

Así tenemos que $\Gamma := \bigcup\{q_{i(0),i(1),...,i(n)}(x_{i(0)}, ..., x_{i(n)}) : i(0), i(1), ..., i(n) < \alpha, n < \omega\}$ es un tipo completo en las variables $\{x_i : i < \alpha\}$ sobre $A \cup C$. Sea $b_i^{'}$ una asignación para x_i que satisface Γ. Sea f una función elemental que envia cada $\bar{b}$ en $\bar{b}'$. Así $A, f(B), C$ están en amalgamación estable, pues dado $\bar{b} \in B$, tp$(f(\bar{b}), C \cup A)$ es la d-estacionarización de tp$(\bar{b}, A) =$ tp$(f(\bar{b}), A)$. □

Lema 3.25. *Si p tiene dimensión κ para (A_1, A_2, A_3), $A_1 \cup A_3 \subseteq A_2$ y $A_2 \subseteq A$, es un conjunto bueno, entonces p tiene dimensión κ para (A_1, A, A_3).*

Demostración. Sea $C \subseteq A$, $|C| < \kappa$, $p \in S^m(B)$ un tipo estacionario, B un subconjunto finito de A_2. Debemos probar que p es realizado en A_3. Dado que A_2 es un conjunto bueno, por lema 3.11 tenemos que para cada sucesión finita $\bar{d} \in A$, existen $\bar{d}_0 \in A_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2$ tal que, $tp(\bar{d}_1, \bar{d}_0) \vdash tp(\bar{d}_1, A_2)$, $tp(\bar{d}_2, A_2 \cup \bar{d}_1)$ es una estacionarización de $tp(\bar{d}_2, \bar{d}_1)$, $\bar{d} \subseteq \bar{d}_1 \cup \bar{d}_2$. Sea C^*, $\bigcup\{\bar{d}_0 : \bar{d} \in C\}$, si $\kappa > \aleph_0$ y $C^* = \bar{d}_0$, donde $C = \bar{d}$ si $\kappa = \aleph_0$. Como $C^* \subseteq A_2$, $|C^*| < \kappa$, entonces la estacionarización de p sobre $B \cup A_1 \cup C^*$, q, es realizada por algún $\bar{b} \in A_3$. Veamos ahora que $tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^* \cup C)$ es una estacionarización de p. Debemos probar que para cada $\bar{d} \in C$, $tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d})$ es una estacionarización

de p(o de q). Como $\bar{d} \subseteq \bar{d}_1 \cup \bar{d}_2$, $\bar{d}_0 \subseteq C^*$. Así, debemos probar para $l = 0, 1$, $tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d}_l \cup \bar{d}_{l+1})$ es la estacionarización de p.
Para $l = 0$. Como $tp(\bar{d}_1, \bar{d}_0) \vdash tp(\bar{d}_1, A_2)$, entonces $tp(\bar{d}_1, \bar{d}_0) \vdash tp(\bar{d}_1, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{b})$, dado que $B \subseteq A_1 \cup A_3 \subseteq A_2$, $\bar{b} \in A_3 \subseteq A_2$ y $C^* \subseteq A_2$. Luego $tp(\bar{d}_1, A_1 \cup B \cup C^*) \vdash tp(\bar{d}_1, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{b})$, y así $tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^*) \vdash tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d}_1)$. Así, $tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^*)$ tiene una única extensión en $S^m(A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d}_1)$. Pero p tiene una estacionarización r en $S^m(A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d}_1)$. Así $r \upharpoonright (A_1 \cup B \cup C^*)$ es una estacionarización de p. Además $r \upharpoonright (A_1 \cup B \cup C^*) = q$. Por lo tanto $r = tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d}_1)$. Así, $tp(\bar{b}, A_1 \cup B \cup C^* \cup \bar{d}_1)$ es una estacionarización de p. Para $l = 1$ se tiene por la propiedad de simetría.

□

Lema 3.26. *Si A, M, C están en amalgamación estable ($A \subseteq M, A \subseteq C$), B un subconjunto finito de M, $p \in S^m(B)$ es estacionario, y la dimensión de p para (A, M, M) es κ, entonces la dimensión de p para $(C, M \cup C, M)$ es κ.*

Demostración. Como la dimensión de p para (A, M, M) es κ, entonces la dimensión de p para $(A, M \cup C, M)$ es $\leq \kappa$. Veamos que tenemos la otra desigualdad. Debemos probar que la estacionarización de p sobre $C \cup C^*$ es realizado en M, donde $C^* \subseteq M$, $B \subseteq C^\star$, $|C^*| < \kappa$.
Como la dimensión de p para (A, M, M) es κ, existe $\bar{b} \in M$ que realiza la estacionarización de p sobre $A \cup C^*$. Probemos que $tp(\bar{b}, C \cup C^*)$ es una estacionarización de p sobre $C \cup C^*$. En caso contrario, existen $\bar{c} \in C$, $\bar{c}^* \in C^* \cup A$ tal que $tp(\bar{b}, \bar{c}\bar{c}^*)$ no es una estacionarizacón de p, con $B \subseteq \bar{c}^*$. Como A, M, C están en amalgamación estable y $A \subseteq C$, entonces existe $\bar{a} \in A$, tal que $tp(\bar{b}\hat{\ }\bar{c}^*, C)$ no rompe sobre $\bar{a}$. Además, como (A, C) satisface la condición de Tarski-Vaught, existe $\bar{c}' \in A$ con $tp(\bar{c}, \bar{a}) = tp(\bar{c}', \bar{a})$. Por definición de no ruptura tenemos,

$$(*) \qquad tp(\bar{b}\hat{\ }\bar{c}^*\hat{\ }\bar{c}, \bar{a}) = tp(\bar{b}\hat{\ }\bar{c}^*\hat{\ }\bar{c}', \bar{a})$$

Por monotonía del rango, tenemos que como $\bar{c}' \in A$, $B \subseteq \bar{c}^*$, $tp(\bar{b}, A \cup C^*)$ es la estacionarización de p, entonces $tp(\bar{b}, \bar{c}' \cup \bar{c}^*)$ es la estacionarización de p. Por $(*)$ tenemos,

$$\begin{aligned} R[tp(\bar{b}, A \cup C^*)] \leq R[tp(\bar{b}, \bar{c} \cup \bar{c}^* \cup \bar{a})] &= R[tp(\bar{b}, \bar{c}' \cup \bar{c}^* \cup \bar{a})] \\ &\leq R[tp(\bar{b}, \bar{c}' \cup \bar{c}^*)]. \end{aligned}$$

Como $R[tp(\bar{b}, A \cup C^*)] = R[tp(\bar{b}, \bar{c}' \cup \bar{c}^*)]$, entonces $tp(\bar{b}, \bar{c} \cup \bar{c}^*)$ es la estacionarización de p. Esto contradice la elección de $\bar{c}$, $\bar{c}^*$. □

Lema 3.27. *Si A, M, C están en amalgamación estable ($A \subseteq M, A \subseteq C$), y $C^* \subseteq M$, $a \in M$, $tp(\bar{a}, A \cup C^*)$ es estacionario, entonces $tp(\bar{a}, A \cup C \cup C^*)$ es su estacionarización.*

Demostración. La prueba es similar a la prueba del lema 3.26 □

Teorema 3.28. *1) Si A_i es creciente y continua$(i < \alpha)$ y la tripla $A_i, B, A_{i+1}(i+1 < \alpha)$ están en amalgamación estable, entonces $A_0, B, \cup_{i<\alpha} A_i$ están en amalgamación estable.*

2) Si A, B, C están en amalgamación estable y $B' \subseteq B, C' \subseteq C$, entonces A, B', C' están en amalgamación estable.

3) Si $A_i, B_i, C_i(i < \alpha)$ son crecientes y continuas, y para cada $i < \alpha$ la tripla A_i, B_i, C_i están en amalgamación estable, entonces $\cup_{i<\alpha} A_i, \cup_{i<\alpha} B_i, \cup_{i<\alpha} C_i$ están en amalgamación estable si $\cup_{i<\alpha} A_i$ es un conjunto bueno.

Demostración. 1) Sea $\bar{b} \in B$. Para cada i, $\mathrm{tp}(\bar{b}, A_{i+1})$ es la d-estacionarización de $\mathrm{tp}(\bar{b}, A_i)$. Como $(A_0, \bigcup_{i<\alpha} A_i)$ satisface la condición de Tarski-Vaught, por el lema 3.19, $\mathrm{tp}(\bar{b}, \bigcup_{i<\alpha} A_i)$ es la d-estacionarización de $\mathrm{tp}(\bar{b}, A_0)$, y por hipótesis A_0 es bueno.

2)Es una consecuencia directa de la definición de amalgamación estable.

3)$\bigcup_{i<\alpha} A_i$ es bueno por hipótesis. Sea $\bar{a} \in \bigcup_i A_i$, $\bar{c} \in \bigcup_i C_i$ tal que $\models \phi[\bar{c}, \bar{a}]$. Como A_i y C_i son crecientes, existe $j < \alpha$ tal que $\bar{a} \in A_j, \bar{c} \in C_j$. Como (A_j, C_j) satisface la condición de Tarski-Vaught, entonces $\models \phi[\bar{c}', \bar{a}]$, para algún $\bar{c}'$. Por lo tanto, $(\bigcup_{i<\alpha} A_i, \bigcup_{i<\alpha} C_i)$ satisface la condición de Tarski-Vaught. Sea $\bar{b} \in \bigcup_i B_i$, así para algún $j < \alpha$, $\bar{b} \in B_{i_0}$. Si $i_0 \leq j < \alpha$ entonces $\mathrm{tp}(\bar{b}, C_j \cup A_j)$ es una d-estacionarización de $\mathrm{tp}(\bar{b}, A_j)$, dado que A_j, B_j, C_j están en amalgamación estable. Dado que $(A_i)_i$ es creciente y continua, $\bigcup_{i_0 \leq j} A_j$ es un conjunto bueno. Luego por **??**(1) , existe un conjunto finito $B \subseteq \bigcup_j A_j$, tal que $\mathrm{tp}(\bar{b}, \cup_j A_j)$ no rompe sobre B. Podemos suponer que $B \subseteq A_{i_0}$, pues como B es finito, existe j_0 tal que $B \subseteq A_{j_0}$ y puedo reemplazar i_0 por $j_1 = max\{i_0, j_0\}$. Así $\mathrm{tp}(\bar{b}, A_j)$ no rompe sobre $B \subseteq A_j(i_0 \leq j < \alpha)$. Como A_j, B_j, C_j están en amalgamación estable, por teorema 3.22 deducimos que $\mathrm{tp}(\bar{b}, C_j \cup A_j)$ no rompe sobre B, para cada $i_0 \leq j < \alpha$. Veamos ahora que $\mathrm{tp}(\bar{b}, \bigcup_j C_j \cup \bigcup_j A_j)$ es una d-estacionarización de $\mathrm{tp}(\bar{b}, \cup_j A_j)$, para ello probemos que $\mathrm{tp}(\bar{b}, \bigcup_j C_j \cup \bigcup_j A_j)$ no rompe sobre B. En caso contrario, existen $\bar{c}, \bar{d} \in \bigcup_j C_j \cup \bigcup_j A_j$, y $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, tal que $\mathrm{tp}(\bar{c}, B)$=$\mathrm{tp}(\bar{d}, B)$ y $\phi(\bar{x}, \bar{c}), \neg\phi(\bar{x}, \bar{d}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}, \bigcup_j C_j \cup \bigcup_j A_j)$. Sea j_0 tal que $\bar{c}, \bar{d}, B$ están en $C_{j_0} \cup A_{j_0}$. Por lo tanto $\phi(\bar{x}, \bar{c}), \neg\phi(\bar{x}, \bar{d}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}, C_{j_0} \cup A_{j_0})$, es decir, $\mathrm{tp}(\bar{b}, C_{j_0} \cup A_{j_0})$ rompe sobre B, una contradicción. □

Teorema 3.29. *Si A_i, $M_i(i < \delta)$ son crecientes y continuas, y para cada $i < \delta$, $A_i \subseteq M_i$ y la tripla A_i, M_i, A_{i+1} están en amalgamación estable, entonces:*

1) $A = \bigcup_{i<\delta} A_i$ es un conjunto bueno, y A_i, M_i, A están en amalgamación estable. Si además $A_{i+1} \cup M_i$ es un conjunto bueno para cada i entonces $A \cup M_i$ y $A_j \cup M_i$ son conjuntos buenos.

2) $M = \bigcup_{i<\delta} M_i$ es λ-pleno sobre A si al menos una condición de las siguientes se tiene:

i) Para $i < \delta$ arbitrariamente grande, M_i es λ-pleno sobre A_i y para cada i, $A_{i+1} \cup M_i$ es un conjunto bueno,

ii) cf(δ) $\geq \lambda$ y para cada conunto finito $B \subseteq M$ y tipo estacionario $p \in S^m(B)$, para $i < \delta$ arbitrariamente grande, existe una sucesión de M que realiza la estacionarización de p sobre $A \cup M_i$

iii) δ es divisible por λ(como ordinales), para cada $i < \delta$, $A_{i+1} \cup M_i$ es bueno, y para cada $i < \delta$, y tipo estacionario p sobre algún conjunto finito $B \subseteq M_i$, la estacionarización de p es realizada en M_{i+1}.

Demostración. 1)Por lema 3.28(2), para cada $i < j < \delta$, la tripla A_i, M_i, A_{i+1} están en amalgamación estable. Luego por lema 3.28(1), para cada i, A_i, M_i, A están en amalgamación estable. Probemos que A es un conjunto bueno. Sea $\bar{a}$, $\models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$. Entonces para algún i, $\bar{a} \in A_i$. Como A_i, es un conjunto bueno y M_i es un modelo, tenemos que existe $\bar{b} \in M_i$, $M_i \models \phi[\bar{b}, \bar{a}_i]$ y $tp(\bar{b}, A_i)$ es aislado. Como A_i, M_i, A están en amalgamación estable, tenemos que $tp(\bar{b}, A)$ es la d-estacionarización de $tp(\bar{b}, A_i)$. Por 3.22 obtenemos que $tp(\bar{b}, A)$ es aislado. S.p.d.g. δ, A, A_i, M_i son contables, $i < \delta$. Sea $i(0) < \delta$ y definamos por inducción sobre j, $i(0) \leq j < \delta$,

a) $M_j^* \subseteq M_j$,
b) M_{j+1} atómico sobre sobre $M_j^* \cup A_{j+1}$,
c) M_j^* es creciente y continua, con $M_{i(0)}^* = M_{i(0)}$.

Dado que si un conjunto B es atómico sobre $M_{i(0)} \cup A_j$, $i(0) \leq i < j \leq \delta$, es atómico sobre $M_{i(0)} \cup A$, entonces de esta construcción se tiene el resultado. Para $j = i(0)$ y para j un ordinal limite se sigue el resultado. Para garantizar la existencia de M_{j+1}^*, probaremos que $A_{j+1} \cup M_j^*$ es un conjunto bueno. Dado que $A_{j+1} \cup M_j$ es un conjunto bueno, entonces existe un modelo contable universal N sobre $A_{j+1} \cup M_j$. Por los lemas 3.7 y 3.8, debemos mostrar que N es universal sobre $A_{j+1} \cup M_j^*$. Sea N' modelo contable, con $A_{j+1} \cup M_j^* \subseteq N'$. Sea f una función elemental tal que $M_j^*, f(M_j), N'$ están en amalgamación estable, con $f \restriction M_j^* = id$, así para cada $\bar{c} \in M_j$, el tipo $tp(f(\bar{c}), N')$ es la d-estacionarización de $tp(f(\bar{c}), M_j^*) = tp(\bar{c}), M_j^*$. Como $tp(\bar{c}, M_j^*)$ es estacionario, entonces $tp(f(\bar{c}), N')$ es su estacionarización, así $tp(f(\bar{c}), M_j^* \cup A_{j+1})$ es la estacionarización de $tp(\bar{c}, M^*)$. Por el lema 3.27, tenemos que para cada $\bar{c} \in M_j$, $tp(\bar{c}, M_j^* \cup A_{j+1})$ es la estacionarización de $tp(\bar{c}, M_j^*)$. Luego $tp(\bar{c}, M_j^* \cup A_{j+1}) = tp(f(\bar{c}), M_j^* \cup A_{j+1})$. Así $f^{-1} \cup id_{A_{j+1}}$ es una función elemental, y tomemos g_0 una función elemental que extiende f y cuyo dominio es $f(M_j) \cup N'$. Así $g_0 \upharpoonright (M_j^* \cup A_{j+1})$ es la identidad y $M_j \cup g_0(N')$ es un conjunto atómico, así existe modelo contable N'', $M_j \cup g(N') \subseteq N''$, así N'' puede ser sumergido en N por alguna función elemental g_1 sobre $M_j \cup A_j$. Luego $g_0 o g_1$ sumerge N' en N sobre $M_j^* \cup A_{j+1}$. De lo que concluímos que N es un modelo universal sobre $M_j^* \cup A_{j+1}$.

Caso 1. Supongamos que *i*) se tiene. Sea $\bar{b} \in M$, $p \in S^m(\bar{b})$ un tipo estacionario. Por hipótesis, para i suficientemente grandes, $\bar{b} \in M_i$, donde M_i es un modelo λ-pleno, y además por 1) podemos concluir que $A \cup M_i$ es un conjunto bueno. Como los modelos M_i son λ-plenos, entonces la dimensión de p para (A_i, M_i, M_i) es $\geq \lambda$. Dado que A_i, M_i, A están en amalgamación estable, del lema 3.26 concluímos que la dimensión de p para $(A, M_i \cup A, M_i)$ es $\geq \lambda$. Como $M_i \cup A$ es un conjunto bueno, por lema 3.25 tenemos que la dimensión de p para (A, M, M_i) es $\geq \lambda$, y así tenemos que la dimensión de p para (A, M, M) es $\geq \lambda$.
Caso 2. Supongamos que *ii*) se tiene. Sea $\bar{b} \in M$, $p \in S^m(B)$ un tipo estacionario, $C \subseteq M$, $|C| < \lambda$. Como $\mathrm{cf}(\delta) \geq \lambda$, existe $i < \delta$, tal que $C \cup \bar{b} \subseteq M_i$. luego existe j, $i < j < \delta$, tal que la estacionarización de p sobre $A \cup M_i$ es realizada en M por algún $\bar{a}$. así $\bar{a}$ realiza la estacionarización de p sobre $A \cup C \cup \bar{b}$.

Caso 3. Supongamos que (*iii*) se tiene. Si $\mathrm{cf}(\delta) \geq \lambda$ se sigue el resultado por la parte (*ii*) de este teorema. Así, supongamos que $\mathrm{cf}(\delta) < \lambda$. Si $\zeta < \delta$ es un ordinal limite, por (*ii*) tenemos que M_ζ es $(\mathrm{cf}(\zeta))$-pleno sobre A_ζ. Sea $\mu \leq \lambda$, un cardinal regular. Luego, para cada $\alpha < \delta$, $M_{\alpha+\mu}$ es un modelo μ-pleno, pues por hipótesis $\alpha + \mu < \lambda$. Así, M_δ es un modelo μ-pleno sobre A. Veamos ahora que M_δ es λ-pleno sobre A. Sea $p \in S^m(\bar{b})$ tipo estacionario, y sea p_C su estacionarización sobre $A \cup C \cup \bar{b}$, donde $C \subseteq M_\delta, |C| < \lambda$. Como $|C|^+$ es regular, entonces M_δ es $|C|^+$-pleno, y así p_C es realizado en M_δ. Por lo tanto M_δ es λ-pleno sobre A. □

Shelah en [15], demostró que si $I(\aleph_1, \mathcal{K}) < \aleph_1$, $V = L$ ó $\diamond_{\aleph_1}$, entonces $\mathcal{K}$ tiene un modelo de cardinalidad $\aleph_2$. El siguiente hecho generaliza ese resultado, pues se evita usar las supociones de diamante o de $V = L$.

Teorema 3.30. *1) Existe un modelo $M \in K$ tal que $||M|| = \aleph_2$*

2) Para cada $M \in K$ de cardinalidad $\aleph_1$, existe un modelo $N \in K$ tal que $M \precneqq N$ y

$||N|| = \aleph_2$.

Demostración. 1)La existencia de un modelo de cardinalidad $\aleph_1$ es dada por teorema 3.1. Por (2) podemos construir una cadena creciente y continua $\{M_i : i < \omega_2\}$de modelos en K, $||M_i|| = \aleph_1 (i < \omega_2)$. Como la clase es cerrada bajo uniones de cadenas elementales, concluímos que $M = \bigcup_{i<\omega_2} M_i$ está en K y tiene cardinalidad $\aleph_2$

2) Sea $\{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una cadena elemental creciente y continua de modelos contables de K tal que $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$(Es posible definirla usando Lowenheim-Skolem descendente). Definamos una cadena de modelos, $\{N_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, creciente y continua por inducción sobre en α, tal que M_α, N_α, M están en amalgamación estable. Para $\alpha = 0$, por teorema 3.1, existe $N_0^{'} \in K$ tal que $M_0 \precneqq N_0^{'}$. Como M_0 es bueno, por el lema 3.24 existe un automorfismo f(de $\mathcal{C}$) tal que $f \upharpoonright M_0 = id$, Dom$f = N_0^{'}$, y la tripla $M_0, f(N_0^{'}), M$ están en amalgamación estable. Veamos ahora que $f(N_0^{'}) \nsubseteq M$. De lo contrario, concluímos que $M_0, f(N_0^{'}), f(N_0^{'})$ están en amalgamación estable. Sea $d \in N_0^{'} \setminus M_0$($d$ existe dado que $N_0 \nsubseteq M_0$), y así tp$(f(d), f(N_0^{'}))$ es la d-estacionarización de tp$(f(d), M_0)$=tp(d, M_0)(pues $f \upharpoonright M_0 = id$). Como tp$(f(d), M_0)$ es estacionario, del lema 3.27 tenemos que tp$(f(d), M_0)$ es su estacionarización. Así tenemos:

$$\begin{aligned} R[tp(f(d), f(N_0^{'}))] &= R[tp(f(d), M_0)] \\ &= R[tp(d, M_0)] \\ &= R[tp(d, B)] \\ &= R[tp(d^{'}, B)], \end{aligned}$$

donde B es un conjunto finito,$B \subseteq M_0$, y $d^{'} \in M_0$ es tal que tp(d, B)=tp$(d^{'}, B)$(esto es posible por una propiedad del rango y dado que M_0 es modelo). Como tp$(d^{'}, M_0)$ es estacionario, del teorema 3.27 tenemos que tp$(d^{'}, f(N_0^{'}))$ es su estacionarización. Por unicidad tenemos que tp$(d^{'}, f(N_0^{'}))$=tp$(f(d), f(N_0^{'}))$. Lo que es una contradicción, ya que tp$(d^{'}, f(N_0^{'})) \vdash \{x \neq f(d)\}$ y tp$(f((d), f(N_0^{'})) \vdash \{x = f(d)\}$. Sea N_0=$f(N_0^{'})$. Para α ordinal limite, definimos $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$, y la hipótesis de inducción es satisfecha por el lema 3.28(3) y 3.29(1). Para $\alpha = \beta + 1$, como $N_\beta \cup M_{\beta+1}$ es contable y atómico, existe un modelo contable atómico $M_0^{'} \supseteq N_\beta \cup M_{\beta+1}$ y hacemos lo mismo que hicimos para $M_0^{'}$ y obtenemos $N_\alpha = N_{\beta+1} \gneqq N_\beta$ contable. Así $N = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$ es una extensión elemental propia atómica de M de cardinalidad $\aleph_1$. □

Capítulo 4

Excelencia

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de ciertas nociones de amalgamación y de bondad para sistemas plenos, es decir, un conjunto de modelos que satisface cierta propiedad de plenitud y se encuentran indexados por $\mathcal{P}^-(n)$ con $n < \omega$. Además, veremos que para cualquier $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema bueno[pleno] es posible encontrar una resolución de modelos M_s^α para cada $s \in \mathcal{P}^-(n)$, $\|M_s^\alpha\| = \aleph_0 + |\alpha|$, tal que para cada α el conjunto $\{M_s^\alpha : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ es un $(\aleph_0 + |\alpha|, \mathcal{P}^-(n))$-sistema bueno[pleno]. Esto nos permite concluir que es suficiente conocer los $(\aleph_0, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas para conocer los $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas. Se introducen las nociones de *bondad, existencia, unicidad* que permitirán conocer los $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas via ciertas teoremas de trasferencia para estas propiedades. Por último, demostraremos el teorema de Morley para clases excelentes usando la existencia de modelos primarios sobre la unión de modelos que pertenecen a un sistema pleno.

4.1 Sistemas buenos

Está sección está dedicada al estudio de las propiedades de los sistemas buenos. Probaremos un lema importante que nos permitirá concentrarnos en las propiedades de los sistemas buenos via una única enumeración para dicho sistema. Este lema es conocido con el nombre de *lema de simetria generalizado*.

Definición 4.1. 1) Un I-sistema $\mathcal{S}$ es un conjunto indexado $M_s(s \in I)$ tal que:

i) $\bigcup_{s\in I} M_s$ es un conjunto atómico,

ii) $s \leq t$ implica $M_s \subseteq M_t$,

iii) $M_{s\cap t} = M_s \cap M_t$.

2) Decimos que $\mathcal{S}$ es un (λ, I)-sistema, si $\|M_s\| = \lambda$ para cada $s \in I$

Definición 4.2. 1) Un I-sistema se dice ***pleno*** si para cada s, M_s es débilmente pleno sobre A_s.

2) Un I-sistema se dice ***bueno***, si cada enumeración $\bar{s} = \langle s(i) : i < j \rangle$ de I es buena para $\bar{s}$, es decir, para cada $l < j$:

i) $A_{s(l)}$ es bueno,

ii) Para cada $\bar{b}_m \in M_{s(m)}$ con $m \leq l$, existe $\bar{b}'_m \in M_{s(m)\cap s(l)}$ tal que:

a) $s(m) \leq s(l)$ implica, $\bar{b}'_m = \bar{b}'_m$,

b) $\bar{b}_0\hat{}\bar{b}_1\hat{}...$ y $\bar{b}'_0\hat{}\bar{b}'_1\hat{}...$ realizan el mismo tipo

iii) La tripla $A_{s(l)}, M_{s(l)}, \bigcup_{m<l} M_{s(m)}$ están en amalgamación estable.

Lema 4.3. *1) Si $J \subseteq I$, $\mathcal{S}^0 = \{M_s : s \in I\}$ un I-sistema [pleno][bueno], entonces $\mathcal{S}^1 = \{M_s : s \in J\}$ es un sistema [pleno][bueno] y $A_s^{\mathcal{S}^0} = A_s^{\mathcal{S}^1}$.*

2) Si $\langle s(0), ..., s(k-1)\rangle$ es una enumeración de I, entonces para cada l, $\{s(0), ..., s(l-1)\}$ es un segmento inicial de I.

3) Si $\{M_s : s \in I\}$ es un sistema bueno, $\langle s(0), ..., s(k-1)\rangle$ es una enumeración, entonces para cada l, $(A_{s(l)}, \bigcup_{i<l})$ satisface la condición de Tarski-Vaught, además para cada $t \in I$, $(A_t, \bigcup_{t\not<s} M_s)$ satisface la condición de Tarski-Vaught.

4) En la definición 4.2(2), el inciso (iii) es una consecuencia de los incisos (i) y (ii).

5) En la definición 4.2, podemos reemplazar (ii),(iii) por (a), (b), donde (a) es igual que (ii) con $b_l = \emptyset$ y (b) dice: Para cada $\bar{b} \in A_{s(l)}$, tp$(\bar{b}, \cup_{m<l} M_{s(m)})$ no rompe sobre algún subconjunto finito $B \subseteq A_{s(l)}$.

Demostración. 1) Como $g_s^I = g_s^J$, tenemos que $|s|_I = |s|_J$. Sea $n = |s|_I$. Así,

$$\begin{aligned} A_s^{\mathcal{S}} &= \bigcup_{t<s, t\in I} A_t^{\mathcal{S}^0} = \bigcup\{A_t^s : t = g_s^I(u), u \in \mathcal{P}^-(n)\} \\ &= \bigcup\{A_t^s : t \in g_s^J, u \in \mathcal{P}^-(n)\} = \bigcup_{t<s, t\in J} A_t^{\mathcal{S}^1} = A_s^{\mathcal{S}^1} \end{aligned}$$

2) Por definición de segmento inicial.
3) La primera parte del inciso es consecuencia directa de la definición 4.2(2)(iii). Ahora

probaremos la segunda parte. Fijemos $t \in I$. Sea $s(0)$ el nodo de I. Supongamos que hemos definido $\langle s(l) : l \leq i \rangle$ y definamos $s(i+1)$.
Sea $T_i = \{s \in I : s \nleq t\} \setminus \bigcup_{l \leq i} M_{s(l)}$. Elijamos $s(i+1) \in T_i$, tal que:

$$\text{Para ningún } s \in T_i,\ s(i+1) > s \qquad (*)$$

Como I es finito, esta construcción se detiene en algún paso $j-1$. Sea $s(j) = t$. Por definición de T_i y $(*)$ tenemos que $\langle s(i) : i < j \rangle$ no tiene repeticiones y cumple que si $s(i_1) \leq s(i_2)$, entonces $i_1 < i_2$. Fácilmente, podemos definir $s(l)$ para $j < l \leq k-1$ sin repeticiones tal que $\langle s(l) : l \leq k-1 \rangle$ es una enumeración de I. Por la primera parte de este inciso tenemos que $(A_{s(j)}, \bigcup_{l<j} M_{s(l)})$ satisface la condición de Tarski-Vaught. Como $A_{s(j)} = A_t$ y $\bigcup_{l<j} M_{s(l)} = \bigcup_{t \nless s} M_t$, concluímos el resultado.
4) Sea $\mathcal{S}$ un I-sistema, $\bar{s} = \langle s(i) : i < j \rangle$ una enumeración de I, y supongamos (i), (ii) de la definición 4.2 son satisfechas para un dado $l < j$. Debemos probar que $A_{s(l)}, M_{s(l)}, \bigcup_{m<l} M_{s(m)}$ están en amalgamación estable. Supongamos que $\models \phi[\bar{b}, \bar{a}]$, con $\bar{a}, \bar{b}$ en $A_{s(l)}, \bigcup_{i<l} M_{s(i)}$ respectivamente. Como $A_{s(l)} \subseteq M_{s(l)}$, por definición 4.2(2), existe $\bar{b}', \in A_{s(l)}$ tal que $\models \phi[\bar{b}', \bar{a}]$. Así $(A_{s(l)}, \bigcup_{m<l} M_{s(m)})$ satisface la condición de Tarski-Vaught. Dado que por hipótesis $A_{s(l)}$ es un conjunto bueno, sólo falta probar que para cada $\bar{b} \in M_{s(l)}$, $\text{tp}(\bar{b}, \bigcup_{m<l} M_{s(m)})$ no rompe sobre algún conjunto finito $B \subseteq A_{s(l)}$. Como $A_{s(l)}$ es un conjunto bueno, existe un conjunto finito $B \subseteq A_{s(l)}$ tal que $\text{tp}(\bar{b}, A_{s(l)})$ no rompe sobre B. Mostraremos que $\text{tp}(\bar{b}, \bigcup_{m<l} M_{s(m)})$ no rompe sobre B.
Sean $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \bigcup_{m<l} M_{s(m)}$, $\text{tp}(\bar{c}_1, B)$=$\text{tp}(\bar{c}_2, B)$. Por lo tanto debemos probar que $\text{tp}(\bar{c}_1, B \cup \bar{b}) = \text{tp}(\bar{c}_1, B \cup \bar{b})$. Dado que $A_{s(l)} \subseteq \bigcup_{m<l} M_{s(m)}$, podemos encontrar $\bar{b}_m$ en $M_{s(m)}$ para $m \leq l$ tal que $\bar{b}_l, \bar{b}, B \subseteq \bigcup\{\bar{b}_m : s(m) < s(l)\}$ y $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \subseteq \bigcup_{m<l} \bar{b}_m$. Por la definición 4.2(2), existe una función elemental f, Dom(f)=$\bigcup_{m \leq l} \bar{b}_m$, $f(\bar{b}_m)$=$\bar{b}'_m$ en$M_{s(m) \cap s(l)}$ y si $s(m) \leq s(l)$ entonces $f(\bar{b}_m) = \bar{b}_m$. Como $B \subseteq \bigcup\{\bar{b}_m : s(m) < s(l)\}$, tenemos que $f \restriction (B \cup \bar{b}) = id_{B \cup \bar{b}}$, y así $\text{tp}(\bar{c}_1, B \cup \bar{b})$=$\text{tp}(\bar{c}_2, B \cup \bar{b})$. Por lo tanto,

$$\text{tp}(f(\bar{c}_1, B)) = \text{tp}(\bar{c}_1, B) = \text{tp}(\bar{c}_2, B) = \text{tp}(f(\bar{c}_2), B). \ (\star)$$

Como $\bar{c}_i \subseteq \bigcup_{m<l} M_{s(m)}$, tenemos que $f(\bar{c}_i) \subseteq \bigcup_{m<l} M_{s(m) \cap s(l)} = A_{s(l)}$. Además, como $\text{tp}(\bar{b}, A_{s(l)})$ no rompe sobre B, de $(\star)$ deducimos que $\text{tp}(f(\bar{c}_1), B \cup \bar{b}) = \text{tp}(f(\bar{c}_2), B \cup \bar{b})$. Luego, como $\text{tp}(\bar{c}_i, B \cup \bar{b})$= $\text{tp}(f(\bar{c}_i), B \cup \bar{b})$, entonces $\text{tp}(\bar{c}_1, B \cup \bar{b}) = \text{tp}(\bar{c}_2, B \cup \bar{b})$.

5) Como (i),(a),(b) se tienen de (i),(ii),(iii), debemos ver la otra implicación. Supongamos (i),(a),(b). Basta probar (ii)(por (4)). Por (b), podemos encontrar un conjunto finito $B \subseteq A_{s(l)}$ tal que $\text{tp}(\bar{b}_l, A_{s(l)})$ no rompe sobre B. Como podemos suponer $B \subseteq \bigcup\{\bar{b}_m : s(m) < s(l)\}$, el resultado se sigue tomando $\bar{b}'_m (m < l)$ dados por (ii) y $\bar{b}'_l = \bar{b}_l$. $\square$

Lema 4.4. *Supongamos que el I-sistema $\{M_s : s \in I\}$ es bueno para la enumeración $\bar{s} = \langle s(0), ..., s(k-1)\rangle$, $J \subseteq I$ un segmento inicial, h una función de I en J, $h \upharpoonright J = id$, h preserva orden. Sea $A_J = \bigcup_{s \in J} A_s$. Entonces,*

1) *$(A_J, \bigcup_{s\in I})$ satisface la condición de Tarski-Vaught,*

2) *Para cada $\bar{b}_m \in M_{s(m)}(m < k)$, existe $\bar{b}'_m \in M_{h(s(m))}$, tal que si $s(m) \in J$ entonces $\bar{b}'_{s(m)} = \bar{b}_{s(m)}$, y*

$$tp(\bar{b}_0\hat{}\bar{b}_1\hat{}..., \emptyset) = tp(\bar{b}'_0\hat{}\bar{b}'_1\hat{}..., \emptyset)$$

Demostración. 1) Claramente 1) sigue de 2).

2) Probaremos que podemos encontrar $\bar{a}_m, \bar{c}_m, \bar{d}_m$ para $m < k$ tal que,

i) $\bar{a}_m \subseteq \bigcup_{i<m, s(i)<s(m)}(\bar{c}_i\hat{}\bar{d}_i), \bar{a}_m \subseteq A_{s(m)} y \bar{b}_m \subseteq \bar{c}_m\hat{}\bar{d}_m \subseteq M_{s(m)}$,

ii) $tp(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \vdash tp(\bar{c}_i, A_{s(i)})$, y así $tp(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \vdash tp(\bar{c}_i, \bigcup_{l<i} M_{s(l)})$,

iii) $tp(\bar{d}_i, A_{s(i)} \cup \bar{c}_i)$ y $tp(\bar{d}_i, \bigcup_{l<i} M_{s(l)} \cup \bar{c}_i)$ son estacionarizaciones de $tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i)$.

Para ello, probaremos primero por inducción descendente en $j \leq k$ que existen $\bar{a}^j_m, \bar{c}^j_m, \bar{d}^j_m (m \leq k)$, tal que i) se tiene para cada $m < k$ y $ii), iii)$ se tienen para cada i, $j \leq i < k$.
Si $j = k$, definamos $\bar{c}^k_m = \bar{b}^k_m \subseteq M_{s(m)}$, $\bar{a}^k_m = \bar{d}^j_m = \langle\rangle$.
Supongamos que hemos definido las tuplas para el caso $j+1$, y definamos para j.
Si $i < k$, $s(i) \nleq s(j)$, definamos $\bar{a}^j_i = \bar{a}^{j+1}_i$, $\bar{c}^j_i = \bar{c}^{j+1}_i$, $\bar{d}^j_i = \bar{d}^{j+1}_i$. Como $A_{s(j)} \subseteq M_{s(j)}$ y $c^{j+1}_j\hat{}d^{j+1}_j \subseteq M_{s(j)}$, entonces $tp(\bar{c}^{j+1}_j\hat{}\bar{d}^{j+1}_j, A_{s(j)}) \in D_{A_{s(j)}}$. Asi, por el lema 3.11, existen $\bar{a}^*_j \in A_{s(j)}, \bar{c}^*_j, \bar{d}^*_j \in M_{s(j)}$ tal que,

a) $\bar{c}^{j+1}_j\hat{}\bar{d}^{j+1}_j \subseteq \bar{c}^*_j\hat{}\bar{d}^*_j$

b) $tp(\bar{c}^*_j, \bar{a}^*_j) \vdash tp(\bar{c}^*_j, A_{s(j)})$,

c) $tp(\bar{d}^*_j, A_{s(j)} \cup \bar{c}^*_j)$ es una estacionarización de $tp(d^*_j, \bar{c}^*_j)$.

Definimos ahora $\bar{c}^j_j = c^*_j$, $\bar{d}^j_j = \bar{d}^*_j$ y $\bar{a}^j_j = \bar{a}^*_j$.
Ahora, si $i < k$ y $s(i) < s(j)$, entonces $i < j$. Luego, definamos $\bar{a}^j_j = \bar{a}^{j+1}_j, \bar{c}^j_i = \bar{c}^{j+1}_i$ y $\bar{d}^j_i = \bar{d}^{j+1}_i \cup (M_{s(i)} \cap \bar{a}^*_j)$. Así, hemos definido $\bar{a}^j_i, \bar{c}^j_i, \bar{d}^j_i$, para cada i.
Veamos que $\bar{a}^j_m, \bar{c}^j_m, \bar{d}^j_m$ satisfacen las condiciones $i), ii), iii)$. La condición i) es fácil.
ii) Si $i \neq j$, se tiene por hipótesis de inducción. Si $i = j$, entonces, como $(A_{s(i)}, \bigcup_{j<i} M_{s(j)})$

satisface la condición de Tarski-Vaught, y por b) tenemos ii). iii) Si $i \neq j$, se tiene por hipótesis de inducción. Si $i = j$, entonces, como $A_{s(l)}, M_{s(l)}, \bigcup_{l<j} M_{s(l)}$ están en amalgamación estable, del lema 3.27 y (c) tenemos (iii). Denotemos, $\bar{a}^j_m$, $\bar{c}^j_m$, $\bar{d}^j_m$ por $\bar{a}_i$, $\bar{c}_i$, $\bar{d}_i$. Por lo tanto,

ii)$'$ $tp(\bar{c}_i, \bigcup\{\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l : s(l) \leq s(i)) \vdash tp(\bar{c}_i, \bigcup_{l<i} \bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l)$,

iii)$'$ $tp(\bar{d}_i, \bigcup_{l<i}(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l) \cup \bar{c}_i)$ es una estacionarización de $tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i)$.

Veamos que ii)$'$ se tiene. Por i) y dado que $tp(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \vdash tp(\bar{c}_i, \bigcup_{l<i} M_{s(l)})$, tenemos que $tp(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \vdash tp(\bar{c}_i, \bigcup_{l<i} \bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l)$. Así $tp(\bar{c}_i, \bigcup\{\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l : s(l) \leq s(i)) \vdash tp(\bar{c}_i, \bigcup_{l<i} \bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l)$.

Veamos que iii)$'$ se tiene. Por i), iii) y monotonía del rango tenemos,

$$R[tp(\bar{d}_i, \textstyle\bigcup_{l<i} M_{s(l)} \cup \bar{c}_i)] \leq R[tp(\bar{d}_i, \bigcup_{l<i}(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l) \cup \bar{c}_i)] \leq R[tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i)]$$

Como $R[tp(\bar{d}_i, \bigcup_{l<i} M_{s(l)} \cup \bar{c}_i)] = R[tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i)]$ entonces, $R[tp(\bar{d}_i, \bigcup_{l<i}(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l) \cup \bar{c}_i)] = R[tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i)]$.
Definiremos, por inducción en i, una función elemental f_i con dominio $\bigcup_{l<i}(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l)$, y $f_i(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l) \in M_{h(s(l))}$, $f_l(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l) = \bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l$, tal que $(f)_i$ es creciente. El caso $i = 0$, es trivial. Supongamos que hemos definido f_i, y procedamos a definir f_{i+1}. Para ello, consideremos los dos siguientes casos, *Caso 1.* $s(i) \notin J$
De la definición de f_i, tenemos que $\bigcup\{f_i(\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l) : s(l) \leq s(i), l < i\} \subseteq M_{h(s(i))}$. Dado que el I-sistema es bueno, y h preserva el orden, existe $\bar{c}_i^{'} \in M_{h(s(i))}$ tal que si extendemos $g_i = f_i \restriction \{\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l : l < i, s(l) \leq s(i)\}$, adjuntando como imagen de $\bar{c}_i$, $\bar{c}_i^{'}$, obtenemos una función elemental $g_i^{'}$. Por $ii)'$, $f_i \cup g_i^{'}$ es una función elemental $f_i^{'}$. Como $tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i)$ es estacionario, entonces $g_i^{'}$ también lo es. Sea $B_i \subseteq M_{h(s(i))}$, tal que

$$p = tp(f_i[\bar{c}_0\hat{\ }\bar{d}_0\hat{\ }, ..., \hat{\ }\bar{c}_{i-1}\hat{\ }\bar{d}_{i-1}], M_{h(s(i))})$$

y $p \restriction B_i$ tienen el mismo rango, $\bar{c}_i^{'} \subseteq B_i$, y elijamos $\bar{d}_i^{'} \in M_{h(s(i))}$ que realiza la estacionarización de $g_i^{'}(tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i))$ sobre B_i. Por el lema de simetría, tenemos que
$tp(\bar{d}_i^{'}, f_i[\bar{c}_0\hat{\ }\bar{d}_0\hat{\ }...\hat{\ }\bar{c}_{i-1}\hat{\ }\bar{d}_{i-1}] \cup \bar{c}_i^{'})$ es la estacionarización de $g_i^{'}(tp(\bar{d}_i, \bar{c}_i))$. Así $f_i^{'} \cup \{\bar{d}_i \longrightarrow \bar{d}_i^{'}\}$ es una función elemental.

Caso 2 $s(i) \in J$
Si definimos $f_{i+1}(\bar{c}_{i+1}\hat{\ }\bar{d}_{i+1}) = \bar{c}_i\hat{\ }\bar{d}_i$. Como $s(i) \in J$, por definición de f_i tenemos que f_i es la identidad en $\bigcup\{\bar{c}_l\hat{\ }\bar{d}_l : l < i, s(l) \leq s(i)\}$, y así f_{i+1} es una función elemental. $\square$

El siguiente lema nos brinda cierta facilidad para conocer si un cierto sistema es bueno. Este dice que si deseamos saber si un sistema es bueno, sólo debemos concentrarnos en la bondad de una sola enumeración.

Lema 4.5 (Lema de simetría generalizado). *Para sistemas finitos en la definición de sistema bueno, podemos reemplazar "para cada enumeración", por "para alguna enumeración".*

Demostración. Debemos probar que si el sistema es bueno para $\bar{s} = \langle s(0), ..., s(k-1)\rangle$, entonces es bueno para $\bar{t}$, donde $\bar{t} = \langle t(0), ..., t(k-1)\rangle$ satisface que existe l^*, $s(i) = t(i)$ para $i \neq l^*, l^*+1$, y $t(l^*) = s(l^*+1)$, $t(l^*+1) = s(l^*)$(tal que $s(l^*+1) \ngeq s(l^*)$). Para $l \neq l^*, l^*+1$, las condiciones son las mismas que para $\bar{s}$. Sea $l = l^*$. Sean $\bar{b}_m \in M_{t(m)}$, $m \leq l^*$. Entonces $\bar{b}_m \in M_{s(m)}$, si $m < l^*$, y $\bar{b}_{l^*} \in M_{s(l^*+1)}$. Como $\bar{s}$ es bueno, existe $\bar{b}'_m \in M_{s(m)\cap s(l^*)} = M_{s(m)\cap t(l^*)}$, $m < l^*$ y $\bar{b}_{l^*+1} = \bar{b}_{l^*+1}$, tal que $\bar{b}_0\hat{}\bar{b}_1\hat{}...$ y $\bar{b}'_0\hat{}\bar{b}'_1\hat{}...$ realizan el mismo tipo. Veamos ahora que se tiene el caso $l = l^*+1$. Por el lema 4.3(5) y lema 4.4, se sugiere probar la condición (b) del lema 4.3(5). Sean $\bar{b} \in M_{t(l^*+1)}$, $\bar{c} \in M_{t(l^*)}$. Como $\bar{s}$ es bueno, tenemos que para cada $\bar{b} \in M_{s(l^*)}$, $tp(\bar{b}, \bigcup_{i<l^*} M_{s(i)})$ es la estacionarización de un conjunto finito $B \subseteq A_{s(l^*)}$. Definamos,

$$D = \bigcup_{i<l^*} M_{t(i)}$$

Por definición de $\bar{t}$, $tp(\bar{b}, D)$ es la estacionarización de $B \subseteq A_{t(l^*+1)}$, y $tp(\bar{c}, D \cup M_{t(l^*+1)})$ es la estacionarización de $tp(\bar{c}, C)$ para algún conjunto finito $C \subseteq A_{t(l^*)} \subseteq D$. Como $\bar{b} \in M_{t(l^*+1)}$, $tp(\bar{c}, D \cup \bar{b})$ es la estacionarización de $tp(\bar{c}, C)$.
Como para cada $\bar{c} \in C$,

$$R[tp(\bar{c}, D \cup \bar{b})] = R[tp(\bar{c}, D)],$$

entonces, por la propiedad de simetría,

$$R[tp(\bar{b}, D \cup \bar{c})] = R[tp(\bar{b}, D)] = R[tp(\bar{b}, B)].$$

Así,

$$R[tp(\bar{b}, D \cup M_{t(l^*)})] = R[tp(\bar{b}, B)].$$

Por lo tanto, $tp(\bar{b}, D \cup M_{t(l^*)})$ no rompe sobre B.

□

Lema 4.6. *Sea $\mathcal{S} = \{M_s : s \in I\}$ un I-sistema, entonces $\mathcal{S}$ es bueno, si y sólo si, lo siguiente se satisface:*

a) cada $A_{s(m)}$ es bueno,

b) si J es un segmento inicial de I, entonces para algún $s \in J$, no existe $t \in J$, $s < t$, tal que para cada $\bar{b} \in M$, tp$(\bar{b}, \bigcup_{t \in J, t \neq s} M_t)$ no rompe sobre algún conjunto finito $B \subseteq A_s$.

Demostración. Probaremos por inducción sobre k, que si J es un segmento inicial de I, $|J| = k$, entonces $\{M_s : s \in J\}$ es un sistema bueno, suponiendo (a), (b). Si $n = 0$ es trivial. Sea J segmento inicial de I, $|J| = k+1$. Sea $s \in J$ dado por (b), y sea $\langle s(m) : m \leq k \rangle$ una enumeración de J tal que $s(k) = s$. Probemos (i), (ii) de la definición 4.2(2). Si $l < k$, se tiene por hipótesis de inducción. Supongamos $l = k$. Por hipótesis (a), claramente (i) se tiene. Probemos ahora (ii). Por hipótesis de inducción, $\{M_{s(m)} : m < k\}$ es bueno. Sean $\bar{b}_m M_{s(m)} (m \leq k)$. Debemos encontrar $\bar{b}'_m \in M_{s(m) \cap s(k)}$ como en la definición 4.2(2). Claramente no se pierde generalidad al suponer que $B \subseteq \bigcup \{\bar{b}_m : s(m) < s(k)\}$, donde B es como en (b). Así tp$(\bar{b}, \bigcup_{t \in J, t \neq s} M_t)$ no rompe sobre $\bigcup \{\bar{b}_m : s(m) < s(k)\}$. Como $\{M_{s(m)} : m < k\}$ es bueno, por lema 4.4 aplicado a $J \setminus \{s(k)\}$, $\{s(m) : s(m) < s(k)\}$ y h,$h(s(m)) = s(m) \cap s(k)$ en lugar de I,J,h respectivamente, existe $\{\bar{b}'_m : m < k\}$ que cumplen (ii) cuando tomamos $\bar{b}'_k = \bar{b}_k$.

Veamos ahora la otra dirección. Sea $\mathcal{S} = \{M_s : s \in I\}$ un I-sistema bueno. La condición (a) se tiene dado que $\mathcal{S}$ es un sistema bueno(por definición). Sea J segmento inicial de I, y $s \in J$ tal que no existe $t \in J$ y $s < t$(existe, pues I es finito). Veamos que s satisface (b). Sea $\bar{b} \in M_s$, y sea $\bar{s} = \langle s(i) : i < k \rangle$ una enumeración de I tal que $\bar{s}' = \langle s(i) : i < j \rangle$ es una enumeración de J y $s(j-1) = s$(es posible porque J es un segmento inicial de I). Como $\mathcal{S}$ es bueno, la tripla $A_{s(j-1)}, M_{s(j-1)}, \bigcup_{m<j-1} M_{s(m)}$ están en amalgamación estable. Así tp$(\bar{b}, A_{s(j-1)} \cup \bigcup_{m<j-1} M_{s(m)})$ no rompe sobre algún conjunto finito $B \subseteq A_{s(j-1)}$. Por definición de la sucesión $\bar{s}$, tenemos que $A_s = A_{s(j-1)}$ y $\bigcup_{t \in J, t \neq s} M_s = \bigcup_{m<j-1} M_{s(m)}$, y así se satisface (b). □

4.2 Excelencia

En está sección discutiremos las propiedades que llamaremos *bondad, existencia y unicidad*. Probaremos unos teoremas de trasferencia para estas propiedades que nos permitirán concluir que los sistemas plenos buenos que debemos conocer son los $(\aleph_0, \mathcal{P}^-(n))$-sistemas para cada $n < \omega$. Esto conduce a la noción de *clase excelente* pues definimos esta a satisfacer propiedades de $(\aleph_0, n)$-*bondad*, $(\aleph_0, n)$-*unicidad* y $(\aleph_0, n)$-*existencia* para cada $n < \omega$ las cuales nos permitirán conocer cada $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema para cada $\lambda \geq \aleph_0$.

Definición 4.7. 1) K satisface(tiene) la propiedad de (λ, n)-bondad si para cada $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno $\mathcal{S}$, $A_n^{\mathcal{S}}$ es un conjunto bueno.

2) K satisface(tiene) la propiedad de (λ, n)-existencia si cada $(\lambda, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema pleno y bueno $\mathcal{S}$ puede ser completado a un $(\lambda, \mathcal{P}(n))$-sistema débilmente bueno y pleno, es decir, podemos encontrar un modelo M débilmente pleno sobre $A_n^{\mathcal{S}}$, $||M|| = \lambda$.

3) K satisface(tiene) la propiedad de (λ, n)-unicidad si dados $\mathcal{S}$ un $(\lambda, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema, $M_l(l = 0, 1)$ modelos tal que $A_n^{\mathcal{S}} \subseteq M_l$, $||M_l|| = \lambda$, M_l débilmente plenos sobre $A_n^{\mathcal{S}}$, entonces M_0, M_1 son isomorfos spbre $A_n^{\mathcal{S}}$.

4) K satisface(tiene) la propiedad de (λ, n)-no unicidad, si para cualquie $(\lambda, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema bueno y pleno $\mathcal{S}$, existen $M_l(l = 0, 1)$ débilmente plenos sobre $A_n^{\mathcal{S}}$, $||M_l|| = \lambda$ y no existe M débilmente pleno sobre $A_n^{\mathcal{S}}$ e inmersones elementales $f_l : M_l \longrightarrow M$, $f_0 \upharpoonright A_n^{\mathcal{S}} = f_1 \upharpoonright A_n^{\mathcal{S}} = id$.

5) K satisface(tiene) la propiedad de (λ, n)-x fuerte, donde x es uno de los siguientes: bondad, existencia, unicidad o no unicidad, si en las definiciones dadas de 1) a 4) no requerimos que los sistemas sean plenos, pero en 3) los modelos M_l aun deben ser débilmente plenos.

Lema 4.8. *1) La propiedad de $(\aleph_0, n)$-existencia fuerte siempre se tiene.*

2) Las propiedades de $(\aleph_0, n)$-bondad(fuerte), $(\aleph_0, n)$-existencia(fuerte) y $(\aleph_0, n)$-no unicidad(fuerte) se tienen para $n = 0, 1$.

3) La propiedad de $(\aleph_0, n)$-unicidad(fuerte) es equivalente a la propiedad de$(\aleph_0, n)$-bondad(fuerte).

4) Si la propiedad de $(\lambda, 1)$-existencia se tiene, entonces la propiedad de (λ, n)-existencia se tiene, si y sólo si, para cada $(\lambda, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema pleno y bueno, existe M tal que $A_n^{\mathcal{S}} \subseteq M$.

Demostración. 1) Sea $\mathcal{S}$ un $(\aleph_0, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema, luego $A_n^{\mathcal{S}}$ es un conjunto atómico contable, así existe M modelo contable tal que $A_n^{\mathcal{S}} \subseteq M$.
2) La propiedad de $(\aleph_0, n)$-bondad se tiene fácilmente(n=0,1), pues $\mathcal{P}^{-}(n) = \emptyset, \{\emptyset\}$, para $n = 0, 1$ respectivamente, y todo modelo contable M es bueno. La propiedad $(\aleph_0, 0)$-existencia fuerte es trivial, pues $\mathcal{K}_{\aleph_0} \neq \emptyset$. Sea M un modelo contable, y sea $p \in S^m(\bar{b})$ estacionario. Claramente la dimensión de p para $(\emptyset, |M|, |M|)$ es $\geq \aleph_0$. Así M es débilmente pleno y se satisface la propiedad de $(\aleph_0, 1)$-existencia. Dado que existen modelos universales sobre modelos contables, se satisface la propiedad de $(\aleph_0, 1)$-existencia(La propiedad de $(\aleph_0, 1)$-existencia fuerte se tiene como caso particular de (1)).

3) Como bondad implica unicidad, debemos ver la otra dirección. Sea $\mathcal{S}$ un $(\aleph_0, \mathcal{P}^-(n))$-sistema. por (1) existe M, $A_n^{\mathcal{S}} \subseteq M$. Sea N modelo universal contable sobre M, así N es pleno sobre M, de hecho N es pleno sobre $A_n^{\mathcal{S}}$. Sea $M_1 \supseteq A_n^{\mathcal{S}}$, y sea N_1 modelo universal contable sobre M_1, y así es pleno sobre $A_n^{\mathcal{S}}$. Por lo tanto por la propiedad de $(\aleph_0, n)$-unicidad, N, N_1 son isomorfos sobre A_n. Y así concluímos que N es universal sobre $A^{\mathcal{S}}$. Así $A_n^{\mathcal{S}}$ es bueno por los lemas 3.7y 3.8.(En el caso que se tenga la propiedad de $(\aleph_0, n)$-unicidad fuerte, entonces M, M_1 son isomorfos, y así concluímos nuevamente que N es universal sobre $A_n^{\mathcal{S}}$).
4)Supongamos que la propiedad de (λ, n)-existencia se tiene. Sea $\mathcal{S}$ un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno. Por hipótesis, existe M, $A_n^{\mathcal{S}} \subseteq M$. Para la otra dirección, tomemos $\mathcal{S}$ un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno. Por hipótesis, existe $M \supseteq A_n^{\mathcal{S}}$. Por la propiedad de $(\lambda, 1)$-existencia, existe un modelo M_1, $||M_1|| = \lambda$, pleno sobre M. Así M_1 es pleno sobre $A_n^{\mathcal{S}}$. □

Teorema 4.9. *1) Supongamos:*

a) I_1 es un segmento inicial de I_2, $n(I_2) \leq n^*$.

b) $\mathcal{S}^1 = \{M_s : s \in I_1\}$ es un (λ, I_1)-sistema pleno y bueno.

c) $\mathcal{K}$ satisface las propiedades de $(\lambda, \leq n^*)$-existencia y bondad.

Entonces podemos completar $\mathcal{S}^1$ a un (λ, I_2)-sistema pleno y bueno.

2) Si en (1), $\mathcal{K}$ satisface la propiedad de $(\lambda, \leq n)$-unicidad, entonces la completación de $\mathcal{S}^1$ dada por (1) es única.

Demostración. 1) Sea $\bar{s}_l = \{s(i) : i < k_l\}$ una enumeración de I_l, para $1, 2$. Podemos tomar $\bar{s}_1 \subseteq \bar{s}_2$, dado que I_1 es un segmento inicial de I_2. Definamos ahora $M_{s(i)}$ para $k_1 \leq i < k_2$ por inducción sobre i. Por el lema 4.5 es suficiente probar que el conjunto $\{M_{s(i)} : i < k_2\}$ es bueno para la enumeración $\bar{s}_2$. Debemos definir $M_{s(i)}$ modelos débilmente plenos sobre $A_{s(i)}$ a satisfacer las condiciones $(i), (ii), (iii)$ de la definición 4.2(2), bajo la suposición que el conjunto $\{M_{s(j)} : j < i\}$ es un sistema pleno y bueno, $||M_{s(j)}|| = \lambda$.
Sea $g : \mathcal{P}^-(n) \longrightarrow I_2, n = |s(i)|$. Por el lema 4.5, tenemos que $\{M_{g(s)} : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ es un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno. Por la propiedad de (λ, n)-existencia , existe un modelo M pleno sobre $\bigcup\{M_{g(s)} : s \in \mathcal{P}^-(n)\} = A_{s(i)}, ||M|| = \lambda$, y por la propiedad de (λ, n)-bondad tenemos que $A_{s(i)}$ es un conjunto bueno, así hemos satisfecho la condición (i) de la definición 4.2(2). Como $(A_{s(i)}, \bigcup_{j<i} M_{s(j)})$ satisface la condición de Tarski-Vaught, por el lema 3.24, existe una función elemental f, $f \restriction A_{s(i)} = id$, tal que la tripla $A_{s(i)}, f(M), \bigcup_{j<i} M_{s(j)}$ están en amalgamación estable, y $f(M)$ es débilmente pleno sobre

$A_{s(i)}$. Así, si definimos $M_{s(i)} = f(M)$, por el lema 4.6 concluímos que $M_{s(i)}$ satisface las condiciones requeridas.
2) Seguimos la prueba de 1) y usamos $(\lambda, \leq n^*)$-unicidad para ver que M es único sobre $A_{s(i)}$. Así concluímos que $M_{s(i)}$ es único sobre $A_{s(i)}$. □

Ahora, veremos que del teorema anterior podemos deducir la existencia de $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema, si se tienen la propiedades de $(< \lambda, n)$-bondad y $(< \lambda, n)$-existencia.

Corolario 4.10. *Sea $n > 1$. Supongamos que las propiedades de $(\lambda, < n)$-existencia y $(\lambda, < n)$-bondad se tienen. Entonces existe un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno, y es único si además se satisface la propiedad de $(\lambda, < n)$-unicidad.*

Demostración. Sea $I_1 = \{\emptyset\}$, $I_2 = \mathcal{P}^-(n)$ y $\mathcal{S}^1 = \{M_s : s \in I_1\}$, donde M_s es un modelo pleno, $||M_s|| = \lambda(M_s$ existe dado que tenemos la propiedad de $(\lambda, 0)$-existencia). Dado que $n(I_2) \leq n$, del teorema 4.9(1) concluímos que podemos completar $\mathcal{S}^1$ a un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno $\mathcal{S}^2$. Si además se satisface la propiedad de $(\lambda, < n)$-unicidad, por teorema 4.9(2) concluímos que $\mathcal{S}^2$ es único salvo isomorfismo sobre $\mathcal{S}^1$. Además $M_s(s \in I_1)$ es único salvo isomorfismo ya que se satisface la propiedad de $(\lambda, 0)$-unicidad. Así concluimos que existe un único $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno salvo isomorfismo. □

Teorema 4.11. *1) Si A es un conjunto atómico, podemos encontrar enumerables funciones de A en A tal que, $B \subseteq A$ es cerrado bajo esas funciones, entonces*

a) (B, A) satisface la condición de Tarski-Vaught.

b) A es bueno, si y sólo si, B es bueno.

Lema 4.12. *Supongamos que $\mathcal{S} = \{M_s : s \in I\}$ es un (λ, I)-sistema [pleno]bueno. Si la propiedad de $(< \lambda, n(I) + 1)$-bondad se tiene, entonces podemos definir $M_s^\alpha(\alpha < \lambda)$ tal que:*

a) M_s^α es creciente, continua, $\|M_s^\alpha\| = \aleph_0 + |\alpha|, M_s = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_s^\alpha$,

b) $\mathcal{S}^\alpha = \{M_s^\alpha : s \in I\}$ es un $(\aleph_0 + |\alpha|, I)$-sistema [*pleno*]*bueno,*

c) para $\alpha < \beta$, $\mathcal{S}^{\alpha,\beta}$ es un sistema $(\aleph_0 + |\alpha|, I \times \{\alpha, \beta\})$[pleno]bueno, donde $M^{\mathcal{S}^{\alpha,\beta}_{\langle s,\gamma\rangle}}$

Lema 4.13. *La propiedad de $(\aleph_0, n)$-bondad implica la propìedad de (λ, n)-bondad, para cada λ.*

Teorema 4.14. *Sea $\lambda > \aleph_0$. Si las propiedades de $(< \lambda, \leq n + 1)$-unicidad y $(< \lambda, \leq n + 1)$-bondad se tienen, entonces la propiedad de (λ, n)-unicidad se tiene.*

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{M_s : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema pleno y bueno, y supongamos para $l = 0, 1$ que M_n^l, $||M_n^l|| = \lambda$, completan el sistema $\mathcal{S}$ a sistemas $\mathcal{S}_l$, es decir, $M_n^{\mathcal{S}_l} = M_n^l$ y M_n^l son modelos plenos sobre A_n. Luego por lema 4.12 obtenemos modelos $M_s^{l,\alpha}$. S.p.d.g tenemos para $s \in \mathcal{P}^-(n), M_s^{0,\alpha} = M_s^{1,\alpha}$. Definimos por inducción sobre $\alpha < \lambda$ un isomorfismo f_α de $M_n^{0,\alpha}$ en $M_n^{1,\alpha}$, $(f_\alpha)_\alpha$ creciente, $f_\alpha \restriction A_n^\alpha = \mathrm{id}_{A_n^\alpha}$. Por la propiedad de $(< \lambda, n)$-unicidad podemos definir f_α, con $\alpha = 0$. Y si α es un limite ordinal, definimos $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Si $\alpha = \beta + 1$, tomamos g_β una extensión de f_β cuya restricción a A_n^α es la función identidad. Así g_β es un isomorfismo de $A_{n+1}^{\mathcal{S}_0^{\beta,\alpha}}$ en $A_{n+1}^{\mathcal{S}_1^{\beta,\alpha}}$, y por la propiedad de $(< \lambda, n+1)$-unicidad, podemos extender g_β a un isomorfismo f_α de $M_n^{0,\alpha}$ en $M_n^{1,\alpha}$, pues $A_n^\beta, M_n^{l,\alpha}, A_n^\alpha$ están en amalgamación estable. $\square$

El siguiente gráfico ilustra la construcción del isomorfismo en el lema anterior cuando $n = 2$.

$$\begin{tikzcd}
M^{1,\alpha}_{\{0\}} \arrow[rr] & & M^{1,\alpha}_{\{0,1\}} & \\
& M^{1,\alpha}_0 \arrow[ul] \arrow[rr] & & M^{1,\alpha}_{\{1\}} \arrow[ul] \\
M^{1,\beta}_{\{0\}} \arrow[uu] \arrow[rr] & & M^{1,\beta}_{\{0,1\}} \arrow[uu] & \\
& M^{\beta}_0 \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[rr] & & M^{0,\beta}_{\{1\}} \arrow[ul] \arrow[uu]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^{0,\alpha}_{\{0\}} \arrow[rr] & & M^{0,\alpha}_{\{0,1\}} & \\
& M^{0,\alpha}_0 \arrow[ul] \arrow[rr] & & M^{0,\alpha}_{\{1\}} \arrow[ul] \\
M^{0,\beta}_{\{0\}} \arrow[uu] \arrow[rr] & & M^{0,\beta}_{\{0,1\}} \arrow[uu] & \\
& M^{\beta}_0 \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[rr] & & M^{0,\beta}_{\{1\}} \arrow[ul] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.15. *Sea $\lambda > \aleph_0$. Si las propiedades de $(< \lambda, \leq n+1)$-existencia y $(< \lambda, \leq n)$-bondad se tienen, entonces la propiedad de (λ, n)-existencia se tiene.*

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{M_s : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema, y sea $M_s^\alpha(\alpha < \lambda, s \in \mathcal{P}^-(n))$ como en la conclusión 4.12. Así la propiedad de $(< \lambda, \leq n+1)$-bondad se tiene. definamos por inducción sobre $\alpha < \lambda$, un modelo M_n^α tal que:

(a) M_n^α es creciente y continua
(b) $A_n^\alpha \subseteq M_n^\alpha$, M_n^α es plenos sobre A_n^α, y $\|M_n^\alpha\| = \aleph_0 + \alpha$,
(c) $A_n^\alpha, M_n^\alpha, A_n^{\alpha+1}$ están en amalgamación estable,
(d) para cada $c \in M^{\alpha_n}$, y tipo estacionario $p \in D_c$, la estacionarización de p sobre $M_n^\alpha \cup A_n^{\alpha+1}$ es realizado en $M_n^{\alpha+1}$.

Por la propiedad de $(< \lambda, n)$-existencia podemos definir M_n^0 y por lema 3.24 puedo definir los modelos tal que se satisfaga la condición (c). En el caso de α ordinal limite, de los lemas 3.28(3) y 3.29 las condiciones se satisfacen. Supongamos ahora, $\alpha = \beta + 1$. Así $\mathcal{S}^{\beta,\alpha}$ es un sistema pleno y bueno. Además M_n^β es pleno sobre A_n^β y $A_n^\beta, M_n^\beta, A_n^\alpha$

están en amalgamación estable. Para $s \in \mathcal{P}^-(n+1)$, sea $M_s^\star$ M_s^β si $s = n$, y $M_{s-\{n\}}^\alpha$ si $n \in s \in \mathcal{P}^-(n+1)$. Así $\{M_s^\star : s \in \mathcal{P}^-(n+1)\}$ es un sistema pleno y bueno por el lema 4.6. Por la propiedad de $(<\lambda, n+1)$-existencia, podemos definir M_n^α un modelo que satisfaga (a), (b), (d)((d) se tiene dado que M_n^α es pleno sobre $M_n^\beta \cup A_n^\beta$). Nuevamente por lema 3.24, podemos suponer que M_n^α cumple la propiedad (c). Si definimos $M_n = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_n^\alpha$. Por el lema 3.27 tenemos que la estacionarización de p sobre $M_n^\beta \cup A_n^\beta$ es realizada en $M^{\alpha+1}$. Del lema 3.29(iii), tenemos que M_n es débilmente pleno sobre A_n. □

Teorema 4.16. *Sea $n > 1$. Si las propiedades de (λ, n)-existencia, $(\lambda, 1)$-existencia, $(\lambda, 1)$-unicidad se tienen y la propiedad de (λ, n)-no unicidad falla, entonces para algún $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema $\mathcal{S}$ existe un modelo universal sobre A_n de cardinalidad λ.*

Definición 4.17. Una clase de modelos K es excelente si para cada n la clase tiene las propiedades de $(\aleph_0, n)$-bondad, $(\aleph_0, n)$-existencia y $(\aleph_0, n)$-unicidad.

Teorema 4.18. *Si K es excelente, entonces*

1) K tiene las propiedades de (λ, n)-bondad, (λ, n)-existencia y (λ, n)-unicidad.

2) en K existe un único modelo pleno de cardinalidad λ, para cada λ

Demostración. 1)Para $\lambda = \aleph_0$ se tiene el resultado por hipótesis. Por lema 4.12 tenemos que la clase K tiene la propiedad de (λ, n)-bondad para cada λ. Sea $\lambda > \aleph_0$ y supongamos por hipótesis de inducción que tenemos las propiedades de $(<\lambda, n)$-existencia y $(<\lambda, n)$-unicidad, para cada n. Por teoremas 4.14 y 2.4 tenemos que K tiene las propiedades de (λ, n)-unicidad y (λ, n)-existencia para cada n.
2) Por 1) tenemos que clase tiene la propiedad de $(\lambda, 0)$-existencia, es decir, existe un modelo pleno de cardinalidad λ y es único salvo isomorfismos, pues por 1) la clase K tiene la propiedad de $(\lambda, 0)$-existencia. □

Lema 4.19. *Si K es excelente, entonces para cada $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema, tenemos que existe un modelo primario sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s$.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre λ. Si $\lambda = \aleph_0$, entonces existe un modelo primario sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s$ por la propiedad de $(\aleph_0, n)$-bondad. Supongamos ahora que para cada $\kappa < \lambda$, existe un modelo primario sobre cada $(\kappa, \mathcal{P}^-(n))$-sistema. Sea $\mathcal{S}$ un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sistema. Por lema 4.12, existe una resolución M_s^α, para cada $\alpha < \lambda$, con $\|M_n^\alpha\| = \aleph_0 + |\alpha|$. Como $\mathcal{S}^\alpha = \{M_s^\alpha : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ es un $(\aleph_0 + |\alpha|, n)$-sistema, entonces existe un modelo primario sobre N_α sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s^\alpha$, para cada $\alpha < \lambda$. Podemos suponer que si $\alpha_1 < \alpha_2 < \lambda$ entonces $N_{\alpha_1} \prec N_{\alpha_2}$(dado que N_α son primos sobre A).

Definamos $N = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha^\lambda$. Veamos que N es primario sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s$. Para cada $\alpha < \lambda$, $N_\alpha = \bigcup_{s\subset n} M_s^\alpha \cup \{a_i^\alpha : i < \aleph_0 + |\alpha|\}$, donde $(a_i^\alpha : i < \aleph_0 + |\alpha|)$ es la construcción de N_α sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s^\alpha$. Construyamos una construcción $(a_i : i < \lambda)$ para N sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s$. Sea $B = \bigcup_{\alpha<\lambda}\{a_i^\alpha : i < \alpha\}$ y $a_0 = a_l$, donde

$$l = \min\{(\alpha, i) : a_i^\alpha \in B \setminus \bigcup_{s\subset n} M_s^\alpha, \alpha < \lambda\},$$

y $(\alpha, i) \leq (\beta, j)$, si y sólo si, $\alpha \leq \beta$ y $i \leq j$. Supongamos que hemos definido $(a_j : j < i)$. Tomemos $a_{i+1} = a_{l'}$, donde

$$l' = \text{mín } \{(\alpha, j < \aleph_0 + |\alpha|) : tp(a_j^\alpha, \bigcup_{s\subset n} M_s \cup \{a_j : j \leq i\}) \text{ es aislado, y } a_j \in B \setminus \bigcup_{s\subset n} M_s^\alpha, \alpha < \lambda\}.$$

Así $(a_i : i < \lambda)$ es una construcción de N sobre $\bigcup_{s\subset n} M_s$.

□

Teorema 4.20. *Sea K una clase excelente. Si K es categórica en al menos un cardinal no contable, entonces K es categórica en cada cardinal no contable.*

Demostración. Sea μ el primer cardinal no contable tal que K no es μ-categórica. Por teorema 4.18(2), existe un modelo $M \in K$ que no es pleno. Entonces existe un tipo estacionario $p \in S(c)$ con c finito en M, y A de cardinalidad $\kappa < \mu$, tal que su estacionarización $q \in A$, no es realizado en M. Sea $(M_i : i < \kappa^+)$ una seciencia creciente y continua de modelos, con $A \subseteq M_0$, $M_i \prec M, M_{i+1} \neq M_i$. Elijamos $a_i \in M_{i+1} \setminus M_i$ tal que $\text{tp}(a_i, M_i)$ no rompe sobre b_i, para $i < \kappa^+$. Por el lema de *Fodor*, podemos suponer que cada $b_i \in M_0$. Además por ω-estabilidad podemos suponer que $\text{tp}(a_i, M_0)$ es constante para cada $i < \kappa^+$, y $b_i = b$ para cada $i < \kappa^+$. Por lo tanto, tenemos un tipo $r \in S(b)$ y $(a_i : i < \kappa^+)$ tal que $\text{tp}(a_i, M_i)$ extiende r y no rompe sobre b. Así, en particular $(a_i : i < \kappa^+)$ es una secuencia indiscernible. Sea $(N_n : n < \omega)$ una cadena se modelos creciente y continua de modelos contables

$$(N_n : n < \omega),$$

tal que $bc \in N_0, N_n \prec M_n, a_n \in N_{n+1} \setminus N_n$ realizan la d-estacionarización de r en $S(N_n)$, y N_n no realiza el tipo $q^\star = q \restriction A \cap N_0$. Sea $(N_i : i < \lambda)$ una cadena creciente, continua de modelos tal que $a_i \in N_{i+1}$ realiza la d-estacionarización de r en $S(N_i)$ y N_{i+1} es primario sobre $N_i a_i$. Sea $N_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} N_i$. Así N_λ es constrible sobre $N_\omega \cup \{a_i : i < \lambda\}$. Veamos ahora que N_λ no es pleno. Supongamos que $d \in N_\lambda$ realiza $q^\star$. Así $\text{tp}(d, N_\omega \cup \{a_i : i < \lambda\}) \models q^\star$, y es aislado sobre $a \cup a_{i_1}...a_{i_m}$, con $a \in N_n$ y $n < i_1 < ... < i_m < \lambda$. Por indiscernibilidad de $(a_i : n \leq i < \lambda)$, podemos suponer que $i_1 < ... < i_m < \omega$. Así, $q^\star$ es realizado en N_{n+1}. □

Conclusiones

En este capítulo concluimos con la demostración del teorema de Morley para cada clase excelente cuya prueba está basada en poder garantizar la existencia de modelos primarios. A conocer esto Shelah introdujo las propiedades de bondad, unicidad y existencia las cuales dependian de una noción de independencia al llamó amalgamación estable. Esto permitio en clases excelentes conocer cada $(\lambda, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema y se logró garantizar la existencia de modelos primarios sobre la unión de los modelos pertenecientes a un mismo $(\lambda, \mathcal{P}^{-}(n))$-sistema. Además probamos que en una clase excelente $\mathcal{K}$ existen modelos de cardinalidad arbitraria. De hecho se demostró la existencia de un modelo pleno de cardinalidad λ para cada $\lambda \geq \aleph_0$. Posteriormente Rami Grossberg y Bradd Hart en [9] llevaron a cabo un trabajo de clasificación para clases excelentes que culminó en la prueba del teorema del *Main Gap* para este tipo de clases.

Capítulo 5

Estructuras cuasiminimales excelentes

Sea $\mathcal{C}$ la clase de estructuras cerradas bajo isomorfismos que satisfacen las suposiciones 1-3:

Suposición 1(pregeometría) Para cualquier $H \in \mathcal{C}$ y $X \subseteq H$, existe un superconjunto $X \subseteq cl(X) \subseteq H$ que satisface:

i) $\mathrm{cl}(X) \in \mathcal{C}$

ii) $\mathrm{cl}(Y) = \bigcup\{ \mathrm{cl}(X) : X \subseteq Y, X \text{ finito } \}$

iii) $X \longrightarrow \mathrm{cl}(X)$ es un operador monotono, e idempotente.

Definición 5.1. Sean $H, H' \in \mathcal{C}$ y $G \subseteq H, G \subseteq H'$. Un G-monomorfismo es uan función parcial $f : H \longrightarrow H'$, $f \restriction G = id$, que preserva fórmulas libres de cuantificadores sobre G.

Definición 5.2. Un conjunto no vacío $X \subseteq H$ se dice cl-independiente sobre G, si

$$\mathrm{cl}(G) \cap X = \emptyset$$

y para cualquier $Y_1, Y_2 \subseteq X$,

$$\mathrm{cl}(Y_1 \cup G) \cap \mathrm{cl}(Y_2 \cup G) = \mathrm{cl}((Y_1 \cap Y_2) \cup G)$$

X se dice cl-independiente, si es cl-independiente sobre $\emptyset$

Suposición 2. Sea $G \subseteq H, G \subseteq H^{'}, g \in \mathcal{C}$ ó $G = \emptyset$. Entonces

i) Si X y $X^{'}$ son cl-independientes sobre G, subconjuntos de $H, H^{'}$ respectivamente, entonces cualquier biyección $f : X \longrightarrow X^{'}$ es un G-monomorfismo.

ii) Si $f : X \cup \{y\} \longrightarrow X^{'} \cup \{y^{'}\}$ es un monomorfismo, entonces

$$y \in \mathrm{cl}(X), \text{ si y sólo si, } y^{'} \in \mathrm{cl}(X^{'}).$$

Suposición 3(ω-**homogeneidad sobre modelos**) Si $f : H \longrightarrow H^{'}$ un G-monomorfismo parcial, Dom(f)=X, X finito, entonces para cualquier $y \in H$ existe $y^{'} \in H^{'}$ tal que $f \cup \{\langle y, y^{'}\rangle\}$ extiende f y es un G-monomorfismo parcial.

Definición 5.3. Sea $H \in \mathcal{C}$. Decimos que H tiene la *propiedad de clausura contable*, si para cualquier conjunto finito $X \subseteq H$, $\mathrm{cl}(X)$ es contable.

Lema 5.4. *Sea $M \in K$ una estructura no contable, entonces*

1) Para cada conjunto finito $X \subseteq M$, si $a, b \in M\setminus\ cl(X)$, entonces a, b realizan el mismo $L_{\omega_1,\omega}$ tipo sobre X.

2) Cada $L_{\omega_1,\omega}$ conjunto definible de M es contable ó tiene complemento contable.

Demostración. 1)???
2) Supongamos que que ϕ y $\neg\phi$ tiene no contables soluciones, con ϕ definida sobre X. Como $cl(X)$es contable, entonces existen $a, b \notin cl(X)$ que satisfacen $\phi, \neg\phi$ respectivamente. Esto contradice 1). $\square$

Lema 5.5. *1) Sea $\mathcal{A}_0 \subseteq H, \mathcal{A}_0^{'} \subseteq H^{'}$ conjuntos independientes y $G = cl(\mathcal{A}_0)$ y $G^{'} = cl(\mathcal{A}_0)$ contables. Entonces, dada una biyección $f_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_0^{'}$, existe un isomorfismo*
$f : G \longrightarrow G^{'}$ que extiende f_0.

2) Si X es un conjunto independiente de cardinalidad $\aleph_1$, y f es un G-monomorfismo parcial de X en $X^{'}$, entonces existe g un G-monomorfismo parcial de $cl_H(G \cup X)$ en $cl_{H^{'}}(G \cup X^{'})$ que extiende f.

Demostración. Sean $\mathcal{A}_0 = \{a_i : i < \omega\}$, $\mathcal{A}_0^{'} = \{a_i^{'} : i < \omega\}$ y $f_0(a_i) = a_i^{'}$. Por inducción sobre i supongamos que existe un isomorfismo

$$g_i : \mathrm{cl}(a_1, ..., a_i) \longrightarrow \mathrm{cl}(a_1^{'}, ..., a_i^{'}),$$

tal que $g_j(a_j) = a_j^{'}$, para todo $j \leq i$. Como $\{a_{i+1}\}$, $\{a_{i+1}^{'}\}$ es cl-independiente sobre $\mathrm{cl}(a_1, ..., a_i)$, $\mathrm{cl}(a_1^{'}, ..., a_i^{'})$ respectivamente, se sigue que $g_i^{'} : \mathrm{cl}(a_1, ..., a_i) \cup \{a_{i+1}\} \longrightarrow \mathrm{cl}(a_1^{'}, ..., a_i^{'}) \cup \{a_{i+1}^{'}\}$ es un monomorfismo. Usando ω-homogeneidad y un argumento de *back and forth*(pues G y $G^{'}$ son contables) podemos extender $g_i^{'}$ a un isomorfismo f_{i+1} de $\mathrm{cl}(a_1, ..., a_{i+1})$ sobre $\mathrm{cl}(a_1^{'}, ..., a_{i+1}^{'})$ (por suposición 2(iii)). Así $f = \bigcup_i f_i$ es un isomorfismo de G en $G^{'}$ que extiende f_0. □

Lema 5.6. *Supongamos que K y la relación $x \in cl(y)$ es definida por una sentencia ψ de $L_{\omega_1,\omega}$. Si existe $H \in K$ el cual contiene un conjunto infinito cl-independiente, entonces existen elementos de K de cardinalidad arbitraria que satisfacen la condición de clausura contable.*

Demostración. Sea X un conjunto contable independiente de H y sea $H_0 = cl_H(X)$. Sea L^* un fragmento contable de $L_{\omega_1,\omega}$ que contiene ψ. Así $H_0 \prec_{L^*} H_1$ donde H_1 es la clausura de $X \cup a$ y a es indeopendiente de X. Realizando este argumento, podemos construir una cadena L^* creciente y continua de elementos de K de cualquier longitud α. Dado que la cadena es L^*-elemental, cada $H_\alpha \in K$. Sea X un conjunto contable.?? □

Suposición 4 cl satisface la propiedad de intercambio: $y \in cl(Xx) \setminus cl(X)$ implica que $x \in cl(Xy)$.

Definición 5.7. 1) Para cada conjunto $X \subseteq H$, denotamos $cl^-(Y) = \bigcup_{X \subsetneq Y} cl(X)$

2) Decimos que C es un sístema cl-independiente n-dimensional si $C = cl^-(Z)$ y Z es un conjunto independiente de cardinalidad n.

Suposición 5 Sea $G \subseteq H, H^{'} \in K$ con G vacío o en K. Supongamos $Z \subseteq H \setminus G$ es un sístema independiente n-dimensional, $C = cl^-(Z)$, y $X \subseteq cl(Z)$ finito. Entonces existe $C_0 \subseteq C$ tal que: para cada G-monomorfimo parcial f de X en $H^{'}$, para cada G -monomorfismo parcial f_1 de C en $H^{'}$, si $f \cup (f_1 \restriction C_0)$ es un G-monomorfismo parcial, $f \cup f_1$ es también un G-monomorfismo parcial.

Definición 5.8. Decimos que $M \in K$ es primo sobre el conjunto $X \subseteq M$ si para cada monomorfismo parcial de X en $N \in K$ se puede extender a un monomorfismo parcial de M en N.

Lema 5.9. *Sea $G \subseteq H, H^{'} \in K$ con G vacío ó en K y contable. Supongamos $Z \subseteq H \setminus G$ es un sístema independiente n-dimensional, $C = cl^-(Z)$, entonces $cl(Z) \subseteq H$ es primo sobre C.*

Demostración. Sea f una inmersión de C en H' que contiene G. Debemos extender f a una función g de $cl(Z)$ en H'. Sea $(a_i : i < \omega)$ una enumeración de $cl(Z)$, y $A_n = \{a_i : i < n\}$. Por suposición 5 , podemos definir una sucesión creciente de c onjuntos finitos B_n, $n < \omega$, tal que $tp_{qf}(A_n, B_n; H) \vdash tp_{qf}(A_n, C; H)$ y $\bigcup_{n<\omega} B_n = C$. Luego, por el lema 5.5(1), podemos construir una sucesión creciente de funciones f_n, $dom(f_n) = A_n \cup B_n$. Entonces $\bigcup_{n<\omega} f_n$ es una inmersión de $cl(Z)$ en H'. □

Teorema 5.10. *Sea $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente. $H, H' \in \mathcal{C}$, con la propiedad de clausura contable, $\mathcal{A} \subseteq H, \mathcal{A}' \subseteq H'$ independientes y $cl(\mathcal{A})$=H, $cl(\mathcal{A}')$=H'. Supongamos que existe una biyección $f_0 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$. Entonces existe un isomorfismo $f : H \longrightarrow H'$ que extiende f_0.*

Si $\mathcal{A}$ es finito o contable, se tiene el resultado por el lema 5.5. Supongamos que $\mathcal{A}$ es no contable. Sea $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ conjunto infinito contable. Sea $f_0(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0' \subseteq \mathcal{A}'$. Así podemos suponer f_0 identica sobre $\mathcal{A}_0$. Del lema 5.5 podemos aducir que $\mathrm{cl}_H(\mathcal{A}_0)$=$\mathrm{cl}'_H(\mathcal{A}_0)$ Continuaremos la prueba, a través de unos resultados intermedios. Por comodidad, escribiremos monomorfismo en lugar de monomorfismo sobre G, y $\mathrm{cl}(X)$ denotará $\mathrm{cl}(X \cup \mathcal{A}_0)$.

Lema 5.11. *f_0 es un monomorfismo.*

Demostración. Sea $Y_1, Y_2 \subseteq \mathcal{A} \setminus G$, de lo que deducimos:

$$\mathrm{cl}(Y_1 \cup G) \cap \mathrm{cl}(Y_2 \cup G) = \mathrm{cl}((Y_1 \cup G) \cap (Y_2 \cup G)) = \mathrm{cl}((Y_1 \cap Y_2) \cup G)$$

La segunda desigualdad se tiene a causa de la independencia de $\mathcal{A}$. Usando la idempotencia del operador cl(supòsición 1(iii)), tenemos

$$\mathrm{cl}(G) \cap (A \setminus G) = G \cap (\mathcal{A} \setminus G) = \emptyset$$

Así concluímos que $\mathcal{A} \setminus G$ es independiente. Un razonamiento similar conduce a la independencia de $\mathcal{A}' \setminus G$. Por lo tanto, por suposición 2(i) tenemos que f_0 es un monomorfismo. □

Lema 5.12. *Supongamos $X, Y \subseteq \mathcal{A}_1$. Supongamos $b \in cl(\mathcal{A}_0 \cup X)$ y $c \in cl(\mathcal{A}_0 \cup Y)$ y $p(b, c, g)$ para alguna fórmula libre de cuantificadores. Entonces existe un función π en $cl(\mathcal{A}_0 \cup Y)$ cuyo dominio incluye $b \cup c \cup g$, que fija $c \cup g$, y tal que $p(b^\pi, c, g)$*

Demostración. Sea $A^* \subseteq \mathcal{A}_0$ tal que $g \in cl(A^*)$, $b \in cl(A^*X)$, y $c \in cl(A^*Y)$. Sea $G_0 = cl(A^*Y)$. Extendamos la función identidad sobre G_0 a una función π_1 con dominio $G_0 \cup X$, enviando $X \setminus Y$ en $\mathcal{A}_0 \setminus (A^* \cup Y)$. Por suposición 2(i), π_1 es un G_0-monomorfismo parcial. Por el lema 5.5, existe un G_0-monomorfismo parcial π de $cl(A^* \cup X \cup Y)$ en $cl^*(Y)$ que extiende π_1. Así π fija b, g pues extiende la identidad sobre G_0, y como π es un G_0-monomorfismo se satisface $p(b^\pi, c, g)$. □

Lema 5.13. *Sean $X, Y,\ Y^{'} \subseteq \mathcal{A}_1$. Sea $b \in cl(\mathcal{A}_0 \cup Y)$, $c \in cl(\mathcal{A}_0 \cup Y)$ y $c^{'} \in cl(\mathcal{A}_0 \cup Y^{'})$. Supongamos que f es un G-monomorfismo parcial que envia c en $c^{'}$. Entonces f es un $cl^*(X)$ monomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f no es un $cl^*(X)$-monomorfismo. Por lo tanto, existen $b \in cl^*(X)$ y $g \in G$ y p libre de cuantificadores tal que $p(b, c, g) \wedge \neg p(b, c^{'}, g)$. Por lema 5.12, existe π en $cl(\mathcal{A}_0 \cup Y \cup Y^{'})$ que fija $c, c^{'}, g$ y tal que $p(b^{\pi}, c, g) \wedge \neg p(b^{\pi}, c^{'}, g)$. Pero esto contradice la hipótesis que dice que f e un G-monomorfismo parcial que envia c en $c^{'}$ □

Lema 5.14. *Sen $X, Y \subseteq \mathcal{A}_1$ y ψ_X, ψ_Y son G-monomorfismos de H en $H^{'}$ con $dom(\psi_X) = cl(\mathcal{A}_0 \cup Y)$ y $dom(\psi_Y) = cl(\mathcal{A}_Y)$ que concuerdan en $dom(\psi_X) = cl(\mathcal{A}_0 \cup Y) \cap dom(\psi_Y) = cl(\mathcal{A}_Y)$. Entonces $\psi_X \cup \psi_Y$ es un G-monomorfismo.*

Demostración. Por lema 5.5 existe un G-monomorfismo ψ_{XY} que extiende ψ_X y envia $cl^*(X \cup Y)$ en $H^{'}$. Como $\psi_X \cup \psi_Y$ es una función parcial con dominio $cl^*(X) \cup cl^*(Y)$, se sugiere probar que si dados $b \in cl^*(X), g \in G$ y $c \in cl^*(Y)$ y cualquie libre de cuantificadores p, tenemos $H^{'} \models p(\psi_X(b), \psi_{XY}(c), g)$, si y sólo si, $H^{'} \models p(\psi_X(b), \psi_Y(c), g)$. Como $\psi_{X \cup Y} o \psi_Y^{-1}$ es un G-monomorfismo parcial que envia $\psi_Y(c)$ en $\psi_{X \cup Y}$, por el lema 5.13 concluímos el lema. □

Corolario 5.15. *Supongamos $\langle X_i : i < m \rangle$ son subconjuntos de A y que cada ψ_{X_i} es un G-monomorfismo parcial de H en $H^{'}$ con $dom(\psi_{X_i}) = cl(\mathcal{A}_0 \cup X_i)$ y además ψ_{X_i} y ψ_{X_j} concuerdan en $\psi_{X_i} \cap \psi_{X_j}$. Entonces $\psi_X \cup \psi_Y$ es un G-monomorfismo parcial.*

Como $H = lim_{X \subseteq A; |X| < \aleph_0} cl(X)$. Así, se sugiere probar que para cada finito X podemos elejir una función parcial $\psi_X : cl(X) \longrightarrow H^{'}$ tal que si $X \subseteq Y$ entonces $\psi_X \subseteq \psi_Y$. Esto será hecho por inducción en $|X|$. Supopngamos que $|Y| = n + 1$ y hemos definido ψ_X para cada X, $|X| \leq n$. Probaremos lo siguiente,

1) $\psi_Y^- : cl^-(Y) \longrightarrow H^{'}$, definida por $\psi_Y^- = \bigcup_{\subset Y} \psi_X$ es un monomorfismo,

2) ψ_Y^- se puede extender a ψ_Y definida sobre $cl(Y)$.

1) se tiene por inducción y corolario 5.15, notando que las hipótesis se satisfacen por la propiedad de intercambio. El inciso 2) se satisface por el lema 5.9. Así tenemos que el tipo de isomorfismo de un modelo en K con clausuras contables, está determinado por la cardinalidad de una base dada por cl. Por lo tanto, si $M \in K$ tiene clausuras contables, su dimensión es $\|M\|$. Así, existe un único modelo en cada cardinalidad no contable que tiene clausuras contables.

Capítulo 6

Clases elementales abstractas

En este capítulo no pretendo demostrar hechos acerca de clases excelentes, sino dar un bosquejo de resultados obtenidos en otras areas de teorias de modelos como son teoría de modelos homogeneos desarrollada inicialmente por Shelah y últimamente por Lessman, y un tratamiento en clases elementales abstractas.
Lessman probó el siguiente teorema de categoricidad al estilo Baldwin-Lachlan cuando la clase $\mathcal{K}$ es excelente.

Lema 6.1. *Sea $\mathcal{K}$ excelente y categórica en algún cardinal no contable. Entonces cada modelo es primo y minimal sobre la base de una pregeometría dada por un conjunto cuasiminimal. Además, el tamaño de la base determina el tipo de isomorfismo de los modelos en $\mathcal{K}$, y $\mathcal{K}$ es categórica en cada cardinal no contable.*

Veamos el siguiente hecho.

Lema 6.2. *Sea $\mathcal{K}$ la clase de modelos atómicos de una teoría de primer orden contable, que tiene la propiedad de $\aleph_0$-amalgamación. Entonces si A es un conjunto contable bueno, entonces $A \in \mathbf{Ab}(\mathcal{K})$.*

Demostración. Supongamos que A es un conjunto contable bueno, y sean M_1, M_2 modelos en $\mathcal{K}$ que contienen A. Como A es bueno, existen modelos primarios sobre A, $M_1' \prec M_1$, $M_2' \prec M_2$ y un isomorfismo $f : M_1' \cong M_2'$. Por la propiedad de $\aleph_0$-amalgamación, existen M^*, M^{**} contables y f_1, f_2, g_1, g_2 tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M^* \arrow[r, "f_2"'] & M^{**} \\
M_1' \arrow[u, "id"] \arrow[r, "f"'] & M_2' \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "id"'] & M_2' \arrow[u, "g_2"]
\end{tikzcd}
$$

De esto concluímos que $A \in \mathbf{Ab}(\mathcal{K})$. $\square$

Luego, si $\mathcal{S}$ es un $(\lambda, \mathcal{P}^-(n))$-sístema y $\mathcal{K}$ es excelente, entonces existe un modelo primario sobre $A_n^{\mathcal{S}}$. Por lo tanto si la clase $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de amalgamación, entonces $A_n^{\mathcal{S}} \in \mathbf{Ab}(\mathcal{K})$, por un argumento similar a la prueba del lema anterior. Así, a tratar la noción de excelencia en un contexto más general como clases elementales abstractas, podemos pensar en reemplazar la noción de bondad por una noción de amalgamación. Grossberg y Kolesnikov en el contexto de clases elementales abstractas, demostaron que si $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ es excelente, entonces es $LS(\mathcal{K})$-tame, donde $\bigcup\!\!\!\!|\,$ es una noción de independencia, a la que ellos llamaron *bifurcación* definida sobre conjuntos en $\mathbf{Ab}(\mathcal{K})$, y cuya definición de excelencia está atada al concepto de bases de amalgamación.

Definición 6.3. Sea $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ una noción débil de bifurcación. Decimos que $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ tiene la *propiedad de* (λ, n)-*existencia* si para cada sistema estable $\mathcal{S} = \{M_s : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ existe un modelo que contiene $A_n^{\mathcal{S}}$.

Definición 6.4. Sea $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ una noción débil de bifurcación. Decimos que $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ tiene la *propiedad de* (λ, n)-*no-unicidad* si para cada sistema estable $\mathcal{S} = \{M_s : s \in \mathcal{P}^-(n)\}$ de modelos de cardinalidad λ tenemos: $A_n^{\mathcal{S}} \in \mathbf{Ab}(\mathcal{K})$

Definición 6.5. Sea $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ una noción débil de bifurcación. Decimos que $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ tiene la *propiedad* de (λ, n)-*bondad* si $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ tiene las propiedades de (λ, n)-simetría, (λ, n)-existencia y (λ, n)-no-unicidad.

Definición 6.6. Sea $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ una noción débil de bifurcación y sea $\lambda \geq \aleph_0$. Decimos que $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ es λ-*excelente* si $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ tiene la propiedad de (λ, n)-bondad para cada $n < \omega$. Si $\lambda = LS(\mathcal{K})$ decimos que $\mathcal{K}$ es excelente.

Teorema 6.7. *Si $(\mathcal{K}, \bigcup\!\!\!\!|\,)$ es excelente entonces $\mathcal{K}$ es $LS(\mathcal{K})$-tame.*

Teorema 6.8. *Supongamos que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de $(\aleph_0, n)$-amalgamación para cada $n < \omega$. Entonces $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de (λ, n)-amalgamación para cada λ.*

Recientemente Hyttinen, Lessman y Shelah trataron la noción de excelencia en la prueba del teorema que será enunciado a continuación desde el punto de vista de estabilidad geometrica, generalizando un resultado obtenido por Hrushovski que dice que si $\mathfrak{C}$ es un modelo saturado suficientemente grande de una teoría de primer orden estable y $p, q \in S(A)$ son tipos regulares tal que para algún $n < \omega$ el tipo p^n es débilmente ortogonal a q^ω y p^{n+1} es no ortogonal a q^ω. Entonces $n = 1, 2, 3$, y si $n = 1$, entonces $\mathfrak{C}$ interpreta un grupo abeliano, y si $n = 2, 3$ entonces $\mathfrak{C}$ interpreta un cuerpo algebraicamente cerrado.

Teorema 6.9. *Sea $\mathcal{K}$ excelente y $\mathfrak{C}$ un modelo pleno suficientemente grande que contiene un conjunto finito A. Sea $p, q \in S_D(A)$ no acotados y p cuasiminimal. Supongamos que existe un entero $n < \omega$ tal que,*

(1) Para cada n-tupla independiente $a_0, ..., a_{n-1}$ independiente de realizaciones de p y un conjunto contable $C \subseteq Q$, tenemos

$$dim(a_0...a_{n-1}/AC) = n$$

(2) Para alguna $(n+1)$-tupla $a_0, ..., a_n$ de realizaciones de p y algún conjunto contable $C \subseteq Q$ tenemos,

$$dim(a_0, ..., a_n/AC) \leq n$$

Entonces $\mathfrak{C}$ interpreta un grupo G que actua sobre la pregeometría P' inducida sobre el conjunto de realizaciones de p. Además G interpreta un grupo no clasico, o $n \leq 3$ y,

Si $n = 1$, entonces G es abeliano y actúa regularmente sobre P',

Si $n = 2$, entonces la acción de G es isomorfa a la acción afín de $K \rtimes K^*$,

Si $n = 3$, entonces la acción de G sobre P' es isomorfa a la acción de $PGL_2(K)$ sobre la linea proyectiva $P^1(K)$ del cuerpo algebraicamente cerrado K.

Bibliografía

[1] Baldwin, John., *Notes on Quasiminimality and Excellence*, preprint, 2003

[2] Buechler , Steven, *Essential Stability Theory*, Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1996.

[3] Chang, C.C. and Keisler, H.J., *Model Theory*, North Holland Publising Co., 1973.

[4] Hodges, W. *Model Theory*,Encyclopedia of Mathematics. Cambridge University Press, 1993.

[5] Grossberg, Rami., *A course in model theory.*, A book in preparation

[6] Grossberg, Rami., *Classification Theory for abstract elementary classes.*, preprint, 1991.

[7] Grossberg, Rami. and Kolesnikov, Alexei., *Excellent abstract elementary classes are tame.*, preprint.

[8] Hart, Bradd., *Categoricity over p for first order T or categoricity for $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$ can stop at $\aleph_k$ while holding for $\aleph_0, ..., \aleph_{k-1}$* ., Israel Journal of Mathematics, v.70, 1990.

[9] Grossberg, Rami., *The classification theory of excellent classes* ., Journal of Symbolic Logic 54 , 1989, pág.1359-1381.

[10] Keisler, H.J., *Model Theory for infinitary logic. Logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,Vol. 62. North-Holland Publishing Co.,Amsterdam-Londos, 1971.

[11] Lessmann, Olivier., *An introduction to excellent classes*. Notas de clase.

[12] Marcus, L., *A prime minimal model with an infinite set of indiscernibles*,Israel Journal of Mathematics, v. 11, 1972, 180-183.

[13] Shelah, Saharon., *Classification theory for non-elementary classes I: the number of uncountable models of* $\psi \in L_{\omega_1\omega}(Q)$.,Pats A,B,Israel Journal of Mathematics., v.46,1983.

[14] Shelah, Saharon., *Classification Theory and the Number of Non-isomorphic Models*, Springer, Berlin, 1990.

[15] Shelah, Saharon., *Categoricity in* $\aleph_1$ *of sentences in* $L_{\omega_1,\omega}(Q)$*.*,Israel Journal of Mathematics, v.20, 1975, 127-148.

[16] Zilber, Boris., *A categoricity theorem for quasi-minimal excellent classes.*, preprint, 2003