Interpretación de Grupos en Teoría de Modelos Homogénea

Juan Diego Caycedo Casallas
Código 152586

Director
Andrés Villaveces Niño

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C. 2005

Índice general

Introducción **3**

Notación **5**

I Conjuntos fuertemente minimales y teorías $\aleph_1$-categóricas **6**

1. Teorías fuertemente minimales **7**

2. Teorías casi fuertemente minimales **9**

3. Ejemplos de teorías no-contablemente categóricas **11**

4. Teorías no-contablemente categóricas no c.f.m. **16**

5. Acción de un grupo ω-estable sobre un conjunto f.m. **18**

II Interpretación de grupos en teoría de modelos homogénea **22**

6. Teoría de modelos homogénea **23**

7. ω-estabilidad, indiscernibles y no ruptura **30**

8. Tipos cuasiminimales **34**

9. La pregeometría P y la geometría P' **37**

10. Teorema de interpretación de grupo **41**

11. n-acciones 46

Bibliografía 50

Introducción

La teoría de estabilidad geométrica nació con el estudio de pregeometrías, dadas por la clausura algebraica en conjuntos fuertemente minimales, dentro de las investigaciones de Baldwin y Lachlan sobre teorías no-contablemente categóricas ([3]). Desde entonces se ha desarrollado enormemente y ha tenido su mayor éxito en sus aplicaciones tanto dentro de la teoría de modelos, como la solución de Zilber de la conjerura de que ninguna teoría completa totalmente categórica es finitamente axiomatizable ([13]), como a otras ramas de la matemática como la geometría algebraica o el álgebra, siendo la más significativa la demostración de Hrushovski de la Conjetura de Mordell-Lang para cuerpos de funciones de característica arbitraria ([4]).

Uno de los temas en esta área es el análisis de las estructuras, en particular grupos y cuerpos, interpretables en una estructura dada. En el caso de modelos de teorías estables, o más particularmente ω-estables, este análisis se da principalmente en dos direcciones, en una de ellas se estudian las propiedades modelo teóricas y geométricas de la estructura inicial que garantizan la existencia de grupos interpretables en ella, adicionalmente, en la otra dirección se estudian las propiedades algebraicas de los grupos que aparecen en estas situaciones, como ejemplos de esta corriente podemos citar el Teorema de Reineke que establece que todo grupo infinito ω-estable tiene un subgrupo abeliano definible infinito y el resultado de Macintyre de que todo cuerpo infinito ω-estable es algebraicamente cerrado ([11, p. 258-260]).

Recientemente se han generalizado algunos resultados de la teoría de estabilidad geométrica a contextos no elementales, es decir, aqullos en que se estudian clases de modelos no axiomatizables con teorías de primer orden, como la teoría de modelos homogénea o las clase excelentes que aparecieron anteriormente dentro del programa de la teoría de clasificación liderado por Shelah. Este trabajo ha encontrado especial atención, entre otras cosas, porque las investigaciones sobre la teoría de modelos de estructuras analíticas han conectado temas de la matemática tradicional con la teoría de modelos de clases no elementales haciendo necesario el desarrollo de herramientas análogas a las que se tienen en primer orden.

El teorema de Hyttinen, Lessmann y Shelah en [9], que generaliza un teorema de Hrushovski en primer orden [7], es un ejemplo de este trabajo; en él se incluyen las dos direcciones antes mencionadas, por un lado, se presentan los tipos cuasiminimales, que son los objetos relevantes en este caso sobre los que se tiene una pregeometría, y se encuentran condiciones de estabilidad y condiciones geométricas que garantizan la existencia de un grupo interpretable que actúa sobre la pregeometría, por otra parte, se busca una descripción completa de los grupos que pueden aparecer en estas situaciones y sus acciones correspondientes, este paso sigue ideas del teorema de Hrushovski pero, a diferencia de éste, deja algunas preguntas sin resolver.

En el presente trabajo se expone el teorema de Hyttinen, Lessmann y Shelah en el contexto de la teoría de modelos homogénea, inicialmente llamado diagramas finitos, en el cual se estudia la clase de los modelos de una teoría de primer orden T que omiten un conjunto fijo de tipos completos Γ bajo la existencia de un gran modelo homogéneo que funciona como modelo monstruo o dominio universal de la clase, este modelo en general no es saturado ya que, por pertenecer a la clase, debe omitir los tipos del conjunto Γ. Se tienen dos casos extremos, el primero de ellos es aquel en el que el conjunto Γ es vacío, en tal caso la clase es claramente elemental; en el segundo caso, Γ es el conjunto de todos los tipos no aislados consistentes con T, entonces la clase consta de los modelos atómicos de T que, en general, no es elemental, como se puede ver usando el teorema de compacidad. El trabajo en este contexto es bastante cercano al que se hace con la lógica de primer orden ya que en él se cuenta con la misma sintaxis y con una versión débil del teorema de compacidad que hace posible adaptar muchos argumentos de la teoría de modelos de clases elementales, sin embargo, la teoría de modelos homogénea incluye clases no elementales tradicionalmente importantes y, en cierto sentido que se hará preciso más adelante, también incluye las clases de modelos de sentencias completas de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$.

En la primera parte del trabajo se presentan algunos resultados de la teoría de modelos de primer orden sobre la relación entre conjuntos fuertemente minimales y teorías no-contablemente categóricas junto con varios ejemplos al respecto con el ánimo de tener un tema clásico como punto de partida e ilustrar el sentido del teorema del que se ocupa el trabajo. En la segunda parte se expone el teorema principal de Hyttinen Lessmann y Shelah para diagramas ω-estables.

Para terminar, quiero expresar mi agradecimiento a quienes contribuyeron a la realización de este trabajo, principalmente al profesor Andrés Villaveces Niño por su guía, al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia por las oportunidades de formación que me ha brindado durante el tiempo que he sido parte de él y, en particular, por la organización del BOMMT 2003 (Encuentro de Teoría de Modelos de Bogotá) del cual este trabajo es una pequeña consecuencia, y, de manera muy especial, a mis padres por el amor que me dan, que fue vital durante el tiempo en que se realizó este trabajo.

Notación

Aquí reunimos algunas aclaraciones sobre las notaciones y expresiones usadas en este trabajo:

Usamos la notación $\bar{a}$ para tuplas (finitas) y para sucesiones infinitas, además, las identificamos con sus rangos, así, por ejemplo, si todos los elementos de la tupla $\bar{a}$ pertenecen a A decimos que $\bar{a} \subset A$. Para tuplas, notamos la concatenación simplemente escribiendo una tupla tras otra sin ningún signo intermedio. Si f es una función definida para todos los elementos de una tupla $\bar{a}$, $f(\bar{a})$ denota la tupla de las imágenes de los elementos de $\bar{a}$ en el orden correspondiente.

Dado un conjunto A, $A!$ denota el conjunto de las permutaciones de A.

Las nociones básicas de teoría de modelos que no se definen en este documento son completamente estándar y pueden consultarse, por ejemplo, en [11] y [5]. Nuestra notación sin embargo puede tener algunas particularidades, notamos de forma idéntica los modelos y sus dominios, y evitamos que se preste a confusiones; además, en general, cuando decimos fórmula nos referimos a una fórmula con parámetros así no se escriban explícitamente, cuando hablamos de una fórmula sobre algún conjunto, queremos decir que sus parámetros pertenecen a dicho conjunto.

Dada una pregeometría (P, cl) (ver 1.2), decimos que $f \in P!$ es un automorfismo de la pregeometría si preserva el operador cl, es decir, si siempre que $a \in \mathrm{cl}(A)$, también se tiene que $f(a) \in f(A)$. Más generalmente, decimos que una función es un isomorfismo entre dos pregeometrías si es una biyección entre sus dominios que preserva los operadores clausura.

Vemos una acción de un grupo G sobre un conjunto X como una función

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

tal que, para todos $g, h \in G$ y todo $x \in X$, $1(x) = x$ y $g(h(x)) = (gh)(x)$. Además, si hablamos de la acción de un grupo sobre una pregeometría, adicionalmente exigimos que la acción del grupo sobre el dominio de la pregeometría preserve el operador de clausura. Decimos que las acciones de un grupo G sobre un conjunto X y de un grupo H sobre un conjunto Y son isomorfas si existe un isomorfismo entre los grupos G y H y una biyección entre X y Y de manera que al combinarlas se preservan las acciones. Si X y Y son pregeometrías entonces requerimos adicionalmente que la biyección entre ellos sea isomorfismo de pregeometrías.

Para un cuerpo K denotamos el grupo multiplicativo de sus elementos invertibles con $K^{\times}$ y su grupo aditivo con el mismo signo K.

Parte I

Conjuntos fuertemente minimales y teorías no-contablemente categóricas

Capítulo 1

Teorías fuertemente minimales

En general, a lo largo del trabajo T denotará una teoría completa en un vocabulario contable L y usaremos $\bar{M}$ para denotar su dominio universal, su definición puede consultarse en [5, pág. 70].

Definición 1.1. Dados T, M un modelo de T y $\varphi(x)$ una fórmula sobre M.

Decimos que $\varphi(x)$ es *minimal* en M, o que $\varphi(M)$ es *minimal*, si $\varphi(x)$ es una fórmula no algebraica y para toda fórmula $\psi(x)$ sobre M, $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ es algebraica o $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ es algebraica.

Decimos que $\varphi(x)$ es *fuertemente minimal (f.m.)*, si para toda extensión elemental N de M, $\varphi(x)$ es minimal en N.

Decimos que T es una *teoría fuertemente minimal*, si y sólo si, la fórmula $x = x$ es f.m.

Claramente toda fórmula f.m. es minimal, además puede verse que toda fórmula minimal sobre un modelo $\aleph_0$-saturado es fuertemente minimal, por lo tanto, T es f.m., si y sólo si, $\bar{M}$ es minimal.

A continuación recordamos algunos hechos básicos sobre los conjuntos fuertemente minimales, sus demostraciones pueden consultarse en [11, págs. 208-211].

Hecho 1.2. *Si D es f.m. y consideramos el operador de* clausura algebraica $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{acl}(A) \cap D$, *para $A \subset D$, entonces (D, cl) es una pregeometría, esto es: Para todos $A, B \subset D$ y $a, b \in D$,*

1. $A \subset \mathrm{cl}(A)$ *y* $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$
2. *Si $A \subset B$, entonces* $\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(B)$
3. *(carácter finito) Si $a \in \mathrm{cl}(A)$, entonces existe $A_0 \subset_{fin} A$ tal que $a \in \mathrm{cl}(A)$.*
4. *(intercambio) Si $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(A)$, entonces $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.*

En una demostración del hecho anterior sólo la propiedad de intercambio presenta alguna dificultad, puede ser útil consultar el lema 9.2, que es una generalización del hecho anterior, para ver cómo resolver esta parte.

Una vez tenemos una pregeometría podemos definir nociones de *independencia*, *bases* y *dimensión* tal como en espacios vectoriales.

Definición 1.3. Sean (P, cl) una pregeometría y $A \subset P$. Decimos que A es un conjunto *independiente* si, para todo $a \in A$, $a \notin \mathrm{cl}(A - \{a\})$. Y decimos que A es una *base* de P si A es un conjunto independiente maximal en P.

Puede verse que con la definición anterior todo par de bases de una pregeometría tienen la misma cardinalidad, así pues, definimos la *dimensión* de una pregeometría P como el cardinal de cada una de sus bases; además, comprobando que biyecciones elementales entre conjuntos pueden extenderse a biyecciones elementales entre sus clausuras algebraicas, se tiene que dos pregeometrías con la misma dimensión son isomorfas.

Con las anteriores herramientas resulta fácil demostrar el siguiente hecho, tal como se prueba que todo par de espacios vectoriales no-contables sobre un cuerpo contable son isomorfos.

Teorema 1.4. *Si T es f.m., entonces T es no-contablemente categórica.*

Capítulo 2

Teorías casi fuertemente minimales

Definición 2.1. Decimos que la teoría T es *casi fuertemente minimal (c.f.m.)*, si y sólo si, existen un conjunto (finito) A y un conjunto fuertemente minimal D definible sobre A tales que $\bar{M} = \mathrm{acl}(D \cup A)$.

Equivalentemente, T es c.f.m si existen una fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ sobre $\emptyset$ y un tipo aislado $q \in S(\emptyset)$ tales que para todo modelo M de T y para todo $\bar{e} \in q(M)$, $\varphi(x, \bar{e})$ es f.m. y $M = \mathrm{acl}(\varphi(M, \bar{e}) \cup \bar{e})$.

Una demostración de la equivalencia de las dos definiciones que hemos dado de las teorías c.f.m. requiere algo de trabajo para probar que, si T es c.f.m. en el primer sentido, entonces también lo es en el segundo, esto puede consultarse en [5, pág. 153]. Un argumento de compacidad muestra que la primera versión de la definición no cambia si exigimos que el conjunto A sea finito o sólo que sea un conjunto ($|A| < |\bar{M}|$).

A continuación presentamos dos hechos sobre las teorías casi fuertemente minimales, el primero de ellos se sigue fácilmente de la segunda definición de las teorías c.f.m. extendiendo biyecciones elementales entre conjuntos a biyecciones elementales entre sus clausuras algebraicas y establece lo siguiente:

Teorema 2.2. *Si T es c.f.m., entonces T es no-contablemente categórica. Además, si para todos M modelo de T y A subconjunto finito de M, $\mathrm{acl}(A)$ es finito, entonces T es totalmente categórica.*

El segundo hecho, 2.4, nos será de utilidad para exhibir una teoría no-contablemente categórica que no es c.f.m. Recordemos que dos elementos a, b de una pregeometría son *interalgebraicos* sobre un conjunto B en la pregeometría si $a \in \mathrm{cl}(B \cup \{b\})$ y $b \in \mathrm{cl}(B \cup \{a\})$.

Lema 2.3. *Sea T una teoría casi fuertemente minimal, y sean A y D como en la definición. Para toda fórmula f.m. $\theta(x)$ (con parámetros), existe un conjunto finito $B \supset A$ tal que:*

1. *$\theta(x)$ es una fórmula sobre B.*
2. *Para todo $b \in \theta(\bar{M}) - \mathrm{acl}(B)$, existe $c \in D$ tal que b y c son interalgebraicos sobre B.*

3. Para todo $b \in D - \operatorname{acl}(B)$, existe $c \in \theta(\bar{M})$ tal que b y c son interalgebraicos sobre B.

Demostración. Dada una fórmula f.m. $\theta(x)$, sea $B_0 = A \cup \{\text{parámetros de } \theta(x)\}$. Sea b_0 un elemento de $\theta(\bar{M}) - \operatorname{acl}(B)$, por la hipótesis del lema, existe $\bar{d} \subset D$ tal que $b_0 \in \operatorname{acl}(\bar{d} \cup A) \subset \operatorname{acl}(\bar{d} \cup B_0)$, luego $b_0 \in \operatorname{acl}(\bar{d} \cup B_0)$; tómese $\bar{d}$ minimal entre las tuplas que tienen esta última propiedad, es decir, de manera que para toda tupla $\bar{e} \subsetneq \bar{d}$, $b_0 \notin \operatorname{acl}(\bar{e} \cup B_0)$.

Consideremos $\bar{d} = d_0\bar{d}'$, así, por la elección de $\bar{d}$, $b_0 \notin \operatorname{acl}(B_0 \cup \bar{d}')$. Sea $B = B_0 \cup \bar{d}'$, nótese que con esto b_0 y d_0 son interalgebraicos sobre B, ya que $b_0 \in \operatorname{acl}(B \cup \{d_0\}) - \operatorname{acl}(B)$ y, por la propiedad de intercambio de la clausura algebraica en el conjunto f.m. $D \cup B \cup \{b_0\}$, esto implica que $d_0 \in \operatorname{acl}(B \cup \{b_0\})$.

Comprobemos ahora que este conjunto B cumple con las condiciones del lema. Primero, es claro que B es finito y que $\theta(x)$ es una fórmula sobre B. Además, como θ es f.m., todos los elementos de $\theta(\bar{M}) - \operatorname{acl}(B)$ tienen el mismo tipo sobre B, entonces, para todo $b \in D - \operatorname{acl}(B)$, $\operatorname{tp}(b/B) = \operatorname{tp}(b_0/B)$; por otro lado, dado que $b_0 \in \operatorname{acl}(B \cup \{d_0\})$, existen $\bar{e} \subset B$, $n < \omega$ y una fórmula $\varphi(x, y, \bar{z})$ sobre $\emptyset$, tales que

$$\models \varphi(b_0, d_0, \bar{e}) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x, d_0, \bar{e}) \wedge \psi(d_0, \bar{a}),$$

luego

$$\models \exists y \big(\varphi(b_0, y, \bar{e}) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x, y, \bar{e}) \wedge \psi(y, \bar{a})\big);$$

y por lo tanto

$$\models \exists y \big(\varphi(b, y, \bar{e}) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x, y, \bar{e}) \wedge \psi(y, \bar{a})\big),$$

esto significa que existe $c \in D$ tal que $b \in \operatorname{acl}(B \cup c) - \operatorname{acl}(B)$ y, en consecuencia, b y c son interalgebraicos. Finalmente, para comprobar la tercera propiedad se puede usar un argumento análogo al anterior. □

El anterior hecho muestra una equivalencia entre todas las fórmulas f.m. cuando se trabaja con una teoría c.f.m., esta equivalencia se manifiesta claramente en el siguiente corolario.

Corolario 2.4. *Si T es c.f.m. y $\theta(x)$ es una fórmula f.m., entonces existe un conjunto finito B tal que $\theta(x)$ es una fórmula sobre B y $\bar{M} = \operatorname{acl}(\theta(\bar{M}) \cup B)$.*

Demostración. Como T es c.f.m., sean D y A como en la definición. Por el lema anterior, existe un conjunto finito B con las propiedades mencionadas por él, en particular, se tiene que $\theta(x)$ es una fórmula sobre B y $D \subset \operatorname{acl}(\theta(\bar{M}) \cup B)$. Por lo tanto, $\bar{M} = \operatorname{acl}(D \cup B) \subset \operatorname{acl}(\operatorname{acl}(\theta(\bar{M}) \cup B) \cup B) = \operatorname{acl}(\theta(\bar{M}) \cup B)$. □

Capítulo 3

Ejemplos de teorías no-contablemente categóricas

En esta sección presentamos algunos ejemplos de diferentes tipos de teorías no-contablemente categóricas según la forma en que dominios universales están construidos a partir de conjuntos fuertemente minimales, en cada caso $\bar{M}$ denota el dominio universal correspondiente.

Conjuntos infinitos

Sean $L = \emptyset$ y $TCI = \{\exists^{>n}x\ x = x : n < \omega\}$.

Es claro que TCI es totalmente categórica y fuertemente minimal (f.m.), es decir, todo subconjunto definible de $\bar{M}$ es finito o cofinito.

Cuerpos algebraicamente cerrados de característica p

Sea p un número primo o cero. Sea $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ y sea $TCAC_p$ la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica p en el vocabulario L.

Por el teorema de Steiniz, sabemos que $TCAC_p$ es no-contablemente categórica y, por lo tanto, completa. Además, $TCAC_p$ tiene eliminación de cuantificadores ([14, págs. 1-3]).

Veamos que $TCAC_p$ es f.m. Sea D un subconjunto definible de $\bar{M}$, entonces, por la eliminación de cuantificadores, $D = \varphi(\bar{M})$ con $\varphi(x)$ una fórmula libre de cuantificadores sobre $\bar{M}$; si $\varphi(x)$ es atómica, entonces existen polinomios $p(x), q(x) \in \bar{M}[x]$, tales que $\varphi(x) \equiv p(x) = q(x)$ y, por lo tanto, D es finito o $D = \bar{M}$. Luego, en general, si $\varphi(x)$ es cualquier fórmula libre de cuantificadores, D es combinación booleana de conjuntos finitos y cofinitos, y, en consecuencia, es finito o cofinito.

Espacios Vectoriales infinitos sobre un cuerpo contable o finito

Sea K un cuerpo contable o finito. Sean $L = \{+, 0, K\}$, donde cada elemento de K representa una función unaria y TEV_K la teoría de espacios vectoriales infinitos sobre K.

TEV_K es no-contablemente categórica, ya que dados $M, N \vDash TEV_K$ con $|M| = |N| =$

$\kappa > \aleph_0$, para I y J bases de M y N respectivamente, como $\kappa > \aleph_0$, tenemos que $|I| = |J| = \kappa$, luego existe una biyección entre I y J, y esta induce un isomorfismo entre M y N, en el sentido del álgebra lineal y también en el de estructuras de primer orden.

Puede probarse, de manera análoga a como se hace para $TCAC_p$, que TEV_K tiene eliminación de cuantificadores.

TEV_K también es f.m. Por la eliminación de cuantificadores, todo definible D lo es mediante una fórmula libre de cuantificadores $\varphi(x, \bar{a})$. Si $\varphi(x, \bar{a})$ es atómica, entonces $\varphi(x, \bar{a})$ expresa que dos combinaciones lineales de x y los elementos de $\bar{a}$ son iguales o que son distintas, luego D es finito o cofinito. Lo anterior implica que si $\varphi(x, \bar{a})$ es cualquier fórmula libre de cuantificadores, D es combinación booleana de subconjuntos finitos y cofinitos de $\bar{M}$ y, por lo tanto, D es finito o cofinito.

Plano Proyectivo

Sea K un cuerpo infinito. Consideramos el plano proyectivo sobre K como la estructura $\mathbb{P}^2(K) = (P, C)$, donde $P = (K^3 - \{\bar{0}\})/\sim$, con la relación de equivalencia $\sim$ definida para $\bar{a}, \bar{b} \in K^3 - \{\bar{0}\}$ mediante $\bar{a} \sim \bar{b} \iff \exists \lambda \in K - \{0\}$ tal que $\lambda \bar{a} = \bar{b}$, y C es una relación ternaria definida para $[\bar{a}], [\bar{b}], [\bar{c}] \in P$ mediante $C([\bar{a}], [\bar{b}], [\bar{c}]) \iff \exists \bar{\lambda} \in K^3 - \{\bar{0}\}$ tal que $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c} = \bar{0}$, es decir, $[\bar{a}], [\bar{b}], [\bar{c}]$ son colineales en el plano proyectivo.

Nótese que la estructura $\mathbb{P}^2(K) = (P, C)$ es biinterpretable con esta otra versión, más estándar, del mismo plano proyectivo: (P, R, I), donde P y R son dos suertes, P es el conjunto de los puntos del plano como antes y R es el conjunto de las rectas, e $I \subset P \times R$ es la relación de incidencia entre los elementos de P y los elementos de Q, es decir, entre puntos y rectas. Esta segunda versión puede describirse concretamente de manera análoga a como se hizo con la primera.

La teoría completa que consideramos en este ejemplo es $TPP = Th(\mathbb{P}^2(K))$.

Veamos que TPP tiene eliminación de cuantificadores. Primero nótese que todo punto a y toda recta L en $\bar{M}$ son definibles mediante las fórmulas atómicas $x = a$ y $C(x, b, c)$, con $b, c \in L$ y $b \neq c$, respectivamente, y, recíprocamente, toda fórmula atómica con exactamente una variable libre define un punto, una recta o un definible trivial, $\emptyset$ o $\bar{M}$. Por lo tanto, los subconjuntos de $\bar{M}$ definibles mediante una fórmula libre de cuantificadores son precisamente aquellos que son combinación booleana de puntos, rectas, complementos de puntos y complementos de rectas. Para terminar es suficiente ver que dada una fórmula libre de cuantificadores $\varphi(x, y, \bar{a})$, $\exists y \varphi(\bar{M}, y, \bar{a})$ es definible mediante una fórmula sin cuantificadores (pensar en inducción); sabemos que $\varphi(x, y, \bar{a}) \equiv \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$, para algunas fórmulas $\varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$ que son atómicas o negaciones de atómicas. Así, $\exists y \varphi(x, y, \bar{a}) \equiv \exists y \bigvee_i \bigwedge j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a}) \equiv \bigvee_i \exists y \bigwedge j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$, por lo tanto, sólo falta ver que para cada i, la fórmula $\exists y \bigwedge j \varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$ define un conjunto que es combinación booleana de puntos, rectas, complementos de puntos y complementos de rectas, y esto puede verse al examinar las posibles formas de las fórmulas $\varphi_{ij}(x, y, \bar{a})$, que son, salvo equivalencia y eliminando las que corresponden a definibles triviales: $\pm(x = y)$, $\pm(x = a_k)$, $\pm(y = a_k)$, $\pm C(x, y, a_k)$, $\pm C(x, a_k, a_l)$ y $\pm C(y, a_k, a_j)$.

Lo anterior tiene como consecuencia que toda recta L en $\bar{M}$ es f.m., ya que L es definible mediante la fórmula no algebraica $C(x, a, b)$, donde $a, b \in L$ y $a \neq b$, y, dado que conocemos la forma de todos los subconjuntos definibles de $\bar{M}$ y que la intersección entre dos rectas es siempre un conjunto unitario y, por lo tanto, finito, es claro que la intersección entre L y cualquier definible es un conjunto finito o cofinito.

A continuación probamos que TPP es casi fuertemente minimal (ver 2.1), aunque obviamente no es f.m. Sean a, b, c, d, e cinco puntos distintos en $\bar{M}$ tales que

$$\models \neg C(a, b, c) \wedge \neg C(a, b, d) \wedge \neg C(a, b, e) \wedge \neg C(c, d, e),$$

y sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y D el conjunto definido por la fórmula $C(a, b, x) \vee x = c \vee x = d \vee x = e$. Así, D es f.m., porque es la unión del conjunto f.m. $C(a, b, \bar{M})$ y el conjunto finito $\{c, d, e\}$, y $\bar{M} = \operatorname{acl}(D \cup A)$, porque para todo $u \in \bar{M}$, existen dos puntos en $\{c, d, e\}$ que no son colineales con u, sin pérdida de generalidad supongamos que dichos puntos son c y d, sean u_c el punto de corte de las rectas $C(a, b, \bar{M})$ y $C(u, c, \bar{M})$ y u_d el punto de corte de las rectas $C(a, b, \bar{M})$ y $C(u, d, \bar{M})$, entonces la fórmula $C(u_c, c, x) \wedge C(u_d, d, x)$ atestigua que $u \in \operatorname{dcl}(\{u_c, u_d, c, d\})$ y, por lo tanto, $u \in \operatorname{acl}(D \cup A)$.

Finalmente, por 2.2, tenemos que TPP totalmente categórica.

$\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_4$

En este ejemplo consideramos la suma directa de $\aleph_0$ copias de $\mathbb{Z}_4$ como grupo aditivo. Sea $TZ = Th((\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_4, +)$.

Usaremos el hecho de que TZ tiene eliminación de cuantificadores.

Sea M un modelo de T, entonces $2M = \{x \in M : \exists y\ 2y = x\} = \{x \in M : 2x = 0\}$, donde la última igualdad se tiene porque vale en $\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_4$ y, dado que se puede expresar con una sentencia de primer orden, se transmite a todos los modelos de TZ. $2M$ es un subgrupo de M en el que todo elemento no nulo tiene orden 2, esta estructura es equivalente a la de espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$, luego $2M$ es un subconjunto f.m. de M.

Queremos ver ahora que para todo $a \in M$, $a + 2M$ también es f.m. en M, $a + 2M$ no es, en general, subgrupo de M como $2M$, pero podemos copiar la estructura de $2M$ en $a + 2M$ y con esto concluir que es f.m., esto es: Sea $hat+$ una operación binaria definida en el dominio de M como $x \hat{+} y = x + y - a$, así, $a + 2M$ es un subgrupo del grupo que consiste de el dominio de M equipado con la operación $\hat{+}$, todos sus elementos no nulos tienen orden 2 y, por lo tanto, es un subconjunto f.m. de dicho grupo. Esto implica que $a + 2M$ también es un conjunto f.m. en M, ya que si no lo fuera existiría una fórmula $\varphi(x, \bar{d})$ en el vocabulario $\{+\}$ para la cual $a + 2M \cap \varphi(M, \bar{d})$ y $a + 2M \cap \neg\varphi(M, \bar{d})$ son infinitos, y en ese caso la fórmula $\varphi'(x, \bar{d}, a)$ obtenida al remplazar cada expresión de la forma $(\ )_1 + (\ )_2$ en $\varphi(x, \bar{d})$, por la expresión equivalente $(\ )_1 \hat{+} (\ )_2 - a$, sería una fórmula en el vocabulario $\{\hat{+}\}$ para la cual $a + 2M \cap \varphi'(M, \bar{d}, a)$ y $a + 2M \cap \neg\varphi'(M, \bar{d}, a)$ son infinitos, lo cual produce una contradicción.

Nótese que para todo $a \in M$, $a + 2M = \{x \in M : 2x = 2a\}$, con esto podemos expresar M como la unión de una familia de conjuntos f.m. (indexada por un conjunto f.m.) de la siguiente manera:

$$M = \bigcup_{a \in M} a + 2M = \bigcup_{a \in M} \{x \in M : 2x = 2a\} = \bigcup_{b \in 2M} \{x \in M : 2x = b\}.$$

Ahora probemos que TZ es totalmente categórica.

Sean M_1 y M_2 modelos de T con $|M_1| = |M_2| = \kappa \geq \aleph_0$, por la forma como expresamos M sabemos que $|2M_1| = |2M_2| = \kappa$ y, como la teoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{Z}_2$ es totalmente categórica, esto implica que existe una biyección $\{+\}$-elemental $f : 2M_1 \to 2M_2$.

Para cada $b \in 2M_1$ o $b \in 2M_2$, sea a_b tal que $2a_b = b$, supongamos que podemos elegir los a_b de manera que $a_b + a_{b'} = a_{b+b'}$. Así, para $b \in 2M_1$ definimos:

$$\begin{aligned} f_b : a_b + 2M_1 &\to a_{f(b)} + 2M_2 \\ x &\mapsto f(x - a_b) + a_{f(b)}, \end{aligned}$$

que claramente es una biyección elemental como f.

Sea $F = \bigcup_{b \in 2M} f_b$. F es una función bien definida de M_1 en M_2 porque $\{a_b + 2M_1 : b \in 2M_1\}$ es una partición de M_1. Veamos que F es un isomorfismo, primero F es biyectiva porque cada f_b lo es, y F preserva la operación $+$ porque para todos $u, v \in M_1$,

$$\begin{aligned} F(u) + F(v) &= f_{2u}(u) + f_{2v}(v) \\ &= f(u - a_{2u}) + a_{f(2u)} + f(v - a_{2v}) + a_{f(2v)} \\ &= f(u + v - (a_{2u} + a_{2v})) + a_{f(2u)} + a_{f(2v)} \\ &= f(u + v - a_{2(u+v)}) + a_{f(2(u+v))} \\ &= F(u + v) \end{aligned}$$

Ahora comprobemos que se puede realizar una elección adecuada de los a_b, es decir, de manera que $a_b + a_{b'} = a_{b+b'}$.

Sea $2M_1 = \{b_i : i < \kappa\}$ una enumeración con $b_0 = 0$. Definimos a_{b_i} por inducción: Sea $a_{b_0} = 0$. Para $i > 0$, supongamos definidos de manera adecuada a_b para $b \in \langle b_j : j < i \rangle$ y extendamos esta definición a todos los $b \in \langle b_j : j \leq i \rangle$ como sigue:

Si $b_i \in \langle b_j : j < i \rangle$, la definición ya está completa.

Si $b_i \notin \langle b_j : j < i \rangle$, sea a_{b_i} cualquier elemento tal que $2a_{b_i} = b_i$ y para todo $b \in \langle b_j : j \leq i \rangle$, $b = \sum_{j \leq i} c_j b_j$ para algunos $c_j \in \{0, 1\}$, entonces definimos $a_b = \sum_{j \leq i} c_j a_{b_j}$.

Veamos que a_b está bien definido, si $b = \sum_{j \leq i} c_j b_j = \sum_{j \leq i} c'_j b_j$ con $c_j, c'_j \in \{0, 1\}$ entonces $0 = \sum_{j \leq i} (c_j - c'_j) b_j$, esto muestra que, dado que $b_i \notin \langle b_j : j < i \rangle$, $c_i = c'_i$, luego $0 = \sum_{j < i} (c_j - c'_j) b_j$ y, como por hipótesis de inducción la definición de los a_b es adecuada para $b \in \langle b_j : j < i \rangle$, tenemos que $0 = \sum_{j < i} (c_j - c'_j) a_{b_j}$. Por lo tanto, $\sum_{j \leq i} c_j a_{b_j} = \sum_{j \leq i} c'_j a_{b_j}$.

Es claro que el hecho de que la definición de a_b para $b \in \langle b_j : j < i \rangle$ se adecuada implica que la nueva definición efectivamente la extiende y también es claro que la definición de los a_b para $b \in 2M_1$ obtenida con la inducción es adecuada.

La definición de los a_b para $b \in 2M_2$ es análoga.

Para terminar, probemos que TZ no es c.f.m. Para esto, supongamos que sí lo es, entonces existe un conjunto finito B tal que $\bar{M} = \mathrm{acl}(2\bar{M} \cup B)$ (ver 2.4). Como B es finito, $\bar{M}$ es abeliano y todos los elementos de $\bar{M}$ tienen orden 4, entonces $\langle B \rangle$ también es finito, luego $2\bar{M} + \langle B \rangle \neq \bar{M}$. Ahora veamos que $\mathrm{acl}(2\bar{M} + \langle B \rangle) = 2\bar{M} + \langle B \rangle \neq \bar{M}$ lo cual claramente produce una contradicción, para esto nótese que toda fórmula atómica sobre el subgrupo $2\bar{M} + \langle B \rangle$ de $\bar{M}$ es equivalente a una de las siguientes:

- $x = b$, para algún $b \in 2\bar{M} + \langle B \rangle$, que define un punto en $2\bar{M} + \langle B \rangle$,
- $x + x = b$, para algún $b \in 2\bar{M} + \langle B \rangle$, que define $a_b + 2M$ si $b \in 2M$ y $\emptyset$ en caso contrario,
- $x + x + x = b$, para algún $b \in 2\bar{M} + \langle B \rangle$, que define el punto $-b \in 2\bar{M} + \langle B \rangle$.

Así, dado que toda fórmula sobre $2\bar{M} + \langle B \rangle$ es equivalente a una combinación lineal de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas y que los $a_b + 2M$ son infinitos y disyuntos para b's distintos, se tiene que los únicos elementos algebraicos sobre $2\bar{M} + \langle B \rangle$ son aquellos que pertenecen a él.

Capítulo 4

Teorías no-contablemente categóricas no c.f.m.

Ya hemos visto un ejemplo de una teoría no-contablemente categórica que no es c.f.m, es conocido que todos los ejemplos de dichas teorías corresponden a teorías de modelos que pueden obtenerse mediante la construcción de *haces fibrados definibles (definable fibre bundles)* sobre modelos f.m., a continuación presentamos esta construcción siguiendo [12]:

Dados P una L-estructura, $X \subset P^n$ definible y una familia definible de grupos $(G_a : a \in X)$ definibles en P, a continuación definimos una nueva estructura M. Para cada $a \in X$, sea Y_a un conjunto sobre el que G actúe regularmente, a un conjunto así se le llama espacio homogéneo principal para G. El dominio de M es la unión disyunta del dominio de P y los conjuntos Y_a. El lenguaje de M contiene a todos los signos de L y conservamos sus interpretaciones en P, además, tiene signos para la proyección canónica $\pi : \bigcup_{a\in X} Y_a \to X$, que es la función tal que $\pi(b) = a$ para $b \in Y_a$, y para una función ternaria f tal que, para cada $a \in X$, $f(a, \ , \ )$ define la acción de G_a en Y_a, finalmente, aceptamos estructura adicional en M siempre y cuando esta no modifique la estructura adicional en P, es decir, siempre y cuando todo subconjunto de P^m, para cualquier m, que sea definible en M sobre $\emptyset$, también sea definible en la estructura P sobre $\emptyset$. Con esto, decimos que M es un *haz fibrado definible* sobre P para la familia $(G_a : a \in X)$.

Los siguientes son algunos hechos sobre esta construcción:

- Todo modelo de $\mathrm{Th}(M)$ es primo y minimal sobre la zona correspondiente a P en su interior, téngase en cuenta que P siempre es definible en M, por ejemplo mediante la fórmula $\neg\exists y \neg\exists z f(x, y, z)$.
- Usando lo anterior, puede probarse que si $\mathrm{Th}(P)$ es no-contablemente categórica, entonces $\mathrm{Th}(M)$ también lo es.
- Si todos los grupos G_a son finitos, entonces $M = acl(P)$. Lo mismo sucede en todos los modelos de $\mathrm{Th}(M)$, por lo tanto, si P es (c.)f.m. y todos los grupos G_a son finitos, M es c.f.m.
- Si $b_a \in Y_a$, entonces $Y_a \subset \mathrm{acl}(P \cup \{b_a\})$, luego $M = \mathrm{acl}(P \cup \{b_a : a \in X\}))$. Lo mismo sucede en todos los modelos de $\mathrm{Th}(M)$, luego si X es finito y P es (c.)f.m., M es c.f.m.

Sobre cómo usar la construcción para obtener teorías no-contablemente categóricas no c.f.m., puede verse que suficiente realizarla con P f.m., X infinito y $G_a = G$ infinito. Veamos cómo podemos obtener el ejemplo básico $M = (\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_4, +)$ de esta forma:

Sea $P = (\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_2, +)$, P es f.m. porque es un grupo en que todo elemento tiene orden 2, consideremos $X = P - \{0\}$ y, para cada $a \in X$, $G_a = P$. Dado que P actúa regularmemte sobre sí mismo, podemos tomar cada Y_a esencialmente como G, siempre y cuando nos encarguemos de que los Y_a sean disyuntos, para esto tomamos Y_a como el conjunto $\{x \in M : 2x = a\}$. Luego, como conjuntos,

$$P \cup \bigcup_{a\in X} Y_a = \bigcup_{a\in 2M} \{x \in M : 2x = a\} = M.$$

Ahora veamos que la estructura de grupo en M incluye la que se define en la construcción, en el sentido de que es suficiente para definirla, la proyección canónica $\pi : \bigcup_{a\in X} Y_a \to X$ corresponde en este caso a la función $x \mapsto 2x$ y, por lo tanto, es definible con la operación de grupo en M, y ,la función ternaria f, puede definirse mediante $f(x, y, z) = w \iff x \neq 0 \wedge 2y = 0 \wedge 2z = 2x \wedge w = y + z$. Además, la estructura de grupo en M es estructura adicional admitida en la construcción ya que no agrega nueva estructura en P porque su restricción a P coincide con la estructura original de P.

Para terminar, enunciamos un teorema citado en [12] que establece que toda estrutura no-contablemente categórica puede obtenerse a partir de un conjunto fuertemente minimal en su interior mediante sucesivas construcciones de haces fibrados:

Teorema 4.1. *Si* $\mathrm{Th}(M)$ *es no-contablemente categórica y* P *es un conjunto fuertemente minimal en* M*, entonces existen un entero positivo* k *y estructuras* $P = P_0, P_1, ..., P_k = M$ *tales que cada* P_{i+1} *es un haz fibrado definible sobre* P_i*. Además, los grupos* G_a *pueden tomarse todos en* P *y de manera que sean elementales abelianos, simples no abelianos finitos o infinitos sin subgrupos normales propios definibles infinitos.*

Capítulo 5

Acción de un grupo ω-estable sobre un conjunto f.m.

En la sección anterior hemos visto que la acción de grupos definibles en una teoria no-contablemente categórica, que sabemos que son ω-estables, sobre conjuntos definibles dentro de una estructura puede determinar propiedades geométricas de la estructura. Por esto, a continuación examinamos las posibles acciones de un grupo ω-estable sobre un conjunto fuertemente minimal.

Primero presentamos algunas definiciones de la teoría de grupos.

Definición 5.1. Dada una acción de un grupo G sobre un conjunto X,

- Decimos que la acción es *fiel* si, siempre que para todo $x \in X$, $g(x) = x$, se tiene que $g = 1$.
- Decimos que la acción es *transitiva* si, para todos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$ y decimos que es *regular* si, dados x y y, dicho g es único.
- Decimos que la acción es *nítidamente n-transitiva* si la acción inducida de G sobre $X^{(n)} = \{\bar{x} \subset X : x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j\}$ es regular.

Definición 5.2. Dados dos grupos N y H, y un homomorfismo

$$\psi : H \to \mathrm{Aut}(N),$$

definimos el *producto semidirecto* de N y H para ψ, que denotamos con $N \rtimes_\psi H$ o simplemente $N \rtimes H$, como el grupo

$$G = (N \times H, \cdot),$$

donde, para $n_1, n_2 \in N$ y $h_1, h_2 \in H$,

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\psi(h_1)(n_2), h_1h_2)$$

Así, si $G = N \rtimes H$, tenemos monomorfismos

$$\begin{aligned} N &\to G \\ n &\mapsto (n, 1_H) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} H &\to G \\ h &\mapsto (1_N, h) \end{aligned}$$

e identificado N y H con sus respectivas copias dentro de G tenemos que $N \lhd G$, $NH = G$ y $N \cap H = \{1_G\}$.

El siguiente hecho de la teoría de grupos ω-estables nos da una definición más que necesitamos.

Hecho 5.3. *Todo grupo ω-estable G tiene un subgrupo definible de índice finito minimal (para el orden $\subset$) que llamamos G°, la* componente conexa *de G. G° es siempre un subgrupo normal de G definible sobre $\emptyset$.*

Ahora que tenemos las definiciones necesarias, presentamos algunos ejemplos de acciones de grupos ω-estables sobre conjuntos f.m.

Acción sobre un grupo f.m.

Sea G un grupo f.m., es conocido todo grupo f.m. es abeliano por el Teorema de Reineke:

Teorema 5.4 (Reineke). *Si G es un grupo infinito ω-estable, entonces G tiene un subgrupo abeliano definible infinito.*

Así, usando notación aditiva, G actúa regularmente sobre sí mismo mediante la acción natural

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, x) &\mapsto g + x \end{aligned}$$

Veamos otra acción sobre G, para esto supongamos que G tiene un elemento de orden > 2. Definamos $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ para el homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}_2 &\to Aut(G) \\ z &\mapsto (x \mapsto (-1)^z x) \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente acción de $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ sobre G

$$\begin{aligned} G \rtimes \mathbb{Z}_2 \times G &\to G \\ ((g, z), x) &\mapsto (-1)^z x + g \end{aligned}$$

Puede comprobarse fácilmente que la anterior aplicación es efectivamente una acción y, además, dado que para todo $x \in G$, $(x, z)(0) = x$, tanto para $z = 0$ como para $z = 1$, esta acción resulta transitiva pero no regular.

$G \rtimes \mathbb{Z}_2$ es ω-estable como G porque es definible en G, para ver esto basta notar que $\mathbb{Z}_2$ es definible en G porque es finito y usando esto definir el grupo $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ como subconjunto de G^2; sin embargo, $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ no es un grupo abeliano, si $g_0 \in G$ es un elemento de orden > 2, entonces, para cualquier $g \in G$,

$$(g, 1) \cdot (g_0, 0) = (g - g_0, 1) \neq (g + g_0, 1) = (g_0, 0) \cdot (g, 1).$$

Finalmente, considerando a G incluído en $G \rtimes \mathbb{Z}_2$, tenemos que $(G \rtimes \mathbb{Z}_2)^\circ = G$ porque G es un subgrupo de $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ de índice 2 y, dado que G es f.m., todos sus subgrupos propios son finitos y, por lo tanto, no tienen índice finito en $G \rtimes \mathbb{Z}_2$. Claramente la acción de G sobre sí mismo inducida por la de $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ sobre G resulta ser la acción regular que habíamos visto anteriormente, así, recapitulando, hemos visto una acción transitiva no regular de $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ sobre G, para la que la correspondiente acción del grupo abeliano $(G \rtimes \mathbb{Z}_2)^{\circ}$ sobre G sí es regular.

Acción de $K \rtimes K^{\times}$ sobre K

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, consideremos el grupo de transformaciones afines de K en K

$$G_{\text{aff}} = \{x \mapsto a + bx : a \in K \wedge b \in K^{\times}\}.$$

La acción natural de G_{aff} sobre K es nítidamente 2-transitiva ya que, dados $\bar{x}, \bar{y} \in X^{(2)}$,

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, a = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$$

son los únicos valores para los que la aplicación $x \mapsto a + bx$ envía $\bar{x}$ a $\bar{y}$.

Consideremos el grupo $K \rtimes K^{\times}$ para el homomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : K^{\times} &\to Aut(K) \\ b &\mapsto (x \mapsto bx) \end{aligned}$$

Entonces $K \rtimes K^{\times}$ resulta isomorfo a G_{aff} mediante

$$\begin{aligned} f : K \rtimes K^{\times} &\to G_{\text{aff}} \\ (a, b) &\mapsto (x \mapsto a + bx) \end{aligned}$$

que es claramente biyectiva y que es un homomorfismo porque

$$f((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) = f((a_1 + b_1a_2, b_1b_2)) = (x \mapsto a_1 + b_1a_2 + b_1b_2x) = f((a_1, b_1)) \circ f((a_2, b_2)),$$

así que tenemos una acción nítidamente 2-transitiva de $K \rtimes K^{\times}$ sobre K.

Acción de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sobre $\mathbb{P}^1(K)$

En el ejemplo anterior consideramos las transformaciones de la recta afín K, ahora nos ocupamos de las tranformaciones de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1(K)$. Comenzamos recordando que $\mathbb{P}^1(K) = K^2 - \{\bar{0}\}/\sim$ donde

$$\bar{x} \sim \bar{y} \iff \exists \lambda \in K^{\times}\ \lambda\bar{x} = \bar{y}.$$

Consideramos el grupo de transformaciones de la recta proyectiva

$$\mathrm{PGL}_2(K) = \{[(x_1, x_2)] \mapsto [(a + bx_1, c + dx_2)] : ad - bc \neq 0\}$$

y su acción natural sobre $\mathbb{P}^1(K)$. Dado que $\mathrm{PGL}_2(K)$ es subgrupo del grupo de permutaciones de $\mathbb{P}^1(K)$, la acción es claramente fiel. Además, como consecuencia del *Teorema fundamental de la geometría proyectiva*, se tiene que esta acción es nítidamente 3-transitiva.

El hecho principal sobre las acciones de un grupo ω-estable sobre un conjunto fuertemente minimal es que los ejemplos anteriores ilustran todas las posibles acciones de este tipo, esto se establece en el siguiente teorema:

Teorema 5.5. *Para toda acción fiel y transitiva de un grupo ω-estable G sobre un conjunto f.m. X se cumple una de las siguientes afirmaciones*

1. *G° es abeliano su acción sobre X es regular*
2. *Existe un cuerpo definible K con dominio X tal que la acción es isomorfa a de $K \rtimes K^\times$ sobre K.*
3. *Existe un cuerpo definible K con dominio $X - \{\infty\}$, para algún elemento ∞ de X, tal que la acción es isomorfa a de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sobre $\mathbb{P}^1(K)$.*

Parte II

Interpretación de grupos en teoría de modelos homogénea

Capítulo 6

Teoría de modelos homogénea

A continuación presentamos las clases de estructuras que estudia la teoría de modelos homogénea, cada una de estas clases consiste de los modelos de una teoría completa de primer orden T que sólo realizan tipos sobre vacío que pertenecen a un conjunto fijo $D \subset D(T)$, además, requerimos una hipótesis que permite trabajar dentro de un gran modelo con propiedades de homogeneidad que usamos como dominio universal para la clase.

Definición 6.1. Dado $A \subset \bar{M}$, definimos el *diagrama finito* de A como

$$D(A) = \{\mathrm{tp}(\bar{a}/\emptyset) : \bar{a} \subset A \text{ (finita)}\} \subset D(T)$$

Llamamos *diagramas finitos* a los conjuntos de tipos obtenidos de esta forma.

Definición 6.2. Dado $A \subset \bar{M}$, decimos que A es un D*-conjunto* si $D(A) \subset D$ y, si $M \models T$, decimos que M es un D*-modelo* si su dominio es un D-conjunto.

En adelante nos concentraremos en las clases de los D-modelos. Los dos casos extremos de la primera definición, cuando $D = D(T)$ y cuando D solamente contiene los tipos aislados sobre vacío, son de especial importancia; en el primer caso la clase de los D-modelos coincide con $Mod(T)$ y es por esto que la teoría de modelos homogénea extiende a la teoría de modelos de primer orden; en el segundo, la clase de los D-modelos es precisamente la clase de los modelos atómicos de T. Este último tipo de clases es particularmente interesante porque sobre él se pueden traducir preguntas acerca de las clases de modelos de sentencias de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$, por ejemplo, preguntas del número de modelos en cada cardinal; el hecho principal en este sentido, que presentamos siguiendo [1] y [2], es el siguiente:

Teorema 6.3. *Sea ψ una sentencia completa de $L_{\omega_1\omega}$ en un vocabulario contable L. Entonces, existen un vocabulario contable $L' \supset L$ y una L'-teoría de primer orden T tales que la aplicación definida tomando L-reductos de L'-estructuras es una biyección entre la clase de los modelos atómicos de T y la clase de los modelos de ψ.*

Demostración. Para esta demostración usaremos los siguientes hechos de la teoría de modelos de $L_{\omega_1\omega}$:

- Para toda sentencia completa ψ de $L_{\omega_1\omega}$ en un vocabulario contable y todo modelo M de ψ, M sólo realiza una cantidad contable de $L_{\omega_1\omega}$-tipos.

- Para todo modelo M, si M realiza sólo una cantidad contable de $L_{\omega_1\omega}$-tipos, entonces cada tipo q realizado en M es aislado por una fórmula (de $L_{\omega_1\omega}$), denotaremos esta fórmula como $\bigwedge q$ (incluso para q no contable!).

Dicho esto, sea M_0 un modelo de ψ y sea L^* un fragmento de $L_{\omega_1\omega}$ (es decir, un subconjunto de $L_{\omega_1\omega}$ cerrado para subfórmulas y para las operaciones finitarias $\neg, \wedge, \forall$) contable tal que:

- ψ pertenece a L^*, y,
- para todo q $L_{\omega_1\omega}$-tipo realizado en M_0, $\bigwedge q$ pertenece a L^*.

Sea L' el vocabulario obtenido al agregar a L un nuevo predicado $P_{\phi(\bar{x})}(\bar{x})$ por cada fórmula $\phi(\bar{x})$ en L^*, para estos nuevos predicados definimos interpretaciones en M_0, para obtener una L'-estructura M_0', de manera que:

- Para ϕ atómica,
$$P_{\phi(\bar{x})}(\bar{x}) \iff \phi(\bar{x})$$
- Dada la interpretación de $P_{\phi(\bar{x})}$,
$$P_{\neg\phi(\bar{x})}(\bar{x}) \iff \neg P_{\phi(\bar{x})}(\bar{x}), \text{ y, } P_{\forall x_i\phi(\bar{x})}(\bar{x}) \iff \forall x_i P_{\phi(\bar{x})}(\bar{x})$$
- Dadas las interpretaciones de $P_{\phi_i}(\bar{x})$, para $i < \omega$,
$$P_{\bigwedge_i \phi_i(\bar{x})}(\bar{x}) \iff \bigwedge_{i<\omega} P_{\phi_i(\bar{x})}(\bar{x})$$

Sea $T = \mathrm{Th}(M_0')$ y definamos el conjunto de tipos

$$\Gamma = \{p_{\bigwedge_i \phi_i(\bar{x})}(\bar{x}) : \bigwedge_i \phi_i(\bar{x}) \in L^* \text{ y } \bigwedge_i \phi_i(\bar{x}) \text{ no es equivalente a ninguna subconjunción finita}\},$$

donde
$$p_{\bigwedge_i \phi_i(\bar{x})}(\bar{x}) = \{\neg P_{\bigwedge_i \phi_i(\bar{x})}(\bar{x})\} \cup \{P_{\phi_i(\bar{x})}(\bar{x}) : i < \omega\},$$
vale la pena anotar que, dado que todo subconjunto finito de un tipo de Γ es realizado en M_0', por compacidad, todos los tipos de Γ son consistentes con T y, dado que M_0 es modelo de ψ, M_0' omite todos los tipos de Γ y, por lo tanto, dichos tipos son no aislados.

Finalmente consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_{\mathrm{at}}(T) &\to \mathrm{Mod}(\psi) \\ M &\mapsto M|_L \end{aligned}$$

Comprobemos que efectivamente la imagen de esta aplicación está incluida en $\mathrm{Mod}(\psi)$, para esto simplemente nótese que si M es un modelo atómico de T entonces M omite todos los tipos de Γ y, por la definición de los predicados $P_{\phi(\bar{x})}$, esto implica que $M|_L$ es modelo de ψ.

Probemos que la aplicación es biyectiva, es decir, que para toda L-estructura N que sea modelo de ψ, existe exactamente una L'-estructura N' que es modelo atómico de T tal que $N'|_L = N$. Para esto primero veamos que no puede haber más de un modelo con estas propiedades, si N' y N'' son modelos atómicos de T tales que $N'|_L = N''|_L = N$, entonces en ambos modelos se omiten todos los tipos de Γ y, por lo tanto, en los dos las interpretaciones de los predicados $P_{\phi(\bar{x})}$ modelos están determinadas por las interpretaciones de los signos de L de la misma forma que en M_0', luego, N' y N'' son isomorfos. Ahora veamos que dado un modelo N de ψ, existe un N' modelo atómico de T tal que $N'|_L = N$; como es necesario para que N' omita los tipos de Γ, decretamos interpretaciones de los predicados $P_{\phi(\bar{x})}$ en N' con las mismas definiciones usadas para hacerlo en M_0'. Así, sólo falta probar que tal N' es un modelo atómico de T, para esto primero nótese que

$$M_0 \equiv_{L_{\omega_1\omega}} N \Rightarrow M_0' \equiv_{L_{\omega_1\omega}} N' \Rightarrow M_0' \equiv N' \Rightarrow N' \models T,$$

donde la primera equivalencia se debe a la completez de ψ y la primera implicación se debe a que en M_0' y N' los predicados $P_{\phi(\bar{x})}$ están definidos a partir de los signos de L mediante fórmulas de $L_{\omega_1\omega}$. Además, si $\bar{a} \in N'$, sea q el $L_{\omega_1\omega}$-tipo de $\bar{a}$ en N, entonces

$$N \models \exists\bar{x} \bigwedge q(\bar{x}) \Rightarrow M_0 \models \exists\bar{x} \bigwedge q(\bar{x}) \Rightarrow q \text{ es realizado en } M_0 \Rightarrow \bigwedge q(\bar{x}) \in L^*,$$

luego la fórmula $P_{\bigwedge q(\bar{x})}(\bar{x})$ aisla el tipo de $\bar{a}$ en N', con lo cual podemos concluir que N' es atómico. $\square$

Como hemos visto toda clase elemental puede verse como una clase de D-modelos, pero no todas las clases que estudia la teoría de modelos homogénea son elementales, el contraejemplo más sencillo lo podemos encontrar al tomar la clase de los modelos atómicos de una teoría T para la cual haya por lo menos un tipo no aislado p consistente con ella, esta clase no puede ser elemental porque el tipo p no es realizado en ninguno de sus modelos pero todo subconjunto finito de p sí es realizado en un modelo atómico de T.

Las clases estudiadas por la teoría de modelos homogénea tienen buenas propiedades y esto se verá a lo largo de este trabajo, por ahora podemos decir que las clases de D-modelos, con la relación de subestructura elemental, son clases elementales abstractas (a continuación recordamos la definición) que son las principales clases estudiadas en la teoría de modelos sin alusión a una sintaxis fija.

Definición 6.4. Dado un vocabulario L, una clase de L-estructuras $\mathcal{K}$ y una relación binaria $\prec$ entre los elementos de $\mathcal{K}$. Decimos que $(\mathcal{K}, \prec)$ es una *clase elemental abstracta* si se tienen las siguientes propiedades:

1. Si $M \in \mathcal{K}$ y $N \cong M$, entonces $N \in \mathcal{K}$.
2. Para todos $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathcal{K}$, si $M_1 \prec M_2$ y existen isomorfismos $f_i : M_i \to N_i$ $(i = 1, 2)$ con $f_1 \subset f_2$, entonces $N_1 \prec N_2$.
3. $\prec$ es un orden parcial en $\mathcal{K}$.
4. Para todos $M, N \in \mathcal{K}$, si $M \prec N$ entonces $M \subset N$.
5. Para todos $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{K}$, si $M_1 \prec M_3$, $M_2 \prec M_3$ y $M_1 \subset M_2$, entonces $M_1 \prec M_2$.

6. Existe un cardinal $LS(\mathcal{K}) \geq \aleph_0 + |L|$ (el *número de Löwenheim-Skolem* de la clase) tal que, para todos $M \in \mathcal{K}$ y $A \subset M$, existe $N \in \mathcal{K}$ talque $A \subset N \prec M$ y $|N| \leq LS(\mathcal{K}) + |A|$.

7. Para toda $\prec$-cadena creciente $(M_i : i < \mu)$ de elementos de $\mathcal{K}$, $M = \bigcup_{i<\mu} M_i$ pertenece a $\mathcal{K}$ y $M_i \prec M$, para todo $i\ mu$. Además, para todo $N \in \mathcal{K}$, si para cada $i < \mu$ se tiene $M_i \prec N$, entonces $M \prec N$.

Ahora, para entender un poco mejor los D-conjuntos, vale la pena observar algunas propiedades básicas. Por ejemplo, es claro que todo subconjunto de un D-conjunto es un también un D-conjunto, en particular, la intersección de dos D-conjuntos siempre es D-conjunto. También se tiene que si A es un D-conjunto y $f : A \to B$ es una aplicación elemental sobre, entonces B también es un D-conjunto, porque, para toda tupla finita $\bar{b} \subset B$, existe una tupla finita $d \subset A$ tal que $f(\bar{d}) = \bar{c}$ y, por lo tanto, $\mathrm{tp}(\bar{c}/\emptyset) = \mathrm{tp}(\bar{d}/\emptyset) \in D$. Por otra parte, la unión de dos D-conjuntos no necesariamente resulta ser D-conjunto, para ver esto consideremos la teoría de cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0 y $e_1, e_2 \in \bar{M}$ dos elementos algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, tomemos $D = D(\{e_1\} \cup \mathbb{Q})$, así, dado que $\mathrm{tp}(e_1/\mathbb{Q}) = \mathrm{tp}(e_2/\mathbb{Q})$, tanto $\{e_1\} \cup \mathbb{Q}$ como $\{e_2\} \cup \mathbb{Q}$ son D-conjuntos, pero $\{e_1, e_2\} \cup \mathbb{Q}$ no es un D-conjunto ya que $\mathrm{tp}(e_1 e_2 1/\emptyset)$ no pertenece a D.

Nuestro siguiente paso es determinar cuáles son los tipos relevantes cuando nos restringimos a los D-modelos de T, más explícitamente, podemos heredar la noción de tipo usual de la teoría de modelos de primer orden para la clase de los D-modelos, pero no todos los tipos consistentes con T son realizados en algún modelo de esta nueva clase, considérese por ejemplo la clase de los modelos atómicos de T y cualquier tipo no aislado, así que debemos tener claro qué tipos son realizables en los D-modelos.

Una primera observación al respecto es la siguiente, dados un D-conjunto A contenido en un D-modelo M y un tipo $p \in S^n(A)$, si p es realizado en algún D-modelo N, extensión elemental de M, por una tupla $\bar{c}$, entonces tenemos que $A \cup \bar{c}$ es un D-conjunto; además, para toda realización $\bar{d}$ de p, $A \cup \bar{d}$ también es un D-conjunto ya que como se puede ver claramente existe una aplicación elemental sobre de $A \cup \bar{c}$ en $A \cup \bar{d}$. Esto nos lleva a hacer la siguiente definición.

Definición 6.5. Dados un D-conjunto A y un tipo $p \in S^n(A)$, decimos que p es un *D-tipo* si, para toda realización $\bar{c}$ de p, $A \cup \bar{c}$ es un D-conjunto. Equivalentemente, p es un *D-tipo*, si existe una realización $\bar{c}$ de p tal que $A \cup \bar{c}$ es un D-conjunto. $S^n_D(A)$ denotará el conjunto de los D-tipos en n variables sobre A, también usaremos $S_D(A)$ para denotar el conjunto $S^1_D(A)$.

Un poco más adelante se verá que no sólo todo tipo realizado en algún D-modelo es un D-tipo, sino que, mediante nuestra hipótesis extra, nos encargaremos de garantizar que todo D-tipo sea realizado en algún D-modelo.

Nótese que, en el caso particular en que $A = \emptyset$, si $p \in S^n(\emptyset)$ para algún n, p es un D-tipo, si y sólo si, para todo $\bar{c} \vDash p$, $\bar{c}$ es un D-conjunto, lo cual es equivalente a que $\mathrm{tp}(\bar{c}/\emptyset) = p$ pertenezca a D; en conclusión, p es un D-tipo, si y sólo si, $p \in D$

Definición 6.6. Dados un D-modelo M de T y un cardinal λ, M se dice *(D, λ)-homogéneo*, si realiza todo tipo $p \in S_D(A)$, para todo $A \subset M$ con $|A| < \lambda$.

La definión anterior es claramente una versión de saturación restringida a los D-tipos, nótese que si $D = D(T)$, la noción de de modelo (D, λ)-homogéneo coincide con la de modelo λ-saturado.

En este punto es relevante recordar las definiciones de homogeneidad y universalidad, otras propiedades de grandeza de modelos.

Definición 6.7. Dados un modelo M y un cardinal λ, decimos que M es λ-*homogéneo* si, para toda aplicación elemental parcial f de M en M tal que $|f| < \lambda$ y para todo $a \in M$, existe $b \in M$ tal que $f \cup \{(a, b)\}$ es también una aplicación elemental parcial. Además decimos que M es *homogéneo* si es $|M|$-homogéneo.

Obviamente, dado que para toda función parcial f de M en M, f es aplicación elemental, si y sólo si, f^{-1} lo es, también tenemos que, M es λ-homogéneo, si y sólo si, para toda aplicación elemental parcial f de M en M tal que $|f| < \lambda$ y para todo $b \in M$, existe $a \in M$ tal que $f \cup \{(a, b)\}$ es también una aplicación elemental parcial.

Definición 6.8. Dados $\mathcal{K}$ una subclase de la clase de los modelos de T, un modelo M y un cardinal λ. Decimos que M es $< \aleph_0$-*universal para* $\mathcal{K}$ si para toda tupla finita $\bar{a}$ en un modelo N en $\mathcal{K}$, existe una aplicación elemental $f : \bar{a} \to M$. Y decimos que M es λ-*universal para* $\mathcal{K}$ si para todo modelo N en $\mathcal{K}$ de tamaño λ, existe un embebimiento elemental $\tilde{g}$ de N en M (i.e. una función $\tilde{g} : N \to M$ para la cual existe un modelo $N' \prec M$ tal que $\tilde{g}$ es un isomorfismo de N en N').

En la teoría de modelos de primer orden la principal relación entre saturación y homogeneidad está dada por el siguiente hecho, en seguida probaremos una proposición análoga para la noción de (D, λ)-homogeneidad.

Hecho 6.9. *Dado un modelo M de T. M es λ-saturado, si y sólo si, M es λ-homogéneo y $< \aleph_0$-universal, si y sólo si, M es λ-homogéneo y λ-universal.*

Primero un lema que, en particular, garantiza que si un modelo es (D, λ)-homogéneo entonces también es λ-universal para la clase de los D-modelos de T y λ-homogéneo.

Lema 6.10. *Sean M un modelo (D, λ)-homogéneo, A un D-conjunto de cardinal λ y $B \subset A$ con $|B| < \lambda$. Entonces para toda aplicación elemental $f : B \to M$, existe una aplicación elemental $g : A \to M$ que extiende a f.*

Demostración. Sea $(a_i : i < \lambda)$ una enumeración de $A - B$, definimos una cadena de funciones elementales $(f_i : i < \lambda)$ como sigue:

1. $f_0 = f$.
2. Para $i < \lambda$ ordinal límite, ya definidas f_j para $j < i$, sea $f_i = \bigcup_{j<i} f_j$.
3. Para definir f_{i+1} para $i < \lambda$, sea $q_i = f_i(\mathrm{tp}(a_i/B \cup \{a_j : j < i\}))$, con esto $q_i \in S_D(f_i(B \cup \{a_j : j < i\}))$ porque si $c \vDash q_i$ entonces $f_i \cup (a_i, c)$ es una aplicación elemental sobre de $B \cup \{a_j : j \leq i\}$ en $f_i(B \cup \{a_j : j < i\}) \cup \{c\}$ y, por lo tanto, dado que $B \cup \{a_j : j \leq i\}$ es un D-conjunto, $f_i(B \cup \{a_j : j < i\}) \cup \{c\}$ también lo es. Así, como M es (D, λ)-homogéneo, existe $b_i \in M$ tal que $b_i \vDash q_i$, y definimos $f_{i+1} = f_i \cup \{(a_i, b_i)\}$.

Esto es suficiente para que $g = \bigcup_{i<\lambda} f_i$ sea una función elemental de A en M que extiende f, como se requería. $\square$

Lema 6.11. *M es (D, λ)-homogéneo, si y sólo si, $D(M) = D$ y M es λ-homogéneo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que M es (D, λ)-homogéneo. Dado que M es un D-modelo, tenemos que $D(M) \subset D$, por otro lado, para todo $p \in D$, p pertenece a $S^n_D(\emptyset)$ para algún n, luego, por la (D, λ)-homogeneidad de M, p es realizado en M y, en consecuencia, $p \in D(M)$; con esto tenemos que $D = D(M)$. Además, por el lema anterior, M también es λ-homogéneo.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que M es un modelo λ-homogéneo tal que $D(M) = D$ y veamos que M es (D, λ)-homogéneo. Para esto, probaremos por inducción que M es (D, μ)-homogéneo para todo $\mu \leq \lambda$.

Para la base de la inducción supongamos que $\mu < \aleph_0$, sea $\bar{c} \subset M$ con $l(n) = \mu$ y sea $p \in S_D(\bar{c})$. Sea a una realización de p (en algún modelo de T), entonces $\{a\} \cup \bar{c}$ es un D-conjunto, luego $\text{tp}(a\bar{c}/\emptyset) \in D = D(M)$, esto implica que existen $a' \in M$ y $\bar{c}' \subset M$ tales que $\text{tp}(a'\bar{c}'/\emptyset) = \text{tp}(a\bar{c}/\emptyset)$. Sea $f : \bar{c}' \to \bar{c}$ tal que $f(c'_i) = c_i$ para cada i, así f es una aplicación elemental parcial de M en M, y entonces, por la λ-homogeneidad de M, existe g aplicación elemental parcial de M en M tal que $g \supset f$ y $dom(g) \supset dom(f) \cup \{a'\}$. Con esto tenemos que $g(a) \vDash g(\text{tp}(a'/\bar{c}')) = \text{tp}(a/\bar{c}) = p$, luego p es realizado en M y podemos concluir que M es (D, μ)-homogéneo.

Ahora el paso inductivo, el procedimiento es bastante similar al anterior, sea $\mu \leq \lambda$ y supongamos que para todo $\kappa < \mu$, M es (D, κ)-homogéneo. Sea $C \subset M$ con $|C| = \kappa < \mu$ y sea $p \in S_D(C)$, sea a una realización de p, entonces $C \cup \{a\}$ es un D-conjunto y $|C \cup \{a\}| = \kappa$, entonces, por la hipótesis de inducción y el lema anterior, existe $f : C \cup \{a\} \to M$ aplicación elemental. Además, como M es λ-homogéneo, existe una función elemental parcial g de M en M tal que $g \supset f^{-1}|_C$ y $dom(g) \supset f(C \cup \{a\})$, así, $g(f(a)) \in M$ y $g(f(a)) \vDash g(f(p)) = p$, luego p es realizado en M. Por lo tanto, M es (D, μ)-homogéneo. $\square$

En el lema anterior la condición $D(M) \supset D$, incluida en la segunda parte del enunciado, juega el papel que tenía la $< \aleph_0$-homogeneidad en el hecho 6.9. Además, usando el lema 6.10, es fácil ver que podemos agregar que M es (D, λ)-homogéneo, si y sólo si, M es un D-modelo λ-homogéneo y λ-universal para la clase de los D-modelos.

La teoría de modelos homogénea estudia la clase de los D-modelos bajo la siguiente hipótesis, que adoptaremos de este punto en adelante:

Hipótesis 6.12. Supongamos que existen modelos (D, λ)-homogéneos de tamaño mayor o igual a λ, para cardinales λ arbitrariamente grandes.

Una primera observación sobre la hipótesis es que ésta garantiza que todo D-tipo es realizado en algún D-modelo, de hecho, hace que podamos trabajar dentro de un gran *dominio universal*, o *modelo monstruo*, para la clase de los D-modelos, más precisamente, consideramos un D-modelo $(D, \bar{\kappa})$-homogéneo $\mathfrak{C}$ de tamaño por lo menos $\bar{\kappa}$, donde $\bar{\kappa}$ representa un cardinal arbitrariamente grande, es decir, mayor que el cardinal de cualquier conjunto o modelo que mencionemos a menos que se diga lo contrario. Con esto podemos asumir que todos los D-conjuntos y D-modelos están incluidos en $\mathfrak{C}$, además, que todo D-modelo es subestructura elemental de $\mathfrak{C}$ (ver 6.10). En particular, resaltamos que todos los conjuntos sobre los que consideraremos tipos son de cardinalidad menor que $\bar{\kappa}$ y la satisfacción de tipos será respecto a $\mathfrak{C}$.

Usaremos el término *acotado* para referirnos a los subconjuntos de $\mathfrak{C}$ de tamaño menor que λ y *no acotado* para los de tamaño por lo menos λ, además diremos que un tipo realizado en $\mathfrak{C}$ es acotado o no acotado según lo sea su conjunto de realizaciones en $\mathfrak{C}$.

Hipótesis, como ésta, que garanticen un modelo monstruo o hipótesis de amalgamación no quitan relevancia al estudio de estas clases porque aparecen en casos importantes, en particular en casos de categoricidad, así que el trabajo con ellas es útil, por ejemplo, para teoremas de tranferencia de categoricidad; para un recuento detallado de este tema ver [6, pág. 6]. Aquellos diagramas para los que se cumple la hipótesis 6.12 se dicen *buenos*, para información acerca de qué condiciones garantizan esta bondad puede consultarse [10].

Nótese que para todo D-conjunto A, se tiene que

$$S_D^n(A) = \{\mathrm{tp}(\bar{a}/A) : \bar{a} \in \mathfrak{C}^n\},$$

por esto, a partir de ahora D-tipo y tipo realizado en $\mathfrak{C}$ serán expresiones equivalentes para nosotros incluso para tipos parciales. Esta equivalencia entre una caracterización sintáctica y una caracterización semántica de los D-tipos tiene como consecuencia más sobresaliente que, dado que para todo $p \in S^n(A)$, $p \in S_D^n(A)$, si y sólo si, $p|_{A_0} \in S^n(A_0)$ para todo $A_0 \subset_{\text{fin}} A$, entonces para todo $p \in S^n(A)$, p es realizado en $\mathfrak{C}$, si y sólo si, $p|_{A_0}$ es realizado en $\mathfrak{C}$ para todo $A_0 \subset_{\text{fin}} A$; esta propiedad es conocida como *compacidad débil* y es la principal herramienta usada en teoría de modelos homogénea, entre otras cosas, para generalizar resultados de la teoría de modelos de primer orden. Por ahora enunciamos una de sus consecuencias que será utilizada más adelante:

Lema 6.13. *Sea α un ordinal límite. Si $(p_i : i < \alpha)$ con $p_i \in S_D(B_i)$ es una sucesión creciente y continua de tipos (i.e. una sucesión tal que, si $i < j < \alpha$, entonces $p_i \subset p_j$, y, si $i < \alpha$ es un ordinal límite, entonces $p_i = \bigcup_{j<i} p_j$) entonces $\bigcup_{i<\alpha} p_i$ es realizado en $\mathfrak{C}$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, $\bigcup_{i<\alpha} p_i$ es omitido en $\mathfrak{C}$, entonces existe $B \subset_{\text{fin}} \bigcup_{i<\alpha} B_i$ tal que $(\bigcup_{i<\alpha} p_i)|_B$ es omitido en $\mathfrak{C}$. Como B es finito, existe $i_0 < \alpha$ tal que $B \subset B_{i_0}$, así, $p_{i_0} = (\bigcup_{i<\alpha} p_i)|_{B_{i_0}} \supset (\bigcup_{i<\alpha} p_i)|_B$ y, por lo tanto, p_{i_0} también es omitido en $\mathfrak{C}$, ¡contradicción! $\square$

Además, contando con la propiedad de compacidad débil podemos hacer una observación básica, se tiene el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente tal como en primer orden y así, combinándolo con la propiedad descendente, podemos concluir que la clase de los D-modelos de T tiene elementos de todas las cardinalidades mayores o iguales a su número de Löwenheim-Skolem.

Capítulo 7

ω-estabilidad, indiscernibles y no ruptura

Dado que hemos visto que los tipos importantes en este contexto son los D-tipos, las definiciones de estabilidad se referirán sólo a estos tipos.

Definición 7.1. Sean λ un cardinal infinito y D un diagrama. Decimos que D es λ-*estable* si, para todo $A \subset \mathfrak{C}$ con $|A| = \lambda$, $|S_D(A)| = \lambda$.

Como es costumbre, también usaremos la expresión ω-*estable* para decir $\aleph_0$-estable.

Es bueno anotar que obviamente si T es λ-estable, entonces para todo diagrama D, D también es λ-estable. Tal como en primer orden, usando inducción y el principio del palomar puede verse que si D es λ-estable, entonces $|S_D^n| = \lambda$ para todo n.

Otra propiedad que definimos de manera análoga a como se hace en la teoría de modelos de primer orden y que está relacionada con la ω-estabilidad es la siguiente:

Definición 7.2. Un diagrama D es *totalmente trascendente* si no existe un árbol creciente de conjuntos (finitos) B_η y tipos $p_\eta \in S_D(B_\eta)$, con índices η en ${}^{\omega>}2$, para la cual existen una fórmula $\phi(x, \bar{y})$ y tuplas $\bar{b}_\eta \subset B_\eta$ tales que

$$\phi(x, \bar{b}_\eta) \in p_{\eta 0} \quad \text{y} \quad \neg\phi(x, \bar{b}_\eta) \in p_{\eta 1}$$

Lema 7.3. *Si D es ω-estable, entonces también es totalmente trascendente.*

Demostración. Supongamos que D no es totalmente trascendente, entonces existe un árbol creciente de conjuntos finitos B_η y tipos $p_\eta \in S_D(B_\eta)$, con índices $\eta \in {}^{\omega>}2$, para el cual existen una fórmula $\phi(x, \bar{y})$ y tuplas $\bar{b}_\eta \subset B_\eta$ tales que

$$\phi(x, \bar{b}_\eta) \in p_{\eta 0} \quad \text{y} \quad \neg\phi(x, \bar{b}_\eta) \in p_{\eta 1},$$

Entonces para cada $\nu \in {}^{\omega}2$ definimos $p_\nu = \bigcup_{n<\omega} p_{\nu|_n}$, donde $\nu|_n$ es la tupla de los primeros $n+1$ términos de ν. Por 6.13, cada p_ν es un D-tipo; además, si $\nu, \sigma \in {}^{\omega}2$ y $\nu \neq \sigma$, entonces $p_\nu \neq p_\sigma$ porque, si n_0 es el primer natural para el que $\nu_{n_0} \neq \sigma_{n_1}$, $\phi(x, \bar{b}_{\nu|_{n_0}})$ atestigua la diferencia.

Así, $|S_D(\bigcup_{\eta<\omega} B_\eta)| = 2^{\aleph_0}$, apesar de que $\bigcup_{\eta<\omega} B_\eta$ es contable. Por lo tanto D no es ω-estable. $\square$

Ahora definimos las sucesiones de indiscernibles que serán útiles más adelante.

Definición 7.4. Dados un modelo M (aquí incluimos los modelos grandes $\bar{M}$ y $\mathfrak{C}$), un orden lineal $(\mathcal{I}, <)$, $A \subset M$ e $I = (\bar{b}_i : i \in \mathcal{I}) \subset M^m$, para algún $m < \omega$. Decimos que I es una *sucesión de indiscernibles sobre A en M* si, para todo $n < \omega$ y para todos $i_1 < \cdots < i_n \in \mathcal{I}$ y $j_1 < \cdots < j_n \in \mathcal{I}$ se tiene que

$$\operatorname{tp}(\bar{b}_{i_1}, ..., \bar{b}_{i_n}/A, M) = \operatorname{tp}(\bar{b}_{j_1}, ..., \bar{b}_{j_n}/A, M)$$

Definición 7.5. Dados M y A como en la definición anterior e $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos órdenes lineales. Ordenamos la clase de las sucesiones de indiscernibles sobre A en M de la siguiente forma, si $I = (\bar{b}_i : i \in \mathcal{I})$ y $J = (\bar{b}_i : i \in \mathcal{J})$ son sucesiones de indiscernibles sobre A en M, definimos

$$I \leq J \iff I \subset J \wedge \mathcal{I} \subset \mathcal{J}.$$

En particular, decimos que I es una *sucesión maximal de indiscernibles sobre A en M* si es un elemento maximal de este orden.

Lema 7.6. *Sean M un modelo y $A \subset M$. Para toda I sucesión de indiscernibles sobre A en M, existe J sucesión maximal de indiscernibles sobre A en M tal que $J \supset I$.*

Demostración. Aplicación estándar del Lema de Zorn. $\square$

Lema 7.7. *Sean M un modelo, $A \subset M$ e $I = (\bar{b}_i : i < \mathcal{I})$ una sucesión maximal de indiscernibles sobre A en M infinita. Si M es (D, λ)-homogéneo y $|A| < \lambda$, entonces $|I| \geq \lambda$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que $|I| < \lambda$, y consideremos el siguiente tipo:

$$\begin{aligned} p(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_{i_1}, ..., \bar{b}_{i_n}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_{j_1}, ..., \bar{b}_{j_n}) :& \\ \bar{a} \subset A, n < \omega, i_1 < \cdots < i_n \in \mathcal{I}, j_1 < \cdots < j_n \in \mathcal{I}, \phi \in \operatorname{Fmls}(L)\}.& \end{aligned}$$

El conjunto de parámetros de este tipo tiene cardinal $|A| \cdot |I|$ que, por nuestra suposición, es menor que λ, así, si p es un D-tipo, entonces p debe ser realizado en M y esto nos daría la contradicción que buscamos ya que, si $\bar{b}$ es una realización de p en M y definimos $\mathcal{I}'$ como el orden obtenido al agregar un punto i' al final del orden $\mathcal{I}$ e $I' = (\bar{b}_i : i \in \mathcal{I}')$ con $\bar{b}_{i'} = \bar{b}$, entonces I' es una sucesión de indiscernibles sobre A en M e $I' \supsetneq I$.

Veamos que efectivamente p es un D-tipo; por la propiedad de compacidad débil, es suficiente ver que, para todo $C \subset_{\text{fin}} \operatorname{dom}(p)$, $p|_C$ es un D-tipo. Sea $C \subset_{\text{fin}} \operatorname{dom}(p)$, entonces $p|_C$ está contenido en

$$\begin{aligned} p_0(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_{i_1}, ..., \bar{b}_{i_n}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_{j_1}, ..., \bar{b}_{j_n}) :& \\ \bar{a} \subset A_0, n < N, i_1 < \cdots < i_n \in \mathcal{I}_0, j_1 < \cdots < j_n \in \mathcal{I}_0, \phi \in \Delta\},& \end{aligned}$$

para algunos $A_0 \subset_{\text{fin}} A$, $N < \omega$, $\mathcal{I}_0 \subset_{\text{fin}} \mathcal{I}$ y $\Delta \subset \text{Fmls}(L)$. Nótese que, dado que I es una sucesión de indiscernibles, para $i \in \mathcal{I} - \mathcal{I}_0$, $\bar{b_i} \subset M$ realiza el tipo p_0 y, por lo tanto, también realiza $p|C$; luego $p|C$ es realizado en el D-modelo M y, en consecuencia, es un D-tipo. □

El siguiente hecho recoge algunas consecuencias importantes de la ω-estabilidad.

Hecho 7.8. *Supongamos que D es ω-estable, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si I es un conjunto no contable de tuplas de elementos de $\mathfrak{C}$ y A es contable, entonces existe $J \subset I$ no contable que es sucesión de indiscernibles sobre A.*
2. *D es λ-estable, para todo cardinal infinito λ.*
3. *Existe un modelo (D, λ)-homogéneo de tamaño λ, para todo cardinal infinito λ.*

La tercera afirmación del hecho garantiza que bajo ω-estabilidad podemos tomar el dominio universal $\mathfrak{C}$ como un modelo $(D, bkappa)$-homogéneo de tamaño $bkappa$, que, por lo tanto, resulta *fuertemente $\bar{\kappa}$-homogéneo*, es decir, tal que para todo conjunto acotado A y todos $a, b \in \mathfrak{C}$, si $\text{tp}(a/A) = \text{tp}(b/A)$, entonces existe un automorfismo $f \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ tal que $f(a) = b$.

Otra herramienta que usaremos es la no ruptura que definimos como sigue:

Definición 7.9. Dados p un D-tipo sobre A y $B \subset A$, decimos que p *rompe sobre* B, si existen $\bar{c}, \bar{d} \in A$ con $\text{tp}(\bar{c}/B) = \text{tp}(\bar{d}/B)$ y una fórmula $\phi(x, \bar{y})$ tales que

$$\phi(x, \bar{c}) \in p \quad \text{y} \quad \neg\phi(x, \bar{d}) \in p.$$

Lema 7.10. *Si un D-tipo p sobre A rompe sobre $B \subset A$, entonces*

- *existe $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ tal que p y $\sigma(p)$ son dos D-tipos incompatibles que extienden a $p|_B$,*

y, visto de otra manera,

- *existe una fórmula $\phi(x, \bar{d})$ tal que $p|_B \cup \{\phi(x, \bar{d})\}$ y $p|_B \cup \{\neg\phi(x, \bar{d})\}$ son ambos D-tipos.*

Demostración. Supongamos que p rompe sobre B, entonces existen $\bar{c}, \bar{d} \in A$ con $\text{tp}(\bar{c}/B) = \text{tp}(\bar{d}/B)$ y una fórmula $\phi(x, \bar{y})$ tales que

$$\phi(x, \bar{c}) \in p \quad \text{y} \quad \neg\phi(x, \bar{d}) \in p,$$

Como B es acotado, existe $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ tal que $\sigma(\bar{c}) = \bar{d}$, por lo tanto, $\phi(x, \bar{d}) \in \sigma(p)$. Además, debe ser claro que, dado que p es D-tipo, $\sigma(p)$ también es un D-tipo.

Para la segunda afirmación, simplemente nótese que $p|_B \cup \{\phi(x, \bar{d})\}$ y $p|_B \cup \{\neg\phi(x, \bar{d})\}$ están contenidos en $\sigma(p)$ y p respectivamente. □

Lema 7.11. *Si D es ω-estable y p es un D-tipo sobre A, entonces existe un conjunto $B \subset_{\text{fin}} A$ tal que p no rompe sobre A.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que para todo $B \subset_{\text{fin}} A$, p rompe sobre B. Afirmamos que entonces existe un árbol de D-tipos $(p_\eta : \eta \in {}^{\omega>}2)$ tal que

1. Si $\eta \subset \nu$, entonces $p_\eta \subset p_\nu$,
2. $dom(p_\eta) \subset_{\text{fin}} A$, para todo η,
3. $p_{\eta 0}$ y $p_{\eta 1}$ son tipos incompatibles.

Es suficiente comprobar esta afirmación para completar la demostración ya que, si se tiene, tomando

$$C = \bigcup_{\eta \in {}^{\omega>}2} dom(p_\eta),$$

y, para cada $\xi \in {}^{\omega}2$,

$$p_\xi = \bigcup_{\substack{\eta \in {}^{\omega>}2 \\ \eta \subset \xi}} p_\eta,$$

entonces, por compacidad débil, cada p_ξ es un D-tipo con $dom(p_\eta) \subset C$. Además, si $\xi_1, \xi_2 \in {}^{\omega}2$ con $\xi_1 \neq \xi_2$, entonces p_{ξ_1} y p_{ξ_2} son incompatibles. Luego, existe una cantidad no contable de D-tipos (parciales) incompatibles sobre C, y esto contradice la ω-estabilidad de D.

Veamos que efectivamente existe tal árbol de tipos, para esto simplemente definimos:

- $p_\emptyset = p|_\emptyset$
- Dado p_η, como p rompe sobre $dom(p_\eta)$, existe una fórmula $\phi(x, \bar{d})$ con $\bar{d} \subset A$ tal que

  $$p|_{dom(p_\eta)} \cup \{\phi(x, \bar{d})\} \ \text{ y } \ p|_{dom(p_\eta)} \cup \{\neg\phi(x, \bar{d})\} \text{ son } D\text{-tipos.}$$

  Por lo tanto podemos tomar

  $$p_{\eta 0} = p|_{dom(p_\eta)} \cup \{\phi(x, \bar{d})\} \ \text{ y } \ p_{\eta 0} = p|_{dom(p_\eta)} \cup \{\neg\phi(x, \bar{d})\}.$$

□

Capítulo 8

Tipos cuasiminimales

Con la idea de generalizar a este contexto el papel de los conjuntos fuertemente minimales en la teoría de modelos de primer orden, hacemos la siguente definición.

Definición 8.1. Un tipo $p \in S_D(A)$ se dice *cuasiminimal* si p es no acotado y, para todo $B \supset A$, existe un único $q \in S_D(B)$ tal que $q \supset p$ y q es no acotado (y, por lo tanto, cuasiminimal).

Antes de probar algunas cosas sobre los tipos cuasiminimales, es bueno ver el siguiente hecho.

Lema 8.2. *Dados un 1-tipo (parcial) no acotado p sobre A, existe un tipo no acotado $q \in S_D(A)$ que extiende a p.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que para todo $q \in S_D(A)$ con $q \supset p$, q es acotado. Para esta demostración, sea $\mathcal{P} = \{q \in S_D(A) : q \supset p\}$. Nótese que

$$p(\mathfrak{C}) = \bigcup_{q \in \mathcal{P}} q(\mathfrak{C}),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} |p(\mathfrak{C})| &\leq |S_D(A)| \cdot \sup_{q \in \mathcal{P}} |q(\mathfrak{C})| \\ &\leq 2^{|A|} \cdot \sup_{q \in \mathcal{P}} |q(\mathfrak{C})|, \end{aligned}$$

y, como (podemos asumir que) $\operatorname{cf}(\bar{\kappa}) > 2^{|A|}$, tenemos que

$$p(\mathfrak{C}) < \bar{\kappa} \cdot \bar{\kappa} = \bar{\kappa}.$$

Luego p es acotado, ¡contadicción! □

Lema 8.3. *Un tipo $p \in S_D(A)$ es cuasiminimal, si y sólo si, p es no acotado y para toda fórmula $\phi(x)$ con parámetros, alguno de los tipos $p \cup \{\phi(x)\}$ y $p \cup \{\neg\phi(x)\}$ es acotado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos, con el ánimo de llegar a una contradicción, que p es cuasiminimal y existe una fórmula $\phi(x)$ tal que $p \cup \{\phi(x)\}$ y $p \cup \{\neg\phi(x)\}$ son ambos tipos no acotados.

Por el lema anterior, existen tipos $p_1, p_2 \in S_D(B)$ que extienden a $p\cup\{\phi(x)\}$ y $p\cup\{\neg\phi(x)\}$ respectivamente y que también son no acotados; por lo tanto, p_1 y p_2 son dos tipos completos sobre el mismo conjunto, no acotados, que extienden a p y que claramente son distintos, ¡contradicción!

($\Leftarrow$) Dado $B \supset A$, sea

$$q = p \cup \{\phi(x) : \phi(x) \text{ es una fórmula sobre } B \text{ y } p \cup \{\phi(x)\} \text{ es no acotado}\},$$

así, por la hipótesis, q está bien definido y es un tipo completo sobre B. Además, para cualquier otro 1-tipo r completo sobre B, es claro que r debe ser acotado. Por lo tanto, q es la única extensión no acotada de p en $S_D(B)$. Y esto prueba la implicación. □

La importancia especial de los tipos cuasiminimales se verá enseguida, por el momento probamos que bajo ω-estabilidad existen tipos de esta clase incluso sobre conjuntos finitos.

Lema 8.4. *Suponiendo que D es ω-estable, se tiene que existe un tipo cuasiminimal sobre algún conjunto finito.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que dado el diagrama ω-estable D, no existen tipos cuasiminimales sobre subconjuntos finitos de $\mathfrak{C}$. Entonces construimos un árbol creciente de conjuntos finitos B_η y tipos $p_\eta \in S_D(B_\eta)$, para $\eta \in {}^{\omega>}2$ de manera que, para todo $\eta \in {}^{\omega>}2$ se tenga:

- p_η es no acotado,
- $p_{\eta 0}$ y $p_{\eta 1}$ son tipos explícitamente incompatibles.

Esto es suficiente porque significa que D no es totalmente trascendente y, en consecuencia, D tampoco es ω-estable. La construcción es posible, por ejemplo, de la siguiente manera:

- Sean $B_\emptyset = \emptyset$ y $p_\emptyset$ cualquier tipo completo sobre $\emptyset$ no acotado, estos tipos existen porque $\mathfrak{C} = \bigcup_{p \in S_D(\emptyset)} p(\mathfrak{C})$ y $|S_D(\emptyset)| \leq \aleph_0$, por la ω-estabilidad.
- Suponiendo que se ha definido $p_\eta \in S_D(B_\eta)$ de manera adecuada. Por hipótesis p_η no es cuasiminimal, luego existe una fórmula $\phi(x, \bar{b}_\eta)$ tal que $p \cup \{\phi(x, \bar{b}_\eta)\}$ y $p \cup \{\neg\phi(x, \bar{b}_\eta)\}$ son ambos tipos no acotados. Sean $B_{\eta 0} = B_{\eta 1} = B_\eta \cup \bar{b}_\eta$ y sean $p_{\eta 0}, p_{\eta 1} \in S_D(B_{\eta 0})$ extensiones no acotadas de $p \cup \{\phi(x, \bar{b}_\eta)\}$ y $p \cup \{\neg\phi(x, \bar{b}_\eta)\}$ respectivamente.

□

Apartir de este punto, trabajaremos bajo ω-estabilidad:

Hipótesis 8.5. Fijemos un Diagrama $D \subset D(T)$ y supongamos que D es ω-estable.

Con esta hipótesis, podemos simplificar un poco la definición de tipo cuasiminimal usando el hecho 7.8.

Lema 8.6. *Sea $p \in S_D(A)$ con A finito, si $p(\mathfrak{C})$ es no contable, entonces p es no acotado.*

Demostración. Supongamos que $p(\mathfrak{C})$ es no contable, entonces, por 7.8, existe $I \subset p(\mathfrak{C})$ no contable que es sucesión de indiscernibles sobre A. Sea $I' \supset I$ una sucesión maximal de indiscernibles sobre A, así, obviamente $I' \subset p(\mathfrak{C})$ y, dado que $\mathfrak{C}$ es $(D, \bar{\kappa})$-homogéneo, entonces, por 7.7 $|I| \geq \bar{\kappa}$. Por lo tanto, $p(\mathfrak{C}) \geq \bar{\kappa}$. □

Lema 8.7. *Sea $p \in S_D(A)$ con A finito. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *p es cuasiminimal*

2. *$p(\mathfrak{C})$ es no contable y para todo $B \supset A$, existe un único $q \in S_D(B)$ tal que $q \supset p$ y $q(\mathfrak{C})$ es no contable*

3. *$p(\mathfrak{C})$ es no contable y para toda fórmula $\phi(x)$ con parámetros, alguno de los tipos $p \cup \{\phi(x)\}$ y $p \cup \{\neg\phi(x)\}$ sólo tiene una cantidad contable de realizaciones.*

Demostración. Inmediato a partir del lema anterior. □

Capítulo 9

La pregeometría P y la geometría P'

Los tipos cuasiminimales cargan una pregeometría tal como los conjuntos fuertemente minimales, a continuación definimos el operador de clausura correspondiente.

Definición 9.1. Dado p un D-tipo en una variable sobre A, sea $P = p(\mathfrak{C})$, definimos el operador cl, para $a \in P$ y $X \subset P$ acotado, como sigue

$$a \in \mathrm{cl}(X) \iff \mathrm{tp}(a/X \cup A) \text{ es acotado (sólo tiene contables realizaciones),}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{cl}(X) \iff & \text{Existe una fórmula } \phi(x) \text{ sobre } X \cup A \text{ tal que} \\ & \models \phi(a) \text{ y } \phi(\mathfrak{C}) \text{ es acotado (sólo tiene contables realizaciones).} \end{aligned}$$

Lema 9.2. *Sea p un tipo cuasiminimal sobre un conjunto finito A y sea $P = p(\mathfrak{C})$. Entonces (P, cl), considerando sólo los subconjuntos acotados de P, es una pregeometría.*

Demostración.

1. Obviamente $X \subset \mathrm{cl}(X)$, para todo $X \subset P$ acotados.
2. También obviamente, $X \subset Y$ implica $\mathrm{cl}(X) \subset \mathrm{cl}(Y)$, para todos $X, Y \subset P$ acotados.
3. Usando la segunda forma de la definición de cl, es claro que se tiene carácter finito.
4. Veamos que $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$, para todo $X \subset P$ acotado. La inclusión de derecha a izquierda se tiene por 1.

   Antes de probar la segunda inclusión nótese que no es posible seguir la forma convencional de hacerlo en primer orden. Ahora, sea $a \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X))$, dos aplicaciones de la propiedad de carácter finito muestran que podemos suponer que X finito. Queremos ver que $a \in \mathrm{cl}(X)$, para esto, supongamos que no es así, es decir, $\mathrm{tp}(a/A \cup X)$ es no acotado, entonces sean $\{a_i : i < \omega_1\}$ realizaciones distintas de dicho tipo. Para todo $i < \omega_1$, existe $f_i \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A \cup X)$ tal que $f_i(a) = a_i$, por lo tanto,

   $$a_i = f_i(a) \in f_i(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X))) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(f_i(X))) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)).$$

   Luego, para cada i, el tipo $\mathrm{tp}(a_i/A \cup \mathrm{cl}(X))$ sólo es realizado una cantidad contable de veces en $\mathfrak{C}$; sea A_i el conjunto de realizaciones de dicho tipo, entonces tenemos que $\{a_i : i < \omega_1\} \subset \bigcup_{i<\omega_1} A_i$, luego, como cada A_i es contable, existe una cantidad no contable de tipos de la forma $\mathrm{tp}(a_i/A \cup \mathrm{cl}(X))$, lo cual contradice la hipótesis de ω-estabilidad.

5. Supongamos que $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{c\}) - \mathrm{cl}(X)$ y veamos que entonces $c \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$. Podemos asumir que X es finito.

   Una primera observación es que $c \notin \mathrm{cl}(X)$, porque si $c \in \mathrm{cl}(X)$ tendríamos $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{c\}) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$. Entonces, sea q la única extensión no acotada (cuasiminimal) de p en $S_D(A \cup X)$, por lo tanto,

   $$q = \mathrm{tp}(a/A \cup X) = \mathrm{tp}(c/A \cup X).$$

   Como $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{c\})$, existe una fórmula $\phi(x, c)$ sobre $B \cup \{c\}$ tal que $a \models q(x) \cup \{\phi(x, c)\}$ y $q(x) \cup \{\phi(x, c)\}$ es acotado.

   Consideremos el tipo $q(y) \cup \{\phi(a, y)\}$, para concluir que $c \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$ es suficiente ver que este tipo es acotado. Supongamos lo contrario, es decir, que $q(y) \cup \{\phi(a, y)\}$ es no acotado, así, dado que q es cuasiminimal, $q(y) \cup \{\neg\phi(a, y)\}$ es realizado sólo una cantidad acotada (contable) de veces. Sean $\{a_i : i < \omega_1\}$ realizaciones distintas de q. Para cada i, el tipo $q(y) \cup \{\neg\phi(a_i, y)\}$ es acotado, ya que, como $q = \mathrm{tp}(a/A \cup X) = \mathrm{tp}(a_i/A \cup X)$., existe $f_i \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A \cup X)$ tal que $f(a) = a_i$, así f_i naturalmente induce una biyección entre los conjuntos solución de los tipos $q(y) \cup \{\neg\phi(a, y)\}$ y $q(y) \cup \{\neg\phi(a_i, y)\}$.

   Dado que $|q(\mathfrak{C})| > \aleph_1$, existe un elemento c' que realiza $q(y) \cup \{\phi(a_i, y)\}$ para todo $i < \omega_1$. Luego, $q(x) \cup \{\phi(x, c')\}$ es realizado una cantidad no contable de veces, con esto encontramos una contradicción porque $q = \mathrm{tp}(c'/A \cup X) = \mathrm{tp}(c/A \cup X)$ y por lo tanto existe una biyección, inducida por un automorfismo de $\mathfrak{C}$ sobre $A \cup X$, entre los conjuntos solución de los tipos $q(x) \cup \{\phi(x, c)\}$ y $q(x) \cup \{\phi(x, c')\}$.

□

Además, esta pregeometría es homogénea en el siguiente sentido:

Definición 9.3. Dada una pregeometría (P, cl), decimos que ésta es una pregeometría homogénea si, para todo $B \subset P$ con $|B| < |P|$, y para todos $a, b \in P - cl(B)$, existe una automorfismo de la pregeometría σ que fija B punto a punto y que envía a a b.

Lema 9.4. *Sea $p \in S_D(A)$ un tipo cuasiminimal con A finito y sea $P = p(\mathfrak{C})$. Entonces la pregeometría (P, cl) es homogénea.*

Demostración. Sean $B \subset P$ con $|B| < |P|$ y $a, b \in P - \mathrm{cl}(B)$. Como $a, b \neq\in \mathrm{cl}(B)$, $\mathrm{tp}(a/A \cup B) = \mathrm{tp}(A \cup B)$ porque ambos son la única extensión no acotada de p en $S_D(A \cup B)$; esto implica que existe $f \in Aut(\mathfrak{C}/A \cup B)$ tal que $f(a) = b$, y, dado que tanto P como cl sólo dependen de parámetros en A, es claro que $f|_P$ es un automorfismo de la pregeometría P tal como se requería. □

Aunque esta propiedad será importante más adelante, al momento de clasificar las posibles acciones sobre estas pregeometría de grupos interpretables la atención se centra en la *ω-homogeneidad* de la pregeometría (cuando sólo se toman conjuntos B finitos) y no en la homogeneidad completa.

Como siempre, una vez tenemos una pregeometría contamos con las nociones de *independencia*, *bases* y *dimensión*.

Nótese que P no tiene una dimensión acotada, esto se debe a que la clausura de todo conjunto acotado es también un conjunto acotado, ya que, para $X \subset P$ acotado,

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{cl}(X)| \leq |S_D(X)| \cdot \sup_{p \in S_D(X) \text{ acotado}} |p(\mathfrak{C})| \\
&\Rightarrow |\operatorname{cl}(X)| \leq 2^{|X|} \cdot \lambda, \text{ con } \lambda < \bar{\kappa} \\
&\Rightarrow |\operatorname{cl}(X)| < \bar{\kappa}.
\end{aligned}$$

Dado que estamos interesados en la relación entre la estructura geométrica sobre la clase de las realizaciones de un tipo cuasiminimal p y ciertos conjuntos fuera de p, para calcular clausuras y dimensiones teniendo en cuenta información fuera de p, definimos un operador de clausura cl_C, para cada $C \subset \mathfrak{C}$ conjunto (acotado), de manera que, para $a \in P$ y $X \subset P$,

$$a \in \operatorname{cl}_C(X) \iff \operatorname{tp}(a/A \cup C \cup X).$$

Al igual que cl, los operadores cl_C son pregeometrías sobre P, esto se debe simplemente a que, para cada C, podemos ver p como un tipo sobre $A \cup C$. Para evitar recargar la notación, hacemos la siguiente convención

$$\operatorname{cl}_C(X) = \operatorname{cl}(X \cup C),$$

en consecuencia, usaremos expresiones como $\dim(X/C)$ o $\dim(X/A \cup C)$ en lugar de $\dim_C(X)$.

La siguiente observación sobre el operador cl en P, generaliza el hecho de que, en un cuerpo algebraicamente cerrado, todas las tuplas de elementos algebraicamente independientes sobre un subcuerpo tienen el mismo tipo sobre dicho subcuerpo.

Lema 9.5. *Sean $\bar{a}, \bar{b} \in P^m$ con $m < \omega$, tuplas independientes sobre un conjunto (acotado) B, es decir tales que* $\dim(\bar{a}/A \cup B) = \dim(\bar{b}/A \cup B) = m$. *Entonces* $\operatorname{tp}(\bar{a}/A \cup B) = \operatorname{tp}(\bar{b}/A \cup B)$.

Demostración. Probamos, por inducción sobre m, que para todas tuplas independientes $\bar{a}, \bar{b}$ y para todo conjunto B vale la propiedad mencionada. Para $m = 1$, tenemos que $a_1 \notin \operatorname{cl}(A \cup B)$ y $b_1 \notin \operatorname{cl}(A \cup B)$, luego $\operatorname{tp}(a_1/A \cup B) = \operatorname{tp}(b_1/A \cup B)$ porque ambos son la única extensión no acotada de p en $S_D(A \cup B)$.

Ahora, suponiendo que la propiedad es válida para m veamos que también lo es para $m + 1$. Dadas $bara, barb \in P^{m+1}$ con $\dim(\bar{a}/A \cup B) = \dim(\bar{b}/A \cup B) = n + 1$, tenemos que $\dim(a_1...a_n/A \cup B) = \dim(b_1...b_n/A \cup B) = n$ y, por lo tanto, por la hipótesis de inducción, $\operatorname{tp}(a_1...a_n/A \cup B) = \operatorname{tp}(b_1...b_n/A \cup B)$; por otro lado, también usando la hipótesis de inducción, tenemos que, dado que $\dim(a_{n+1}/A \cup B \cup \{a_1, ..., a_n\}) = \dim(b_{n+1}/A \cup B \cup \{b_1, ..., b_n\}) = 1$, entonces $\operatorname{tp}(a_{n+1}/A \cup B \cup \{a_1, ..., a_n\}) = \operatorname{tp}(b_{n+1}/A \cup B \cup \{b_1, ..., b_n\})$; por lo tanto, $\operatorname{tp}(\bar{a}/A \cup B) = \operatorname{tp}(\bar{b}/A \cup B)$. $\square$

Recordamos ahora la definición, para este caso, de la geometría P' asociada a P, que usaremos más adelante.

Definición 9.6. Definimos la geometría (P', cl') asociada a la pregeometría (P, cl) de la siguiente manera, sea

$$P' = (P - \operatorname{cl}(\emptyset))/E,$$

donde E es la relación de equivalencia en P dada por

$$E(x,y) \iff \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x \in \mathrm{cl}(y),$$

y, para $a \in P$ y $X \subset P$, sea cl', el operador de clausura en P', como sigue

$$a/E \in \mathrm{cl}'(X/E) \iff a \in \mathrm{cl}(X).$$

Comprobemos que cl' está bien definido, es decir, veamos que, para $a_1, a_2 \in P$ y $B_1, B_2 \subset P$, si suponemos que $a_1/E = a_2/E$ y $B_1/E = B_2/E$, entonces se tiene que $a_1 \in \mathrm{cl}(B_1) \iff a_2 \in \mathrm{cl}(B_2)$. Dada la simetría de la situación basta probar una de las dos implicaciones, esto es, si $a_1 \in \mathrm{cl}(B_1)$, entonces

$$a_2 \in \mathrm{cl}(a_1) \in \mathrm{cl}(\bigcup_{b \in B_1} \mathrm{cl}(b)) \subset \mathrm{cl}(\bigcup_{b \in B_2} \mathrm{cl}(b)) \subset \mathrm{cl}(cl(\bigcup_{b \in B_2} b)) = \mathrm{cl}(B_2).$$

Dicho esto, es claro a partir de la definición de cl' que para todo conjunto $A \subset P$, A es cl-independiente, si y sólo si, A/E es cl-independiente. En particular, esto garantiza que P' tampoco tiene dimensión acotada.

En adelante, dado que no se presta a confusiones, también usaremos cl para denotar el operador de clausura cl' en P'.

Además, nótese que que E es A-tipo definible y, por lo tanto, E es A-invariante; entre otras cosas, esto implica que para todo $f \in Aut(\mathfrak{C}/A)$, tenemos que $\bar{a}/E = \bar{b}/E \iff f(\bar{a})/E = f(\bar{b})/E$. Luego, los automorfismos de la pregeometría P inducidos por elementos de $f \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ determinan automorfismos de P' de la manera natural y, por lo tanto, P' hereda la homogeneidad de P.

Capítulo 10

Teorema de interpretación de grupo

En esta parte enunciamos el teorema de interpretación de grupo probado por Hyttinen Lessmann y Shelah en [9], además empezaremos la demostración de la primera parte, en la que se encuentra un grupo interpretable, bajo la hipótesis de ω-estabilidad, este trabajo será terminado en la siguienmte sección.

Primero aclaremos la noción de interpretabilidad que usaremos para este contexto, ésta es analoga pero no idéntica a la de la teoría de modelos de primer orden, aquí remplazamos los conjuntos definibles sobre un conjunto de parámetros por conjuntos invariantes sobre dicho conjunto de parámetros.

Definición 10.1. Dados $U \subset \mathfrak{C}$ (no necesariamente acotado) y $A \subset \mathfrak{C}$ acotado, decimos que U es A-*invariante* si para todo $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ se tiene que $f(U) = U$.

Nótese que si U es tipo definible sobre A, en particular si es definible sobre A, entonces U es A-invariante.

Además, nótese que los conjuntos A-invariantes corresponden a aquellos que pueden ser expresados como una disyunción (infinita, no necesariamente acotada) de tipos (completos) sobre A. Para esto, primero téngase en cuenta que si un conjunto es disyunción de tipos sobre A entonces claramente es A-invariante, y recíprocamente si U es un conjunto A-invariante entonces $U = \bigcup_{p \in S} p(\mathfrak{C})$, donde $S = \{\mathrm{tp}(x/A) : x \in U\}$, podemos comprobar esta última afirmación como sigue: ($\subset$) Obvio ($\supset$) Sea $c \in \bigcup_{p \in S} p(\mathfrak{C})$, entonces existe $d \in U$ tal que $\mathrm{tp}(c/A) = \mathrm{tp}(d/A)$, por lo tanto, existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ tal que $f(d) = c$; así, dado que $d \in U$ y U es A-invariante, también $c \in U$.

Finalmente, trabajando con D como el conjunto de los tipos atómicos en $D(T)$, adicionalmete se tiene que si A es finito, entonces todo conjunto A-invariante es tipo definible sobre A. Veamos esto, dado que U es A-invariante, también $\mathfrak{C} - U$ es A-invariante, luego $\mathfrak{C} - U = \bigcup_{p \in S} p(\mathfrak{C})$ para algún $S \subset S_D(A)$; como A es finito cualquier D-tipo sobre A es atómico y por lo tanto podemos escribir $\mathfrak{C} - U = \bigcup_{p \in S} \phi_p(\mathfrak{C})$ para algunas fórmulas $\phi_p(x)$ con parámetros en A; con esto podemos concluir que $U = \bigcap_{p \in S} \neg\phi_p(\mathfrak{C}) = q(\mathfrak{C})$ donde $q(x) = \{\neg\phi_p(x) : p \in S\}$.

Definición 10.2. Decimos que un grupo $(G, \cdot)$ (veremos operaciones binarias como relaciones ternarias funcionales en la tercera entrada) *es interpretable en* $\mathfrak{C}$ *sobre* A si existen un conjunto

U, una relación ternaria $*$ en U y una relación de equivalencia E en U, todos A-invariantes, tales que $(G, \cdot)$ es isomorfo a $(U/E, */E)$.

Es claro que la definición anterior puede extenderse para incluir la noción de interpretabilidad de una estructura de primer orden en otra, aquí simplemente hemos dado la definición más sencilla que incluye el caso en el que estamos interesados. Además, vale la pena anotar que, tal como en primer orden es suficiente considerar las estructuras infinitas definibles en $\bar{M}$, porque cualquier estructura finita es definible en cualquier infinita, en este contexto sólo son relevantes las estructuras no acotadas definibles en $\mathfrak{C}$, ya que cualquier estructura acotada es interpretable en $\mathfrak{C}$ de manera trivial.

Ahora, enunciamos el teorema de interpretación de grupos en su forma original:

Teorema 10.3 (Hyttinen, Lessmann, Shelah). *Sea D un diagrama estable y $\mathfrak{C}$ su dominio universal, sean $p, q \in S_D(A)$ tipos no acotados con p cuasiminimal y definamos $P = p(\mathfrak{C})$ y $Q = q(\mathfrak{C})$. Supongamos que existe $n < \omega$ tal que*

- *Para toda tupla independiente $\bar{a} \in P^n$ y para todo conjunto finito $C \subset Q$,*

$$\dim(a_1, ..., a_n / A \cup C) = n$$

- *Existen una tupla independiente $\bar{a} \in P^{n+1}$ y un conjunto finito $C \subset Q$ tales que*

$$\dim(a_1, ..., a_n, a_{n+1} / A \cup C) < n + 1.$$

Entonces, existe un grupo no acotado G interpretable en C (sobre algún conjunto de parámetros) que actúa sobre la geometría P' asociada a P. Además, o bien G es un grupo no clásico, o bien $n \in \{1, 2, 3\}$ y

- *Si $n = 1$, G es abeliano su acción sobre P' es regular.*
- *Si $n = 2$, la acción de G sobre P' es isomorfa a la acción de $K \rtimes K^times$ sobre K, para algún cuerpo algebraicamente cerrado K, B-invariante para algún $B \subset_{\text{fin}} P$ y con dominio P.*
- *Si $n = 3$, la acción de G sobre P' es isomorfa a la acción de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sobre $\mathbb{P}^1(K)$, para algún cuerpo algebraicamente cerrado K, B-invariante para algún $B \subset_{\text{fin}} P$ y con dominio $P - \{\infty\}$ para algún elemento ∞ de P.*

En el teorema, se denominan *grupos no clásicos* a grupos G no abelianos dotados de una pregeometría ω-homogénea, en el sentido de que, para todos $a, b \in G$ y $B \subset_{\text{fin}} G$ tales que $a, b \notin \mathrm{cl}(B)$, existe $f \in \mathrm{Aut}(G/B)$ tal que $f(a) = g$, y tal que $dim(G) = |G| \geq \aleph_0$. Actualmente es un problema abierto si realmente existen grupos no clásicos, y en caso de que sí existan, se deberá entender si efectivamente pueden aparecer bajo las condiciones de teorema, por esto decimos que la descripción de los posibles grupos G interpretables según el teorema y sus acciones sobre la pregeometría P aún no está completa. Lo anterior se debe a que en este contexto no ha sido posible tener una versión del teorema de Reineke que excluya la posibilidad de que estos grupos existan, una aproximación a tal resultado se pesenta en [9, pág. 9], sin embargo vale la pena anotar que, en una dirección similar, en el artículo sí se expone cómo extender el teorema de Macintyre que establece que todo cuerpo infinito ω-estable es algebraicamente cerrado, obteniendo que todo cuerpo dotado de una pregeometría ω-homogénea es algebraicamente cerrado.

El teorema 10.3 generaliza un resultado de Hrushovski para teorías estables de primer orden ([7]). En éste último se usan hipótesis similares pero en términos bastante diferentes, en su enunciado, trabajando en el dominio universal de una teoría estable, se supone que existen tipos estacionarios $p, q \in S(A)$ con p regular tales que p^n es débilmente ortogonal a q^ω y p^{n+1} no es casi ortogonal a q^ω, y se concluye que existe un grupo G interpretable en $\mathfrak{C}$, que $n \in \{1, 2, 3\}$ y que todas las posibles acciones de G sobre la clase de las realizaciones de P son como en 5.5.

Para ocuparnos de la demostración de la primera parte del teorema para diagramas ω-estables, de ahora en adelante hacemos la siguiente suposición:

Hipótesis 10.4. Sean $p, q \in S_D(A)$ tipos no acotados con p cuasiminimal y definamos $P = p(\mathfrak{C})$ y $Q = q(\mathfrak{C})$. Supongamos que existe $n < \omega$ tal que

1. Para toda tupla independiente $\bar{a} \in P^n$ y para todo conjunto finito $C \subset Q$,

$$\dim(a_1, ..., a_n/A \cup C) = n$$

2. Existen una tupla independiente $\bar{a} \in P^{n+1}$ y un conjunto finito $C \subset Q$ tales que

$$\dim(a_1, ..., a_n, a_{n+1}/A \cup C) < n + 1.$$

Una observación útil sobre esta hipótesis es que su segunda parte es equivalente a:

Para toda tupla independiente $\bar{a} \in P^{n+1}$, existe un conjunto $C \subset_{\text{fin}} Q$ tal que

$$\dim(a_1, ..., a_n, a_{n+1}/A \cup C) < n + 1.$$

Para comprobar esto fijemos una tupla $\bar{a} \in P^{n+1}$ y un conjunto finito $C \subset Q$ que atestigüen la segunda parte de la hipótesis y sea $\bar{b} \in P^{n+1}$ una tupla cualquiera, como $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ambas independientes y p es cuasiminimal, entonces, por 9.5, $\text{tp}(\bar{a}/A) = \text{tp}(\bar{b}/A)$, luego existe $f \in Aut(\mathfrak{C}/A)$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$. Así pues, $\dim(\bar{b}/A \cup f(C)) = \dim(\bar{a}/A \cup C) = n$ y con esto se completa el argumento porque $\sigma(C) \subset \sigma(Q) = Q$.

Primero definimos ciertos grupos de permutaciones que usaremos de aquí en adelante.

Definición 10.5. Para $X, Y \subset \mathfrak{C}$, acotados o no, usaremos $\text{Aut}(X/Y)$ para denotar el grupo:

$$\{\sigma : \sigma \in X! \text{ y existe } f \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/Y) \text{ tal que } f|_X = \sigma\},$$

con la operación de composición usual. Estos grupos son llamados *grupos de enlace.*

En particular consideraremos el grupo $\text{Aut}(P/Q \cup A)$. Nótese que, dado que P es A-invariante, sus elementos son precisamente las restricciones a P de los elementos de $\text{Aut}(\mathfrak{C}/Q \cup A)$ y, dado que el operador cl en P sólo depende de parámetros en A, todos los elementos de $\text{Aut}(P/Q \cup A)$ preservan cl y, en consecuencia, son automorfismos de la pregeometría (P, cl).

El grupo G que veremos que es interpretable en $\mathfrak{C}$ es:

$$G = \{\sigma/E : \sigma \in \mathrm{Aut}(P/Q \cup A)\},$$

con la operación $\circ/E$ inducida por la composición usual, es decir,

$$\sigma/E \circ /E\tau/E = (\sigma \circ \tau)/E,$$

para todos $\sigma/E, \tau/E \in G$.

Así, G actúa naturalmente en la geometría P' mediante:

$$(\sigma/E, a/E) \mapsto \sigma(a)/E.$$

Dado que Q es no acotado, en principio el grupo G puede ser acotado, a continuación vemos que éste no es el caso.

Abusando de la notación, para $\bar{a}, \bar{b} \subset \mathfrak{C}$, usaremos la expresión $\mathrm{tp}(\bar{a}/Q \cup A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/Q \cup A)$ para decir que para todo $X \subset Q$ acotado, $\mathrm{tp}(\bar{a}/X \cup A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/X \cup A)$. Dicho esto, lo importante es que podemos probar que, bajo la hipótesis que tenemos de estabilidad, $\mathfrak{C}$ también cuenta con cierta "homogeneidad fuerte"para esta noción.

Lema 10.6. *Dados $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{C}^\alpha$, con α un ordinal acotado, si* $\mathrm{tp}(\bar{a}/Q \cup A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/Q \cup A)$*, entonces existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Q \cup A)$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Demostración. Antes de comenzar la demostración, nótese que si Q fuera acotado entonces esta propiedad sería una consecuencia casi inmediata de la homogeneidad de $\mathfrak{C}$ (usar inducción).

Dicho esto veamos la demostración, sea $(c_i : i < \mu)$ una enumeración de $\mathfrak{C} - (Q \cup A)$, μ puede ser acotado o no acotado. Ahora procedemos con un argumento de *back-and-forth*, afirmamos que existe una cadena creciente y continua $(f_i : i < \mu)$ de aplicaciones elementales parciales de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}$ tal que:

- $f_0 = \{(a_i, b_i) : i < \alpha\} \cup \mathrm{id}_{Q \cup A}$,
- $c_i \in dom(f_{2i+1})$,
- $c_i \in im(f_{2i+2})$.

La existencia de tal cadena es suficiente para demostrar el lema ya que, de tenerse, $f = \bigcup_{i</mu} f_i$ es un atomorfismo con las propiedades requeridas.

Comprobemos que sí existe dicha cadena, definamos:

- Sea $f_0 = \{(a_i, b_i) : i < \alpha\} \cup \mathrm{id}_{Q \cup A}$,
- Para $i < \mu$ ordinal límite, definimos $f_i = \bigcup_{j<i} f_j$,

- Para el caso $i < \mu$ ordinal sucesor, debemos encargamos de definir adecuadamente f_i según i sea par o impar, pero dada la simetría de la situación es suficiente probar la siguiente propiedad:

  Para todos $\bar{c}, \bar{d} \in \mathfrak{C}^\beta$, con β un ordinal acotado, tales que $\mathrm{tp}(\bar{c}/Q \cup A) = \mathrm{tp}(\bar{d}/Q \cup A)$, entonces para todo $c' \in \mathfrak{C}$, existe $d' \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathrm{tp}(\bar{c}c'/Q \cup A) = \mathrm{tp}(\bar{d}d'/Q \cup A)$.

  Por 7.11, existe $B \subset_{\text{fin}} Q \cup A$ tal que $\mathrm{tp}(\bar{c}c'/Q \cup A)$ no rompe sobre B. Aplicando iteradamente la homogeneidad de $\mathfrak{C}$ (inducción), puede verse que existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ tal que $f(\bar{c}) = \bar{d}$. Sea $d' = \sigma(c')$ y veamos que así $\mathrm{tp}(\bar{c}c'/Q \cup A) = \mathrm{tp}(\bar{d}d'/Q \cup A)$, supongamos lo contrario, es decir, que existe una fórmula $\phi(\bar{x}, \bar{e})$ con $\bar{e} \subset Q \cup A$ tal que $\phi(\bar{x}, \bar{e}) \in \mathrm{tp}(\bar{c}c'/Q \cup A)$ y $\neg\phi(\bar{x}, \bar{e}) \in \mathrm{tp}(\bar{d}d'/Q \cup A)$, luego $\neg\phi(\bar{x}, \sigma^{-1}\bar{e}) \in \mathrm{tp}(\bar{c}c'/Q \cup A)$ y, obviamente, $\mathrm{tp}(\bar{e}/B) = \mathrm{tp}(\sigma^{-1}\bar{e}/B)$; por lo tanto, $\mathrm{tp}(\bar{c}c'/Q \cup A)$ rompe sobre B, ¡contradicción!

□

Lema 10.7. *Sean $\bar{a}, \bar{b} \in P^n$ tuplas independientes, entonces existe $\sigma \in Aut(P/Q \cup A)$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$. Luego también existe $g \in G$ tal que $g(\bar{a}/E) = \bar{b}/E$.*

Demostración. Sean $\bar{a}, \bar{b} \in P^n$ tuplas independientes, por la primera parte de la hipótesis 10.4, tenemos que

$$\dim(\bar{a}/A \cup C) = \dim(\bar{b}/A \cup C) = n, \text{ para todo } C \subset_{\text{fin}} Q.$$

Además, por 9.5, para todo $C \subset_{\text{fin}} Q$, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A \cup C) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup C)$. Así, podemos concluir que también, para todo $C \subset Q$ acotado, tenemos que $\mathrm{tp}(\bar{a}/A \cup C) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup C)$, y, en consecuencia, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A \cup Q) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup Q)$.

Finalmente, por el lema anterior, existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/Q \cup A)$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$ y, por lo tanto, basta tomar $\sigma = f|_P$ y $g = \sigma/E$. □

Corolario 10.8. *El grupo G es no acotado.*

Demostración. Fijemos una tupla independiente $\bar{a} \in P^n$. Por el lema anterior, para cada tupla independiente $\bar{b} \in P^n$, existen $\sigma_{\bar{b}} \in \mathrm{Aut}(P/Q \cup A)$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$ y $g_{\bar{b}} \in G$ ($g = \sigma/E$) tal que $g(\bar{a}/E) = \bar{b}/E$.

Obviamente existe una cantidad no acotada de tuplas independientes $\bar{b} \in P^n$, usando este hecho veamos que también existe una cantidad no acotada de elementos en G; sean $\bar{b}, \bar{c}$ tuplas independientes en P^n, llamemos $\sigma = \sigma_{\bar{b}}$, $\tau = \sigma_{\bar{c}}$, $g = g_{\bar{b}}$ y $h = g_{\bar{c}}$, entonces:

$$\begin{aligned} g = h &\iff \forall a \in P, g(a/E) = h(a/E) \\ &\iff \forall a \in P, \sigma(a)/E = \tau(a)/E \\ &\iff \forall a \in P, \mathrm{cl}(\sigma(a)) = \mathrm{cl}(\tau(a)). \end{aligned}$$

Así, dado que para cada $a \in P$, $\{c \in P : \mathrm{cl}(\sigma(a)) = \mathrm{cl}(\sigma(c))\}$es acotado, entonces existe una cantidad no acotada de elementos c_i en P tales que $cl(\sigma(c_i)) \neq \mathrm{cl}(\sigma(c_j))$, siempre que $i \neq j$. Con esto, tomando tuplas independientes $\bar{b}_i \in P^n$ con primera componente c_i, tenemos que las aplicaciones $g_{\bar{b}_i}$ forman una cantidad no acotada de elementos de G. □

Capítulo 11

n-acciones

En esta sección presentamos la estructura algebraica que recoge las propiedades de la acción de G en P' que garantizarán la interpretabilidad de G.

Definición 11.1. Dada una acción de un grupo G en una pregeometría (P, cl) con $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ que denotamos como:

$$(g, a) \mapsto g(a),$$

para $g \in G$ y $a \in P$. Decimos que la acción es una *n-acción* si se tienen las siguientes propiedades:

1. La acción tiene *rango n*, es decir,
   - Para todas $\bar{a}, \bar{b} \in P^n$ con $\dim(\bar{a}\bar{b}) = 2n$, existe $g \in G$ tal que $g(\bar{a}) = \bar{b}$, y,
   - Existen $\bar{a}, \bar{b} \in P^{n+1}$ con $\dim(\bar{a}\bar{b}) = 2n + 2$, para las cuales no existe $g \in G$ tal que $g(\bar{a}) = \bar{b}$.
2. La acción es $n + 1$ *determinada*, es decir, para todos $g, h \in G$ y para toda tupla independiente $\bar{a} \in P^{n+1}$, si $g(\bar{a}) = h(\bar{a})$, entonces $g = h$.

Ahora queremos ver que la acción de G en P' es efectivamente una n-acción, una primera parte de este trabajo ya fue hecha en la sección anterior.

Lema 11.2. *La acción de G en P' tiene rango n.*

Demostración. Como consecuencia inmediata de 10.7, tenemos que para todas $\bar{a}/E, \bar{b}/E \in (P')^n$ con $\dim(\bar{a}/E\ \bar{b}/E) = 2n$, existe $g \in G$ tal que $g(\bar{a}/E) = \bar{b}/E$.

Ahora debemos probar que existen $\bar{a}/E, \bar{b}/E \in (P')^{n+1}$ con $\dim(\bar{a}/E\ \bar{b}/E) = 2n + 2$, para las cuales no existe $g \in G$ tal que $g(\bar{a}/E) = \bar{b}/E$. Sea $\bar{a} \in P^{n+1}$ independiente, por la segunda parte de 10.4, existe $C \subset_{\mathrm{fin}} Q$ tal que

$$\dim(\bar{a}/A \cup C) < n + 1,$$

dado que la dimensión de P es infinita, existe $\bar{b} \in P^{n+1}$ tal que

$$\dim(\bar{b}/A \cup C \cup \bar{a}) = n + 1,$$

entonces,
$$dim(\bar{a}\bar{b}) = 2n + 2$$
y, también,
$$dim(\bar{a}/E\ \bar{b}/E) = 2n + 2.$$
Veamos que para ningún $g \in G$, $g(\bar{a}/E) = \bar{b}/E$, para esto supongamos que este no es el caso, es decir, que existe $g = \sigma/E$ con $\sigma \in \mathrm{Aut}(P/A \cup Q)$ tal que $g(\bar{a}/E) = \bar{b}/E$, entonces $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}'$ con $\bar{b}'/E = \bar{b}/E$, así, por un lado

$$\dim(\bar{b}'/A \cup C) = \dim(\bar{b}/A \cup C) = n + 1,$$

y, por otra parte,

$$\dim(\bar{b}'/A \cup C) = \dim(\sigma(\bar{a})/A \cup C) = \dim(\bar{a}/A \cup C) < n + 1,$$

con lo cual obtenemos una contradicción. □

Lema 11.3. *La acción de G en P' es $n+1$-determinada.*

Demostración. Debemos probar que para todos $g_1, g_2 \in G$ y para toda $\bar{a}/E \in (P')^n + 1$ independiente, si $g_1(\bar{a}) = g_2(\bar{a})$ entonces $g_1 = g_2$; para esto es suficiente demostrar que para todo $g \in G$ y y para toda $\bar{a}/E \in (P')^n + 1$ independiente, si $g(\bar{a}) = \bar{a}$ entonces $g(c/E) = c/E$, para todo $c/E \in P'$, ya que si esto último se tiene, entonces, aplicándolo al elemento $g_1 \circ g_2^{-1}$ de G, obtenemos la propiedad que se requería inicialmente.

Sean $g = \sigma/E \in G$ y $\bar{a} \in P^{n+1}$ independiente, supongamos que $g(\bar{a}) = \bar{a}/E$ y veamos que para todo $c \in P$, $g(c/E) = c/E$.

Primero consideremos el caso en que $c \notin \mathrm{cl}(\bar{a})$, entonces

$$c/E \notin \mathrm{cl}(a\bar{/}E) \Rightarrow \sigma(c)/E \notin \mathrm{cl}(\sigma(\bar{a})/E) \Rightarrow \sigma(c)/E \notin \mathrm{cl}(\bar{a}/E) \Rightarrow \sigma(c) \notin \mathrm{cl}(\bar{a}).$$

Como un primer paso, veamos que para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$, $c \in \mathrm{cl}(a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{n+1}\sigma(c))$. Para esto supongamos que para algún i,

$$c \notin \mathrm{cl}(a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{n+1}\sigma(c))$$

y veamos que de esto se derivan contradicciones. Primero, por la propiedad de intercambio tenemos que $\sigma(c) \notin \mathrm{cl}(a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{n+1}c)$. Además, por 10.4, existe $C \subset_{\text{fin}} Q$ tal que

$$\dim(ca_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1}/A \cup C) < n + 1.$$

Sea $d \in P - \mathrm{cl}(C \cup ca_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n)$, por la homogeneidad de la pregeometría P, existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A \cup ca_i \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1})$ tal que $f(d) = \sigma(c)$. Entonces tenemos

$$\dim(ca_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1}/A \cup f(C)) = \dim(ca_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1}/A \cup C) < n + 1,$$

y, aplicando σ,
$$\dim(\sigma(c)a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1}/A \cup f(C)) < n + 1.$$
Por otra parte, $\sigma(c) = f(d) \notin \mathrm{cl}(f(C) \cup ca_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1})$ y, por la primera parte de la hipótesis 10.4,
$$\dim(a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1}/A \cup f(C)) = n,$$

por lo tanto,

$$\dim(\sigma(c)a_1\cdots\widehat{a_i}\cdots a_{n+1}/A\cup f(C))=n+1,$$

¡contradicción!

Ahora sí, veamos que $\sigma(c)/E=c/E$, para esto también suponemos lo contrario, es decir, que $c\notin \mathrm{cl}(\sigma(c))$, luego

$$c\in \mathrm{cl}(\sigma(c)a_1\cdots a_n)-\mathrm{cl}(\sigma(c)),$$

entonces, existe $i\in\{1,..,n\}$ tal que

$$c\in \mathrm{cl}(\sigma(c)a_1\cdots a_i)-\mathrm{cl}(\sigma(c)a_1\cdots a_{i-1}),$$

y, por la propiedad de intercambio,

$$a_i\in \mathrm{cl}(c\sigma(c)a_1\cdots a_{i-1})\subset \mathrm{cl}(c\sigma(c)a_1\cdots\widehat{a_i}\cdots a_{n+1}),$$

luego, como $c\in \mathrm{cl}(a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_{n+1}\sigma(c))$, tenemos que

$$\dim(c\sigma(c)\bar{a})=n+1,$$

y con esto tenemos que $\mathrm{cl}(c\sigma(c)\bar{a})=\mathrm{cl}(\bar{a})$, lo cual contradice nuestra suposición de que $c\notin\mathrm{cl}(\bar{a})$.

Para terminar presentamos la forma de reducir el caso general al caso que ya hemos resuelto, que es cuando $c\notin\mathrm{cl}(\bar{a})$. Dado $c\in P$ arbitrario, sea $\bar{a}'\in P^{n+1}$ tal que

$$\dim(\bar{a}'/c\sigma(c)\bar{a})=n+1,$$

así, aplicando lo probado en la primera parte de la demostración para los elementos a_i', tenemos que, para todo $i\in\{1,...,n+1\}$, $\sigma(a_i)/E=a_i/E$. Ahora, $\bar{a}'/E$ es independiente, $\sigma(\bar{a}')/E=\bar{a}'/E$ y $c\notin\mathrm{cl}(\bar{a})$, por lo tanto $\sigma(c)/E=c/E$. □

Hemos comprobado que tenemos una n-acción y esto es suficiente para establecer la interpretabilidad del grupo G y así terminar la demostración del teorema 10.3.

Lema 11.4. *El grupo $(G,\cdot)$ es interpretable en $\mathfrak{C}$.*

Demostración. Fijemos una tupla $\bar{a}\in P^{n+1}$ independiente y definamos $B=A\cup\bar{a}$.

Sea $U=\{\sigma(\bar{a}):\sigma\in\mathrm{Aut}(P/Q\cup A)\}$, así, U es B-invariante porque, si $f\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ y $\bar{(b)}=\sigma(\bar{a})\in U$ $(\sigma\in\mathrm{Aut}(P/A\cup Q))$, entonces

$$f(\bar{b})=f\circ\sigma(\bar{a})=(f\circ\sigma\circ f^{-1})(f(\bar{a}))=(f\circ\sigma\circ f^{-1})(\bar{a}),$$

y, dado que claramente $f\circ\sigma\circ f^{-1}\in\mathrm{Aut}(P/A\cup Q)$, tenemos que $f(\bar{b})\in U$.

Justo después de su definición vimos que E es A-invariante, luego, también es B-invariante.

Ahora definimos una operación binaria $*$ en U de la siguiente manera: para $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\in U$,

$$*(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)\iff \exists\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{Aut}(P/Q\cup A),\ \bar{b}_3=\sigma_1\circ\sigma_2(\bar{a}).$$

Comprobemos que $*$ es B-invariante, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ y σ_1 y σ_2 atestiguan que $*(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$, entonces $f \circ \sigma_1$ y $f \circ \sigma_2$ atestiguan que $*(f(\bar{b}_1), f(\bar{b}_2), f(\bar{b}_3))$, porque, dado que

$$f \circ \sigma_1(\bar{a}) = f \circ \sigma_1 \circ f^{-1}(\bar{a}),$$

por la $n+1$-determinación tenemos que

$$f \circ \sigma_1 = f \circ \sigma_1 \circ f^{-1},$$

y, por lo tanto

$$(f \circ \sigma_1) \circ (f \circ \sigma_2)(\bar{a}) = (f \circ \sigma_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ \sigma_2)(\bar{a}) = f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2(\bar{a}) = f(\bar{b}_3).$$

Además, podemos ver que $*/E$ es funcional en la tercera entrada, para esto nótese que

$$*/E(\bar{b}_1/E, \bar{b}_2/E, \bar{b}_3/E) \iff \exists g_1, g_2 \in G,\ g_1(\bar{a}/E) = \bar{b}_1 \wedge g_2(\bar{a}/E) = \bar{b}_2 \wedge \bar{b}_3 = g_1 \circ g_2(\bar{a}),$$

y que, por la $n{+}1$-determinación de la acción de G en P', dados $\bar{b}_1$ y $\bar{b}_2$ en U, si $*/E(\bar{b}_1/E, \bar{b}_2/E, \bar{b}_3/E)$, las condiciones $g_1(\bar{a}/E) = \bar{b}_1/E$ y $g_2(\bar{a}/E) = \bar{b}_2/E$ determinan unívocamente a g_1 y g_2 y, por lo tanto, también a $\bar{b}_3/E$.

Finalmente, puede verse fácilmente que, por la forma en que definimos $*/E$, la aplicación

$$\begin{aligned}(G, \circ/E) &\to (U/E, */E)\\ g &\mapsto g(\bar{a})\end{aligned}$$

es un isomorfismo. □

Bibliografía

[1] J. Baldwin, Notes on Quasiminimality and Excellence, *The Bulletin of Symbolic Logic* 10 (2004), 3 334-366.

[2] J. Baldwin, Notas de clase *Math 512 Abstract Elementary Classes*, en http://www2.math.uic.edu/ jbaldwin/

[3] J. Baldwin, A. Lachlan, On strongly minimal sets, *Journal of Symbolic Logic* 36 (1971), 79-96.

[4] E. Bouscaren (ed.), *Model theory and Algebraic Geometry: An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang Conjecture*, Springer-Verlag, 1998.

[5] S. Buechler, *Essential Stability Theory*, Springer-Verlag, 1996.

[6] R. Grossberg, O. Lessmann, Shelah's stability spectrum and homogeneity spectrum in finite diagrams, *Archive for Mathematical Logic* 41 (2002), 1 1-31.

[7] E. Hrushovski, Almost orthogonal regular types, *Annals of Pure and Applied Logic* 45 (1989), 139-155.

[8] T. Hyttinen, Groups acting on Geometries, en *Logic and Algebra*, ed. Yi Zhang, Contemporary Mathematics, vol 302 (2002), AMS, 221-233.

[9] T. Hyttinen, O. Lessmann, S. Shelah, Interpreting groups and fields in some nonelementary classes, Preprint. [HLSh:821] en http://shelah.logic.at/.

[10] O. Lessmann, Homogeneous model theory: Existence and Categoricity, en *Logic and Algebra*, ed. Yi Zhang, Contemporary Mathematics, vol 302 (2002), AMS, 149-164.

[11] D. Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, 2002.

[12] A. Pillay, Aspects of Geometric Model Theory, disponible en http://www.math.uiuc.edu/People/pillay.html

[13] B. Zilber, *Uncountably Categorical Theories*, Translation of Mathematical Monographs, AMS, 1993.

[14] B. Zilber, *Elements of Geometric Stability Theory*, disponible en http://www.maths.ox.ac.uk/$\sim$ zilber/