Aplicaciones de los pares de Vaught en contextos modelo-teóricos

Mario Andrés Velásquez

Tutor: Andrés Villaveces

Índice general

Introducción

Este trabajo es una observación detallada de algunas de las aplicaciones más importantes de los Pares de Vaught, a la luz de las recientes herramientas descubiertas para la clasificación de estructuras; intentamos no solamente describir los trabajos existentes en este tema sino también buscar una manera de aportar conexiones entre los mismos, y presentarlos de manera actualizada, que permita conexiones con los trabajos más recientes en teoría de modelos.

Iniciamos con una descripción detallada de la prueba de Baldwin-Lachlan del teorema de Morley, allí la no existencia de Pares de Vaught permite probar que todo modelo de la teoría es primo sobre cierto subconjunto no algebraico y definible, lo cual es fundamental para construir el isomorfismo entre dos modelos de T del mismo cardinal.

El segundo capítulo describe algunas de las herramientas modelo-teóricas fundamentales desarrolladas para *clases elementales abstractas* uno de los contextos más trabajos en la actualidad en teoría de modelos. Además allí también presentamos el trabajo de Rami Grossberg y Monica VanDieren sobre categoricidad en clases elementales abstractas dóciles. Ellos prueban que bajo hipótesis de amalgamacion se tiene un teorema de transferencia de categoricidad 'hacia arriba', que junto con los trabajos de Shelah permite tener una versión del teorema de Morley; vale la pena recalcar que es el primero de este género en clases tan generales. En este contexto la idea es encontrar una cierta clase de tipos de Galois que permita transferir pares de Vaught hacia abajo y así contradecir un teorema de Shelah que dice que bajo categoricidad en λ^+ no hay pares de Vaught por debajo de λ.

El tercer capítulo es una presentación de un contexto que en el último tiempo ha sido de interes en teoría de modelos, *CATS* (Compact Abstract Theories), presentamos las herramientas básicas para su estudio, y proponemos una noción de Par de Vaught, lanzando algunas preguntas concretas sobre sus posibles aplicaciones para trabajar el problema del número de modelos en este contexto, de una manera similar a como se trabajó en los capítulos 1 y 2 .

Capítulo 1

Caracterización de las teorías ω-estables categóricas

El objetivo fundamental de este capítulo es describir una de las aplicaciones de los pares de Vaught: la prueba de Baldwin-Lachlan del teorema de Morley. Podríamos decir que históricamente esta es una de las aplicaciones más importantes, pues la aparición de esta prueba puede marcarse como el inicio de lo que hoy se conoce como la *teoría de modelos geométrica*. Esta teoría ha encontrado importantes aplicaciones en otros contextos de la matemática, como la teoría de números y la geometría algebraica.

Aquí vamos a desarrollar todas las herramientas necesarias para probar el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea T una teoría contable, lo siguiente es equivalente:*

1. *T es categórica en algún $\lambda > \omega$.*

2. *T es categórica en todo $\lambda > \omega$.*

3. *T no tiene pares de Vaught.*

$2 \Rightarrow 1$ es trivial. En la siguiente sección vamos a probar $1 \Rightarrow 3$ y en las secciones 4 y 5 estudiaremos la prueba de $3 \Rightarrow 1$. Para todo este capítulo la teoría T será contable.

1.1. Modelos de Ehrenfeucht-Mostowski, Indiscernibles y Estabilidad

Definición 1.2. *Sea τ un lenguaje, M una τ-estructura e $(I,<)$ un conjunto linealmente ordenado. Supongamos $A \subseteq |M|$ y $\boldsymbol{J} = (a_i : i \in I) \subseteq |M|$, donde $l(a_i) = n < \omega$ para todo $i \in I$. $\boldsymbol{J}$ es llamado una secuencia de indiscernibles sobre a en M si para cualquier $m \in \omega$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m \in I$ y $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$, se tiene que:*

$$tp(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}/A, M) = tp(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}, /A, M)$$

Cuando $A = \varnothing$ lo omitimos en la escritura.

Teorema 1.3. *Si T tiene un modelo infinito entonces para cualquier conjunto linealmente ordenado $(I,<)$ y cualquier entero positivo l existe $M_I \models T$ tal que existe una secuencia de indiscernibles $(a_i : i \in I) \subseteq |M|$ con $l(a_i) = l$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Sea $\{c_i : i \in I\}$ un conjunto de l-tuplas de nuevas constantes. Es suficiente probar que la siguiente teoría es consistente:

$$T_I = T \cup \{c_i \neq c_j\}|i \neq j\} \cup \{\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n})|$$

$$n < \omega, i_1 < \ldots < i_n \in I, j_1 < \ldots < j_n \in I, \varphi(x) \in L(T)\}.$$

Para esto es necesario un lema:

Lema 1.4. *Sea $L' = L \bigcup \{c_n : n < \omega\}$ donde c_n son nuevas constantes. Sea T una teoría en L con modelos infinitos. Entonces el siguiente conjunto T' de sentencias de L' es consistente:*

$$T' = T \cup \{c_i \neq c_j\}|i \neq j\} \cup \{\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n})|$$

$$n < \omega, i_1 < \ldots < i_n, j_1 < \ldots < j_n, \varphi(x) \in L(T)\}.$$

Demostración. Sea M un modelo infinito de T, y sea I un subconjunto numerable de M. $I = \{i_n | n < \omega\}$. Afirmamos que:

Dado cualquier subconjunto finito Δ de T', existe un subconjunto infinito J_Δ de I tal que para cualquier subconjunto infinito

$$j_0 < j_1 < \ldots < j_n < \ldots$$

de J_Δ, la expansión $(M, j_n)_{n<\omega}$ satisface Δ. Procedemos por inducción en el cardinal de Δ. Denotamos por n el cardinal de Δ.

Para $n = 0$; La teoría T tiene un modelo infinito. Entonces la afirmación se tiene en este caso, tome $J_\emptyset = I$.

Para $n > 0$; supongamos que

$$\Delta = \Delta_0 \cup \{\varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Notese que $|\Delta| \leq |\Delta_0| + 1$.

Definimos para $k_1 < \ldots < k_m \in J_\Delta$

$$F(k_1, \ldots, k_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \models \varphi[k_1 \ldots, k_m] \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función nos dá una coloración de $[J_\Delta]^m$. Por el teorema de Ramsey ($\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_2$.) existe un subconjunto infinito $K \subseteq J_\Delta$ tal que $F([K]^m) = 0$ ó $F([K]^m) = 1$. Sea ahora $k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ un subconjunto infinito de K. Es claro que la expansión $(M, k_n)_{n<\omega}$ satisface

$$\varphi(c_{s_1}, \ldots, c_{s_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{t_1}, \ldots, c_{t_m}),$$

con $s_1 < \ldots < s_m$ y $t_1 < \ldots < t_m$. Además este modelo satisface Δ. Esto completa la inducción. Además la afirmación implica la consistencia de T'. □

Por compacidad podemos afirmar que la teoría T_I es consistente lo que prueba el teorema. □

Definición 1.5. *Sea T una teoría de primer orden.*

T tiene funciones de Skolem si y solo si para cualquier $\varphi(x; y) \in Fml(L(T))$ existe un símbolo de función $F_\varphi(y)$ tal que

$$T \models \forall y[\exists x(\varphi(x; y) \to \varphi(F_\varphi(y); y))].$$

$F_\varphi(y)$ es llamada función de Skolem para $\varphi(x; y)$.

Hecho 1.6. *Para cualquier teoría consistente T existe un lenguaje $L' \supseteq L(T)$ de cardinal $\leq |L(T)| + \aleph_0$ y una teoría $T^{sk} \supseteq T$ en L' tal que T^{sk} tiene funciones de Skolem. Además T^{sk} es modelo completa, y para cualquier modelo de T existe una expansión a un modelo de T^{sk}.*

Definición 1.7. *Sea $M \models T$, T tiene funciones de Skolem $I \subseteq |M|$ definimos $EM(I)$ como la clausura de Skolem (el mínimo modelo de T que contiene a I y está contenido en M) generada por I*

Definición 1.8. *Sea M una L-estructura y sea $\lambda \geq |L| + \aleph_0$. Decimos que M es estable en λ (λ-estable) si y solo si se tiene que*

$$|A| \leq \lambda \Rightarrow |S^1(A, M)| \leq \lambda \text{ para todo } A \subseteq |M|$$

Teorema 1.9. *Sea α un ordinal, suponga que T tiene funciones de Skolem e $I = \{a_i : i < \alpha\}$ es una secuencia de indiscernibles (ordenada por $\in$ en α). El modelo $M = EM(I)$ es λ-estable para cualquier $\lambda \geq |L| + \aleph_0$*

Demostración. ver [CK] □

Teorema 1.10. *Sea T una teoría. Si T es categórica en algún $\lambda > |L(T)| + \aleph_0$ entonces T es estable en cualquier $\mu \geq |L(T)| + \aleph_0$ tal que $\mu < \lambda$*

Demostración. Como T es categórica T debe ser completa. Supongamos que T no es estable en μ. Debe existir entonces A tal que $|S(A)| \geq \mu^+$ y $|A| = \mu$.

Existe $M \models T$ de cardinal λ tal que $M \supseteq A$ y $|S(A, M)| \geq \mu^+$. Por el hecho (1.6) podemos extender T a T^{sk} con funciones de Skolem de cardinal $|L(T)| + \aleph_0$. Ahora por el hecho (1.6) existe un modelo $M^{sk} \models T^{sk}$ que es generado por una secuencia de indiscernibles $I = \{a_i | i < \lambda\}$, este modelo es $EM(I)$. Como T es categórica en λ se tiene que el modelo $EM(I) \restriction L(T)$ es isomorfo a M pero esto contradice el hecho de que $EM(I)$ es estable. □

1.2. $\aleph_0$-estabilidad y fórmulas fuertemente minimales

Hecho 1.11. *Sea T una teoría contable. Si T es categórica en $\lambda > \aleph_0$, entonces T es categórica en $\aleph_1$ y el modelo de cardinal $\aleph_1$ es saturado.*

Demostración. Ver [CK] o [Gr1] □

Lema 1.12. *(No existencia de pares de Vaught) Sean $M, N \models T$ tales que $M \prec N$, $M \neq N$, y existe $a \in |M|$, tal que $\phi(M; \boldsymbol{a})$ es infinito para alguna fórmula ϕ, entonces $\phi(M; \boldsymbol{a}) \neq \phi(N; \boldsymbol{a})$*

Demostración. Supongamos que no, sea (M, N) un par de Vaught atestiguado por $\phi(x, y)$ y $a \in M$, entonces $\phi(M; \mathbf{a})$ es infinito y $\phi(M; \mathbf{a}) = \phi(N; \mathbf{a})$, vamos a probar que podemos suponer que M y N son contables.

Sea $M^* := \langle |N|, |M|, F, R, c, a\rangle_{F;R,c\in L(T)}$, es decir el modelo N con un predicado unario adicional cuya interpretación es $|M|$, y una tupla finita de constantes interpretadas por a.

Sea T^* :=Th(M^*). T^* tiene las siguientes propiedades:

1. $T \subseteq T^*$.

2. $\forall x[\phi(x; a) \to x \in |M|] \in T^*$ (porque $\phi(M; \mathbf{a}) = \phi(N; \mathbf{a})$

3. Para cualquier fórmula $\exists y\varphi(y; x) \in L(T)$ se tiene que $\forall x[x \in |M| \wedge \exists y\varphi(y; x) \to \exists z[z \in |M| \wedge \varphi(z; x)]] \in T^*$ (porque $M \preceq N$)

4. $\exists x[x \notin |M|] \in T^*$ (porque $|M| \subsetneq |N|$)

por LS existe $N' \models T^*$ contable; el reducto correspondiente y la interpretación del predicado unario en N' son los modelos requeridos. Ademas tambien podemos suponer que M y N son saturados.

Lema 1.13. *Podemos suponer M y N saturados.*

Demostración. sea $a \in |N| \setminus |M|$ construimos una cadenas crecientes elementales $\{N^l_n | n < \omega, l = 0, 1\}$ tal que:

1. $M = N^0_0$, $N = N^1_0$

2. Cualquier N^l_n-tipo sobre A es realizado en N^l_{n+1} para cualquier $A \subseteq |N_n|$ finito.

3. $a \in |N^1_n| \setminus |N^0_n|$.

Como T es $\aleph_0$-estable entonces para cualquier A contable $S(A)$ es contable, esto implica que $B = \bigcup_{A\subseteq_{finito}N^l_n} S(A)$ es contable. Entonces fijamos una enumeración para B, digamos $\{p_0, \ldots\}$, sea $L' = L \bigcup\{c_n : n < \omega\}$ y sea T_n la siguiente teoría

$$T^* \bigcup\{p_i[c_i]\} \bigcup\{c_i \in M\}$$

Ahora, no es dificil ver que esta teoría tiene modelo (compacidad). Tomamos un modelo contable de T_n que contenga a N, este modelo justifica que la construcción es posible, es fácil ver que $\bigcup N^l_n$ es saturado con las condiciones requeridas. $\square$

Para culminar la prueba definimos por inducción en $\alpha < \omega_1$ definimos $\{N_\alpha \models T\}$ cadena creciente (estrictamente) y continua tal que

1. $N_0 = M$
2. N_α es un modelo contable y saturado de T.
3. $\varphi(N_0; a) = \varphi(N_\alpha; a)$ para todo α.

Cuando α es límite claramente la unión satisface las condiciones. Ahora si $\alpha = \beta + 1$; como N_β es saturado debe ser isomorfo a M sea $G : N_\beta \cong M$ entonces sea N_α la preimagen de N bajo una extensión de G. Ahora sea $N^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$ se tiene que $|\varphi(N^*; a)| = |\varphi(N; a)| = \aleph_0$.

Consideramos el conjunto de fórmulas $p = \{\varphi(x; a) \wedge x \neq b | b \in \varphi(N^*; a)\}$ como $\varphi(x; a)$ es no algebraico se tiene que p es consistente, además N^* omite p, esto quiere decir que N^* no es saturado, pues el conjunto de parametros de p es contable y $\|N^*\| = \aleph_1$. Esto contradice la $\aleph_1$-categoricidad. $\square$

Definición 1.14. *1. Sea p un conjunto de fórmulas en finitas variables x. p es llamado algebraico si y solo si $|p((C))| < \aleph_0$ donde*

$$p(\mathfrak{C}) = \{c \in \mathfrak{C} : c \models p\}$$

2. Una fórmula $\varphi(x; a)$ es llamada fórmula algebraica si y solo si $\{\varphi(x; a)\}$ es un tipo algebraico.

Definición 1.15. *Sea $\varphi(x; a)$ una fórmula, $\varphi(x; a)$ es llamada fórmula fuertemente minimal (o el conjunto definido por $\varphi(x; a)$ es llamado conjunto fuertemente minimal) si y solo si:*

1. $\varphi(x; a)$ es no algebraico.

2. Para cualquier fórmula $\phi(x; z)$ y cualquier b se tiene que $\varphi(x; a) \wedge \phi(x; b)$ es algebraico ó $\varphi(x; a) \wedge \neg\phi(x; b)$ es algebraico.

Sea p un tipo en finitas variables. p es minimal si es no algebraico y para cualquier $\phi(x; a)$ donde x son las variables de p se satiface alguna de las condiciones siguientes:

1. $|\{c : c \models p \cup \{\phi(x; a)\}\}| < \aleph_0|$

2. $|\{c : c \models p \cup \{\neg\phi(x; a)\}\}| < \aleph_0|$

Teorema 1.16. *(Existencia de conjuntos fuertemente minimales) Sea T $\aleph_0$-estable. Para cualquier $\varphi(x;y) \in L(T)$, y cualquier $a \in |\mathfrak{C}|$ tal que $\varphi(x;a)$ es no algebraica existe $a^* \in (C)$ y una fórmula $\varphi^*(x;z)$ tal que $\varphi^*(x;a^*)$ es fuertemente minimal y $\varphi^*(x;a^*) \vdash \varphi(x;a)$.*

Demostración. Supongamos que no. Entonces sea $\varphi(x;y) \in L(T)$ tal que para cualquier $a \in^{l(y)} |(C)|$ si $\varphi(x;a)$ es no algebraica entonces no tiene extensiones fuertemente minimales. Esto implica que existe $\phi(x;b)$ tal que $\varphi(x;a) \wedge \phi(x;b)$ y $\varphi(x;a) \wedge \neg\phi(x;b)$ son no algebraicas. Además no pueden tener extensiones fuertemente minimales. Para poder continuar necesitamos un lema.

Lema 1.17. *Para cualquier $\eta \in {}^{\omega>} 2$ existe un tipo finito p_η en x con parámetros de M con las siguientes propiedades:*

1. $\nu < \eta \Rightarrow p_\nu \subseteq p_\eta$.
2. $\eta \in {}^{\omega>} 2 \Rightarrow p_\eta$ *es no algebraico y no existe* $\varphi^*(x;a^*) \vdash p_\eta$ *fuertemente minimal.*
3. *para cualquier* $n < \omega$ *y cualquier* $\eta \in {}^n 2$ *existe* $\phi_\eta(x;b_\eta) \in p_{\eta^\wedge 0}$ *tal que* $\neg\phi_n(x;b_\eta) \in p_{\eta^\wedge 1}$.

Demostración. Definimos por inducción en $l(\eta)$:

Para $l(\eta) = 0$ sea $p_\eta = \{\varphi(x;a)\}$.

Supongamos que p_η es un tipo finito en x con parámetros de M. Por la parte (2) de la hipótesis de inducción $\varphi^*(x;a^*) = \bigwedge p_\eta$ no es fuertemente minimal. Sea b_η (en el modelo monstruo) y $\phi(x;z_\eta)$ que testifica esto, es decir:

$$\varphi^*(x;a^*) \wedge \phi(x;b_\eta) \text{ y } \varphi^*(x;a^*) \wedge \neg\phi_\eta(x;b_\eta) \text{ son no algebraicas.}$$

Sea $p_\eta^\wedge 0 = p_\eta \bigcup \{\phi_\eta(x;b_\eta)\}$ y $p_\eta^\wedge 1 = p_\eta \bigcup \{\neg\phi_\eta(x;b_\eta)\}$: Es claro que se satisfacen las condiciones requeridas. □

Sea $A = \bigcup_{n \in {}^{\omega>}2} Dom(p_\eta)$. Ahora para $\eta \in {}^\omega 2$ definimos $p_\eta = \bigcup_{n<\omega} p_{\eta\restriction n}$. Los p_η son tipos sobre A, y de la condición (3) se tiene que $\eta \neq \nu \Rightarrow p_\eta \neq p_\nu$, pero entonces $|S^{l(x)}(A)| = 2^{\aleph_0}$, lo cual es una contradicción con la $\aleph_0$-estabilidad de T. □

Definición 1.18. *Sea A un conjunto dado. La clausura algebraica de A, $acl(A)$ es el conjunto $\{c : tp(c/A)$ es algebraico $\}$*

Esta definición de clausura algebraica es equivalente a la siguiente $acl(A) = \{c :$ existe $a \in A$ y existe una fórmula algebraica $\varphi(x; a)$ tal que $\mathfrak{C} \models \varphi[c; a]\}$. Para probar esto se puede usar compacidad y considerar la siguiente teoría $T = \{c_i \neq c_j : i \neq j < \omega\} \cup \{\phi[c_i] : i < \omega, \phi(x) \in tp(c/A)\}$. Esta definición que hemos dado de clausura algebraica es una generalización razonable de la clausura algebraica en teoría de cuerpos. Vamos a probar que en efecto tiene muchas de las propiedades de dicha clausura.

Lema 1.19. *(Transitividad de la clausura algebraica) Sean X y Y subconjuntos del modelo $\mathfrak{C}$ y $a \in \mathfrak{C}$. Si $a \in acl(X)$ y $X \subseteq acl(Y)$ entonces $a \in acl(Y)$.*

Demostración. Sean $b_1, \ldots, b_n \in X$ y una fórmula $\varphi(x; y_1, \cdots, y_n)$ tal que $a \in \varphi(\mathfrak{C}; b_1, \cdots, b_n)$ y este conjunto es finito. Ahora como $X \subseteq acl(Y)$ para $k < n$ sea $c_k \in Y$ y $\phi_k(y_k; z_k)$ tal que $b_k\phi_k(\mathfrak{C}; c_k)$ y estos conjuntos son finitos. Sea $m = |\varphi(\mathfrak{C}; b_1, \cdots, b_n)|$. Sea $\varphi^*(x; c_1, \cdots, c_n)$ la fórmula siguiente:

$\exists y_1 \exists y_n [\bigwedge_{k<n} \phi_k(y : k; c_k) \wedge \varphi(x; y_1 \cdots, y_n) \wedge \exists^m x \varphi(x; y_1, \ldots, y_n)]$. Esta fórmula permite asegurar que $a \in acl(Y)$. □

Lema 1.20. *Sea p un tipo minimal. Para cualquier conjunto A existe un único tipo $q \in S(A)$ tal que $p \cup q$ es no algebraico.*

Demostración. Existencia:

Sea $P = \{p \cup \phi | \phi$ es un conjunto de fórmulas con parámetros de A y variables de p tal que $p \cup \phi$ es no algebraico$\}$. Obviamente $P \neq \emptyset$ y es parcialmente ordenado por $\subseteq$. Usando el lema de Zorn es suficiente probar que:

Hecho 1.21. *Cualquier cadena en $(P, \subseteq)$ tiene una cota superior.*

Demostración. Sea $C \subseteq P$ una cadena. Es suficiente probar que $\bigcup C \in P$.

Sea $C^* = \{\phi | \exists S \in C[\phi = S - P]\}$. Vamos a probar que $p^* = p \cup (\bigcup C^*)$ es un elemento de P. Suponga que p^* es algebraico. Existe un subconjunto finito p_0 de $\bigcup C^*$ tal que $p \cup p_0 \vdash p^*$. Es decir $p \cup p_0$ es algebraico. Sea $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1} \in C^*$ tal que $p_0 \subseteq \bigcup\{\phi_k | k < n\}$. Como C^* es una cadena podemos asumir que $\phi_0 \subseteq \phi_1 \subseteq \ldots \subseteq \phi_{n-1}$. Entonces $p_0 \subseteq \phi_{n-1}$. Como $p \cup \phi_{n-1} \vdash p \cup p_0 \vdash p^*$ tenemos que $p \cup \phi_{n-1}$ es algebraico, lo cual es una contradicción con el hecho de que $p \cup \phi_{n-1} \in P$. □

Unicidad:

Supongamos que existe $q_1 \neq q_2$ tales que $p \cup q_l$ es no algebraico. Como los tipos son distintos existe una fórmula $\phi(x; y)$ y una tupla $a \in A$ tal que $\phi(x;a) \in q_1$ y $\neg\phi(x;a) \in q_2$. Como $p \cup q_l$ son no algebraicos tenemos en particular que $p \cup \{\phi(x;a)\}$ y $p \cup \{\neg\phi(x;a)\}$ son no algebraicos lo cual contradice la suposición de que p es fuertemente minimal. $\square$

Corolario 1.22. *Sea $\varphi(x;b)$ fuertemente minimal. Para cualquier $A \supseteq b$ existe un único tipo no algebraico $p \in S(A)$ conteniendo $\varphi(x;b)$.*

Corolario 1.23. *Sea $\varphi(x;b)$ fuertemente minimal. Para cualquier $A \supseteq b$ y cualquier c, d no algebraicos sobre A tal que*

$$tp(c/A) = tp(d/A) \supseteq \varphi(x : b)$$

existe una función elemental F tal que $F \restriction A = id_A$ y $F(c) = d$.

La razón por la cual introducimos los conjuntos fuertemente minimales es que la anterior noción define una operación de clausura que resulta siendo una pregeometría. Una *pregeometría* es una generalización de la clausura algebraica (como ya se había dicho) y de la clausura lineal simultaneamente.

Teorema 1.24. *(Existe una pregeometría en conjuntos fuertemente minimales) Sea $\varphi(x;a)$ una fórmula fuertemente minimal, sea $D = \varphi(\mathfrak{C};a) \cup \{a\}$. Para cualquier $X \subseteq D$ sea $cl(X) = acl(X \cup a) \cap D$. bajo las suposiciones anteriores (D, cl) es una pregeometría, es decir:*

1. *$X \subseteq cl(X)$.*

2. *Carácter finito: para cualquier $a \in cl(X)$ existe un subconjunto finito X_0 de X tal que $a \in cl(X_0)$.*

3. *$cl(.)$ es transitivo.*

4. *Intercambio: Para todo $c, b \in D$ y cualquier $X \subseteq D$ si $c \notin cl(X)$ pero $c \in cl(X \cup \{b\})$ entonces $b \in cl(X \cup \{c\})$*

Demostración. Solo la última parte es no trivial. Si se expande el lenguaje con constantes interpretando los elementos de $X \cup \{a\}$ es suficiente probar que $c \in acl(b) \setminus acl(\emptyset)$ entonces $b \in acl(c)$. Supongamos que existen c y $b \in D$ tal que $c \in acl(b) \setminus acl(\emptyset)$ y $c \notin acl(c)$. Como $c \in acl(b)$ existe una fórmula $\phi(x;y)$ y un entero positivo n tal que $\mathfrak{C} \models \phi[c;b] \wedge \exists^n y\phi[y;b]$. Además como $b \notin acl(c)$ la fórmula $\phi(c;z) \wedge \exists^n y\phi(y;z)$ es no algebraica.

Hecho 1.25. *Existe $S_0 \subseteq D$ finito tal que*

$$b' \in D \setminus S_0 \Rightarrow \mathfrak{C} \models \phi[c; b'] \wedge \exists^{\leq n} y\phi(y; b').$$

Demostración. Supongamos que no existe un S_0 finito con la propiedad enunciada. Como D es fuertemente minimal el conjunto $\{b' \in D : \mathfrak{C} \models \phi[c; b'] \wedge \exists^{\leq n} y\phi[y; b']\}$ es finito esto es porque S_0 es infinito, sea l su cardinal. Claramente

$$\mathfrak{C} \models \exists x_0, \cdots \exists x_{l-1} \forall x[[\bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i<l} \varphi(x_i; a)] \rightarrow \phi(c; x_i) \wedge \exists^{\leq n} y\phi(y; x_i)]$$

$$\wedge[\varphi(x; a) \rightarrow \phi(c; x) \wedge \exists y\phi(y; x)] \rightarrow \bigvee x = x_i]].$$

Como $b \in \varphi(\mathfrak{C}; a)$ la fórmula $\varphi(x; a) \rightarrow \phi(c; x) \wedge \exists^n y\phi(y; x)$ es una fórmula algebraica realizada por b lo cual contradice que $b \notin acl(c)$ □

Ahora sea $k = |S_0|$. Por como se eligió S_0 se tiene que $\mathfrak{C} \models \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall z[\bigwedge_{i\leq k} z \neq x_i \wedge \varphi(z; a) \rightarrow \phi(c; x_i) \wedge \exists^n y\phi(y, x)$.

Como $c \notin acl(\emptyset)$ la siguiente fórmula

$$\chi(w) = \exists x_1 \ldots \exists x_k \forall z[\bigwedge_{i\leq k} z \neq x_i \wedge \varphi(z; a) \rightarrow \phi(c; x_i) \wedge \exists^n y\phi(y, x)]$$

es no algebraica . Sean $c_0, \ldots, c_n$ elementos distintos de $\chi(\mathfrak{C})$. Como para cualquier $i \leq n, \mathfrak{C} \models \varphi[c_i]$ debe existir entonces un subconjunto finito $S_1 \subseteq D$ tal que

$$b' \in D \setminus S_1 \Rightarrow \mathfrak{C} \models \bigwedge_{i\leq n} \phi[c_i; b'] \wedge \exists^n y\phi(y; b)$$

lo cual resulta siendo una contradicción. □

1.3. Rangos y modelos primos

Para la prueba de Baldwin-Lachlan vamos a trabajar con un rango diferente al original rango de Morley. Este es el rango $R[p, L, 2]$.Tiene la posibilidad de generalizaciónes en algunas clases no elementales.

Definición 1.26. *Sea p un conjunto de fórmulas en x. Por inducción definimos para cualquier ordinal α cuando la relación $R[p] \geq \alpha$ se tiene.*

$R[p] \geq 0$ si y solo si p es consistente

$R[p] \geq \alpha + 1$ si y solo si para cualquier $q \subseteq p$ finito existe una fórmula $\phi(x; y)$ y $b \in \mathfrak{C}$ tal que $R[q \bigcup \phi(x; b)] \geq \alpha$ y $R[q \bigcup \neg\phi(x; b)] \geq \alpha$.

Para α límite, se tiene $R[p] \geq \alpha$ si y solo si $R[p] \geq \beta$ para todo $\beta < \alpha$.

Definición 1.27. *Sea p un conjunto de fórmulas en x.*

Si p es inconsistente decimos que $R[p] = -1$

Si existe algún ordinal β tal que $R[p] \leq \beta$ decimos que $R[p] = \alpha$ cuando $R[p] \geq \alpha$ y $R[p] \geq \alpha + 1$ falle.

Si para cualquier ordinal β tenemos $R[p] \geq \beta$ entonces $R[p] = \infty$.

Definición 1.28. *Sea x una secuencia finita de variables. Para conjuntos de x-fórmulas p y q, decimos $p \vdash q$ si para cualquier $a \in |\mathfrak{C}|^{l(x)}$. Si a realiza p entonces a realiza q.*

Lema 1.29. *(Monotonía). Suponga que p y q son conjuntos de fórmulas con variables libres de la secuencia x. Si $p \vdash q$ entonces $R[p] \leq R[q]$.*

Demostración. Si $R[q] = -1$ entonces q es inconsistente y entonces existe un conjunto finito inconsistente $p_0 \subseteq p$. Por la definición de rango tenemos que $R[p] = R[p_0]$.

Vamos a probar por inducción en $\alpha \in On$ que

$$R[p] \geq \alpha \Rightarrow R[q] \geq \alpha \text{ para cualquier } p \vdash q$$

Supongamos $\alpha = 0$ es obvio que se tiene lo requerido.

Supongamos que α es límite, entonces por definición de rango $R[p] \geq \beta$ para todo $\beta < \alpha$. Como $\beta < \alpha$ por hipótesis de inducción

$$R[p] \geq \beta \text{ y } p \vdash q \Rightarrow R[q] \geq \beta.$$

Usando la definición de rango tenemos que $R[q] \geq \alpha$.

Supongamos ahora $\alpha = \beta + 1$, $R[p] \geq \beta + 1$ y $p \vdash q$. Dado $q_0 \subseteq q$ finito. sea p_0 un suconjunto de p finito tal que $p_0 \vdash q_0$. Como $R[p] \geq \beta + 1$ entonces debe existir $\phi_{p_0}(x; b_{p_0})$ tal que

$R[p_0 \bigcup \{\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\}] \geq \beta$ y $R[p_0 \bigcup \{\neg\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\}] \geq \beta$, claramente se tiene que

$p_0 \bigcup \{\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\} \vdash q_0 \bigcup \{\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\}$ y $p_0 \bigcup \{\neg\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\} \vdash q_0 \bigcup \{\neg\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\}$.

Entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$R[q_0 \bigcup \{\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\}] \geq \beta \text{ y } R[q_0 \bigcup \{\neg\phi_{p_0}(x; b_{p_0})\}] \geq \beta.$$

Por definición de rango se tiene que $R[q_0] \geq \beta + 1$ $\square$

Corolario 1.30. *Sean p y q conjuntos de fórmulas con las mismas variables libres. Si $p \supseteq q$ entonces $R[p] \geq R[q]$. En particular, $R[p] \leq R[x = x]$ para cualquier tipo p en x.*

Corolario 1.31. *(Carácter finito). Para cualquier conjunto de fórmulas p existe un $p_0 \subseteq p$ finito tal que $R[p] = R[p_0]$.*

Demostración. Si p es inconsistente existe un $p_0 \subseteq p$ finito que tambien es inconsistente. Por la definición de R tenemos que $R[p] = R[p_0] = -1$.

Supongamos que $R[p] = \infty$. Sea p_0 un subconjunto de p por el corolario anterior tenemos que $R[p_0] = \infty$

Ahora si $0 \leq R[p] < \infty$. Sea $\alpha = R[p]$. Como $R[p] \ngeq \alpha + 1$ debe existir un $p_0 \subseteq p$ finito tal que

$$(*) R[\bigwedge p_0] \ngeq \alpha + 1$$

como $p \vdash p_0$ tenemos

$$(**) R[p] \leq R[p_0],$$

combinando $(*)$ y $(**)$ tenemos que

$$\alpha + 1 \nleq R[p_0] \geq R[p] = \alpha, \text{ esto es } R[p_0] = \alpha.$$

□

Lema 1.32. *(Unicidad de extensión)Sea p un conjunto consistente de fórmulas en x con la propiedad de que $R[p] < \infty$. Suponga que $p \subseteq q_l$ para $l = 1, 2$ son tipos tales que $dom(p) \subseteq A$, y $q_l \in S(A)$ tienen el mismo rango que p. Entonces $q_1 = q_2$*

Demostración. Supongamos que $q_1 \neq q_2$. como son tipos completos debe existir $\varphi(x; a) \in q_1$ tal que $\neg\varphi(x; a) \in q_2$. Sea $\alpha = R[p] = R[q_1] = R[q_2]$. Por la monotonía tenemos que $R[p] \geq R[p \bigcup \{\varphi(x; a)\} \geq R[q_1]$. De manera similar tenemos que $R[p] \geq R[p \bigcup \{\neg\varphi(x; a)\}] \geq R[q_2]$. combinando esto tenemos que $R[p \bigcup \{\varphi(x; a)\}] \geq \alpha$ y $R[p \bigcup \{\neg\varphi(x; a)\}] \geq \alpha$ lo cual por la definición de R implica que $R[p] \geq \alpha + 1$ lo cual es una contradicción. □

Teorema 1.33. *Sea T una teoría completa en un lenguaje contable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *T es $\aleph_0$-estable.*

2. *Para x una secuencia finita de variables tenemos que $R[x = x] < \omega_1$*

Demostración. (1)⇒(2) Supongamos que $R[x = x] \geq \omega_1$.

Para cualquier $\eta \in 2^{<\omega}$ definimos un tipo finito $p_\eta \subseteq Fml(L(CD((C))))$ y $\phi_\eta(x; a_\eta)$ con las siguientes propiedades:

1. $p_{\langle\rangle} = \{x = x\}$
2. p_η es un $\mathfrak{C}$-tipo con variables libres en x.
3. Para cualquier $\eta \in 2^{<\omega}$ existe $\phi_\eta(x; a_n)$ tal que $p_{\eta\wedge 0} = p_\eta \bigcup \{\phi(x; a_\eta)\}$ y $p_{\eta\wedge 1} = p_\eta \bigcup \{\neg\phi_\eta(x; a_n)\}$
4. Para cualquier $\eta \in 2^{<\omega}$, si ν es un segmento inicial de η entonces $p_\nu \subseteq p_\eta$
5. $R[p_\eta] \geq \omega_1$

La construcción se hará por inducción en $l(\eta)$: Para $l(\eta) = 0$, sea $p_{\langle\rangle} = \{x = x\}$.

Ahora supongamos que $\{p_\eta, \phi_\eta(x; a_\eta) : \eta \in 2^{<n}\}$ están definidos. Dado $\eta \in 2^{n-1}$, como $R[p_\eta] \geq \omega_1$ entonces para cualquier $i < \omega_1$ sea $\phi_{\eta,i}(x; a_{\eta,i})$ tal que $R[p_\eta \bigcup \phi_{\eta,i}(x; a_{\eta,i}) \geq i$ y $R[p_\eta \bigcup \neg\phi_{\eta,i}(x; a_{\eta,i}) \geq i$, como el número de posibles fórmulas es contable debe existir $S_\eta \subseteq \omega_1$ y una fórmula $\varphi_\eta(x; y_\eta)$ tal que para cualquier $i \in S$ tenemos que $\phi_{\eta,i}(x; y_{\eta,i}) = \varphi_\eta(x; y_\eta)$. Ahora para cualquier $i \in S$ definimos $q_{\eta,i}$ como el tipo $tp(a_{\eta,i}, dom(p_\eta))$. Como T es $\aleph_0$-estable debe existir un $S^*_\eta \subseteq S_\eta$ y $q_\eta \in S(dom(p_\eta))$ tal que para cualquier $i \in S^*_\eta$ tenemos que $q_{\eta,i} = q_\eta$. Sea a_η una realización de q_η. Ahora definimos $p_{\eta\wedge 0} = p_\eta \bigcup \{\phi_\eta(x; a_\eta)\}$ y $p_{\eta\wedge 1} = p_\eta \bigcup \{\neg\phi_\eta(x; a_\eta)\}$.

Lo que hace falta por verificar es que $R[p_{\eta\wedge l}] \geq \omega_1$ para $l = 0, 1$. Para $l = 0$ Como S^*_η es no contable entonces debe ser cofinal en ω_1 por lo cual es suficiente probar que para cualquier $i \in S^*_\eta$ $R[p_\eta \bigcup \phi_\eta(x; a_\eta)] \geq i$.

Sea $i \in S^*_\eta$.

$$R[p_\eta \bigcup \{\phi_\eta(x; a_\eta)\}] = R[p_\eta \bigcup \{\phi_\eta(x; a_{\eta,i})\}]$$

Pues el rango es invariante bajo automorfismos, ahora

$$R[p_\eta \bigcup \{\phi_\eta(x; a_{\eta,i})\}] = R[p_\eta \bigcup \{\varphi_{\eta,i}(x; a_{\eta,i})\}] \geq i$$

Esto completa la construcción, definimos $A = \{a_\eta : \eta \in 2^{<\omega}\}$, A es contable, para $\eta \in 2^{<\omega}$ sea $p_\eta = \bigcup_{n<\omega} p_{\eta\restriction n}$, de manera similar a la prueba de teoremas anteriores se puede ver que $|S^{l(x)}(A)| = 2^{\aleph_0}$. Contradicción con la $\aleph_0$-estabilidad.

Para probar (2)$\Rightarrow$(1) vamos a probar un hecho más fuerte que además nos va a permitir al final deducir una conclusión adicional.

Lema 1.34. *Sea T una teoría completa. Si $R[x = x] < \infty$ entonces T es estable en cualquier $\lambda \geq |T| + \aleph_0$.*

Demostración. Supongamos que T no es estable en algún λ. Sea A un subconjunto del modelo monstruo de cardinal λ tal que $|S(A)| > \lambda$. tomamos $\{p_i : i < \lambda^+\} \subseteq S(A)$. Como $R[x = x] < \infty$ debe existir un ordinal α_i tal que $R[p_i] = \alpha_i$. Por el carácter finito del rango para cualquier $i < \lambda^+$ existe $q_i \subseteq p_i$ finito tal que $R[q_i] = \alpha_i$. Como cada q_i es un conjunto finito de fórmulas con parámetros en A que es de tamaño λ el tamaño de $\{q_i|i < \lambda^+\}$ es a lo más λ; entonces debe existir un conjunto $S \subsetneq \lambda^+$ de cardinal λ^+ tal que para $i \in S$, $q_i = q$ (fijo). Tomamos $i_1 \neq i_2 \in S$, tenemos que $\alpha_{i-1} = R[p_{i_1}] = R[q_{i_1}] = R[q] = R[q_{i_2}] = R[p_{i_2}] = \alpha_{i_1}$ como p_{i_1} y p_{i_2} son tipos completos del mismo rango y extensiones del tipo q, por la propiedad de unicidad tenemos que $p_{i_1} = p_{i_2}$ lo cual es una contradicción. $\square$

$\square$

Corolario 1.35. *Sea T una teoría completa en un lenguahe contable. Si T es estable en $\aleph_0$ entonces T es estable en cualquier $\lambda \geq \aleph_0$*

Vamos a introducir la noción de modelo primo que es una generalización de la clausura algebraica de teoría de cuerpos.

Definición 1.36. *Sea A un subconjunto del modelo mostruo. Un modelo $M \supseteq A$ es un modelo primo sobre A si y solo si para cualquier N y cualquier (M, N) función elemental $g : A \to N$ existe una inmersión elemental $\bar{g} : M \to N$ extendiendo g.*

Para la prueba que vamos a desarrollar en este capítulo van a ser fundamentales los modelos primos; ellos garantizan la posibilidad de extender funciones elementales que a su vez se pueden llevar a isomorfismos.

Durante lo desarrollado en este capítulo nuestra hipótesis fundamental ha sido la $\aleph_0$-estabilidad que es directamente implicada por la categoricidad en un cardinal no contable.En el caso de los modelos primos esta hipótesis permite garantizar su existencia. Para probar esto necesitamos algunos hechos técnicos.

Lema 1.37. *(Densidad de tipos aislados) Suponga que T es $\aleph_0$-estable. Para cualquier a y A tal que $a \in A$ y cualquier $\varphi(x;y)$ tal que $\mathfrak{C} \models \exists x\varphi(x;a)$, existe $q \in S^{l(x)}(A)$ conteniendo la fórmula $\varphi(x;a)$ y tal que q es aislado por una fórmula con parámetros de A.*

Demostración. Consideramos el siguiente conjunto S:
$\{R[\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c)] | \phi(x;y) \in L(T), c \in A, (C) \models \exists x[\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c)]\}$

Por el teorema anterior tenemos que el conjunto S es un conjunto de ordinales. Ahora sea α el mínimo de S y sea $\phi(x;c)$ tal que $R[\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c)] = \alpha$ ahora sea b tal que $\mathfrak{C} \models \varphi[b;a] \wedge \phi[b;c]$. Definimos q como $tp(b,A)$. Es obvio que $\phi(x;a) \in q$: Vamos a probar ahora que q es aislado, mas específicamente veremos que $\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \vdash q$. Si no fuera así existiría $\rho(x;d) \in q$ tal que $\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \nvdash \rho(x;d)$, además $\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \nvdash \neg\rho(x;d)$ esto implica que $\mathfrak{C} \models \exists x\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \wedge \rho(x;d)$ y $\mathfrak{C} \models \exists x\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \wedge \neg\rho(x;d)$. Por como se definió S y por la minimalidad de α tenemos que $R[\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \wedge \rho(x;d)] \geq \alpha$ y $R[\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c) \wedge \neg\rho(x;d)] \geq \alpha$. Esto implica que $R[\varphi(x;a) \wedge \phi(x;c)] \geq \alpha + 1$ lo cual es una contradicción. $\square$

Ahora vamos a introducir una construcción intermedia para la cual no es dificil garantizar su existencia esta es la de *modelo primario*. Luego vamos a probar que todo modelo primario es primo.

Definición 1.38. *Sea M un modelo y $A \subseteq |M|$. M es primario sobre A si y solo si existe un ordinal α y una enumeración $\{a_i : i < \alpha\}$ de el conjunto $|M| \setminus A$ tal que el tipo*

$$p_i = tp(a_i, A \cup \{a_j | j < i\}) \text{ es aislado sobre } A \cup \{a_j : j < i\}$$

para cualquier $i < \alpha$.

Teorema 1.39. *(existencia de modelos primarios) Sea T una teoría contable de primer orden. Si T es $\aleph_0$-estable; para cualquier A existe un modelo primario M sobre A.*

Demostración. Sea $\lambda = |A| + \aleph_0$. Sea $\alpha = \lambda \cdot \omega$, vamos a definir una sucesión $I = \{a_i : i < \alpha\}$ tal que $I \cup A$ es un modelo primario sobre A. Por inducción en $n < \omega$ definimos $\{a_i | \lambda \cdot n \leq i < \lambda \cdot (n+1)\}$ tal que

1. $tp(a_i/A_i)$ es aislado para cualquier $i < \lambda \cdot n$, donde $A_i = A \cup \{a_i : j < i\}$

2. Para cualquier $n < \omega$, cualquier fórmula $\varphi(x; y)$ y cualquier $a \in A_{\lambda \cdot n}$ si $\mathfrak{C} \models \exists x \varphi(x; a)$ entonces existe un ordinal j tal que $\lambda \cdot n \leq j < \lambda \cdot (n+1)$ y $\mathfrak{C} \models \varphi[a_j; a]$

Claramente esto es suficiente para probar lo que necesitamos.

Para la construcción supongamos ya definido $\{a_i : i < \lambda \cdot n\}$. Podemos elegir una enumeración $\{\varphi_\xi(x; b_\xi) | \xi < \lambda\}$ una enumeración de todas las fórmulas con parámetros de $A_{\lambda \cdot n}$ tal que para cualquier $\xi < \lambda$ tenemos que $\mathfrak{C} \models \exists x \varphi_\xi(x; b_\xi)$. Por el lema anterior existe un tipo aislado completo $q \in S(A_{\lambda \cdot n + \xi})$ conteniendo $\varphi_\xi(x; b_\xi)$. Sea a_ξ una realización de q. $\square$

Esto prueba la existencia de modelos primarios, ahora vamos a probar que todo modelo primario es primo.

Teorema 1.40. *Sea M un modelo y A un subconjunto de su universo. Si M es primario sobre A entonces M es primo sobre A.*

Demostración. Supongamos que $\{a_i | i < \alpha\}$ es una secuencia aislante de M sobre A. Sea $g : A \to N$ una función elemental. Vamos a construir una inmersión $\bar{g} : M \to N$ extendiendo g por inducción en $i < \alpha$:

Para cualquier $i < \alpha$ sea $g_i : A_i \cup \{a_j : j < i\} \to N$ tal que

1. $g_0 = g$,

2. g_i es una función elemental.

3. La sucesión $\{g_j : j < i\}$ es creciente y continua.

Claramente $\bar{g} = \bigcup_{i<\alpha} g_i$ es la inmersión requerida.

Para la construcción supongamos construida g_i para $i < \alpha$, como $p_i = tp(a_i, A \cup \{a_j | j < i\})$ es aislado sobre su dominio, entonces existe $\varphi(x; a_i) \in p_i$ que lo aisla. Además como g_i es elemental y $\varphi(x; a_i) \vdash p_i$ tenemos que $\varphi(x; g_i(a_i)) \vdash g_i(p_i)$. Como $\mathfrak{C} \models \exists x \varphi(x; a_i)$ entonces $\mathfrak{C} \models \exists x \varphi(x; g_i(a_i))$; sea b_i tal que $\mathfrak{C} \models \varphi[b_i; g_i(a_i)]$, por lo cual b_i realiza el tipo $g_i(p_i)$. Definimos entonces $g_{i+1} = g_i \cup \{(a_i, b_i)\}$ que es una función con las condiciones requeridas. $\square$

Corolario 1.41. *(Existencia de modelos primos) Sea T una teoría completa de primer orden. Si T es $\aleph_0$-estable entonces para cualquier A existe un modelo primo M_A sobre A.*

1.4. La prueba de Baldwin-Lachlan

Recordamos el enunciado del teorema 1.1

Teorema 1.42. *Sea T una teoría contable, lo siguiente es equivalente:*

1. *T es categórica en algún $\lambda > \omega$.*
2. *T es categórica en todo $\lambda > \omega$.*
3. *T no tiene pares de Vaught.*

Demostración. Nos queda por probar (3) $\Rightarrow$ (2). Sea $\lambda > \aleph_0$ y $M, N \models T$ de cardinal λ. Debe existir entonces una fórmula fuertemente minimal $\varphi(x; a)$. Podemos suponer además que la fórmula no tiene parámetros, basta considerar a T como T_a que tambien resulta ser $\aleph_0$-estable y sin pares de Vaught.

Lema 1.43. *Supongamos que T es $\aleph_0$-estable y no tiene pares de Vaught. Para cualquier modelo M y $A = \varphi(M)$ no algebraico, definible con parámetros de $|M|$, M es primo y minimal sobre A.*

Demostración. Primero veamos que M es primo sobre A por el corolario (1.41) sea M_A un modelo primo sobre A. Entonces debe existir una inmersión $f : M_A \to M$ que es la identidad en A. Sea $M' = f[M_A]$. Como $A \subseteq M' \subseteq M$ tenemos que $A = \varphi(M') = \varphi(M)$, como T no tiene pares de Vaught tenemos que $M' = M$. Para ver que M es minimal sea $N \prec M$ conteniendo a A se debe tener entonces que $A = \varphi(N) = \varphi(M)$ como T no tiene pares de Vaught tenemos que $N = M$. □

Lema 1.44. *Sean M y N modelos. Supongamos que $\varphi(x)$ es fuertemente minimal, sea $G_1 = \varphi(M)$ y $G_2 = \varphi(N)$. Si $I_l \subseteq G_l$ son conjuntos algebraicamente independientes y $g : I_1 \to I_2$ es inyectiva entonces g es una función elemental.*

Demostración. Sean $\{a_l^i : i < \mu\} = I_l$ para $l = 1, 2$. Supongamos que $g(a_1^i) = a_2^i$. Por inducción en $n < \omega$ vamos a probar que

$$M \models \phi[a_1^{j_0}, \dots, a_1^{j_{n-1}}] \Leftrightarrow N \models \phi[a_2^{j_0}, \dots, a_2^{j_{n-1}}]$$

Para todo $j_0 < \dots j_{n-1} < i < \mu$ y cualquier $\phi(x)$. Para $n = 0$ tenemos que $tp(a_1^{j_0}/\emptyset, M) = tp(a_2^{j_0}/\emptyset, N)$, esto se tiene porque φ es fuertemente minimal (corolario (1.23)). Ahora como a_l^i es algebraicamente independiente sobre $\{a_l^j : j < i\}$ una aplicación del corolario (1.23) da el paso inductivo. □

Lema 1.45. *Sean M_1 y M_2 modelos. Suponga que $\varphi(x)$ es una fórmula fuertemente minimal, sea $G = \varphi(M_1)$ y $G_2 = \varphi(M_2)$. Si $I_l \subseteq G_l$ son bases (subconjuntos algebraicamente independientes maximales) y $g : I_1 \to I_2$ es una biyección entonces existe una función elemental $\bar{g} : G_1 \to G_2$ extendiendo a g.*

Lema 1.46. *Consideramos*

$$\mathfrak{F} = \{g' : A_1 \to A_2 | g' \text{ es una función elemental extendiendo } g, A_l \subseteq |M_l|\}.$$

Por el lema de Zorn sea $\bar{g}$ maximal. llegaremos auna contradicción suponiendo que $dom\bar{g} \subsetneq \varphi(M_1)$. Sea $a \in \varphi(M_1) - dom(\bar{g})$. Como $a \notin dom\bar{g}$ a debe ser algebraico sobre $dom\bar{g}$. Sea

$$n_0 = min\{n < \omega | M_1 \models \exists x^{=n} \varphi(x) \wedge \phi(x; b)\}.$$

Sea $\phi(x; b)$ un testigo para n_0. Por la elementaridad de $\bar{g}$ tenemos que $M_2 \models \exists x^{=n_0} \varphi(x) \wedge \phi(x; \bar{g}(b))$.

Sea $a' \in |M_2|$ un elemento satisfaciendo la fórmula anterior.

Vamos a obtener una contradicción a la maximalidad de $\bar{g}$ probando que $\bar{g} \cup \{(a; a')\}$ es una función elemental, para esto es suficiente probar que $M_1 \models \chi[a; c] \Rightarrow M_2 \models \chi[a'; \bar{g}(c)]$ para todo $c \in dom\bar{g}$ y cualquier $\chi(x; y)$.

Supongamos que $M_1 \models \chi[a; c]$. Por la elección de a tenemos que

$$M_1 \models \varphi[a] \wedge \phi[a; b] \wedge \chi[a; c].$$

Por la elección de n_0 tenemos que $M_1 \models \forall x[\varphi(x) \wedge \phi(x; b) \to \chi(x; c)]$. Por la elección a' y por la elementaridad de $\bar{g}$ tenemos que $M_2 \models \chi[a'; g(c)]$.

Para completar la prueba se aplica el anterior lema a $I_1 = I_2 = \emptyset$ la minimalidad y primalidad implican el teorema de Morley. $\square$

Capítulo 2

Categoricidad en clases elementales abstractas dóciles

En este capítulo vamos a trabajar en el contexto de clases elementales abstractas con algunas suposiciones adicionales. Las clases elementales abstractas (ceas) fueron definidas por Shelah como una generalización de la clase de modelos de una teoría de primer orden. A traves de los años se ha podido observar que las ceas poseen un equilibrio entre generalidad y manejabilidad; son lo suficientemente generales para capturar ejemplos de interés matemático (Anillos Noetherianos, Cuerpos Normados, Anillos de dimensión finita, etc.). Pero además tienen una teoría de modelos que permite generalizar muchas de las herramientas utilizadas en primer orden; es por esto que ceas es uno de los contextos más trabajados en la actualidad.

En este contexto tambien existen los pares de Vaught, aquí como en primer orden (bajo ciertas hipótesis adicionales), categoricidad implica la no existencia de los mismos, además, recientemente en los trabajos de R. Grossberg y M. VanDieren, se descubrieron teoremas de transferencia de pares de Vaught que junto con los trabajos de Shelah dá un teorema tipo Morley en cierto tipo de ceas.

2.1. Preliminares

Definición 2.1. *Una clase de L-estructuras,* $(\boldsymbol{K}, \preceq)$*, es llamada una clase elemental abstracta (cea) si tanto* $\boldsymbol{K}$ *como la relación binaria* $\preceq$ *son cerradas bajo isomorfismo y satisfacen las siguientes condiciones:*

- *A1. Si $M \preceq N$ entonces $M \subseteq N$.*
- *A2. $\preceq$ es un orden parcial en $\boldsymbol{K}$.*
- *A3. Si $\{A_i : i < \delta\}$ es una cadena $\preceq$-creciente:*
  1. $\bigcup_{i<\delta} A_i \in \boldsymbol{K}$
  2. *para todo $j < \delta$, $A_j \preceq \bigcup_{i<\delta} A_i$*
  3. *si para todo $i < \delta$ $A_i \preceq M$ entonces $\bigcup_{i<\delta} A_i \preceq M$*
- *A4. Si A, B, $C \in \boldsymbol{K}$, $A \preceq C$, $B \preceq C$ y $A \subseteq B$ entonces $A \preceq B$. (Axioma de coherencia)*
- *A5. Existe un cardinal de Löwenheim-Skolem $LS(\boldsymbol{K})$ tal que si $A \subseteq |B|$, $B \in \boldsymbol{K}$ existe un $C \in \boldsymbol{K}$ con $A \subseteq C \preceq B$ y $\| C \| < |A| + \kappa(\boldsymbol{K})$.*

Definición 2.2. *Sea $\mu \geqslant LS(\boldsymbol{K})$. Decimos que $(\boldsymbol{K}, \preceq)$ tiene la propiedad de μ-amalgamación si y solamente si para todo $M_l \in \boldsymbol{K}_\mu$ (para $l \in \{0,1,2\}$) tal que $M_0 \preceq M_1, M_2$ existen $N \in \boldsymbol{K}$, y $\boldsymbol{K}$-inmersiones $f_l : M_l \to N$ tales que $f_l \upharpoonright M_0 = id_{M_0}$ para $l = 1, 2$.*

$(\boldsymbol{K}, \preceq)$ tiene la propiedad de amalgamación si y solamente si $(\boldsymbol{K}, \preceq)$ tiene la propiedad de μ-amalgamación para todo $\mu \geqslant LS(\boldsymbol{K})$

Vamos a suponer sobre la clase $(\mathbf{K}, \preceq)$, lo siguiente:

- $\mathbf{K}$ tiene modelos arbitrariamente grandes.
- $(\mathbf{K}, \preceq)$ tiene la propidedad de amalgamación y JEP.

Teorema 2.3 (Teorema de presentación). *Si $(\boldsymbol{K}, \preceq)$ es una cea en un vocabulario L con $|L| \leqslant LS(\boldsymbol{K})$, existe un vocabulario $\bar{L}$ con cardinal $LS(\boldsymbol{K})$, una $\bar{L}$-teoría T de primer orden y un conjunto de $2^{LS(\boldsymbol{K})}$ tipos Γ tal que:*

$$\boldsymbol{K} = \{M \upharpoonright L : M \models T \text{ y } M \text{ omite } \Gamma\}.$$

Más aún, si M es una $\bar{L}$ subestructura de N donde M, N satisfacen T y omiten Γ entonces $M \upharpoonright L \preceq N \upharpoonright L$. En este caso se dice que $\boldsymbol{K}$ está presentada como una $PC\Gamma$ clase.

Demostración. Sea $\bar{L}$ que contiene símbolos de función n-aria F_i^n para $n < \omega$ e $i < LS(\mathbf{K})$. Sea T una teoría que dice solamente que sus modelos son no vacíos ($T = \{\exists x(x = x)\}$). Para cualquier $\bar{L}$-estructura M y cualquier *bara* $\in M^n$ sea $M_{\bar{a}}$ que denota el subconjunto de M enumerado como $\{F_i^n(\bar{a}) : i < LS(\mathbf{K})\}$, donde $n = lg(\bar{a})$.

El tipo de isomorfismo de $M_{\bar{a}}$ está determinado por el $\bar{L}$-tipo libre de cuantificadores de $\bar{a}$ (Nótese que $M_{\bar{a}}$ puede no ser una $\bar{L}$-estructura). Sea Γ el conjunto de $\bar{L}$-tipos libres de cuantificadores de tuplas finitas $\bar{a}$ tales que $M_{\bar{a}} \restriction L \notin \mathbf{K}$ o para algún $\bar{b} \subset \bar{a}$, $M_{\bar{b}} \restriction L \not\preceq M_{\bar{a}} \restriction L$.

Afirmamos ahora que que T y Γ son los que necesitamos, esto es que si

$\bar{K} = \{M \restriction L : M \models T$ y M omite $\Gamma\}$

entonces $\mathbf{K} = \bar{K}$.

Sea M una $\bar{L}$-estructura que omite Γ, en particular cualquier $M_{\bar{a}}$ es una L-estructura pues si no lo fuera obviamente $M_{\bar{a}} \restriction L \notin \mathbf{K}$.

Es obvio que $M = \bigcup_{\bar{a} \in M^{<\omega}} M_{\bar{a}}$; además los $M_{\bar{a}}$ forman un orden dirigido entonces $M \in \mathbf{K}$. Inversamente si $N \in \mathbf{K}$, debemos extender N a una $\bar{L}$-estructura M de tal forma que $M \models T$ y M omita Γ, para esto definimos por inducción en $|\bar{a}|$ para $\bar{a} \subset |N|$ (finito) estructuras $N_{\bar{a}}$. Sea N_Φ cualquier $\preceq$-subestructura de N de cardinal $LS(\mathbf{K})$ y sea $\{(F_i^0)^M : i < LS(\mathbf{K})\}$ una enumeración del universo de N_Φ. Ahora dada una tupla $\bar{b}$ de longitud $n+1$ elegimos $N_{\bar{b}} \preceq N$ de cardinal $LS(\mathbf{K})$ que contenga todos los $N_{\bar{a}}$ para $\bar{a} \subset \bar{b}$ (esto es posible gracias a JEP y A5.). Sea $\{(F_i^{n+1}(\bar{b}))^M : i < LS(\mathbf{K})\}$ una enumeración de el universo de $N_{\bar{b}}$ (Dando a la función el mismo valor en cualquier reordenación de $\bar{b}$). Ahora, cualquier $N_{\bar{a}} \restriction L \in \mathbf{K}$ y si $\bar{b} \subset \bar{c}$, $M_{\bar{b}} \preceq M_{\bar{c}}$, entonces M omite Γ como era requerido. Ahora si $M \prec N$(en primer orden), $M, N \models T$ y M y N omiten Γ se tiene que $M_{\bar{a}} = N_{\bar{a}}$ (porque M es un $\bar{L}$-submodelo elemental de N) entonces $M_{\bar{a}} \restriction L \preceq N \restriction L$ pues $N_{\bar{a}} \restriction L \preceq N \restriction L$ entonces $\bigcup M_{\bar{a}} \restriction L \preceq N \upharpoonleft L$, es decir $M \restriction L \preceq N \restriction L$. Esto completa la prueba. $\square$

Teorema 2.4. *Si* $\boldsymbol{K}$ *es una cea en un vocabulario* L*, la cual es presentada como una* $PC\Gamma$ *clase testificada por* $\bar{L}, T, \Gamma$*, existe un* $\bar{L}$*-diagrama* Φ *tal que para cualquier orden lineal* $(I, <)$ *existe una* $\bar{L}$*-estructura* $EM(I, \Phi) = M$*, tal que:*

1. $M \models T$.

2. *La* $\bar{L}$*-estructura* M *es la clausura de Skolem de* I.

3. I *es un conjunto de* $\bar{L}$*-indiscernibles en* M.

4. $M \restriction L \in \boldsymbol{K}$.

5. *Si* $I \subset I'$ *entonces* $EM_L(I, \Phi) \preceq EM_L(I', \Phi)$.

Demostración. Ver [Sh:c] □

2.2. Tipos de Galois y saturación

En esta sección definimos la generalización que existe en ceas de la noción de tipo. Esta permite adaptar la definición de saturación y probar algunos teoremas análogos a los que se tienen en primer orden. Para esto vamos a usar de manera fuerte amalgamación y JEP.

Definición 2.5. *M es μ-modelo homogéneo si para cualquier $N \preceq M$ y cualquier $N' \in \boldsymbol{K}$ con $|N'| < \mu$ y $N \preceq N'$ existe una $\boldsymbol{K}$-inmersión de N' en M sobre N.*

Lema 2.6. *Si M_1 y M_2 son μ-modelo homogeneos de cardinal $\mu > LS(\boldsymbol{K})$ entonces $M_1 \cong M_2$*

Demostración. Supongamos primero que existe $M \preceq M_1, M_2$, si esto sucede sea $\{a_i^l : i < \mu, l = 1, 2\}$ una enumeración de $|M_l| \backslash |M|$ respectivamente, ahora vamos a construir sucesiones $\{M_l^i : i < \mu; l = 1, 2\}$ y $\{f_i : M_1^i \hookrightarrow M_2\}$ crecientes y continuas tales que:

1. $M_i^l \preceq M_l$
2. $a_i^l \in M_i^l$
3. $a_i^1 \in dom(f_{i+1})$ y $M_i^2 \subseteq ran(f_{i+1})$

Para esto sea $M_0^l := M$ y $f_0 := id_M$ para el caso cuando i es límite tomamos uniones. Para el caso $i+1$ suponemos construidos M_i^l y f_i con las propiedades anteriormente mencionadas; sea $M_{i+1}^2 \succeq M_i^2, M_{i+1}^2 \preceq M_2$ tal que $a_i^2 \in M_{i+1}^2$, sea $\overline{M_i^1} := f_i^{-1}(M_i^2)$, cambiando nombres a M_{i+1}^2 existe $\overline{M_{i+1}^2} \succeq \overline{M_i^1}$ isomorfo a M_{i+1}^2, como M_1 es μ-modelo homogéneo existe $g : \overline{M_{i+1}^2} \hookrightarrow M_1$ tal que $g \upharpoonright \overline{M_{i+1}^2} = id_{\overline{M_{i+1}^2}}$ definimos $\overline{f_{i+1}} : M_{i+1}^2 \hookrightarrow M_1$ definida como $\overline{f_{i+1}} = g \circ f$, donde f es el isomorfismo entre M_{i+1}^2 y $\overline{M_{i+1}^2}$.

Analogamente al proceso anterior podemos construir $f_{i+1} : M_{i+1}^1 \hookrightarrow M_2$ con las propiedades requeridas. Ahora, es claro que $\bigcup_{i<\mu} f_i : M_1 \to M_2$ es un isomorfismo, entonces $M_1 \cong M_2$.

Ahora si no existe submodelo común entre M_1 y M_2 sean N_1 y N_2 submodelos de cardinal $< \mu$ de M_1 y M_2 respectivamente, por JEP existe un $M \succeq N_1$ tal que N_2 se puede sumergir en M de cardinal $< \mu$, por la modelo homogeneidad M está inmerso en M_1 y M_2, esto nos permite suponer que M es un modelo común a M_1 y M_2. Con esto se completa la prueba. $\square$

Hecho 2.7. *Si $\boldsymbol{K}$ tiene la propiedad de amalgamación y $\mu_*^{<\mu_*} = \mu_*$ y $\mu_* \geq 2^{LS(\boldsymbol{K})}$ entonces existe un modelo $\mathbb{M}$ de cardinal μ_* el cual es μ_*-modelo homogéneo. (El modelo $\mathbb{M}$ se denomina el modelo monstruo)*

Definición 2.8. *podemos definir $ga - tp(\bar{a}, M, N)$(donde $M \preceq N$, $\bar{a} \subset N$) como $(\bar{a}, M, N)/E$ donde E es la siguiente relación de equivalencia: $(\bar{a}^1, M^1, N^1)E(\bar{a}^2, M^2, N^2)$ si y solo si $M^1 = M^2$ y existe $N \in \boldsymbol{K}$ tal que $M_1 \preceq N$ y $\preceq$-inmersiones $f^l : N^l \to N$ tal que $f \upharpoonright M^l = id_{M^l}$ y $f^1(\bar{a}^1) = f^2(\bar{a}^2)$. Se dice que $p_1 = (p_2 \upharpoonright M_1)$ si $M_1 \preceq M_2 \preceq M, a \subset M$ y $p_l = ga - tp(\bar{a}, M_l, M)$.*

Lema 2.9. *$(a, M, N_1)E(b, M, N_2)$ si y solamente si existe $f : \mathbb{M} \cong \mathbb{M}$ tal que $f \upharpoonright M = id_M$ y $f(a) = b$*

Demostración. ($\Leftarrow$) Es obvio.

($\Rightarrow$) Es suficiente probar que si $f : M \cong N$, $M \preceq \mathbb{M}(\|M\| < \|\mathbb{M}\|)$ y $N \preceq \mathbb{M}$, entonces f se extiende a un automorfismo de $\mathbb{M}$. Para probar esto necesitamos el siguiente:

Hecho 2.10. *Si M es modelo homogéneo y $f : N \hookrightarrow M$ con $\|N\| < \|M\|$ entonces para todo $N' \succ N$ con $\|N'\| < \|M\|$, existe $\bar{f} : N' \hookrightarrow M$ tal que $\bar{f} \upharpoonright N = f$*

Demostración. si $f : N \hookrightarrow M$ es una inmersión entonces $f : N \cong N* \preceq M$. Ahora sea $N' \succeq N$ debe existir entonces $N'' \in \mathbf{K}$ tal que existe $f' : N' \cong N''$ con $f \subseteq f'$ entonces $N* \preceq N''$, por la modelo homogeneidad de M existe $g : N'' \hookrightarrow M$ tal que $g \upharpoonright N* = id_{N*}$, entonces sea

$\bar{f} : N' \hookrightarrow M$

$x \mapsto (g \circ f')(x)$, esta función es la requerida. $\square$

para probar el lema se usa el hecho ya probado y un 'back and forth' $\square$

Podemos tomar la caracterización dada en lema anterior como una definición alterna de tipos de Galois.

Definición 2.11. *$\boldsymbol{K}$ es estable en μ si y solo si para cualquier $M \in \boldsymbol{K}_{\leq\mu}$*
$ga - S(M) := \{ga - tp(a, M, N) | M \preceq N \in \boldsymbol{K}_{\|M\|}, a \in N\}$,
tiene tamaño $\leq \mu$.

Decimos que un tipo de Galois $p = ga - tp(\bar{a}, M, N)$ es realizado en N', con $M \preceq N'$ ssi existe $\bar{b} \in (N')^{lg(\bar{a})}$ tal que $(\bar{a}, M, N)E(\bar{b}, M, N'')$, con $N'' \preceq N'$

Definición 2.12. *Un modelo M es μ-galois saturado si para cualquier $N \preceq M$ con $|N| < \mu$ y cualquier tipo de Galois p sobre N es realizado en M*

Teorema 2.13. *para $\lambda > LS(\boldsymbol{K})$, un modelo M es λ-Galois saturado si y solo si este es λ-modelo homogéneo*

Demostración. ($\Leftarrow$) Obvio. ($\Rightarrow$)Dado $M_0 \prec M$ y $M_0 \preceq N$ con $\|N\| = \mu < \lambda$; sea $\{a_i : i < \mu\}$ una enumeración de $|N| \diagdown |M_0|$, vamos a definir f_i para $i < \mu$ una secuencia creciente y continua de funciones con dominio N_i y rango M_i tal que: $M_0 \prec N_i \preceq \mathbb{M}$; $M_0 \preceq M_i \preceq M$ y $a_i \in N_{i+1}$. La restricción de $\bigcup_{i<\lambda} f_i$ a N es la función requerida. Sea $N_0 = M_0$ y f_0 la identidad de M_0. Supongamos f_i ya construida, si $a_i \in N_i$ $M_{i+1} = M_i$, $N_{i+1} = N_i$ y $f_{i+1} = f_i$, ahora si $a_i \in |N| \diagdown |N_i|$ por el lema anterior como $M_i, N_i \preceq \mathbb{M}$ y $f_i : N_i \cong M_i$, se tiene que f_i se extiende a un automorfismo $\hat{f}_i$ de $\mathbb{M}$. Como M es saturado sea $b_i \in M$ que realiza el tipo de Galois de $\hat{f}_i(a_i)$ sobre M_i entonces existe $\alpha \in Aut(\mathbb{M})$ que fija M_i y $\alpha(b_i) = \hat{f}_i(a_i)$. Sea $M_{i+1} \preceq M$ de cardinal μ que contiene $M_i \bigcup \{b_i\}$, ahora sea $N_{i+1} = (\hat{f}_i^{-1} \circ \alpha)(M_{i+1})$ y definimos f_{i+1} como la restricción de $\alpha^{-1} \circ \hat{f}_i$ a N_{i+1}; f_{i+1} tiene las propiedades requeridas □

Si deseamos de alguna manera tener un teorema tipo Morley (extensión de categoricidad de un cardinal a 'todos')en algún contexto no elemental, es razonable pensar en primero poder extender estabilidad de un cardinal a 'todos'. Buscando imitar el tratamiento que se dá en el caso elemental. En el caso de clases elementales abstractas la categoricidad en un cardinal implica estabilidad 'hacia abajo' como la vamos a presentar en la siguiente sección.

2.3. Estabilidad descendente

Trabajamos ahora con una noción de modelo homogeneidad relativa.

Definición 2.14. *N es μ-universal sobre M si dado $N' \succeq M$ con $\|M'| \leq \mu$ existe $f : N' \hookrightarrow N$ tal que $f \restriction M = id_M$*

Para esta parte vamos a trabajar con tres clases elementales abstractas: $(LO, \subset)$ $Mod(T')$(teorema 2.1) con la noción de submodelo como τ-subconjuntos cerrados y $(\mathbf{K}, \preceq)$

Definición 2.15. *M es* rebosado *(brimful en [Ba1]) si para cualquier $\mu < \|M\|$, y cualquier $M_1 \preceq M$ con $\|M_1\| = \mu$, existe un $M_2 \preceq M$ con cardinal μ que es μ-universal sobre M_1 en M*

Como ya lo habíamos dicho consideramos la clase de los ordenes lineales como una clase elemental abstracta, probaremos ahora que en esta clase existe un modelo de cardinal μ que es rebosado. La prueba de esto se puede encontrar por ejemplo en [Ba1]

Hecho 2.16. *El orden lineal $I = \lambda^{<\omega}$ es rebosado*

En lo que sigue I será un orden lineal.

No es dificil ver que que cualquier L'-subestructura N de $EM(I, \Phi)$ está contenida en una subestructura $EM(I_0, \Phi)$ para algún subconjunto I_0 de I con $|I_0| = |N|$(basta con tomar I_0 como el conjunto de generadores de N), tenemos entonces el siguiente:

Hecho 2.17. *Si I es rebosado como un orden lineal, $EM(I, \Phi)$ es rebosado como una τ'-estructura.*

Demostración. Sea $\sigma < \|EM(I, \Phi)\|$ y $N \subseteq EM(I, \Phi)$, $|N| = \sigma$ entonces existe $I_0 \subseteq I$ tal que $|I_0| = |N|$ y $N \subseteq EM(I_0, \Phi)$ como I es brimful existe $I_1 \subseteq I$ tal que $|I_1| = \sigma$ y es σ-universal sobre I_0 en I aplicando el teorema 2.2 y que la noción de universalidad se transmite bien usando el funtor EM (Es solo una verificación) se tiene el resultado. □

Lo que queremos estudiar es la relación entre la clase $(LO, \subset)$ y la clase $(\mathbf{K}, \preceq)$, este hecho es entonces insuficiente.

Teorema 2.18. *Si I es rebosado como orden lineal, $EM_\tau(I, \Phi)$ es rebosado como un miembro de $\mathbf{K}$.*

Demostración. Sea $M = EM(I, \Phi)$; vamos a probar que $M \upharpoonright \tau$ es rebosado como un miembro de $\mathbf{K}$, suponga que $M_1 \preceq M \upharpoonright \tau$ con $\|M_1\| = \sigma < \|M\|$. Entonces existe $N_1 = EM(I', \Phi)$ con $\|I'\| = \sigma$, $I' \subseteq I$, $M_1 \subseteq N_1 \preceq M$. Por el teorema 2.2 $N_1 \upharpoonright \tau \preceq M \upharpoonright \tau$. Ahora $M_1 \preceq N_1 \upharpoonright \tau$ por el axioma de coherencia. Sea M_2 de cardinal σ y $M_1 \preceq M_2 \preceq M \upharpoonright \tau$. Elegimos una τ'

subestructura N_2 de M con cardinal σ conteniendo N_1 y M_2. Ahora N_2 puede ser inmerso por una función f en la τ'-estructura σ-universal N_3 que contiene a N_1 esto es garantizado por el hecho anterior. Pero $f(N_2) \restriction \tau \preceq N_3 \restriction \tau$, por el axioma de coherencia pues $f(N_2) \restriction \tau \preceq M$ entonces N_3 es la extensión σ-universal requerida de M_1. □

Lema 2.19. *Si $\boldsymbol{K}$ es λ-categórica, el modelo M con $\|M\| = \lambda$ es estable para cualquier $\sigma < \lambda$ (Esto es: para cualquier $M_1 \preceq M$ de cardinal σ sólo σ tipos de Galois sobre M_1 son realizados en M.)*

Demostración. Cualquier realización en M de un tipo de Galois sobre M_0 es representada por un M_1 con $\|M_1\| = \|M_0\|$, pues si a realiza el tipo p por LS existe M_1 tal que $M_0 \subseteq M_1$, $a \in M_1$ y $M_1 \preceq M$ por coherencia $M_0 \preceq M_1$.

Sea $\sigma < \lambda$, tenemos que $\|M\| = \|EM(\lambda^{<\omega}, \Phi)\| = \lambda$, entonces M es rebosado (por categoricidad), ahora sea $M_0 \preceq M$ tal que $\|M_1\| = \sigma$ y M_1 es *sigma*-universal sobre M_0 en M, cada tipo de Galois sobre M_0 realizado en M está representado por un M', pero por la universalidad de M_1 M' debe estar inmerso en M_1 por medio de una función que fija puntualmente M_0 entonces todo tipo sobre M_0 realizado en M es realizado en M_1 como el tamaño de M_1 es σ, entonces M es σ-estable. □

Teorema 2.20 (Lema de estabilidad descendente). *Si $\boldsymbol{K}$ es categórica en λ, entonces $\boldsymbol{K}$ es σ-Galois estable para todo $\sigma < \lambda$ ($\sigma > LS(\boldsymbol{K})$)*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{K}$ no es σ-estable para algún $\sigma < \lambda$. Por LS existe un modelo N de cardinal σ^+ que no es σ-estable. (Para esto tome $\{p_i : i < \sigma^+\}$ un conjunto de tipos sobre un modelo M_0 de cardinal σ realizados en un modelo M, para cada p_i tome una realización a_i, ahora por LS aplicado a $\|M_0\| \bigcup \{a_i : i < \sigma^+\}$ y a M, el modelo resultante tiene cardinal σ^+ y no es σ-estable).

Sea $M \in \mathbf{K}$, $\|M\| = \lambda$ entonces por JEP existe M' tal que M y N están inmersos en M' por LS podemos suponer $\|M'\| = \lambda$ entonces $M \cong M'$ por lo tanto N está inmerso en M imposible pues N no es σ-estable. □

2.4. Ruptura y Tipos minimales

En esta sección introducimos la noción de ruptura en clases elementales abstractas, esta es una aproximación a una noción de independencia como bifurcación, para este proposito vamos a suponer que $\mathbf{K}$ tiene la propiedad de almagamación. Comenzamos probando un lema técnico.

Lema 2.21. *Si $\boldsymbol{K}$ es estable en μ y κ es el menor cardinal tal que $2^\kappa > \mu$, entonces no existe una cadena creciente y continua de modelos M_i con $\|M_i\| \leq \mu$ para $i < \kappa$ y $p \in ga - S(M_\kappa)$ tal que para cualquier i existe $p_i \in ga - S(M_\kappa)$ con $p_i \upharpoonright M_i = p \upharpoonright M_i$, pero $p_i \upharpoonright M_{i+1} \neq p \upharpoonright M_{i+1}$.*

Demostración. Sean a_i, a que realizan p_i y p respectivamente y $g_i \in Aut(\mathbb{M})$ que fija M_i y envía a en a_i. Vamos a construir por inducción en $\alpha < \kappa$ familias crecientes de funciones h_γ con $\gamma \in 2^\alpha$, modelos N_γ y elementos b_γ de la siguiente manera:

Sea $h_\phi = g_0$, $N_\phi = M_1$, $b_\phi = a$. Tomamos uniones en los casos límites. $h_{\langle 0\rangle} = h_\phi$, $h_{\langle 1\rangle} =$

Ahora si $\gamma \in 2^{\beta+1}$ definimos $h_{\gamma 0} = h_\gamma$, □

Definición 2.22. *Sea $M \in \boldsymbol{K}_\mu$, σ un ordinal límite con $\sigma < \mu^+$, se dice que $M' \in \boldsymbol{K}$ es (μ, σ)-modelo límite sobre M si y solo si existe existe una cadena creciente y continua $(M_i \in \boldsymbol{K}_\mu | i < \sigma)$ tal que $M = \bigcup_{i<\sigma} M_i$ y M_{i+1} es universal sobre M_i*

Siguiendo las ideas del lema 2.1 se puede probar lo siguiente:

Hecho 2.23. *Sea μ un cardinal y σ un ordinal límite tal que $\mu \geq LS(\boldsymbol{K})$ y $\sigma < \mu^+$. Si M y M' son (μ, σ)-modelos límite sobre M_0, entonces existe $f : M \cong M'$ con $f \upharpoonright M_0 = id_{M_0}$.*

Vamos aprobar ahora la existencia de modelos límites bajo la propiedad de amalgamación y estabilidad.

Teorema 2.24. *Si $\boldsymbol{K}$ satisface la propiedad de amalgamación y es Galois estable en μ, entonces para cualquier $M \in \boldsymbol{K}_\mu$, existe $M^* \in \boldsymbol{K}_\mu$ tal que $M \preceq M^*$ y M^* es universal sobre M. Esto implica que cualquier $M \in \boldsymbol{K}_\mu$ y $\sigma < \mu^+$ existe $N \succeq$ el cual es (μ, σ)-límite.*

Demostración. Sea $\{M_i | i < \mu\} \subseteq \mathbf{K}_\mu$ tal que $M_0 = M$ y cualquier tipo de Galois sobre M_i es realizado en M_{i+1}. Para esto sea $\{p_i | i < \mu\}$ los tipos sobre M_i realizados en algún modelo de cardinal μ (son μ gracias a estabilidad), ahora sea M_{i+1} un modelo que realiza cada uno de los tipos p_i la construcción de M_{i+1} se puede hacer por inducción aplicando sucesivamente la propiedad de amalgamación.

Teniendo esto sea $M^* = \bigcup_{i<\mu} M_i$ vamos a probar ahora, que este modelo es universal sobre M.

Lema 2.25. *M^* es universal sobre M*

Demostración. Sea $N \succeq M$ vamos a construir una inmersión $f : N \hookrightarrow M^*$ tal que $f \restriction M = id_M$ fijamos $\{a_i | i < \mu\}$ una enumeración de $|N| \diagdown |M|$, por inducción en $i < \mu$ definimos cadenas crecientes y continuas $\{N_l^i | i < \mu, l = 0, 1\}$ y $\{f_i | i < \mu\}$ tales que:

1. $N_0^i \preceq N_1^i$
2. $N_0^0 = M, N_1^0 = N$
3. $a_i \in N_0^{i+1} \bigcap N_1^i$
4. $f_i : N_0^i \hookrightarrow M_i$

es claro que $\bigcup f_i \restriction N$ es como se requiere.

Para la construcción en los casos límites se toma la unión. En los sucesores consideramos dos casos:

1. Si $a_i \in N_0^i$. Sea $N_l^{i+1} = N_l^i$ $(l = 0, 1)$ y $f_{i+1} = f_i$.
2. Si por el contrario $a_i \notin N_0^i$; sea $M_0^i = f_i(N_0^i)$. Sea g una extensión de f_i tal que $g : N_1^i \cong \overline{M_1^i}$ en particular esto implica que $M_0^i \preceq M_1^i$.

   Por la propiedad de amalgamación existe M_1^i tal que $M_i \preceq M_1^i$ y existe $\bar{g} : \overline{M_1^i} \hookrightarrow M_1^i$ sobre M_0^i, como $a_i \in |N_1^i| \diagdown |N_0^i|$ entonces $g(a_i) \in |\overline{M_1^i}| \diagdown M_0^i$. Sea $p = ga - tp(\bar{g}(g(a_i)), M_i)$, p es un tipo realizado en M_{i+1} (por la construcción de M_{i+1}), sea b que realiza p, $b \in M_{i+1}$ se tiene entonces que $(M_i, M_1^i, \bar{g}(g(a_i)))E(M_i, M_{i+1}, b)$ por lo tanto cambiando nombres podemos suponer que existe $N^{**} \in \mathbf{K}_\mu$ y $h_1 : M_{i+1} \to N^{**}$ tales que $h_1 \restriction M_i = id_{M_i}$, $M_1^i \preceq N^{**}$ y $\bar{g}(g(a_i)) = h_1(b)$. Ahora, como N_1^i está inmerso en N^{**} por medio de $\bar{g} \circ g$ existe $\overline{N_1^{j+1}} \succeq N_1^i$ tal que existe $h \supseteq \bar{g} \circ g$ y $h : \overline{N_1^{j+1}} \cong N^{**}$. Sea $N_0^{i+1} = h^{-1}(h_1(M_{i+1}))$, como $\bar{g}(g(a_i)) = h_1(b)$ se tiene que $a_i \in N_0^{i+1}$, además $N_0^{i+1} \supseteq N_0^i$ porque si $a \in N_0^i$ entonces $g(a) \in M_0^i$, por lo tanto $\bar{g}(g(a)) \in \bar{g}(M_0^i) = M_0^i \subseteq M_i$, entonces tenemos que $h_1(\bar{g}(g(a))) = \bar{g}(g(a))$ y entonces $a = h^{-1}(h_1(b))$ con $b \in M_{i+1}$. Definimos $f_{i+1} = h^{-1} \circ (h \restriction N_0^{i+1})$. Esta función es una inmersión que extiende a f_i que satisface las condiciones requeridas.

□

Teniendo ya probado el lema solo basta por hacer una inducción para probar la segunda parte del teorema. □

Ahora vamos a definir las clases sobre las cuales vamos a probar el teorema de categoricidad ascendente.

Definición 2.26. *Sea χ un cardinal. Decimos que una clase elemental abstracta* $\boldsymbol{K}$ *con la propiedad de amalgamación es χ-dócil si para cualquier $M \in \boldsymbol{K}_{<\chi}$, $p \neq q \in ga - S(M)$ existe $N \preceq M$ tal que $p \upharpoonright N \neq q \upharpoonright N$.*

$\boldsymbol{K}$ es (μ, χ)-dócil si para cualquier $M \in \boldsymbol{K}_\mu$ y todo $p, q \in ga - S(M)$ siempre que $p \neq q$ existe $N \preceq M$ de cardinal χ tal que $p \upharpoonright N \neq q \upharpoonright N$

Definición 2.27. *Sea $M \in \boldsymbol{K}_\mu$ y $p \in ga - S(M)$. Decimos que p es minimal si y solo si p es no algebraico (no existe $c \in M$ que realice p) y para cualquier $M' \in \boldsymbol{K}_\mu$ con $M \preceq M'$ existe exactamente una extensión no algebraica de p a M'.*

Teorema 2.28 (Monotonía de tipos minimales). *Supongamos que $\boldsymbol{K}$ es (λ, χ)-dócil para algún $\lambda \geq \mu \geq \chi$. Si $p \in ga - S(M)$ es minimal con $M \in \boldsymbol{K}_\mu$, entonces para todo $N \in \boldsymbol{K}_{\geq\lambda}$ extendiendo a M y cualquier $q \in ga - S(N)$ extendiendo p, si q es no algebraico entonces es minimal.*

Demostración. Supongamos que p y q son como en el enunciado del teorema pero que q no es minimal, sean entonces $q', q'' \in ga - S(N')$ para algún N' en $\mathbf{K}_\lambda$ con $N \preceq N'$. Por docilidad podemos encontrar $M' \in \mathbf{K}_\mu$ tal que $M \preceq M' \preceq N'$ y $q' \upharpoonright M' \neq q'' \upharpoonright M'$ notese que $q' \upharpoonright M'$ y $q'' \upharpoonright M'$ son ambos extensiones no algebraicas de p. Esto es una contradicción con la minimalidad de p. □

Hecho 2.29. *Si $\boldsymbol{K}$ es galois estable en μ, entonces para cualquier $N \in \boldsymbol{K}_\mu$ y cualquier $q \in ga - S(N)$, existe $M \in \boldsymbol{K}_m u$ y $p \in ga - S(M)$ tal que $N \prec M$, p es extensión de q y p es minimal.*

Demostración. [Sh394] □

Hecho 2.30 (Extensión de tipos minimales). *Sea $\boldsymbol{K}$ categórica en algún $\lambda > LS(\boldsymbol{K})$ y (λ, χ)-dócil para algún $\chi < \lambda$. Sea μ tal que $LS(\boldsymbol{K}) < \mu < cf(\lambda)$. Si $p \in ga - S(M)$ es minimal y M es (μ, σ)-límite par algún ordinal límite $LS(\boldsymbol{K} < \sigma < \mu^+$, entonces para cualquier $M' \in \boldsymbol{K}_{\leq\lambda}$ extendiendo M, existe un $q \in ga - S(M')$ tal que q extiende p.*

Vamos a definir una cierta clase de tipos que nos van apermitir transferir pares de Vaught de un cardinal a otro, estos son tipos minimales que pueden 'controlar' su minimalidad.

Definición 2.31. *Sea $M \in \boldsymbol{K}_\mu$. Un tipo $p \in ga-S(M)$ es minimal enraizado si y solamente si p es minimal y existe $N \preceq M$ de cardinal $< \mu$ tal que $p \upharpoonright N$ es minimal. Decimos que N es una raiz de p.*

Teorema 2.32 (Existencia de tipos minimales enraizados). *Sea $\boldsymbol{K}$ categórica en algún $\lambda > \chi^+$ y (λ, χ)-dócil con $\chi \geq LS(\boldsymbol{K})$. Si $cf(\lambda) > LS(\boldsymbol{K})$ entonces para cualquier $M' \in \boldsymbol{K}_\lambda$, existe un tipo minimal enraizado $q \in ga - S(M)$.*

Teorema 2.33. *Suponga que $\boldsymbol{K}$ es χ-dócil. Sea $N \in \boldsymbol{K}_{\geq\chi}$. Si $p \in ga-S(M)$ es minimal enraizado con $N \preceq M$ un submodelo tal que $p \upharpoonright N$ es minimal, entonces para cualquier N' con $N \preceq N' \preceq M$ tenemos que $p \upharpoonright N'$ es minimal.*

Demostración. $p \upharpoonright N'$ es no algebraico, pues p no lo es y toda realización de p es realización de $p \upharpoonright N'$, ahora como $p \upharpoonright N'$ es no algebraico tenemos por la monotonía de tipos minimales que $p \upharpoonright N'$ es minimal □

2.5. Pares de Vaught

Vamos ahora a definir la noción de pares de Vaught que funciona en este contexto; es la generalización de la definición de primer orden pero con una pequeña variación.

Definición 2.34. *Sea $\mu \geq \lambda$. Fijamos $M \in \boldsymbol{K}_\mu$ y $p \in ga - S(M)$ un tipo minimal.*

Un par de modelos (N_0, N_1) se llaman un (p, λ)-par de Vaught si N_0 y N_1 son de cardinal λ, $M \preceq N_0 \precneqq N_1$ y no existe $c \in N_1 \setminus N_0$ realizando p

Hecho 2.35. *Asumimos que $\boldsymbol{K}$ es categórica en algún $\lambda^+ > LS(\boldsymbol{K})$. Entonces para cualquier modelo $M \in \boldsymbol{K}_{\leq\lambda}$ y cualquier tipo minimal $p \in ga - S(M)$, no existe (p, λ)-pares de Vaught.*

Demostración. Ver [Sh394] □

El siguiente teorema nos da una transferencia de pares de Vaught 'hacia abajo'.

Teorema 2.36. *Sea $\mu > LS(\boldsymbol{K})$. Sea p un tipo minimal enraizado sobre un modelo M de cardinal μ. Fijamos una raiz $N \preceq M$ de cardinal κ, con $p \restriction N$ minimal. Si $\boldsymbol{K}$ tiene un (p, μ)-par de Vaught, entonces existe un $(p \restriction N, \kappa)$-par de Vaught.*

Demostración. Supongamos que (N^0, N^1) son un (p, μ)-par de Vaught. Sea C el conjunto de todas las realizaciones de $p \restriction N$ en N^1. Sea $a \in |N^1| \setminus |N^0|$. Construimos ahora una cadena de pares de modelos $\{N_i^0, N_i^1 \in \mathbf{K}_\kappa | i < \omega\}$ que satisface lo siguiente:

1. $N_0^0 = N$
2. $N_i^0 \preceq N_i^1$
3. $N_i^l \precneqq N^l$ para $l = 0, 1$
4. Las sucesiones $\{N_i^l | i < \kappa^+\}$ son crecientes y continuas
5. $a \in N_i^1 \setminus N_i^0$
6. $C_i = C \bigcap N_i^1 \subseteq N_{i+1}^0$.

Para poder hacer esta construcción necesitamos un lema.

Lema 2.37. *Si $d \in N^1$ y realiza $p \restriction N_0^0$ entonces $d \in N^0$. Esto es $C \subseteq N^0$.*

Demostración. supongamos que $d \in N^1 \setminus N^0$. Entonces $ga-tp(d/N^0)$ es una extensión no algebraica de $p \restriction N_0^0$. Como $p \restriction N_0^0$ es minimal, tenemos que $ga-tp(d/M) = p$ (pues ambos son extensiones de $p \restriction N_0^0$). Pero como (N^0, N^1) forman un (p, μ)-par de Vaught se debe tener que $d \in N^0$, contradiciendo nuestra elección de d. □

Sea N_0^1 un submodelo de N^1 de tamaño κ que contenga a a y a N_0^0 (esto se logra gracias a LS). Supongamos ahora que tenemos construido $\{N_i^l | i < \alpha + 1\}$. Sea $N_{\alpha+1}^0$ un submodelo de N^0 de tamaño κ que contenga a N_α^0, y a $C \bigcap N_\alpha^1$, esto es posible gracias a el lema anterios pues $C \bigcap N_\alpha^1 \subseteq N^0$. Tomamos a $N_{alpha+1}^1$ un submodelo de N^1 de tamaño κ que contenga a N_α^1.

Veamos ahora que la construcción sirve para nuestro propósito, sea $N_\omega^l = \bigcup_{i<\omega} N_i^l$.

Lema 2.38. *Para cualquier $c \in N_\omega^1 \bigcap C$, tenemos que $c \in N_\omega^0$.*

Demostración. Como $\{N^1_i|i < \omega\}$ es continua, existe $i < \omega$ tal que $c \in N^1_i$. Entonces $c \in C_i$ (pues $c \in C$). Por la condición 5 de la construcción $c \in N^0_{i+1} \preceq N^0_{omega}$. □

Es claro que $N^0_\omega \neq N^1_\omega$ pues $a \in N^1_\omega \setminus N^0_\omega$. Ahora por el lema anterior toda realización de $p \restriction N$ en N^1_ω está en N^0_ω, por lo tanto como $N^0_\omega \precneqq N^1_\omega$, (N^0_ω, N^1_ω) son un $(p \restriction N, \kappa)$-par de Vaught. □

Corolario 2.39. *Sea $\lambda > LS(\boldsymbol{K})$. Si $\boldsymbol{K}$ es categórica en λ y λ^+ y p es un tipo minimal enraizado sobre un modelo de cardinal λ^+, entonces no existen (p, λ^+) pares de Vaught.*

Demostración. Supongamos (N_0, N_1) un (p, λ^+)-par de Vaught. Entonces como p es un tipo enraizado existe una raiz N', sea $N \succeq N'$ de cardinal λ, entonces $p \restriction N$ es minimal, por el teorema anterior existe un $(p \restriction N, \lambda)$-par de Vaught, esto contradice el hecho (2.35). □

Corolario 2.40. *Sea $\lambda > LS(\boldsymbol{K})$. Si $\boldsymbol{K}$ es categórica en λ y λ^+, entonces cualquier tipo minimal enraizado sobre un modelo N de cardinal λ^+ es realizado λ^{++}-veces en cualquier modelo de cardinal λ^{++} extendiendo a N.*

Demostración. Supongamos que $M \in \mathbf{K}_{\lambda^{++}}$ realiza p solamente $\alpha < \lambda^{++}$ veces. Sea $A := \{a_i|i < \alpha\}$ una enumeración de las realizaciones de p en M. Podemos encontrar $N_0 \in \mathbf{K}_{\lambda^+}$ tal que $N \bigcup A \subseteq N \preceq M$. Como M tiene cardinal λ^{++}, podemos encontrar $N_1 \in \mathbf{K}_{\lambda^+}$ tal que $N_0 \precneqq N_1 \preceq M$. Entonces (N_0, N_1) es un (p, λ^+)-par de Vaught, esto contradice el corolario anterior □

2.6. Categoricidad ascendente

En esta sección vamos a probar un teorema de transferencia de categoricidad hacia arriba en clases elementales abstractas dóciles, para ello vamos a seguir el trabajo hecho por R. Grossberg y M. VanDieren en [GrVa]

Teorema 2.41. *(test de saturación) Supongamos que $M_0 \in \boldsymbol{K}_\lambda$ y $r \in ga-S(M_0)$ un tipo minimal tal que $\boldsymbol{K}$ no tiene (r, λ)-pares de Vaught.*

Sea α un ordinal $< \lambda^+$ tal que $\alpha = \lambda \cdot \alpha$. Supongamos $M \in \boldsymbol{K}_\lambda$ tiene una resolución $\{M_i \in \boldsymbol{K}_\lambda | i < \alpha\}$ tal que para cualquier $i < \alpha$. Existe $c_i \in M_{i+1} \setminus M_i$ realizando r. Entonces M es saturado sobre M_0. Más aún si $\boldsymbol{K}$ es estable en λ, entonces M es un (λ, α) modelo límite.

Demostración. Sea $\{M_i | i < \alpha\}$ y r como en el enunciado del teorema. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la resolución es continua, pues si para algún ordinal límite δ se tuviera que $\bigcup_{i<\delta} M_i \neq M_\delta$ de todas maneras se tiene que $\bigcup_{i<\delta} M_i \preceq M_\delta$ y además debe existir $c \in M_delta \setminus \bigcup_{i<\delta} M_i$, si no fuera así tendríamos que $(M_\delta, \bigcup_{i<\delta} M_i)$ sería un (r, λ)-par de Vaught, por esto podemos suponer que la cadena es continua.

Sea $q \in ga - S(M_0)$. Vamos a probar que M realiza q construyendo un modelo M' que realiza q y una inmersión de M en M' resultará que esta inmersión es un isomorfismo.

Como $\alpha = \lambda \cdot \alpha$, podemos fijar una colección de conjuntos disyuntos $\{S_i | i < \alpha\}$ tales que $\alpha = \bigcup_{i<\alpha} S_i$, cada S_i es no acotado en α de tamaño λ y $Min(S_i) \geq i$, esto es posible gracias a que podemos tomar $S_i = \{i + \lambda \cdot \delta | \delta < \alpha$ y δ es ordinal límite$\}$.

Definimos por inducción en $i < \alpha$ dos secuencias de modelos $\{N'_i | i < \alpha\}$ y $\{M'_i | i < \alpha\}$ y una secuencia de $\mathbf{K}$-funciones $\{h_i | i < \alpha\}$. Adicionalmente, para $i < \alpha$ fijamos una secuencia $a_\gamma | \gamma \in S_i\}$. Estas construcciones deben satisfacer lo siguiente:

1. M'_0 realiza r y q.
2. $N'_i \preceq M'_i$.
3. $\{N'_i | i < \alpha\}$ y $\{M'_i | i < \alpha\}$ son secuencias crecientes y continuas de modelos en $\mathbf{K}_\lambda$.
4. $N'_0 = M_0$.
5. $\{a_\gamma | \gamma \in S_i\}$ es una enumeración de $\{a \in M'_i | a \models r\}$.
6. $a_i \in N'_{i+1}$
7. $h_i : M_i \cong N'_i$
8. $\{h_i | i < \alpha\}$ es creciente y continua con $h_0 = id_{M_0}$.
9. Cuando $\mathbf{K}$ es estable en λ, se requiere adicionalmente que M'_{i+1} sea universal sobre M'_i.

Veamos que esta construcción es posible.

Para $i = 0$, tomamos $N'_0 = M_0$ y sea M'_0 una extensión de M_0 de cardinal λ realizando r y q. Si es posible elegimos M'_0 como una extensión universal de M_0 de cardinal λ. Sea $h_0 = id_{M_0}$. Sea $\{a_\gamma | \gamma \in S_0\}$ alguna enumeración (posiblemente con repeticiones) de $\{a \in M'_0 | a \models r\}$.

Supongamos ya definidos N'_k, M'_k, h'_k y $\{a_\gamma | \gamma \in S_k\}$ para $k \leq j$. Sea a_j dado, notese que a_j ya había sido definido porque $j \in \bigcup_{i \leq j}$. Consideramos dos casos:

1. $a_j \in N'_j$. Como $M_i \cong N'_i$ podemos encontrar $\overline{M'_j} \succeq M_j$ tal que $M'_j \cong \overline{M'_j}$(Donde este isomorfismo extiende el isomorfismo entre M_i y N'_i), por la propiedad de amalgamación existe $\overline{M^*} \succeq \overline{M'_j}$ tal que existe una inmersión $f : M_{j+1} \hookrightarrow \overline{M^*}$ tal que $f \restriction M_j = id_{M_j}$, podemos tomar entoces M^* un modelo isomorfo a $\overline{M^*}$ tal que el isomorfismo g entre los dos extiende al isomorfismo entre $M'_j \cong \overline{M'_j}$. Ahora tomamos $h_{j+1} = g \circ f$ y $N'_{j+1} = h_{j+1}(M_{j+1})$. Sea M_{j+1} un modelo que contiene a M'_j y a N'_{j+1} de cardinal λ, si es posible elegimos M'_{j+1} universal sobre M'_j. Fijamos $\{a_\gamma | \gamma \in S_{j+1}\}$ alguna enumeración de $\{a \in M'_{j+1} | a \models r\}$.

2. $a_j \notin N'_j$. Sea $h = g \circ f$ como en el caso anterior. Como $a_j \notin N'_j$ se tiene que $a_j \in M'_j \setminus N'_j$. Tenemos entonces que $ga{-}tp(a_j, N'_j)$ es no algebraico. Vamos a comparar esta realización con la realización c_j de r en $M_{j+1} \setminus M_j$. No es difícil ver que $f(ga - tp(f(c_j), M_j) = ga - tp(f(c_j), N'_j)$ que es no algebraico. Como $h_0 = id - M_0$, tenemos que $ga - tp(f(c_j, N'_j)$ es una extensión de r. Por la minimalidad de r podemos concluir que $ga - tp(a_j, N'_j, M'_j) = ga - tp(f(c_j), N'_j)$. Debe existir entonces $f' \in Aut(\mathbb{M})$ tal que $f'(f(c_j)) = a_j$ y $f' \restriction N'_j = id_{N'_j}$, sea $M^{**} = f'(M^*)$. Sea $h_{j+1} = f' \circ f$ y $N'_{j+1} = h_{j+1} = (M_{j+1}$. Sea M'_{j+1} una extensión de M'_j de cardinal λ conteniendo N'_{j+1}. Si es posible, elegimos M'_{j+1} universal sobre M'_j. Fijamos $\{a_\gamma | \gamma \in S_{j+1}\}$ alguna enumeración de $\{a \in M'_{j+1} | a \models r\}$. Esto completa la construcción.

Sea $N' = \bigcup_{i<\alpha} N'_i$, $M' = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ y $h = \bigcup_{i<\alpha} h_i$. M' realiza q porque M'_0 lo realiza, además $h : M \cong N'$ con $h \restriction M_0 = id_{M_0}$. Vamos a probar que $N' = M'$ para poder concluir que M realiza q. Supongamos que no. Entonces $N' \precneqq M'$ y podemos elegir $a \in M' \setminus N'$. Como no existen (r, λ)-pares de Vaught, podemos elegir $a \models r$. Por definición de M', existe un $i < \alpha$ tal que $a \in M'_i$. Entonces $a = a_\gamma$ para algún $\gamma \in S_i$. Además tenemos $a = a_\gamma \in N'_{\gamma+1} \subseteq N'$. Esto contradice nuestra elección de a. $\square$

Teorema 2.42. *Supongamos que $\boldsymbol{K}$ tiene modelos arbitrariamente grandes, es χ-dócil y tiene la propiedad de amalgamación. Si $\lambda \geq \chi \geq LS(\boldsymbol{K})$ y $\boldsymbol{K}$ es categórica en λ y λ^+ entonces $\boldsymbol{K}$ es categórica en λ^{++}.*

Demostración. Vamos a probar que para cualquier $N \in \mathbf{K}_{\lambda^{++}}$ y cualquier $M \preceq N$ de cardinal λ^+, N realiza cualquier tipo sobre M. Sea $M \preceq N$ de cardinal λ^+, por el teorema de existencia de tipos minimales enraizados podemos asegurar que existe un tipo minimal enraizado $r \in ga - S(M)$.

Sea $\alpha < \lambda^{++}$ tal que $\alpha = \lambda^+ \cdot \alpha$. Por LS, podemos construir por LS una cadena creciente y continua de modelos $(M_i \preceq N | i < \alpha)$ tal que $M = M_0$ y para cualquier $i < \alpha$ podemos fijar $a_i \in M_{i+1} \setminus M_i$ realizando r, esto es posible porque por el corolario (2.40) el tipo r es realizado λ^{++}-veces en N. Por el teorema anterior tenemos que $\bigcup_{i<\alpha} M_i$ realiza cualquier tipo sobre M lo cual implica directamente que $\mathbf{K}$ es categórica en λ^{++}. $\square$

Ahora tenemos todas las herramientas necesarias para probar un teorema de transferencia de categoricidad hacia arriba.

Teorema 2.43. *(Transferencia de categoricidad) Suponga que $\boldsymbol{K}$ tiene modelos arbitrariamente grandes, con la propiedad de amalgamación y que es χ-dócil con $\chi \geq LS(\boldsymbol{K}) = \aleph_0$. Si $\boldsymbol{K}$ es categórica en λ y λ^+ con $\lambda \geq \chi$, entonces $\boldsymbol{K}$ es categórica en cualquier μ con $\lambda \leq \mu$.*

Demostración.

Definición 2.44. *Una CEA es κ-local si y solo si para cualquier cadena creciente y continua de tipos no algebraicos $(p_i|i < \kappa)$, existe un tipo no algebraico p tal que p extiende a p_i para cualquier $i < \kappa$.*

Lema 2.45. *Si $\boldsymbol{K}$ tiene la propiedad de amalgamación, entonces $\boldsymbol{K}$ es $\aleph_0$-local.*

Demostración. Sea a_i que realiza $p_i \in ga{-}S(M_i)$ por hipótesis, para cualquier $i < \omega$, debe existir f_i que fija M_{i-1} y envía a_i a a_{i-1}, definimos entonces g_i como $f_0 \circ \ldots \circ f_i$ entonces $g_i(a_i) = a_0$, g_i debe fijar M_0 y $g_i \restriction M_{i-1} = g_{i-1} \restriction M_{i-1}$. Sea $M_i' := g_i(M_i)$ y $M' = \bigcup M_i'$. Entonces $g = \bigcup_{i<\omega}(g_i \restriction M_i)$ es un isomorfismo entre $M = \bigcup M_i$ y M' por la modelo-homogeneidad de $\mathbb{M}$ existe un automorfismo h de $\mathbb{M}$ con $h \restriction M = g$. Sea $a = h^{-1}(a_0)$. Ahora $g_i^{-1} \circ h$ fija M_i y envía a en a_i para cualquier i. Con esto se completa la prueba. $\square$

Sea α tal que $\lambda = \aleph_\alpha$. Vamos a probar que $\mathbf{K}$ es categórica en $\aleph_\beta$ para todo $\beta \geq \alpha + 2$. El caso base es el teorema anterior. Para $\beta = \gamma + 2$, el teorema anterior y la hipótesis de inducción prueban que $\mathbf{K}$ es categórica en $\aleph_{\gamma+2}$.

Si β es un ordinal límite mayor que α, supongamos que $\mathbf{K}$ es categórica en cualquier μ con $\lambda \leq \mu \leq \aleph_\beta$. Vamos a probar que $\mathbf{K}$ es categórica en $\aleph_{\beta+1}$. Sea N de cardinal $\aleph_{\beta+1}$. Fijamos $M \preceq N$ de cardinal $\aleph_\beta$.

Hecho 2.46. *Existe un tipo minimal enraizado $r \in ga - S(M)$*

Demostración. Si $cf(\beta) = \omega$. Sea $(M_i|i < \omega)$ una resolución de M tal que $M_0 \in \mathbf{K}_{\geq\lambda}$ y $M_i \in \mathbf{K}_{<\aleph_\beta}$. Por el teorema de existencia de tipos minimales podemos encontrar $r_0 \in ga - S(M_0)$ minimal. Por la propiedad de densidad de tipos minimales podemos encontrar $r_i \in ga - S(M_i)$ minimal tal que r_{i+1} extiende a r_i. Por el lema anterior existe un tipo no algebraico $r \in ga - S(M)$ tal que r extiende a cada r_i. Como $\mathbf{K}$ es dócil por la monotonía tipos minimales r es minimal. r_0 testifica que r es enraizado. □

Sea $M' \in \mathbf{K}_\kappa$ con $\lambda \leq \kappa < \aleph_\beta$ una raiz de r. Suponga que existe un $(r, \aleph_\beta)$-par de Vaught entonces por el teorema (2.36), existe un $(r \restriction M', \kappa)$-par de Vaught, por la hipótesis de inducción tenemos que $\mathbf{K}$ es categórica en κ^+, entonces por el hecho (2.35) no existen $(r \restriction M', \kappa)$-pares de Vaught, lo cual implica que no existen $(r, \aleph_\beta)$-pares de Vaught.

Por el corolario (2.40) N realiza r $\aleph_{\beta+1}$-veces, por lo tanto podemos encontrar una resolución de N, $(M_i|i < \gamma)$ donde cada M_i tiene cardinal $\aleph_\beta$ tal que para cualquier $i < \gamma$ existe $c_i \in M_{i+1} \setminus M_i$ realizando r y γ es un ordinal límite $< \aleph_\beta$ satisfaciendo $\gamma = \aleph_\beta \cdot \gamma$. Ahora por el teorema (2.41) N realiza cualquier tipo sobre M.

Si β es un ordinal límite $> \alpha$, supongamos que $\mathbf{K}$ es categórica en todo $\aleph_\gamma$ para $\alpha \leq \gamma < \beta$. Para este caso es suficiente probar que cualquier mnodelo de cardinal $\aleph_\beta$ es Galois-saturado. Dado $N \in \mathbf{K}_{\aleph_\beta}$ y $M \preceq N$ un modelo de cardinal $\aleph_\gamma$ para algún $\gamma > \alpha$. Sea $p \in ga - S(M)$, podemos encontrar $N' \in \mathbf{K}_{\aleph_{\gamma+1}}$ tal que $M \preceq N' \preceq N$. Por la hipótesis de inducción N' es Galois-saturado y realiza p. Entonces N realiza p. □

Combinando resultados de [Sh394] con el teorema anterior se tiene:

Corolario 2.47. *Suponga que $\boldsymbol{K}$ es χ-dócil con amalgamación y JEP con $LS(\boldsymbol{K}) = \aleph_0$. Sea $\mu_0 = Hanf(\boldsymbol{K})$. Si $\chi \leq \beth_{(2^{\mu_0})^+}$ y $\boldsymbol{K}$ es categórica en algún $\lambda^+ > \beth_{(2^{\mu_0})^+}$ entonces $\boldsymbol{K}$ es categórica en μ para todo $\mu > \beth_{(2^{\mu_0})^+}$.*

Capítulo 3

Pares de Vaught en CATS

En este capítulo vamos a observar la noción de par de Vaught en un contexto diferente a los dos anteriores esto es en *CATS* (Compact Abstract Theories). Este es un contexto similar a primer orden solo que aquí no se tiene negación de fórmulas y no se puede hablar estrictamente de la unión de una cadena de modelos, esto hace que el trabajo modelo-teórico deba hacerse de una manera un poco diferente. Aún así los pares de Vaught 'sobreviven', y podrían ser importantes en el desarrollo de la teoría de modelos en CATS; posiblemente para el tratamiento del problema del número de modelos (en particular en transferir categoricidad) como lo ha sido en otros contextos.

3.1. CATS

Existen varias maneras de definir lo que son $CATS$. Si el lector desea conocerlas puede dirigirse a [Ben1]. En este trabajo vamos solamente a trabajar una de ellas, esta definición está formulada de manera similar a la de clase elmental abstracta, lo que nos permite empalmar con nuestro trabajo anterior.

Definición 3.1. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría concreta. Llamamos a sus objetos modelos, y a sus morfismos inmersiones elementales. Escribimos $M \preceq N$ si $M \subseteq N$ y la inclusión es un morfismo. $\mathcal{M}$ es una* categoría elemental con amalgamación *si satisface lo siguiente:*

- ***Inyectividad:*** *Todos los morfismos son inyectivos.*

- ***Propiedad de Tarski-Vaught:*** *Siempre que* $M_0 \subseteq M_1$ *y* $M_0 \preceq N$, $M_1 \preceq N$, *entonces* $M_0 \preceq M_1$.

- ***Propiedad de la cadena elemental:*** *Si una* $\preceq$*-cadena es acotada por* N_0 *y* N_1, *entonces existe* $p \in \mathcal{M}$ *y* $f_i \in Hom_{\mathcal{M}}(M, N_i)$ *que coniciden en* $\bigcup |M_i|$.

- ***Amalgamación:*** *Siempre que* $f_i \in Hom_{\mathcal{M}}(M, N_i)$ *para* $i < 2$, *existe* $P \in \mathcal{M}$ *y* $g_i \in Hom_{\mathcal{M}}(N_i, P)$ *tal que* $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$.

Definición 3.2. *Sea* $\mathcal{M}$ *una categoría elemental (con amalgamación). Para* $M_i \in \mathcal{M}$ *con* $i < 2$, *y tuplas (posiblemente infinitas)* $a_i \in M_i$, *escribimos* $(\bar{a}^1, A, N^1)E(\bar{a}^2, B, N^2)$ *si* $A = B$ *y existe* $N \in \mathcal{M}$, $A \subseteq N$ *y* $f_i \in Hom_{\mathcal{M}}(N^i, N)$ *tal que* $f_1(\bar{a}^1) = f_2(\bar{a}^2)$ *y* $f_0 \restriction A = id_A$. *De manera similar a como se hace en* $CEAS$ *se puede probar que esto es una relación de equivalencia. La clase* $S_\alpha(A) = \langle (a, A, N)/E : N \in \mathcal{M}, a \in N^\alpha \rangle$ *es la clase de los* α*-tipos sobre* A, *y* $S(A) = \bigcup S_\alpha(A)$. *Tambien escribimos* $tp(a, A, N) = (a, A, N)/E$, *llamado el tipo de* a *en* N *sobre* A.

Definición 3.3. *Una categoría elemental* $\mathcal{M}$ *tiene* JEP *(acorde con la terminologia de* $CEAS$*) o es conexa, si cualesquiera dos modelos en* $\mathcal{M}$ *pueden ser inmersos en un tercer modelo de* $\mathcal{M}$.

Definición 3.4. *Decimos que una categoría elemental es* compacta *si satisface:*

- ***Acotación de tipos:*** *Para todo* $n < \omega$. $S_n(\mathcal{M})$ *es un conjunto.*

- ***Localidad de tipos:*** *se tiene que* $tp(a) = tp(b)$ *si y solo si para cualquier subtupla finita* a' *de* a, $tp(a') = tp(b')$ *donde* b' *es la correspondiente subtupla de* b.

- ***Compacidad débil:*** *Asumimos que* x_I *es una tupla infinita,*$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(I)$ *y* $\Sigma(x_I) = \{p_J(x_J) : J \in \mathcal{I}\}$ *es un conjunto de tipos sobre* $\emptyset$ *en subtuplas de* I, *tal que para cualquier* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *existe* $M \in \mathcal{M}$ *y* $a_I \in M^I$ *que realiza* Σ_0. *Entonces existe* $M \in \mathcal{M}$ *y* $a_I \in M^I$ *que realiza* Σ.

Como se puede observar las categorías elementales son un contexto similar a las clases elementales abstractas, aunque con diferencias importantes. La primera pregunta que podemos hacernos es si el trabajo desarrollado para clases elementales abstractas tiene alguna traducción a CATS; más concretamente, ¿todo el trabajo de transferencia de Pares de Vaught bajo hipótesis de categoricidad y docilidad, tiene alguna manera de adaptarse a CATS?.

Definición 3.5. *Sean $\mathcal{M}$ una categoría elemental compacta $N_0, N_1 \in \mathcal{M}$, tal que $A \subseteq N_0 \precneqq N_1$ y $p \in S^\alpha(A)$ no realizado en A, tal que p es realizado infinitas veces en N_0 , si no existe $c \in N_1 \setminus N_0$ realizando p se dice que (N_0, N_1) es un (p)-par de Vaught*

Ejemplo 3.6. *Los espacios de Banach son $CATS$ (con isometrías como morfismos) (ver[Ben1]). Partiendo de este hecho podemos ver que no puede existir un par de Vaught contenido (es decir que los dos modelos sean subestructura) en $\mathbb{R}$ (con la norma usual), esto se tiene porque si existiera $p \in S(M)$ con $M \subseteq \mathbb{R}$ y (N_0, N_1) un (p)-par de Vaught, deberían existir infinitas realizaciones de p en N_0 (esto es implicado por el requerimiento en la definición para el tipo p), en particular sean a_0, a_1, a_2 realizaciones distintas del tipo p. Como los morfismos son las isometrías, se debe tener en particular que $\|a_0\| = \|a_1\| = \|a_2\|$ lo cual es imposible.*

Esta definición es una adaptación de la dada para clases elementales abstractas. Aunque en $CATS$ se pueden utilizar fórmulas (para estudiar este tratamiento puede consultarse [Ben1]) hemos definido pares de Vaught utilizando tipos y no fórmulas. Se ha hecho así creyendo que las ideas de ceas pueden ser en $CATS$ más fructíferas corto plazo (en este punto) que las de Baldwin-Lachlan (Baldwin-Lachlan es la aplicación más importante de los pares de Vaught en primer orden). Tenemos que aclarar que de todas maneras esta manera de definir no cambia mucho las cosas, pues existe un buen puente entre los tipos 'de Galois' y las fórmulas en $CATS$ (ver[Ben1]).

Teniendo ya una definición de par de Vaught en este contexto nuestro objetivo debe ser ponerla a funcionar, tratar de atacar un problema usando esta noción. El problema que posiblemente nos dará mejores indicios de la aplicabilidad de los pares de Vaught en $CATS$ es el problema de categoricidad. Grossberg denomina el problema del espectro de categoricidad como el problema 'test' sobre el progreso de la teoría de modelos en un contexto determinado.

La manera en la que los pares de Vaught han aportado al problema de categoricidad es que de alguna manera las clases de estructuras categóricas en algún cardinal no tienen pares de Vaught en algún intervalo de cardinales (en primer orden el intervalo son todos los cardinales y en ceas con amalgamación son los cardinales por debajo del cardinal de categoricidad). En el caso de primer orden la no existencia de pares de Vaught implica directamente la categoricidad en cualquier cardinal.

La idea entonces debería ser tratar de probar la no existencia de pares de Vaught a partir de la categoricidad en algún cardinal. Creemos que esta parte del problema no debería ser tan difícil de superar, pues si examinamos los dos contextos la prueba no requiere herramientas de estabilidad, solamente saturación y usa fuertemente el axioma de uniones (recuerde que en $CATS$ este axioma no se tiene). Pensamos que se puede sustituir el tomar uniones por tomar límites directos, aunque esto puede complicar las cosas pues no se conoce como se comporta saturación cuando se toman límites directos (no se ha explorado si el límite directo de una cadena de saturados es saturado).

Una segunda etapa sería utilizar el hecho de que no existen pares de Vaught para extender categoricidad (aunque sea parcialmente). Esta seguramente es una parte difícil debido a que no ahi un desarrollo de la teoría de estabilidad de $CATS$ (nociones de independencia, rangos, modelos de EM, etc.). Desearíamos tener un desarrollo de estas herramientas, posiblemente similar a [Sh394]; esto puede tardar, aunque ya se han dado los primeros pasos ([Ben2]) pero no exactamente hacia la dirección que hemos analizado aquí.

Bibliografía

[Ba1] John Baldwin. *Ehrenfeutch-Mostowski models in abstract elementary classes*, preprint.

[Ba2] John Baldwin. *Notes in a.e.c.*, preprint.

[B-L] John Baldwin and Alistair Lachlan. On strongly minimal sets. Journal of Symbolic Logic, 36, 79-96, 1971.

[Ben1] Itay Ben-Yaacov.*Positive Model Theory and Compact Abstract Theories*, Journal of Mathematical Logic 3(2003), 1, pp.85-118 .

[Ben2] Itay Ben-Yaacov.*Simplicity in compact abstract theories*, preprint

[CK] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory.* North Holland Publishing. Co., Amsterdam, 1990.

[Gr1] Rami Grossberg. *A course in model theory*, en preparación.

[Gr2] Rami Grossberg. *Classification theory for non elementary classes*, Logic and Algebra, ed. Yi Zhang, Contemporary Mathematics, 302, (2002) AMS, pp. 165-204.

[GrVa] Rami Grossberg and Monica VanDieren. *Upward categoricity transfer theorem for tame abstract elementary classes*, preprint.

[Ke] H. Jerome Keisler, *Model theory for infinitary logic.* North Holland, 1971

[Pi] A. Pillay, *Geometric Stability Theory.*

[Sh:c] Saharon Shelah. *Classification theory and the number of non isomorphic models*, Rev. Ed., North Holland, 705 páginas, 1990, Amsterdam.

[Sh87a,b] Saharon Shelah. *Classification theory for nonelementary classes*, I. The number of uncontable models of $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$. Part A y Part B. Israel Journal of Mathematicas., 46:212-273, 1983.

[Sh300] Saharon Shelah. *Universal classes, in Classification theory (Chicago, IL, 1985)*, volumen 1292 de Lecture Notes in Mathematics, páginas 264-418. Spinger-Verlag, Berlin 1987. Proceedings of the USA-Israel conference on Classifiaction theory, Chicago, Diciembre 1985; ed. Baldwin, J. T.

[Sh394] Saharon Shelah. *Categoricity for abstract elementary classes with amalgamation.* Annals of pure and applied logic, 98(1-3), pp.141-187,1999.