UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

# EN TORNO A CATEGORICIDAD Y ESTABILIDAD EN TEORIA DE MODELOS

Tesis de grado

Miguel Antonio Cardona Montoya

Director: Andrés Villaveces

# Contenido

# Capítulo 1

# ¿Por qué es interesante saber si algo es absoluto ?

## 1.1 Introducción

En este capítulo hablaremos de absolutez dando su respectiva definición y algunos resultados que nos llevan a estudiar si alguna teoría es absoluta en Matemáticas. Daremos una explicación en la cual se mostrará lo importante de averiguar si algo es absoluto en una rama de la Matemática; en particular mostraremos que algunas nociones básicas de teoría de modelos son absolutas; además discutiremos sobre absolutez en teoría de conjuntos y su importancia para conseguir algunos resultados de consistencia. Por último daremos a conocer una falla de absolutez en teoría de la medida.

### 1.1.1 Absolutez

**Definición 1.1.** *Sea $\phi$ una fórmula. Decimos que $\phi$ es absoluta (para $ZFC$) si $M \models \phi \longleftrightarrow N \models \phi$ para todo par de modelos transitivos $M, N \models ZFC$. Se dice que $\varphi$ es absoluta hacia abajo entre $N$ y $M$ si $N \subset M$ y $M \models \varphi \rightarrow N \models \varphi$. Se dice que $\varphi$ es absoluta hacia arriba entre $N$ y $M$ si $N \subseteq M$ y $N \models \varphi \rightarrow M \models \varphi$*

Es decir una fórmula se dice que es absoluta si tiene el mismo valor de verdad en cada unos de los modelos de $ZFC$. Las cuestiones acerca de absolutez son muy importantes en parte de la teoría de modelos y la teoría de conjuntos, campos en los que múltiples estructuras se consideran simultáneamente. En la teoría de modelos, algunos resultados básicos y definiciones están motivados por el carácter absoluto. En la teoría de conjuntos, la cuestión es conseguir propiedades absolutas de conjuntos que nos permitan obtener nuevos resultados.

La importancia de saber si algo es absoluto corresponde a estudiar qué tan dependiente del universo conjuntístico es la matemática, es decir o saber que no se depende tanto del modelo de $ZFC$ en el cual se está trabajando. Por ejemplo la condición de cadena contable *c.c.c* no es absoluta pues depende donde se trabaja, ya que si tenemos un modelo $M$ transitivo contable y $\mathbb{P} \in M$ es orden parcial entonces se tiene que bajo $V$, $\mathbb{P}$ es contable y de ahí se sigue que es *c.c.c* , pero trabajando dentro de $M$ uno puede construir un orden parcial $\mathbb{P}$ en el cual falla *c.c.c* .

Daremos una discusión interesante dada por [7], en la que se mostrará lo importante de saber que algo es absoluto, en este caso en teoría de modelos. Supongamos que tenemos una teoría contable $T$ de primer orden y además supongamos que $T$ es $\kappa$-categórica para $\kappa$ un cardinal infinito. Es decir que para cualquier par de modelos $M, N \models T$ de cardinaidad $\kappa$ existe un isomorfismo $f : M \to N$.

Ahora supongamos que esto ocurre dentro de $ZFC$. Si sucediera que podemos cambiar el modelo base de $ZFC$, por ejemplo restringiendo a los conjuntos construibles o si utilizamos forcing para generar nuevos conjuntos, la pregunta sería: ¿ qué sucederá con la $\kappa$ categoricidad de $T$.?
Bajo estas condiciones pueden suceder muchas cosas:

1. Se pueden perder los isomorfismos para un par de modelos de $T$ de cardinalidad $\kappa$,

2. Algunos modelos que son de cardinalidad $\kappa$ ya no tienen biyecciones con $\kappa$,

3. Pueden aparecer nuevos cardinales por debajo de $\kappa$ o incluso desaparecer cardinales por la introducción de nuevas biyecciones,

4. Algunos modelos digamos como $M$ o $N$ pueden desaparecer como conjunto dando lugar a un nuevo conjunto "$M$".

El no conocer la $\kappa$-categoricidad de $T$ es absoluta puede afectar dicha definición, por lo expuesto anteriormente, pero lo interesante es que la $\kappa$-categoricidad de $T$ si es absoluta, por lo tanto no puede suceder lo afirmado y perjudicar dicha definición.

Daremos unas definiciones que nos servirán para probar que algunas nociones de teoría de modelos son absolutas y nos permitirán concluir que la teoría de modelos de primer orden es absoluta.

**Definición 1.2.** ***(Jerarquía de Lévi)*** *Una fórmula es $\Sigma_n(X)$ si es de la forma*

$$\exists_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{x_3}...Q_{x_n}\psi(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$$

*donde para todo i $y_i \in X$ y todos los cuantificadores de $\psi$ son acotados y $Q$ es $\exists$ en caso de que $n$ es impar y $\forall$ si es par.*

- *Una fórmula es $\Pi_n(X)$ si es la negación de una fórmula $\Sigma_n(X)$.*
- *Una propiedad es $\Delta_n(X)$ si a la vez $\Sigma_n(X)$ y $\Pi_n(X)$.*

**Definición 1.3.** *Una fórmula es $\Sigma^1_n(y_1,..,y_n)$ si es de la forma*

$$\exists_{x_1\subseteq\omega}\forall_{x_2\subseteq\omega}\exists_{x_3\subseteq\omega}...Q_{x_n\subseteq\omega}\psi(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$$

*donde para todo i $y_i \subseteq \omega$ y todos los cuantificadores de $\psi$ son acotados y $Q$ es $\exists$ en caso de que $n$ es impar y $\forall$ si es par.*

- *Una fórmula $\boldsymbol{\Sigma^1_n}$ es $\Sigma^1_n(y_1,...,y_n)$ para algun $y_1,...,y_n \subseteq \omega$.*

- *Una fórmula es $\Pi^1_n(y_1,...,y_n)$ o $\boldsymbol{\Pi^1_n}$ si es la negación de $\Sigma^1_n(y_1,...,y_n)$ o $\boldsymbol{\Pi^1_n}$ respectivamente.*

- *Una fórmula es aritmética (en a) si es $\boldsymbol{\Sigma^1_0}$ ($\boldsymbol{\Sigma^1_0(a)}$.*

- *Una fórmula es proyectiva si es $\boldsymbol{\Sigma^1_n}$ o $\boldsymbol{\Pi^1_n}$.*

- *Una relación en $\omega^k \times (\omega^\omega)^l$ es $\Sigma^1_n(y_1,..,y_n)$, $\Pi^1_n(y_1,..,y_n)$,$\boldsymbol{\Sigma^1_n}$, $\boldsymbol{\Pi^1_n}$ aritmética o proyectiva si es expresable por alguna fórmula en las respectivas fórmulas.*

- *Una relación en $\omega^k \times (\omega^\omega)^l$ es $\Delta^1_n(y_1,..,y_n)$ o $\boldsymbol{\Delta^1_n}$ si es ambos $\Sigma^1_n(y_1,..,y_n)$ y $\Pi^1_n(y_1,..,y_n)$ o $\boldsymbol{\Sigma^1_n}$ y $\boldsymbol{\Pi^1_n}$*

**Teorema 1.4.** *(**Shoenfield**)Toda definición $\Sigma_2^1$ es absoluta para todo modelo $M$ transitivo de $ZF$ tal que $ON \subset M$.*

**Teorema 1.5.** *(**Levi**) Toda definición $\Pi_1^1$ es absoluta para todo modelo $M$ transitivo de $ZF$.*

**Lema 1.6.** *Sea $T$ una teoría completa de primer orden.*

1. *Sea $A$ un conjunto finito tal que $A \subset M$ con $M \models T$ entonces el predicado $p \in S(A)$ es una propiedad aritmética.*

2. *$S(A)$ es contable es una $\Pi_1^1$-predicado de $A$.*

***Demostración.*** En efecto, notemos que si $p \in S(A)$ sii para cada $\phi$ $L(B)$-foŕmula se tiene que $\phi \in p$ o $\neg\phi \in p$, pero esto último es un predicado $\Sigma_1^1$. Para la prueba de 2, primero demos unas definiciones que nos ayudarán a probar lo que queremos.

**Definición 1.7.** *$x \in \omega^\omega$ es hipergeométrico si $x \in \Delta_1^1$. $x$ es hipergeométrico en $y$ denotado como $x \leq_{hip} y$ si $x \in \Delta_1^1(y)$ Además tenemos el siguiente hecho.*

**Hecho 1.8.** *(**Lema de Harrington**)*

1. *El predicado $\{(x, y) : x \leq_{hip} y\}$ es $\Pi_1^1$*

2. *Si $K \subset \omega^\omega$ es $\Sigma_1^1$ entonces para cualquier $y$, $K$ contiene un elemento el cual no es hipergeométrico en $y$ sii $K$ contiene un subconjunto perfecto.*

Para la segunda parte la idea es caracterizar "$S(A)$ contable " de la siguiente forma, como $p \in S(A)$ es $\Sigma_1^1$ por lema de Harrigton cada $p$ es hipergeométrico en $A$ entonces:

$$\forall p(p \in S(A) \to (p \leq_{hip} A)) \text{ es } \Pi_1^1$$

□

**Teorema 1.9.** *Sea $T$ una teoría contable completa de primer orden. $T$ es $\omega$-estable es absoluta.*

***Demostración.*** $T$ es $\omega$-estable sii para cada conjunto finito, $S(A)$ es contable pero esto último es $\Pi_1^1$ □

**Teorema 1.10.** *Sea $T$ una teoría completa contable de primer orden con infinitos modelos. Entonces $T$ es $\aleph_0$-categórica es absoluta.*

***Demostración.*** Por teorema de Ryll-Nardzerwki, tenemos que $T$ es $\aleph_0$-categórica sii hay un número finito de fórmulas no equivalentes módulo $T$ sii para cada $n$ existe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tal que si $i \neq j$ $T$ no prueba que $\varphi_i \to \varphi_j$ y dada $\psi$ existe $j$ tal que $T$ prueba que $\psi \to \varphi_j$ y esto resulta ser predicado aritmético. $\square$

**Lema 1.11.** *Sea $T$ una teoría completa contable de primer orden con infinitos modelos. $T$ tiene pares de Vaught es absoluto.*

***Demostración.*** $T$ tiene Pares de Vaught sii existen modelos $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y para cada $\varphi$ $L(M)$-fórmula se tiene que

1. $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$
2. $\varphi(M)$ es infinito
3. $\varphi(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{N})$

pero esto es equivalente a un predicado $\Sigma^1_2$. $\square$

**Teorema 1.12.** *Sea $\kappa$ un cardinal no contable. La $\kappa$-categoricidad de $T$ es absoluta.*

***Demostración.*** Por el teorema de Baldwin-Lachlan tenemos que $T$ es $\kappa$-categórica sii $T$ es $\omega$-estable y no tiene pares de Vaught pero esto último es absoluto por tanto $T$ es $\kappa$-categórica es absoluta. $\square$

**Corolario 1.13.** *Sea $T$ una teoría contable completa de primer orden. $T$ es totalmente trascendente es absoluta.*

***Demostración.*** Se sigue del hecho de que $T$ es $\omega$-estable sii $T$ es totalmente trascendente. $\square$

En la teoría de conjuntos el tener absolutez no solo nos permite tener definiciones absolutas sino que nos ayuda al estudio de resultados de consistencia (como lo habíamos mencionado) para ciertos forcing ver [4], sabemos por teorema de Shoenfield que tenemos absolutez para $\Sigma^1_2$ o $\Pi^1_2$, pero para conjuntos de la forma $\Sigma^1_3$ no es cierto pues si agregamos reales de Cohen $L$ entonces la sentencia afirma que no existe un real construible que sea $\Sigma^1_3$ y que falla en $L$. Mejor dicho tenemos lo siguiente.

**Teorema 1.14.** *Supongamos que $\omega_1 = \omega_1^L$ entonces la $\Sigma^1_3$-absolutez falla para algún forcing que preserve $\omega_1$.*

En cambio el tener $\Sigma^1_3$-absolutez nos permite concluir que $\omega_1$ es inaccesible.

**Corolario 1.15.** *Si tenemos $\Sigma^1_3$-absolutez para forcing que preserve $\omega_1$ entonces $\omega_1$ es real inaccesible, es decir, para cada $a \subset \omega$ se tiene que $\omega_1 > \omega_1^{L[a]}$*

Los resultados previos se podrán restringuir a clases de forcing o incluso a semi-propio forcing el cual fue introducido por Shelah; al cambiar a clases de absolutez también juega un rol importante ayudando a obtener buenos resultados, por eso la importancia de tener absolutez.

**Teorema 1.16.** *Supongamos que $\Sigma^1_3$-absolutez es cierto para forcing propios o $\omega_1$ es inaccesible en $L$ o lo es $\omega_2$.*

Tenemos que $\Sigma^1_3$-absolutez falla para clases de forcing ya que tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.17.** *Supongamos que $M$ es un modelo de $ZFC$ entonces existe una clase genérica extensión $N$ de $M$ y una $\varphi$ es $\Sigma^1_3$ sentencia con parámetros reales de $M$ tal que $\varphi$ es cierto en $N$ y falso en $M$.*

Como estamos viendo aplicaciones de absolutez en pruebas de consistencia se tiene que es mejor $\Sigma^1_4$-absolutez que $\Sigma^1_3$-absolutez pues $\Sigma^1_4$-absolutez se tiene para Cohen forcing.

**Teorema 1.18.** *Supongamos que $\Sigma^1_4$-absolutez para forcing $\sigma$-centrado y $\omega_1$ es un real inaccesible entonces $\omega_1$ es un cardinal Mahlo en $L$.*

Por último mostremos otra aplicación de $\Sigma^1_4$-absolutez que mostrará la exsitencia de un cardinal débilmente compacto.

**Teorema 1.19.** *Lo siguiente es equivalente.*

1. *$\Sigma^1_4$-absolutez con respecto a extensiónes de forcing que tiene la c.c.c*
2. *Existe un cardinal débilmente compacto*

Bueno como ya hemos visto el tener absolutez es muy importante pues no solo se consigue mirar que tan absoluta es una definición sino que ayuda a probar resultados en el campo que se este trabajando caso particular en la teoría de conjuntos como acabamos de ver, pero no solo la absolutez tiene gran relevancia en teoría de modelos y conjuntos también hay resultados de absolutez en teoría de medida como veremos ahora. Por ejemplo hasta el momento sabemos que cada conjunto conjunto $\Sigma^1_1$ es Lebesgue Medible el cual cumple la propiedad de Baire, más aún si es infinito tenemos que no tiene un subconjunto perfecto, pero tenemos lo siguiente:

**Corolario 1.20.** *Si* $V = L$ *existe un conjunto* $\Sigma^1_2$ *el cual no es Lebesgue Medible y no tiene la propiedad de Baire.*

***Demostración.*** [1] $\square$

Más aún bajo $V = L$ podemos obtener mucho más.

**Corolario 1.21.** *Si* $V = L$ *existe un conjunto no contable* $\Sigma^1_2$ *sin un subconjunto perfecto.*

***Demostración.*** [1] $\square$

# Capítulo 2

# Una dicotomía en Teoría de Modelos

## 2.1 Introducción

En este capítulo vamos a trabajar en el contexto de Clases Elementales Abstractas (CEA), las cuales fueron introducidas por Shelah como una generalización de la clase de modelos de una teoría de primer orden. Se ha podido observar a través de los años que las CEA poseen un equilibrio entre la generalidad y manejabilidad; son lo suficientemente generales para capturar ejemplos. Pero además tienen una teoría de modelos que permite generalizar muchas de las herramientas utilizadas en primer orden; es por eso que las CEA son un contexto bastante trabajado en la actualidad. En este orden de ideas, usamos en este capítulo nociones de teoría combinatoriía de conjuntos (ejemplo como diamantes débiles, axioma de Martin), donde el uso de diamantes débiles será esencial para probar los teoremas estructurales que expondremos, pero encontraste tenemos que que bajo el axioma de Martin tenemos el opuesto del teorema.

### 2.1.1 Preliminares

**Definición 2.1.** *Sea $L$ un lenguaje . Decimos que $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ es una clase elemental abstracta si $\mathcal{K}$ es una clase de $L$-estruturas ordenadas parcialmente por $\prec_{\mathcal{K}}$ cumpliendo las siguientes condiciones*

*A0 $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ es cerrado bajo isomorfismos*

*A1 Para $M, N \in \mathcal{K}$ si $M \prec_{\mathcal{K}} N$ entonces $M \subseteq N$*

*A2 Sea* $M, N, M^* \in L(\mathcal{K})$*.Si* $M \subseteq N$ *,*$M \prec_{\mathcal{K}} M^*$ *entones* $M \subseteq N$

*A3 (Löwenheim-Skolem) Existe un cardinal* $LS(\mathcal{K}) \geq \aleph_0$ *tal que para todo* $M \in \mathcal{K}$ *y* $A \subseteq |M|$*, existe* $N \in \mathcal{K}$ *tal que* $N \prec_{\mathcal{K}} M$ *,* $A \subseteq |N|$ *y* $\|N\| \leq |A| + LS(\mathcal{K})$*.*

*A4 (Cadena de Tarski-Vaught)*

*(a)Para cada cardinal* $\mu$ *y cada* $N \in \mathcal{K}$ *si* $\{M_i \prec N : i < \mu\} \subseteq \mathcal{K}$ *es* $\prec_{\mathcal{K}}$*-creciente entones* $\bigcup_{i<\mu} M_i \in \mathcal{K}$ *y* $\bigcup_{i<\mu} M_i \prec_{\mathcal{K}} N$

*(b)Para cada cardinal regular* $\mu$ $\{M_i : i < \mu\} \subseteq \mathcal{K}$ *es* $\prec_{\mathcal{K}}$*-creciente entones* $\bigcup_{i<\mu} M_i \in \mathcal{K}$ *y* $M_0 \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} M_i$

**Ejemplo 2.2.** 1. *Sea* $T$ *una teoría y definamos que* $\mathcal{K}_T := Mod(T)$ *con* $M \prec N$ *sii* $M$*es submodulo elemental de* $N$ *entones* $\langle \mathcal{K}, \subseteq \rangle$ *es una CEA*

2. *i* $\mathcal{K}_T := Mod(T)$ *para una teoía de primer orden en el lenguaje* $L$ *y* $M \prec N$ *sii* $M$ *es subestructura elemental de* $N$ *entonces* $\langle \mathcal{K}, <_{\mathcal{K}} \rangle$*es una CEA.*

3. *Modelos de* $\exists\forall$ *-teoría de primer orden con* $\prec_{\mathcal{K}}$ *como subestructura es una CEA.*

4. *La clase de todos los grupos solubles con* $\prec_{\mathcal{K}}$ *la relación de subgrupo es una CEA*

5. *La clase de todos los grupos libres con* $\prec_{\mathcal{K}}$ *la relación de subgrupo es una CEA.*

6. *Si* $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$ *donde* $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega,\omega_1}$ *y* $\prec$ *como la relación de submodelo elemental con respecto al fragmento contable que contiene a* $\varphi$ *entonces* $\langle \mathcal{K}, \prec \rangle$ *es una CEA.*

7. *Si* $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$ *donde* $\varphi \in \mathcal{L}_{\kappa^+,\omega}$ *donde* $\prec$ *como la relación de submodelo elemental con respecto al fragmento que contiene* $\varphi$ *entonces* $\langle \mathcal{K}, \prec \rangle$ *es una CEA.*

**Definición 2.3.** *Sea* $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$*. El número de Skolem de* $\mathcal{K}$ *es denotado por* $L(\mathcal{K})$*. Si existe un cardinal* $\lambda$ *tal que para cada* $M \in \mathcal{K}$ *y cada* $A \subset |M|$ *existe un* $N \in \mathcal{K}$ *y cada* $A \subset |N|$ *tal que* $M \prec_{\mathcal{K}} N$ *y* $||N|| < \lambda + |A|$

**Definición 2.4.** *Sea* $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ *una clase elemental abstracta y* $\lambda \leq L(\mathcal{K})$*. Decimos que* $\mathcal{K}$ *es* $\lambda$*-categórica sii todos los elementos de* $\mathcal{K}_\lambda$ *son isomorfos. Donde* $\mathcal{K}_\lambda = \{M \in \mathcal{K} : ||M|| = \lambda\}$*.*

**Definición 2.5.** *Sea $\mathcal{K}$ una clase elemental abstracta y $\lambda > \aleph_0 + LS(\mathcal{K})$.*

*Decimos que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de $\lambda$-amalgamación si para cada $M_l \in \mathcal{K}$ de cardinalidad $\lambda$(para $l = 0, 1, 2$) y cada $f_l : M_0 \to M_l$ ($l = 1, 2$) $\mathcal{K}$-embebimientos entonces existe $N \in \mathcal{K}$ de cardinalidad $\lambda$ y $g_l : M_l \to N$ $\mathcal{K}$-embebimientos tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "g_1"] & N \\ M_o \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & M_2 \arrow[u, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

**Definición 2.6.** *Para $M, N \in \mathcal{K}$ un monomorfismo $f : M \to N$ es llamado $\mathcal{K}$-embebimiento sii $f[M] \prec_{\mathcal{K}} N$. Denotaremos esto por $f : M \hookrightarrow N$.*

**Definición 2.7.** *Una estrutura $M \in \mathcal{K}_\nu$ es llamado un modelo universal sii para cada $N \in \mathcal{K}_\nu$ existe un $\mathcal{K}$-embebimiento de $N$ en $M$.*

**Teorema 2.8.** ***(Existencia de resolución)****Sea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ una clase elemental abstracta y $\lambda > L(\mathcal{K}) + \aleph_0$. Para cada $M \in \mathcal{K}$ de cardinal $\lambda$ existe $\{M_i \prec_{\mathcal{K}} M : i < \lambda\}$ tal que:*

1. *$i < j \to M_i \prec_{\mathcal{K}} M_j$,*
2. *Si $i$ es límite $\to M_i = \bigcup_{j<i} M_j$ y*
3. *$M = \bigcup_{i<\lambda} M_i$*

***Demostración.*** [8] $\square$

### 2.1.2 Principio Combinatorio

Daremos algunos definiciones y resultados que nos serán útiles más adelante en la prueba de los teoremas centrales.

**Definición 2.9** (Devlin-Shelah diamantes débiles)**.** *Sea $k < \omega$ y $S \subset \lambda$ un conjunto estacionario.El principio $\Phi^2_{\lambda^+}(S)$, es cierto sii para toda función*

*$F :^{<\lambda^+} 2^\lambda \to k$ existe una función $g : \lambda^+ \to k$ tal que para toda $f : \lambda^+ \to 2$ el conjunto $\{\delta \in C : F(f \restriction \delta) = g(\delta)\}$ es estacionario.*

**Definición 2.10.** *$\Theta_{\lambda^+}$ es cierto sii para todo $\{f_\eta : \lambda^+ \to 2^\lambda : \eta \in {}^{\lambda^+}2\}$ y para todo $C \subset \lambda^+$ estacionario, existe $\eta \neq \nu \in^{\lambda^+} 2$ y $\delta \in C$ tal que $f_\eta \restriction \delta = f_\nu \restriction \delta$ y $\eta[\delta] \neq \nu[\delta]$.*

**Hecho 2.11.** *Sea $S \subset \lambda^+$ es un conjunto estacionario $1 < k < \omega$ y además supongamos que $\Phi^2_{\lambda^+}(S)$ es cierto entoneces.*

*Para todo entero positivo $n$*

*y cada $F : \underbrace{{}^{<\lambda^+}2^\lambda \times \cdots \times {}^{<\lambda^+}2^\lambda}_{n\ veces} \to k$ existe una función $g : \lambda^+ \to k$ y para toda $f_1, ..., f_n : \lambda^+ \to 2^\lambda$ el conjunto $\{\delta \in C : F(f_1, ..., f_n \upharpoonright \delta) = g(\delta)\}$ es estacionario.*

**Hecho 2.12.** *Si $\Phi^2_{\lambda^+}$ es cierto entonces $\Theta_{\lambda^+}$ también lo es.*

***Demostración.*** Supongamos que tenemos los siguientes conjuntos $\{f_\eta : \lambda^+ \to 2^\lambda : \eta \in^{\lambda^+} 2\}$ y $C \subset \lambda^+$ estacionario.

Para cada $\alpha < \lambda$,$\eta \in^\alpha 2$, y $h : \alpha \to 2$, definamos la siguiente función

$$F(\eta, h) := \begin{cases} 0 & \text{Si } \exists \eta \in^{\lambda^+>} 2, \\ 1 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Luego por hipótesis y por el hecho 2.11 existe $g : \lambda^+ \to 2$ tal que para todo $\eta : \lambda^+ \to 2$ y $h : \lambda^+ \to 2$ el conjunto $\{\delta \in S : F(\eta \upharpoonright \delta, h \upharpoonright \delta) = g(\delta)\}$ es estacionario.

Definamos $\eta[\delta] := 1 - g(\delta)$ para todo $\alpha < \lambda^+$. Y consideremos el caso $h = f_\eta$. Como el conjunto $\{\delta \in S : F(\eta \upharpoonright \delta, h \upharpoonright \delta) = g(\delta)\}$ es estacionario entonces tomemos $\delta \in C$ tal que $F(\eta \upharpoonright \delta, h \upharpoonright \delta) = g(\delta)$ $(*)$.

Ahora consideremos dos posibles valores de $g(\delta)$.

Caso 1: si $g(\delta) = 0$. Luego por $(*)$ y la definición de $F$ tenemos que $F(\eta \upharpoonright \delta, h \upharpoonright \delta) = 0$ es decir existe $\nu \in^{\lambda^+} 2$ tal que $\nu > \eta \upharpoonright \delta$, $f_\eta \upharpoonright \delta = f_\nu \upharpoonright \delta$, y $\nu[\delta] = 0$. Por otro tenemos que $\eta[\delta] = 1$ pues $\eta[\delta] = 1 - g(\delta) = 1 - 0 = 1$, por lo tanto $\delta, \nu, \eta$ son lo requeridos .

Caso 2: si $g(\delta) = 1$. Entonces $\eta[\delta] = 0$ $(**)$ esto por la definición de $\eta$ y $g(\delta) = 1$, evaluemos $F(\eta \upharpoonright \delta, f_\eta \upharpoonright \delta)$: como $\eta > \eta \upharpoonright \delta$ y $f_\eta \upharpoonright \delta \subset f_\eta$ y además $\eta[\delta] = 0$. Entonces por la definición de $F$ tenemos que $F(\eta \upharpoonright \delta, f_\eta \upharpoonright \delta) = 0$. Lo cual resulta que $g(\delta) = 0$ Absurdo puesto que contradice lo que supusimos. □

**Hecho 2.13** (Devlin-Shelah)**.** $2^\lambda < 2^{\lambda^+} \leftrightarrow \Phi^2_{\lambda^+}$

**Definición 2.14.** *Sea $\lambda \geqslant \nu \geqslant \aleph_0$, $P$ un conjuntos de cardinal $\lambda$, $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de $P$. Decimos que $\mathcal{F}$ es $(\delta, \nu)$ estocasticamente independiente si y solo si para cada par disjunto $J_1, J_2$ de cardinalidad $< \nu$ se tiene que :*
$|\bigcap_{i \in J_1} A_i \cap \bigcap_{j \in J_2} A_j| = \lambda$

### 2.1.3 Teoremas estructurales en Clases Elementales Abstractas

La demostración del próximo teorema hace uso del principio combinatorio del diamante débil el cual expusimos en la seción anterior(equivalente a la hipótesis de GCH débil $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$). Los diamantes débiles nos permiten construir para este caso árboles binarios de modelos que se pueden tomar incompatibles pues en ellos se tiene que falla la propiedad de amalgamación.

**Teorema 2.15.** *Supongamos que $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$ . Además supongamos que $\mathcal{K}$ es una CEA en la cual falla la propiedad de $\lambda$-amalgamación . Si $I(\lambda, \mathcal{K}) = 1$ y $\lambda \geqslant LS(\mathcal{K})$ entonces $I(\lambda^+, \mathcal{K}) = 2^{\lambda^+}$*

***Demostración.*** Primero notemos que $\mathcal{K}_{\lambda^+} \neq \emptyset$ pues $I(\lambda, \mathcal{K}) = 1$ y en $\mathcal{K}$ falla La propiedad de $\lambda$-amalgamación.
La idea es construir un árbol binario de altura $\lambda^+$ de modelos $M_\rho$ para $\rho \in^{\lambda^+>} 2$ esto es posible usando por$\lambda$-categoricidad y la tripleta $N_0, N_1$ y $N_2 \in \mathcal{K}_\lambda$ que se pueden amalgamar. Constrayamos dicha familia de la siguiente manera para $\rho \in^{\lambda^+>} 2$ se define la familia $M_\rho \in \mathcal{K}_\lambda$ tal que cumpla lo siguiente:

1. $\nu < \eta \rightarrow M_\nu \prec_{\mathcal{K}} M_\eta$,
2. Cuando $l(\rho)$ es un ordinal límite , $M_\rho = \bigcup_{\alpha < l(\rho)} M_{\rho \upharpoonright \alpha}$,
3. Dada una tripleta $M_{\rho \frown 0}, M_{\rho \frown 1}, M_\rho$ no es amalgamable,
4. $|M_\rho| = \lambda$ y además dom$M_\rho = \lambda(1 + l(\rho))$

Dividamos la prueba en dos casos en uno se presenta una falla GLOBAL de amalgamación y en el otro una falla DEBIL amalgamación.

CASO 1 Para esto caso supongamos que existe $N \prec M$ de modo que para cualquier $M^*$ extendiendo $M$ en $\mathcal{K}$ , existe un par $M^0$ y $M^1$ extendiendo $M^*$ de modo que no puedan ser amalgamados sobre $N$.
A las condiciones $1-4$ añadimos lo siguiente $M_{\langle\rangle} := N$ y modificamos la

condición 4 por:

$4^*.M_{\rho\frown 0}$ y $M_{\rho\frown 1}$ no pueden ser amalgamados en $N$.

Para $\eta \in^{\lambda^+} 2$, definamos $M_\eta = \bigcup_{\alpha<\lambda^+} M_{\eta\restriction\alpha}$

HECHO 1.1 Para $\eta \neq \nu \in^{\lambda^+} 2$ probemos que $\langle M_\eta, a\rangle_{a\in|N|} \ncong \langle M_\nu, a\rangle_{a\in|N|}$
Pero podría pasar que bajo el CASO A y para $\eta \in^{\lambda^+} 2$ se puede tener $M_\eta \approx M_\nu$ es decir el isomorfismo no fija la prolongación $N$.
En efecto supongamos que $\eta \neq \nu$ y que existe $f : \langle M_\eta, a\rangle_{a\in|N|} \cong \langle M_\nu, a\rangle_{a\in|N|}$
Sea $\alpha < \lambda_+$ tal que $\eta \restriction \alpha = \nu \restriction \alpha, \eta[\alpha] = 0$ y $\nu[\alpha] = 1$
Denotemos por $\rho := \eta \restriction \alpha$, luego ya que $f[M_{\rho\frown 0}] := M^* \prec M_\nu$, $M^* \succ M_\rho$ y $f \restriction N = N$ se tiene entonces que el modelo $M^*$ es un amalgaman de $M_{\rho\frown 0}$ y $M_{\rho\frown 1}$ sobre $N$, pero esto es una contradicción de la condición 4.
Lo anterior probado será esencial para lo que sigue.

Supongamos que $\mu := (\lambda^+, \mathcal{K}) < 2^{\lambda^+}$. Tomemos una familia $\{M_i : i < \mu\}$ completa de isomorfismo representativa de $\mathcal{K}_{\lambda^+}$.

Notemos además que $|\{\langle M_\eta, a\rangle_{a\in|N|} / \cong: \eta \in^{\lambda^+} 2\}| \leq |\{\langle M_i, a\rangle_{a\in|N|} : i < \mu, |M_i| = \lambda^+\}| \leq \mu \|M_i\|^\lambda = \mu(\lambda^+)^\lambda = \mu\lambda^+ 2^\lambda = \mu 2^\lambda < 2^{\lambda^+}$, esta última desigualdad es cierta por la hipótesis de $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$. Pero esto contradice el hecho 1.1 .

CASO 2. Para este caso negemos el CASO 1, es decir para todo $M, N$ con $N \prec M \in \mathcal{K}_\lambda$ existe un $M^1$ extendiendo $M$ de modo que para cualquier extensión $M_0$ y $M_1$ de $M^1$, $M_0$ y $M_1$ no pueden ser amalgamados sobre $N$.
Modifiquemos 4, y reemplacemos por:

$(4)^*$. Si $M^0$ y $M^1$ son extensiones de $M_{\rho\frown 0}$ y $M_{\rho\frown 1}$, $M_{\rho\frown 0}$, $M^0$ y $M^1$ pueden ser amalgamados.

Llevando a cabo la contrucción en sucesores podemos definir a $M_{\rho\frown 1}$ y $M_{\rho\frown 0}$ de $M_\rho$.
Luego aplicamos $\lambda$-categoricidad para fijar un isomorfismo $f : M_\rho \cong N_0$(no amalgamables de la tripleta que se eligió al principio).

Usando $N_1, N_2$ podemos armar ciertas estructuras $M^*$ y $M^{**}$ extensiones $M_\rho$ las cuales no pueden ser amalgamables sobre $M_\rho$.

Por la hipótesis del CASO 2, podemos tomar $M_{\rho^\frown 0}$ como una extensión de $M^*$ asi para cualquier extesión de $M_{\rho^\frown 0}$ puede ser amalgamados sobre $M_\rho$. Tomamos $M_{\rho^\frown 1}$ similarmente para $M^{**}$.

Ahora definamos $C := \{\delta < \lambda^+ : \delta = \lambda(1+\delta)\}$ el cual es un club.
Por Ulam existe $\{S_\gamma \subseteq C : \gamma < \lambda^+\}$ un conjunto estacionario tal que $\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow S_{\gamma_1} \bigcap S_{\gamma_2}$ y para todo $\gamma < \lambda^+$ tenemos que $\Phi_{\lambda^+}(S_\gamma)$ es cierto.
Para todo $\delta < \lambda^+$ tal que $\delta = \lambda(1+\delta)$, $h : \delta \to \delta$ y para $\eta, \nu \in^\delta 2$
Definamos la siguiente función:

$$f(\eta,\nu,h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h : M_\eta \hookrightarrow M_\nu, \\ & M_{\nu^\frown 0} \text{ y } M_{\eta^\frown 0} \text{ se pueden amalgamar sobre } M_\eta \\ & \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Por $\Phi_{\lambda^+}(S_\gamma)$ podemos escoger una $g_\gamma : \lambda^+ \to 2$ tal que para todo $\eta, \nu \in {}^{\lambda^+}2$ y cada $h : \lambda^+ \to \lambda^+$tenemos ahora que

$S'_\gamma := \{\delta \in S_\gamma : F(\eta \restriction \delta, \nu \restriction \delta, h \restriction \delta) = g_\gamma(\delta)\}$ es estacionario.

Luego para cada $X \subseteq \lambda^+$ y cada $\delta < \lambda^+$ definamos una función $\eta_X : \lambda^+ \to 2$ de la siguiente manera

$$\eta_X[\delta] := \begin{cases} g_\gamma(\delta) & \text{si} \quad \delta \in S_\gamma \wedge \delta \in X \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

HECHO 2.1. Probemos ahora que para $X \neq Y \subseteq \lambda^+$ se tiene que $M_{\eta_X} \cong M_{\eta_Y}$

En efecto supongamos que $X \neq Y \subset \lambda^+$, además que $h : M_{\eta_X} \hookrightarrow M_{\eta_Y}$. Luego para cada $\gamma < \lambda^+$ podemos aplicar $\Phi_{\lambda^+}(S_\gamma)$ a $\eta_X, \nu_Y$ y $h : \lambda^+ \to \lambda^+$(pues $dom(M_{\eta_X}) = dom(M_{\eta_Y}) = \lambda^+$) y obtenemos $g_\gamma : \lambda^+ \to 2$ y $S'_\gamma \subset S_\gamma$ estacionario donde $S'_\gamma := \{\delta \in S_\gamma : F(\eta_X \restriction \delta, \nu_Y \restriction \delta, h \restriction \delta) = g_\gamma(\delta)\}$.

Definamos ahora $D := \{\delta < \lambda^+ : (h \restriction \delta) : \delta \to \delta\}$ el cual es club.

Ahora para $\gamma < \lambda^+$ definamos $S''_\gamma := S'_\gamma \cap D$, sin perdida de generalidad existe $\gamma \in X - Y$. Tomemos entonces $\delta \in S''_\gamma$.
Para facilitar el trabajo denotemos $\eta := \eta_X \restriction \delta$ y $\nu := \eta_Y \restriction \delta$. Luego como $\gamma \notin Y$ por la definicion de la secuencia $\eta_Y$ tenemos que $\eta_Y[\delta] = 0$, además $\nu \lessdot \hat{\nu}0 \lessdot \nu_Y$.

Ahora consideremos el valor de $\eta_X[\delta]$, pero para este solo existen dos posibilidades:

1. Si $\eta_X[\delta] = 1$, entoces por definicion de $\eta_X[\delta]$ tenemos que $\eta_X[\delta] = g_\gamma(\delta)$, luego como $\delta \in S'_\gamma$ tenemos que $F(\eta, \nu, h) = 1$. Pero por la definicion de $F$ conseguimos que $M_{\hat{\eta}0}$ y $M_{\hat{\nu}1}$ pueden ser amalgamados sobre $M_\eta$. Entonces podemos fijar $M^1$ un amalgama , $f$ y $g$ funciones tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_{\nu^\frown 0} \arrow[r, "g"] & M^1 \\ M_\eta \arrow[u, "id"] \arrow[r, "h"'] & M_{\nu^\frown 0} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Luego como $\hat{\eta}1 \lessdot \eta_X, \hat{\nu}0 \lessdot \eta_Y$ y por la hipotesis de $h : M_{\eta_X} \to M_{\eta_Y}$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M_{\eta^\frown 1} \arrow[r, "h \restriction M_{\eta^\frown 1}"] & M_{\eta_Y} \\ M_\eta \arrow[u, "id"] \arrow[r, "h"'] & M_{\hat{\nu}0} \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

Como $|M_{\eta_Y}| = \lambda^+$ entonces por Löwenheim-Skolem existe $M^2 \prec_{\mathcal{K}} M_{\eta_Y}$ de cardinal $\lambda$ tal que $h(M_{\eta^\frown 1})$ y $M_{\nu^\frown 0} \prec_{\mathcal{K}} M^2$.

Por tanto se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M_{\eta^\frown 1} \arrow[r, "h"] & M^2 \\ M_\eta \arrow[u, "id"] \arrow[r, "h"'] & M_{\hat{\nu}0} \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

Además tenemos que

$$\begin{tikzcd}
M^1 & \\
M_{\nu^\frown 0} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & M^2
\end{tikzcd}$$

Luego por la condición $(4)^*$ existe $M^3 \in \mathcal{K}_\lambda$ y $\mathcal{K}$-embebimientos $e_l : M^l \to M^3$(para $l = 1, 2$) tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M^1 \arrow[r, "e_1"] & M^3 \\
M_\nu \arrow[u, "f"] \arrow[r, "id"'] & M^2 \arrow[u, "e_2"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si combinamos $(*)_1, (*)_2$ y $(*)_3$ obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_{\eta^\frown 0} \arrow[r, "g"] & M^1 \arrow[r, "e_l"] & M^3 \\
M_\eta \arrow[u, "id"] \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "id"] & M_\nu \arrow[u, "f"] \arrow[r, "id"'] & M^2 \arrow[u, "e_2"'] \\
M_{\eta^\frown 1} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

De ahí tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_{\eta^\frown 1} \arrow[r, "h \circ e_2"] & M^3 \\
M_\eta \arrow[u, "id"] \arrow[r, "id"'] & M_{\eta^\frown 0} \arrow[u, "g \circ e_1"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, lo cual es una contradicción pues contradice $(4)^*$.

2. Si $\eta_X[\delta] = 0$ debemos tener que $\eta \frown 0 \lessdot \eta_X$. Ademas como $h : M_{\eta_X} \hookrightarrow M_{\eta_Y}$ conseguimos que $M_{\eta_Y}$ es un amalgama de $M_{\eta\frown 0}$ y $M_{\nu\frown 0}$ sobre $M_\eta$ y por definicionde $F$ tenemos que $F(\eta, \nu, h \restriction \delta) = 1$. Como $\delta \in S_\gamma$ se tiene que $g_\gamma(\delta) = 1$ lo cual por la definición de $\eta_X$ da que $\eta_X[\delta] = 1$ y esto contradice que lo asumimos.

□

**Teorema 2.16.** *Supongamos que $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$ . Además supongamos que $\mathcal{K}$ es una CEA en la cual falla la propiedad de $\lambda$-amalgamación . Si $I(\lambda, \mathcal{K}) = 1$ y $\lambda \geqslant LS(\mathcal{K})$ entonces $\mathcal{K}_{\lambda^+}$ no tiene la propiedad universal.*

***Demostración.*** Supongamos que $\mathcal{K}$ es una CEA en la cual falla la propiedad de $\lambda$-amalgamación entonces podemos tomar $N_0, N_1, N_2 \in \mathcal{K}_\lambda$ que no son amalgamados . El objetivo es contruir un arbol binario de altura $\lambda^+$ de modelos $M_\rho$ $\rho \in^{\lambda^+>} 2$ esto es posible por $\lambda$-categoricidad y $N_0, N_1, N_2 \in \mathcal{K}_\lambda$, contruyamos la familia de la $\mathcal{K}_\lambda$ la siguiente manera.

Para $\rho \in^{\lambda^+>} 2$ definamos una familia $M_\rho \in \mathcal{K}_\lambda$ asi tenemos que :

1. $\nu < \eta \to M_\nu \prec_{\mathcal{K}} M_\eta$,
2. cuando $l(\rho)$ es un ordinal límite , $M_\rho = \bigcup_{\alpha < l(\rho)} M_{\rho\restriction\alpha}$ ,
3. Dada una tripleta $M_{\rho\frown 0}, M_{\rho\frown 1}, M_\rho$ no es amalgamable,
4. $|M_\rho| = \lambda$ y además dom$M_\rho = \lambda(1 + l(\rho))$.

Ahora supongamos por reducción al absurdo que $M \in \mathcal{K}_{\lambda^+}$ es un modelo universal , podemos suponer que $|M| = \lambda$. Luego para cada $\eta \in^{\lambda^+} 2$ y como $M$ es universal entonces existe un $\mathcal{K}$-embebimiento $f_\eta : M_\eta \to M$.

Por otro lado consideremos el siguiente conjunto $C := \{\delta < \lambda^+ : \delta = \lambda(1 + \delta)\}$ el cual es un club.

Tenemos que $\Theta_{\lambda^+}$ es cierto por teorema 5 y corolario 4.

Por $\Theta_{\lambda^+}$ existe $\eta \neq \nu \in^{\lambda^+} 2$ y $\delta \in C$ como en la definicion $\Theta_{\lambda^+}$. Denotemos por $\rho$ el mayor segmento inicial común de $\eta$ y $\nu$ el cual es $\eta \restriction \delta$. Se tiene que $\eta \neq \nu \in^{\lambda^+} 2$ entonces $\eta[\delta] \neq \nu[\delta]$ por lo tanto podemos asumir que $\eta[\delta] = 0$ y $\nu[\delta] = 1$, sabemos existen funciones $f_\eta : M_\eta \to M$ y $f_\nu : M_\nu \to M$ y como $\eta[\delta] = 0$ y $\nu[\delta] = 1$ podemos considerar $f_\eta : M_{\rho\frown 0} \to M$ y $f_\nu : M_{\rho\frown 1} \to M$ los cuales son embebimientos , luego podemos encontrar

$M^* \prec_{\mathcal{K}} M$ de cardinal $\lambda$ conteniendo $f_\eta[\rho \frown 0] \cup f_\nu[\rho \frown 1]$ esto es por Löwenheim-Skolem .

Luego consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_{\rho\frown 0} & \xrightarrow{f_\eta} & M^* \\ {\scriptstyle id}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f_\nu} \\ M_\rho & \xrightarrow[id]{} & M_{\nu\frown 1} \end{array}$$

el cual es conmutativo y lo cual contradice la condición 4.

□

### 2.1.4 Nociones de Forcing

Daremos unas definiciones básicas que son utilizadas cuando se comienza el estudio de Forcing, mas aún veremos una primera noción de Forcing cuando trabajamos el axioma de Martin.

**Definición 2.17.** *$D \subset \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ sii para todo $p \in P$ existe $d \in D$ tal que $d \leq p$*

**Definición 2.18.** *Sea $\langle \mathbb{P}, < \rangle$ un orden parcial. Una cadena en $\mathbb{P}$ es subconjunto en $C \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$*

- *$p$ y $q$ son compatibles sii $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$*
- *Decimos que $p$ y $q$ son imcompatibles $p \perp q$ sii $\neg\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$*
- *Una anticadena en $\mathbb{P}$ es subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$*

**Definición 2.19.** *Un orden parcial en $\mathbb{P}$ tiene la condición de cadena contable sii toda anticadena en $\mathbb{P}$ es contable.*

**Definición 2.20.** *$G$ es un filtro si:*

- *Para todo $a, b \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq a, b$*
- *Para todo $q \in G$ y $p \in \mathbb{P}$, si $p \leq q \rightarrow q \in G$*

**Definición 2.21.** *(**Axioma de Martin**)$AM(\kappa)$ dice que dado un orden parcial $\mathbb{P}$ no vacío que satisface la c.c.c y $\mathcal{D}$ familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P} < \kappa$ existe un filtro en $G$ en $\mathbb{P}$ tal que $\forall D \in \mathcal{D}(D \cap G \neq 0)$.*

**Definición 2.22.** *$G \subset \mathbb{P}$ es un $\mathbb{P}$-génerico si $G$ es un filtro y para todo $D \subset \mathbb{P}$, $D \in M \to D \cap G \neq \phi$*

**Lema 2.23.** *Si $I, , J \in M$, $I$ es infinito, $J \neq O$ y $G$ es un $\mathbb{P} := Fn(I, J)$-génerico sobre $M$ entonces $\bigcup G$ es una función de $I$ en $J$*

**Definición 2.24.** *Una familia $a_\zeta$ es llamado un $\Delta$-sistema sii existe un conjunto $r$, llamado raiz del $\Delta$-sistema tal que $a \cap b = r$ para cualquier elementos $a$ y $b$ de $a_\zeta$*

**Teorema 2.25.** *(**Lema de $\mathbf{\Delta}$-sistema**) Dados conjuntos finitos $a_\zeta$ para $\zeta < \omega_1$ existe un conjunto $S \subseteq \omega_1$ no contable tal que $\{a_\zeta : \zeta \in S\}$ forma un $\Delta$-sistema.*

### 2.1.5 Grafo Aleatorio $\mathcal{K}_{ind2}$

El grafo Aleatorio $\mathcal{K}_{ind2}$ más conocio como la gráfica bi-partita es una clase elemental abstracta axiomatizada en $L(Q)$, la cual cumple las siguientes propiedades:

1. Es categórica en $\aleph_0$
2. $LS(\mathcal{K}_{ind2}) = \aleph_0$
3. Falla la propiedad de amalgamación para $\mathcal{K}_{ind2}$
4. $\mathcal{K}_{\aleph_1} \neq \phi$

Y por tanto si en $V$ vale $MA_{\aleph_1}$ se tiene entonces que $MA_{\aleph_1} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1 \Rightarrow I(\aleph_1, \mathcal{K}_{ind2}) = 1$. Esto sucede pues el cálculo del número de espectros no es absoluto, depende del modelo de $ZFC$ donde calcule.

Demos una descripción del grafo Aleatorio $\mathcal{K}_{ind2}$, primero $L(\mathcal{K}_{ind2}) = \{P, Q, E\}$ donde $P$ y $Q$ son predicados y $E$ es un predicado binario. Entonces $M \in \mathcal{K}_{ind2}$ si $M = \langle |M|, P^M, Q^M, E^M \rangle$ y además

1. $P^M$ tiene cardinalidad $\lambda$
2. $M = P^M \cup Q^M$ , $E^M \subseteq P^M \times Q^M$ y $P^M \cap Q^M = \phi$.
3. Además sea $A_y^M := \{x \in P^M : xE^My\} \subseteq P^M$ ; mas la siguiente condición : que la familia $\mathcal{F} := \{A_b^M : b \in Q\}$ es estocasticamente independiente.

4. Dados $A, B \subseteq P^M$ conjuntos disjuntos vamos a denotar a

$$\Gamma^M_{A,B} := \{y, \in Q^M : aE^M y \forall a \in A, bE^M y \forall b \in B\}$$

Más la siguiente condición que para cualquier $A, B$ subconjuntos de $P^M$ de cardinalidad $< \mu$ se tiene que $|\Gamma^M_{A,B}| = \|M\|$

Luego para modelos $M, N \in \mathcal{K}_{ind2}$. Definamos $M \prec N$ sii $P^M = P^N$, $Q^M \subseteq Q^N$ y $E^M \subseteq E^N$.
En $\mathcal{K}$ definimos una segunda relación $\prec^*$ como sigue $M \prec^* N$ sii $M \prec N$ y $|\Gamma^N_{A,B} - \Gamma^M_{A,B}| \geqslant \lambda$ para todo conjuntos dijuntos $A, B \subseteq P^M$ tal que $|A| + |B| < \mu$

**Nota 2.26.** *Para cualquier $M \in \mathcal{K}_{ind2}$ satisface el axioma de extencionalidad: pues dados $b_1 \neq b_2 \in Q^M$ por ser estocasticamente independiente podemos encontrar $A^M_{b_1} \cap P - A^M_{b_2}$ tiene cardinalidad $\lambda$ asi en particular existe $a \in P^M$ tal que $M \models aE^M b_1 \wedge \neg[aE^M b_2]$. Además si $M \in \mathcal{K}_{ind2}$ entonces $\lambda \leqslant \|M\| \leqslant 2^\lambda$*

**Lema 2.27.** *$\mathcal{K}_{ind2}$ es categórica en $\aleph_0$*

***Demostración.*** Supongamos $M, N \in \mathcal{K}_{\aleph_0}$, luego fijemos $|N| = \{c_i : i < \omega\}$ y $\{d_i : i < \omega\} = |M|$. la idea es definir $\{f_i : i < \omega\}$ isomorfismos parciales de $M$ en $N$ tal que $|f_i| < \omega$ y para cada $i < \omega$ existe $j(i) < \omega$ tal que $c_i \in domf_{j(i)}$ y $d_i \in ranf_{j(i)}$.
Continuemos la prueba por indución sobre $i$: para $i = 0$ definamos $f := \phi$
Para $i > 0$ existen dos posibilidades:
$i$ es par. Sea $f_{i-1} := \bigcup_{j<i} f_j$ y definamos $\alpha := min\{\alpha < \lambda : c_\alpha \notin domf_{i-1}\}$.
Caso A $c_\alpha \in P^M$. Definamos
$\{b_\gamma : \gamma < \beta < \lambda\} = domf_{i-1} \cap Q^M$ y $\gamma_1 \leqslant \beta$
tal que
$M \models c_\alpha E b_\zeta$ para todo $\zeta < \gamma$ y $M \models \neg[c_\alpha E \zeta]$ para todo $\zeta \geq \gamma_1$
Como $f_{i-1}$ es inyectiva se tiene que $\zeta_1 \neq \zeta_2 \Rightarrow f_{i-1}(\zeta_1) \neq f_{i-1}(\zeta_2)$. Por la hipótesis de la independencia podemos conseguir que
$\bigcap_{\zeta<\gamma} A^N_{f_{i-1}(b_\zeta)} \cap \bigcap_{\gamma_1 \leqslant < \beta} (P^M - A^N_{f_{i-1}(b_\zeta)})$ $(*)$ es un subconjunto de $P^M$ de cardinalidad $\aleph_0$.
Ya que el rango de $f_{i-1}$ tiene cardinalidad $< \aleph_0$ existe un elemento de $(*)$ tal que $a \notin$ range $f_{i-1}$
Sea $f_i := f_{i-1} \cup \{\langle c_\alpha, \alpha \rangle\}$
Caso B $c_\alpha \in Q^M$. Definamos
$\{a_\gamma : \gamma < \beta < \lambda\} = domf_{i-1} \cap P^M$ y $\gamma_1 \leqslant \beta$

tal que
$M \models a_\zeta E c_\zeta$ para todo $\zeta < \gamma$ y $M \models \neg[c_\alpha E_\alpha]$ para todo $\zeta \geq \gamma_1$
Y como $f_{i-1}$ es inyectiva se tiene que los conjuntos
$A := \{f_{i-1}(\zeta) : \zeta < \gamma_1$ y $B := \{f_{i-1}(\zeta) : \zeta \geq \gamma_1$ son disjuntos.
Como $|\Gamma^N_{A,B}| = \aleph_0$ existe $b \notin \Gamma^N_{A,B} - ranf_{i-1}$. Por tanto definamos $f_i := f_{i-1} \cup \{\langle c_\alpha, \alpha\rangle\}$.
Si $i$ es impar. Sea $f_{i-1} := \bigcup_{j<i} f_i$ y $\alpha := min\{d_\alpha \notin domf_{i-1}\}$. Y repetimos el armumento previo para $f^{-1}$ y encontramos $f_i$ una extensión de $f_{i-1}$ tal que $d_\alpha \in ranf_i$. Esto verifica que $\bigcup_{i<\omega} f_i : M \cong N$ □

**Lema 2.28.** *Falla la propiedad de amalgamación para* $\mathcal{K}_{ind2}$

***Demostración.*** Sea $M_0 \prec^* M_1 \in \mathcal{K}_{\aleph_0}$, luego fijemos $b \in Q^{M_1} - Q^{M_0}$
Definamos $M_2$ de la siguiente manera, su universo será el de $|M_1|$, además $P^{M_2} = P^{M_0}$ y $Q^{M_2} = Q^{M_1}$. Y definamos su relación $E^{M_2}$ de la siguiente manera:

$$aE^{M_2}b := \begin{cases} \mathrm{aE}^{M_1}c & \text{si } b \neq c \\ \neg[aE^{M_1}b] & \text{otros casos} \end{cases}$$

Continuando supongamos por contradición que $M$ es una amalgama de $M_1$ y $M_2$ sobre $M_0$, luego existe un embebimiento $f : M_1 \to M$, además podemos asumir que $M_2 \prec M$. Supongamos ahora que $a \in A^{M_1}_b$ entonces $M_1 \models [aEb]$ y por $f$ resulta que $M \models [f(a)Ef(b)]$. Luego como $f \restriction P = Id_P$ se tiene entonces que $M \models [aEf(b)]$, por como esta definida $E^{M_2}$ resulta que $a \notin A^M_b$. Como $\mathcal{K}_{ind2}$ satiface el axioma de extencionalidad entonces $f(b) \neq b$. Acá el punto clave es como $\{A^M_c : c \in Q^M\}$ es estocasticamente independiente entonces $A^M_b \cap A^M_{f(b)}$ tienen cardinal $\omega$ pero esto contradice la forma de como se estableció la disjunción entre ellos. □

Ahora ya estamos listos para probar $MA_{\aleph_1} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1 \Rightarrow I(\aleph_1, \mathcal{K}_{ind2}) = 1$.

***Demostración.*** Supongamos que $M, N \in \mathcal{K}_{\aleph_1}$.Renombremos los elementos del universo $N$ tal que $|M| \cap |N| = \phi$. Luego fijemos $\{M_i : i < \omega\}$ y $\{N_i : i < \omega\}$ ambas $\prec^*$-crecientes y resoluciones continuas de $M$ y $N$ tal que $P^{M_0} = P^M$ y $P^{N_0} = p^N$. Esto es posible pues $\langle \mathcal{K}, \prec^*\rangle$ satiface el axioma de LS y el primer axioma de unión de cadenas de longitud $< \lambda^+$.
Consideremos $\mathbb{P} := \{$f un isomosfismo parcial finito de M en N : $\forall a \in M \forall i < \omega \in domf[a \in M_i \leftrightarrow f(a) \in N_i]\}$.
El objetivo ahora es probar que $\mathbb{P}$ es conjunto parcialmente ordenado, con la relación $\subseteq$.
Tal que para conjuntos densos
$D_a := \{f \in \mathbb{P} : a \in domf\}$, para $a \in M$

$D_a^* := \{f \in \mathbb{P} : a \in ranf\}$, para $a \in N$ en $\mathbb{P}$
Si tenemos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un $\mathbb{P}$-génerico para $\{D_a : a \in M\} \cup \{D_a^* : a \in N\}$ entonces $\cup G : M \cong N$.(esto último lo podemos concluir el Axioma de Martin)

**Hecho 2.29.** *$D_a$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ para todo $a \in M$*

***Demostración.*** Supongamos que $f \in \mathbb{P}$ y $a \in M$. ahora consideremos $\alpha := min\{\alpha < \omega_1 : a \in M_\alpha\}$, luego por la continuidad de la cadena tenemos que $\alpha = 0$ de $\alpha = \beta + 1$ para cualquier ordinal $\beta$.
Sea $B$ y $C$ subconjuntos finitos del $domf$ tal que
$B \cup C = domf$ y $B \subseteq P^M$ , $C \subseteq Q^N$.
Si $a \in P^M$. Definamos
$p_a := \{xEc : c \in C \wedge M \models [aEc]\} \cup \{xEc : c \in C \wedge M \models \neg[aEc]\}$.
Como $\{A_{f(c)} : c \in C\}$ es estocasticamente independiente existe $a^{'} \in P^N$ satisfaciendo $f(p_\alpha)$ y $a^{'} \notin ranf$. Tomando $h := f \cup \langle a, a^{'}\rangle$ se tiene que $h \in \mathbb{P}$.
Por otro lado supongamos que $a \in Q^M$. Consideremos
$q_a := \{bEx : b \in B \wedge M \models [bEa]\} \cup \{bEx : b \in B \wedge M \models \neg[bEa]\}$.
Sea $A_1 := \{f(b) : M \models bEa\}$ y $A_2 := \{f(b) : M \models \neg[bEa]\}$. Donde $A_1$ y $A_2$ son subconjuntos finitos disjuntos de $P^{N_\alpha}$.
Luego para estos conjuntos disjuntos tenemos que $|\Gamma^N_{A_1,A_2}| = \aleph_1$ entonces existe un $a^{'} \in \Gamma^N_{A_1,A_2}$ satisfaciendo $f(q_a)$ tal que $a^{'} \in ranf$. Y tomando $h := f \cup \langle a, a^{'}\rangle$ se tiene que $h \in \mathbb{P}$.

□

**Hecho 2.30.** *$\mathbb{P}$ satisface la condición de cadena contable.*

***Demostración.*** Sea $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq P$ .
Denotemos por $A_\alpha := domf_\alpha \cup ranf_\alpha$. Consideremos $\mathcal{F} := \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.
Aplicando el lema de $\Delta$-sistema existe una familia no contable $S \subseteq \omega_1$ y un conjunto finito $K$ tal que $\alpha \neq \beta \in S \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = K$.
Sea $X$ y $Y$ subconjuntos de $K$ tal que $X \cup Y = K$, $X \subseteq |M|$ y $Y \subseteq |N|$.
Para este $K$ puede suceder dos casos:
Si $K = \phi$ entonces $f_\beta \cup f_\alpha \in \mathbb{P}$ para cualquier $\alpha \neq \beta \in S$.
Para $K \neq \phi$ es encantrar $\alpha \neq \beta \in S$ tal que $f_\beta \cup f_\alpha \in \mathbb{P}$ .
Sin perdida de generalidad supongamos que $X \neq \phi$.

**Lema 2.31.** *El conjunto $S_x := \{\alpha \in S : f_\alpha(x) \notin Y\}$ es a lo sumo contable para cada $x \in X$.*

***Demostración.*** Supongamos que existe $x \in X$ tal que $S_x$ es no contable. Sea $i_x := min\{i \in \omega_1 : x \in M_i\}$. Como $i_x$ es el mínimo entonces pertenece al conjunto por tanto se tiene que $f_\alpha(x) \in N_{i_x}$ para cada $\alpha \in S$. Luego aplicando el principio de Palomar existe un conjunto no contable $S^* \subseteq S_x$ y $y \in N_{i_x} - Y$ tal que $\alpha \in S^* \Rightarrow f_\alpha(x) = y$. Además podemos conseguir que $\alpha \in S^* \Rightarrow ranf \supseteq K \cup y$, por ser $M$ y $N$ disjuntos se tiene que $\alpha \neq \beta \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta \supsetneq K$ lo cual contradice la elección de $K$. □

El objetivo ahora es aplicar el lema anterior al $|X|$ para encontrar $S^{'} \subseteq S$ no contable tal que $\alpha \in S^{'} \Rightarrow f_\alpha \restriction X : X \to Y$. Como el número de funciones $X$ en $Y$ es finito existe $\alpha \neq \beta \in S^{'}$ tal que $f_\alpha \restriction X = f_\alpha \restriction Y$. Pero como $domf_\alpha \cap ranf_\alpha = X$ se tiene que $f_\beta \cup f_\alpha \in P$ .

□

□

### 2.1.6 Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue mostrar la importancia del estudio de absolutez y sus consecuencias en diferentes ramas de la Matemática. Además se probó que la $\kappa$-categoricidad de una teoría $T$ es absoluta, para ello tuvimos que ver que ciertas definiciones básicas de teoría de modelos son absolutas, por tanto podemos concluir que la teoría de modelos no tiene problemas en primer orden. Pero cuando salimos de primer orden y trabajamos en clases elementales abstractas encontramos que una falla de absolutez, es decir que cuando no trabajamos en primer orden se puede depender mucho del modelo de $ZFC$ donde se trabaje.

### 2.1.7 Nuevas direcciones

Como vimos en este trabajo la condición esencial para obtener el teorema

**Teorema 2.32.** *Supongamos que $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$ . Además supongamos que $\mathcal{K}$ es una CEA en la cual falla la propiedad de $\lambda$-amalgamación . Si $I(\lambda, \mathcal{K}) = 1$ y $\lambda \geqslant LS(\mathcal{K})$ entonces $I(\lambda^+, \mathcal{K}) = 2^{\lambda^+}$*

Era la hipótesis de diamantes débiles la cual era implicada por $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$ la pregunta que surge ¿será qué esta hipótesis puede ser removida por una hipótesis de un cardinal fuertemente compacto (o débilmente compacto).?

Por otro lado mostramos que $MA_{\aleph_1} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1 \Rightarrow I(\aleph_1, \mathcal{K}_{ind2}) = 1$. La pregunta que surge después de haber estudiado este fenómeno es, que pasa para grafo aleatorio $\mathcal{K}_{ind2}$ si tenemos que :

1. Es categórica en $\aleph_1$
2. $LS(\mathcal{K}_{ind2}) = \aleph_1$
3. Falla la propiedad de amalgamación para $\mathcal{K}_{ind2}$ en $\aleph_1$
4. $\mathcal{K}_{\aleph_2} \neq \phi$

¿Qué pasará con $I(\aleph_2, \mathcal{K}_{ind2}) =?$ será que podemos definir un axioma de Martin que permita que $I(\aleph_2, \mathcal{K}_{ind2}) = 1$? ya que el falla en este caso.

# Bibliografía


[1] Jech, Thomas, *The Third Millennium Edition,revised and expanded. Set theory.*

[2] Baldwin, John T. , *Categoricity, Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Illinois at Chicago*

[3] Baldwin, John T. ,*Amalgamation, Absoluteness, and Categoricity,Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Illinois at Chicago*

[4] Joan Bagaria , y D Friedman, *Generic Absoluteness*

[5] Katrin Tent y Martin Ziegler , *A Course in Model Theory, Munster and Freiburg 2010*

[6] Kunen, Kenneth , *Set theory and introduction to independence proofs*, North-Holland.

[7] Grossberg, Rami, *A Course in Model Theory I, en preparación.*

[8] Grossberg, Rami,*Classification theory for abstract elementary classes*

[9] Pietro KC. *How does categoricity interact with the underlying set theory.?*