Algunos teoremas de no-estructura para teorías no clasificables

Miguel Francisco Jara Moreno

Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.C. 2006

Resumen

Una teoría T se dice *clasificable* si es superestable y no tiene ni la DOP ni la OTOP. Por otro lado, decimos que T tiene una *teoría de estructura* si el tipo de isomorfismo de sus modelos es capturable por parámetros . Pero, ¿qué relación existe entre teorías clasificables y teorías que tienen una teoría de estructura? ¿y entre teorías no-clasificables y teorías con teoremas de no estructura? Los siguientes resultados buscan dar respuesta a este par de interrogantes, utlizando para las demostraciones técnicas sofisticadas cuya exposición es a su vez, uno de los objetivos generales del trabajo.

1. Introducción

Como se sabe, es de gran utilidad poder determinar invariantes que caractericen el tipo de isomorfismo de las estructuras en algún contexto. Ejemplos de tales invariantes se utilizan a menudo: La dimensión en espacios vectoriales sobre los reales, el cardinal en conjuntos sin estructura, etc. Otros ejemplos, aunque de diferente tipo, son: el grupo de funciones de un espacio topológico en los reales, el primer grupo de homotopía en espacios topológicos, etc. El conocimiento de invariantes, además de permitir la resolución práctica de problemas, devela gran parte del comportamiento de los modelos de una teoría y así, facilita el paso intuitivo necesario para plantear preguntas nuevas. Pero encontrar invariantes no es fácil, puede que en algunos casos imposible. Pero claro, tener invariantes no es el único camino para obtener información sobre la clase de modelos de una teoría. Shelah plantea este problema, que denomina "problema de estructura/no estructura", de la siguiente manera: *Describir para algunas teorías una teoría de estructura y probar para las demas teoremas de no-estructura, mostrando asi, que no es posible una teoria de estructura.* ¿Estructura/no estructura? Decir que una teoría T tiene teoría de estructura es lo mismo que decir, aunque suene un poco informal, que el tipo de isomorfismo de sus modelos es caracterizable de algún modo. Para que quede claro, podemos decir que el teorema de Steinitz, que es un teorema de categoricidad, demuestra que la teoría de campos algebraicamente cerrados tiene una teoría de estructura.

Analizar el espectro de una teoría T en un cardinal λ (i.e. $I(T, \lambda)$), es decir, la cantidad de tipos de isomorfismo de modelos de T de cardinal λ, fue la estrategia que Shelah emprendió inicialmente para resolver este problema. Recientemente las soluciones propuestas para la resolución del problema pasaron del análisis del espectro (que podríamos decir es un análisis general) al análisis de las relaciones que se pueden establecer entre dos modelos (análisis particular). Estas soluciones parten de las siguientes preguntas: ¿Qué relación de parentesco tenemos que establecer entre dos estructuras, para decir que son isomorfas?(buscando así teorías de estructura) y: ¿Será que se pueden encontrar estructuras no isomorfas para las cuales podamos establecer una relación de parentesco fuerte?(buscando así la imposibilidad de teorías de estructura). Este tipo de soluciones es la que me interesa exponer en este trabajo.

¿Por qué me interesan? Cuando estaba buscando el tema para la tesis leí sobre distintos tópicos, tanto en teoría de conjuntos y combinatoria, como en teoría de modelos. Uno de los trabajos que encontré en internet tenía que ver con los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé y me pareció interesante la existencia de los métodos por ser diferentes, por ser sofisticados. El objetivo del artículo era precisamente la demostración de teoremas de no estructura, teoremas sobre los que seguí investigando llegando así a otros artículos, también recientes, que utilizaban técnicas como forcing para las demostraciones. Los resultados son asombrosos, además, viéndolos desde la perspectiva de un investigador, me parecen profundos pues, como dije antes, dan información valiosa de la clase de modelos de algunas teorías. El esquema del trabajo parte de la interacción de estos dos factores: Por un lado la presentación de los resultados, por otro la presentación de demostraciones que me parecen necesarias o simplemente interesantes, ya sea por la técnica o por la articulación de conceptos.

Volviendo a estos “nuevos” teoremas de no-estructura, voy a explicarlos para que quede claro dónde es que aparece la asociación con técnicas elaboradas. Los teoremas demostrados por Shelah a los que hice referencia anteriormente, se denominan *teoremas de no estructura con respecto a la cantidad de modelos no isomorfos*, pues son teoremas cuya conclusión es: $I(\lambda, T) = 2^\lambda$. En esta misma época, Shelah demuestra otros teoremas más fuertes con respecto a la cantidad de modelos no isomorfos, que concluyen lo siguiente: $IE(\lambda, T) = 2^\lambda$ (i.e. la cantidad de modelos de T no mutuamente sumergibles es de cardinal λ es 2^λ). La demostración de estos teoremas se tiene para teorías *no-clasificables.* Se dice que una teoría es *clasificable* si es superestable y no tiene la DOP (*Dimensional Order Property*) ni la OTOP (*Omitting Type Order Property).*

Las teorías no-clasificables serán precisamente las teorías para las cuales se buscaran los teoremas de no-estructura “nuevos” (las comillas son obligatorias). Entre estos teoremas hay de dos tipos, y aquí queda explícita la relación con las técnicas que nombré antes: Se denominan *teoremas de no-estructura con respecto a la lógica L*,aquellos que demuestran la existencia de un par de modelos no-isomorfos L-equivalentes. Los teoremas que establecen la existencia de un par de modelos no-isomorfos *potencialmente isomorfos,* los denominaré *teoremas de no-estrucura con respecto a la potencia*. Dada una clase E de extensiones del universo base U dos modelos se dicen *potencialmente isomorfos con respecto a* E, si son isomorfos en *alguna* extensión $N \in E$. Por ejemplo, se puede exigir que E sea la clase de las extensiones de forcing P-genéricas con P c.c.c., o que el forcing sea λ-completo, estratégicamente cerrado, etc. Incluso se trabajan extensiones que no son genéricas.

Por otro lado, ¿las teorías clasificables guardan realmente un buen comportamiento? La respuesta a esta pregunta está dada por el siguiente teorema debido a Shelah (Véase [2]):

Teorema 1.1 *Si T es una teoría clasificable de cardinal $< \lambda$, entonces para todo $M \in Mod_\lambda(T)$ existe una $L_{\infty,\lambda}-$sentencia ϕ_M que describe el tipo de isomorfismo de M.*

He aquí la mejor generalización del teorema de isomorfismo de Scott en nuestro contexto.

Aunque el resultado anterior es precisamente la otra cara de los teoremas a los que está dedicado éste trabajo, no voy a entrar en los detalles de la prueba debido a que los recursos utilizados necesitan de un contexto amplio que está aislado de mis objetivos. Lo dejo enunciado nada más como un resultado inquietante y misterioso, que determina a su vez el marco de las investigaciones que expongo en este trabajo.

El trabajo está dividido en cinco partes: La primera sección contiene la exposición de algunos resultados clásicos afines y útiles para las siguientes secciones. La segunda sección está dedicada a la exposición de los resultados de Shelah relacionados con teoremas de no estructura con res-pecto a la cantidad. En la tercera se abordan resultados referentes a teoremas de no-estructura con respecto a una lógica cuya relación de equivalencia se construye a partir de juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé. En la cuarta, el objeto son dos enfoques de los teoremas con respecto a la potencia y finalmente un apéndice que contiene un esbozo general de investigaciones posteriores a estos trabajos.

2. Años 70

La mejor forma de comenzar mi trabajo es introduciendo algunos resultados clásicos de la teoría de modelos relacionados con estudios que propondrían los primeros pasos de la investigación sobre las relaciones de parentesco entre modelos. Los enunciados de los siguientes teoremas hablan por sí solos y enuncian su relación con los trabajos posteriores, como se verá más adelante:

Definición 2.1 *Dos estructuras A y B se dicen* back-and-forth equivalentes ($A \sim_\omega B$) *si existe una familia no vacía de isomorfismos parciales de A en B, F, tal que:*

i) Si $f \in F$ y $C \subseteq A, |C| < \omega$, entonces existe $f' \in F$ tal que $f' \supseteq f$ y $C \subseteq dom(f')$
ii) Si $f \in F$ y $C \subseteq B, |C| < \omega$, entonces existe $f' \in F$ tal que $f' \supseteq f$ y $C \subseteq ran(f')$

Teorema 2.2 (Teorema de Karp) *Para cualquier par de estructuras A y B, se tiene que $A \sim_\omega B \Leftrightarrow A \equiv_{\infty,\omega} B$.*

Teorema 2.3 (Teorema de isomorfismo de Scott) *Sea L un lenguaje contable y A una L-estructura contable. Entonces existe una $L_{\omega_1,\omega}-$sentencia ϕ_A tal que todos sus modelos son back-and-forth equivalentes a A.*

Las implicaciones de estos teoremas a primera vista son fuertes, pero cuando se tiene en cuenta que si A y B son estructuras contables se entiende su trascendencia, pues $A \sim_\omega B$ si y sólo si $A \cong B$, . En el teorema de Karp quedan explícitas dos formas de capturar el tipo de isomorfismo, mientras que el teorema de Scott muestra el control que tenemos sobre cada clase de modelos con el mismo tipo de isomorfismo (¡estas clases están descritas por una sentencia!). Estos teoremas son bien conocidos y sus demostraciones se pueden encontrar sin ninguna dificultad. Por ejemplo, véase [19].

El siguiente teorema, a pesar de venir de la teoría de conjuntos y no tener una implicación directa al problema de estructura, es fundamental gracias a que constituye el cuerpo de la prueba de algunos resultados relevantes para el trabajo, como por ejemplo los de [6] y los de [7]. La técnica que se deriva de este resultado se denomina *matar estacionarios* y consiste en forzar un club en el complemento de un conjunto estacionario.

Teorema 2.4 *Sean U un modelo contable y transitivo de ZFC y A un conjunto tal que $U \models$ " A es un subconjunto estacionario de $\aleph_1$". Entonces existe una extensión genérica U[G] de U tal que: $U[G] \cap {}^{\omega}U \subseteq U$ (i.e. En $U[G]$ no hay subconjuntos contables nuevos de U) y $U[G] \models$ "A contiene un club sobre $\aleph_1$".*

Demostración. (*Bosquejo*) La prueba consiste en tomar P como el conjunto de todos los subconjuntos de A cerrados de tipo de orden un ordinal sucesor, ordenados por extensiones finales, es decir, $p \leq q$ si $q \subseteq p$ y para todo elemento $r \in p \backslash q$, $r > q$. Partiendo de este orden parcial es fácil ver que, si G es un P-genérico, G es un club sobre $\aleph_1$. Para ver que $U[G] \cap^{\omega} U \subseteq U$, tomemos $f : \omega \to U$ en $U[G]$ y $p \in P$ tales que p fuerza que f es una función de ω en U. Se quiere mostrar que $f \in U$, para lo cual se construye la siguiente sucesión: (Notemos $h(\alpha) = sup(A_\alpha)$)

$A_0 = \{p\}$,
$A_{\alpha+1} = \text{mín}\{B \subseteq A : B \subseteq A_\alpha$ tal que $\forall q \in A_\alpha \forall n < \omega \exists q^* \in B(q^* \leq q$ con
sup$q^* > h(A_\alpha)$ y además q^* decide el valor de $f(n)\}$,
$A_\delta = \cup_{\alpha<\delta} A_\alpha$ con δ ordinal límite.

Como A_α es contable, por la construcción tenemos que el conjutno de puntos límite de $H = \{h(A_\alpha) : \alpha < \aleph_1\}$ es club sobre $\aleph_1$(en U), luego, como A es estacionario, existe $\beta \in A \cap Lim(H)$. Sean $\{h(A_{\alpha_n})\}_{n<\omega}$ una sucesión que converge a β y $\{q_n\}_{n<\omega}$ una sucesión decreciente tal que $q_n \in A_{\alpha_n}$ y q_n decide el valor de $f(n-1)$. Entonces $p^* = \cup_{n<\omega} q_n \cup \{\beta\}$ es una condición del forcing que extiende a p y determina todos los valores de f, por lo tanto $f \in U$. ■

El artículo de Nadel y Stavi ([7]) me parece interesante y me gustaría resaltar un par de resultados. En este artículo los autores estudian la relación $\cong_\lambda^{pot}$(i.e. ... es $\lambda-$potencialmente isomorfo a...), definida de la siguiente manera: $A \cong_\lambda^{pot} B$ si existe una extensión W de U (el modelo base) que satisface $W \cap {}^{<\lambda}U \subseteq U$, en la cual A es isomorfo a B. La investigación que ellos llevan a cabo parte de la generalización del siguiente teorema:

Teorema 2.5 *Para un par de estructuras $A, B \in M$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) Existe una extensión W de U tal que $(A \cong B)^W$.

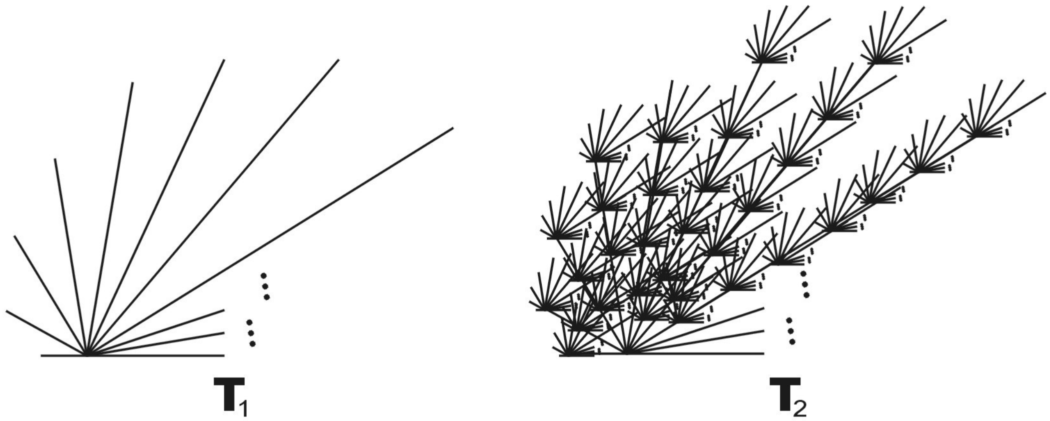
ii) $(A \equiv_{\infty,\omega} B)^U$

iii) Para toda extensión W de U tal que $(|A| \leq \aleph_0 \wedge |B| \leq \aleph_0)^W$, $(A \cong B)^W$.

iv) Existe una extensión genérica N de M tal que $(A \cong B)^W$.

Aunque omito la prueba del teorema anterior, me gustaría comentar dos de las dificultades que se presentan cuando se remplaza ω por λ en la primera equivalencia ($i) \Leftrightarrow ii)$), es decir cuando queremos generalizarlo de manera natural: Primero, existen modelos $A, B \in M$ tales que $(A \equiv_{\infty,\lambda} B)^M$ y $A \not\cong_\lambda^{pot} B$. Y el segundo: existen A_0, A_1 y $A_2 \in M$ que atestiguan que $\cong_\lambda^{pot}$no es transitiva (mientras que $\equiv_{\infty,\lambda}$sí lo es). Los contraejemplos del primer problema son dos árboles dados por Morley:

Sea $\lambda > \omega$ regular, vamos a construir los árboles del siguiente manera: $T_0 = \oplus_{\alpha<\lambda}\alpha$ (donde $\oplus_{\alpha<\lambda} t_\alpha$ es el árbol formado por la unión disyunta de los t_α reconociendo todas las raíces de los t_α), $T_{n+1} = T_n + T_n$ (donde $t + t'$ es el árbol resultante de pegar una copia de t' en cada nodo de t) y $A = \cup_{n<\omega} T_n$. Finalmente sea $B = \lambda + A$.



Gracias a la regularidad de λ, A no tiene ramas de longitud λ, mientras que, claramente, B sí la tiene. Por lo tanto no pueden ser isomorfos en U, pero como la construcción es absoluta no lo pueden ser en ninguna extensión que conserve regularidad y $\lambda > \omega$. Es fácil ver que $(A \sim_\lambda B)^U$.

Para el segundo problema los órdenes que se construyen son una generalización de los siguientes :

Dado $S \subseteq \omega_1$, definimos:

$$\tau_\alpha(S) = \begin{cases} 1+\eta & \text{si } \alpha \in S \\ \eta & \text{si } \alpha \notin S \end{cases} \text{, donde } \eta \text{ denota el orden de los racionales y}$$

$$\Phi(S) = \sum_{\alpha<\omega_1} \tau_\alpha(S).$$

Definición 2.6 *Sea D_λ el filtro generado por todos los club sobre λ. Dos subconjuntos R,$S \subseteq \omega_1$ son $D_\lambda-$*equivalentes *(que se nota $R \sim_{D_\lambda} S$) si existe un club sobre λ,C, tal que $R \cap C = S \cap C$.*

Lema 2.7 *Dados R y $S \subseteq \omega_1$,con $0 \in R \cap S$. Entonces*

$$R \sim_{D_{\omega_1}} S \textit{ si y sólo si } \Phi(R) \cong \Phi(S)$$

Ahora sea $S \subseteq \omega_1$ biestacionario, con $0 \in A$, veamos que $S_0 = \Phi(\{0\})$, $S_1 = \Phi(S)$ y $S_2 = \Phi(\omega_1)$ atestiguan la no transitividad de $\cong^{pot}_{\omega_1}$: Gracias a que la operación Φ es absoluta, por el lema anterior tenemos que $S_0 \ncong^{pot}_{\omega_1} S_2$. Por otro lado, por el teorema 2.4 dado que S es biestacionario podemos encontrar un par de extensiones W_1 y W_2 de U tales que $(S_0 \cong^{pot}_{\omega_1} S_1)^{W_1}$ y $(S_1 \cong^{pot}_{\omega_1} S_2)^{W_2}$. Así $\cong^{pot}_{\omega_1}$no puede ser transitiva y por lo tanto no puede capturar el tipo de isomorfismo. Note que la afirmación anterior es casi un teorema de no-estructura.

3. El paso a $Mod(T)$

En las notas de revisión del artículo de Nadel y Stavi en 1976, aparece el siguiente resultado debido a Shelah: Si T es una teoría de primer orden contable no superestable, entonces existen M y $N \in Mod_\lambda(T)$ (i.e. M y N son modelos de T de cardinal λ) tales que $M \equiv_{\infty,\lambda} N$ y $M \ncong N$. Este resultado aparece como la respuesta a una pregunta hecha por los autores correspondiente a la existencia de órdenes lineales $L_{\infty,\lambda}-$equivalentes no isomorfos, con λ un cardinal inaccesible. Además, añaden que Shelah usó estos órdenes para probar el resultado nombrado anteriormente, en otras palabras, Shelah construyó un par de modelos no isomorfos $L_{\infty,\lambda}-$equivalentes para una teoría no superestable a partir de órdenes. Esta última es precisamente la idea que guía los trabajos que expongo en este trabajo; esta idea consiste en deducir, a partir de ciertas propiedades de orden implícitas en las teorías no clasificables, la imposibilidad de una teoría de estructura gracias al carácter "no estructurado" de los órdenes. ¿Propiedades de orden?

¿Propiedades de orden? Sí. Shelah descubrió que las teorías inestables y no superestables permitían la existencia de modelos que interpretaban órdenes; en el caso de teorías inestables el orden es lineal, mientras que para teorías no-superestables el orden es un árbol de altura $\omega + 1$. Pero, ¿dónde entra a jugar ese "carácter no estructurado de los órdenes "? La respuesta es que, además de la existencia de modelos que interpreten dichos órdenes, se pueden construir sobre órdenes de cada tipo modelos para las teorías.

Los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski son un ejemplo de los modelos construibles a partir de órdenes, su definición es bien conocida: Son modelos "generados" por un "esqueleto" "dirigido" por un orden I. El esqueleto del modelo M (un modelo de Ehrenfeucht-Mostowski) es una sucesión de indiscernibles, $\{\bar{a}_\eta : \eta \in I\}$, que "genera" a M, es decir, que para cualquier elemento $a \in M$, existen τ un L-término y $\eta_0, ..., \eta_m = \bar{\eta} \in I$ tales que $a = \tau(\bar{a}_{\bar{\eta}}) = \tau(\bar{a}_{\eta_1}, ..., \bar{a}_{\eta_m})$. Gracias a esta relación de generación el comportamiento de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski se ve fuertemente determinado por los órdenes que dirigen el esqueleto; de esta manera el problema de encontrar teoremas de no-estructura con respecto a la cantidad de modelos se reduce a encontrar muchos órdenes que gracias a sus diferencias generen modelos no isomorfos. El siguiente teorema determina cómo son las características de los órdenes interpretados y muestran la existencia de modelos de Ehrenfeucht-Mostowski para teorías no clasificables.

Teorema 3.1 *i)Sea T una teoría completa inestable. Entonces para todo orden lineal denso I, $EM(I)$ es un modelo de T generado por $\{\bar{a}_i\}_{i \in I}$, y existe $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ una $L_{\omega,\omega}-$fórmula que define a I, es decir para todos $i, j \in I$, se cumple lo siguiente:*

$$EM(I) \vDash \phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \text{ si y sólo si } i <_I j$$

ii) Sea T una teoría completa no superestable. Entonces existe un conjunto de fórmulas de primer orden $\{\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) : i < \omega\}$,tales que para todo $I \in K^\omega_{tr}$ (i.e. árboles de altura $\omega+1$), $EM(I)$ es un modelo de T, con esqueleto $A_I = \{\bar{a}_\eta\}_{\eta \in I}$, tal que para todos $\eta, \nu \in I$, con longitud(ν) $= \omega$, longitud(η) $= n$, se cumple lo siguiente :

$$EM(I) \vDash \varphi_n(\bar{a}_\nu, \bar{a}_\eta) \text{ si y sólo si } \eta \sqsubseteq_I \nu$$

iii) Sean $|\tau| < \lambda$ y T una teoría superestable con DOP. Entonces existe un tipo $p(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{w})$ tal que para todo orden $(I, <)$, $EM(I)$ es modelo de T, con esqueleto $A_I = \{\bar{a}_i\}_{i \in I}$ tal que para todos $i, j \in I$ se tiene lo siguiente:

$$\exists \bar{c} \in EM(I)(dim(p(\bar{x}, \bar{c}, \bar{a}_i, \bar{a}_j), EM(I)) = \lambda^+) \text{ si y sólo si } i <_I j$$

iv)Sean $|\tau| < \lambda$ y T una teoría superestable con OTOP. Entonces existe un tipo $p(\bar{x},\bar{y},\bar{v})$ tal que para todo orden $(I, <)$, $EM(I)$ es modelo de T, con esqueleto $A_I = \{\bar{a}_i\}_{i \in I}$ tal que para todos $i, j \in I$ se tiene lo siguiente:

$$EM(I) \vDash (\exists \bar{x})p(\bar{x}, \bar{a}_i, \bar{a}_j) \text{ si y sólo si } i <_I j$$

El resultado anterior es potente pues, como veremos más adelante, es la llave para la construcción de los modelos que demostrarán los teoremas de no estructura.

El siguiente resultado es el teorema de no-estructura del que hablé en la introducción. Este resultado demuestra de manera contundente la imposibilidad de una teoría de estructura para T no clasificable.

Teorema 3.2 *Si T es una teoría contable completa no clasificable y $\lambda > \omega$ un cardinal regular, entonces $I(\lambda, T) = 2^\lambda$.*

Para cerrar esta sección voy a presentar un versión fuerte del teorema anterior para teorías no superestables, debida también a Shelah, que aparece en [8]. La exposición de este resultado y de algunos detalles de la construcción es necesaria pues el esquema y la construcción utlizados para la demostración son el punto de partida de los teoremas de no estructura correspondientes a teorías no superestables demostrados en [4] y en [6].

Teorema 3.3 *Si T es una teoría no superestable y $\lambda > |T|$ un cardinal regular, entonces T tiene 2^λ modelos $L_{\infty,\lambda}-$equivalentes no isomorfos.*

La prueba parte de la idea que mencioné anteriormente, es decir, encontrar árboles de altura $\omega+1$ que sean de "alguna" manera distintos y que gracias a esta distinción se pueda concluir la no isomorfía de los modelos generados. Éste "alguna manera" corresponde a tener imágenes distintas bajo la función S. Veamos antes unas definiciones básicas

Definición 3.4 *i) Dado A un conjunto, $|S| \leq \lambda$. Decimos que una $\lambda-$*representación *de A es una sucesión continua y creciente de subconjuntos de A de cardinal $< \lambda$, $\bar{A} = (S_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, tal que $S = \cup_{\alpha<\lambda} S_\alpha$.*

ii) Sea K una clase de modelos y sea $rep(K, \lambda)$ la clase de las $\lambda-$representaciones de los modelos de K. Decimos que una función f, con $dom(f) = rep(K, \lambda)$ y $ran(f) \subseteq \lambda$, es $D_\lambda-$invariante *o que* respeta $D_\lambda-$clases*, si dadas dos $\lambda-$representaciones $\bar{N}, \bar{M}$ de dos modelos $N, M \in K$ se tiene que si $N \cong M$, entonces $f(\bar{N}) \sim_{D_\lambda} f(\bar{M})$.*

iii) Si f es $D_\lambda-$invariante *se puede definir para $M \in K, f(M) = f(\bar{M})/D_\lambda$ para cualquier $\lambda-$representación $\bar{M}$ de M.*

Definición 3.5 *Sea K^ω_{tr} la clase de los árboles ordenados lexicográficamente de altura $\omega + 1$. Dados $I \in K^\omega_{tr}$, y $\bar{I}$ una $\lambda-$representación de I, definimos:*

$$S(\bar{I}) = \{\delta < \lambda : \delta \text{ es límite y existe } \eta \in I,\ longitud(\eta) = \omega, \text{ tal que } S_\eta = \{\eta \restriction n : n < \omega\} \subseteq I_\delta \text{ pero para todo } \beta < \delta, S_\eta \nsubseteq I_\beta\}$$

La primera parte de la demostración está destinada a la prueba del siguiente teorema, en el que se muestra que la función S se comporta como un parámetro de transferencia que garantiza precisamente lo que se quiere: tener control del tipo de isomorfismo de dos modelos de Ehrenfeucht-Mostowski a partir de diferencias en los órdenes, podríamos decir que en este caso S funciona como un funtor entre K^ω_{tr} y los modelos de T una teoría no superestable. Las definiciones de $(< \lambda, bs)-$estable y localmente $(< \lambda, bs, bs)$-agradable (nice) las tomo como en [4].

Teorema 3.6 *Sea T una $\tau-$teoría completa no superestable, con $|\tau| < \lambda$. Si $I, J \in K^{\omega}_{tr}$, $|I| = |J| = \lambda$, son $(< \lambda, bs)-$estables, localmente $(< \lambda, bs, bs)$-agradable (nice) y además $S(I) \neq S(J)$, entonces $EM(I) \ncong EM(J)$*

La prueba consiste en suponer que se tiene el isomorfismo de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski y probar la existencia de un club C sobre λ que contradiga que $S(I) \neq S(J)$. La segunda parte está dedicada a la demostración del siguiente teorema, cuya función es encontrar, a partir de dos árboles dados en K^{ω}_{tr}, una manera de construir un par de árboles $L_{\infty,\lambda}-$equivalentes, sin importar si los 'arboles iniciales guardaban algún parecido.

Teorema 3.7 *Sean $I_i \in K^{\omega}_{tr}, i < 2$, de cardinal λ regular tales que $\lambda^{<\omega} \subseteq I_i$ y que $I_i \restriction \sqsubseteq$ es $(< \lambda, bs)$-estable, entonces existen $J_i \in K^{\omega}_{tr}$ de cardinal λ tales que:*

i) $S(I_i) = S(J_i)$

ii) J_i es $(< \lambda, bs)$-estable

iii) J_i es localmente $(< \lambda, bs)$-agradable (nice)

iv) $J_0 \sim_\lambda J_1$ (que por la generalización del teorema de Karp implica $J_0 \equiv_{\infty,\lambda} J_1$)

Gracias a que utilizaremos los árboles J_0 y J_1 en las pruebas posteriores, me parece importante dar a conocer explícitamente cómo se construyen:

Definición 3.8 *Sea λ un cardinal. Definimos $\theta_\lambda = \{f : \omega \to \lambda : f(n) \neq 0$ sólo para finitos $n\}$ y lo ordenamos de la siguiente forma: Sean $f,g \in \theta_\lambda$, $f < g$ si y sólo si $f(n) < g(n)$ y para todo $m < n$, $f(m) = g(m)$.*

Lema 3.9 *Existe $C_\lambda \subseteq \theta_\lambda, |C_\lambda| = \lambda$, tal que $a, b \in C_\lambda$, existe un automorfismo $g_{a,b}$ de θ_λ tal que $g(a) = b$.*

Primero vamos a definir a partir de θ_λ un orden lineal θ. Sean $c \in C_\lambda$ y $(I^i_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ $\lambda-$representaciones de los I_i correspondientemente, tales que para todo $\alpha < \lambda$, I^i_α es cerrado para $\sqsubseteq$. Sea $\bar{R} = \{I^i_\alpha : i < 2, \alpha < \lambda\}$. Como $|C_\lambda \backslash \{c\}| = \left|\bar{R}\right| = |\lambda^{<\omega}| = \lambda$ podemos identificar a $\bar{R}$ con $C_\lambda \backslash \{c\}$ y a $\lambda^{<\omega}$ con λ. Finalmente sea θ el orden lineal cuyo dominio es $\lambda^{<\omega} \times \theta_\lambda$, tomando para la definición de $<_\theta$una linealización arbitraria de $\lambda^{<\omega}$.

Vamos a construir a J_0 y a J_1 explicitamente:

Decimos que $\eta \in J_i$ si se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

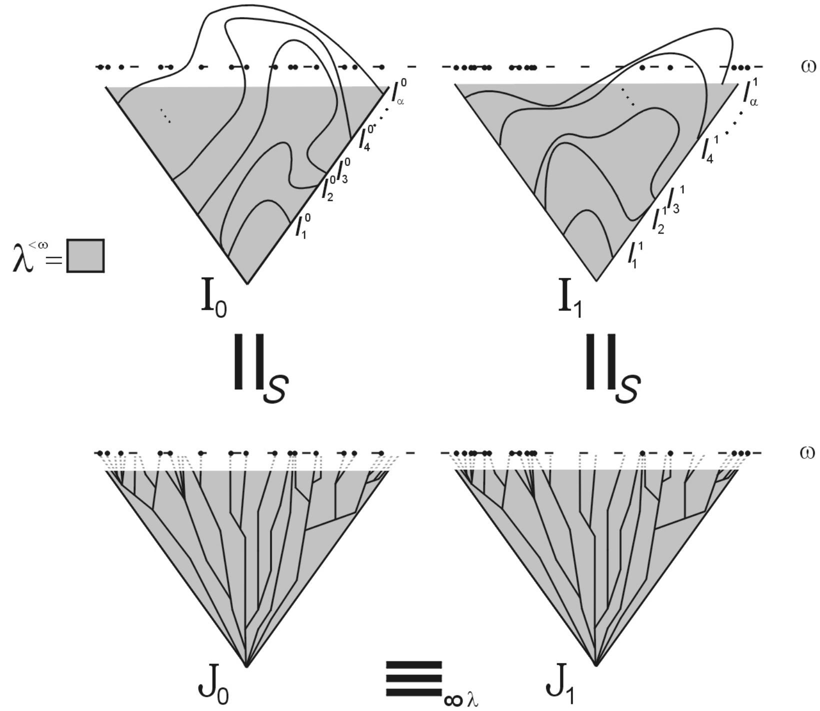
i) $\eta \in \theta^{<\omega}$

ii) $\eta = ((a_n, c))_{n<\omega}$ tal que existe $\nu \in lev_\omega(I_i)$ tal que $\nu \restriction n + 1 = a_n$

iii) $\eta = ((a_n, b_n))_{n<\omega}$ tal que existen $m_\eta < \omega, R \in \bar{R}$ y $\nu \in R$ tales que: Para todo $n \geq m_\eta$, $\nu \restriction n + 1 = a_n$ y $b_n = R$.

Es decir, se construye un conjunto ramas que codifican la inclusión en cada una de las $\lambda-$representaciones, además gracias a la condición *ii)*, es claro que J_i contiene una copia de I_i.

Cada uno de estos árboles codifica las distribuciones de I_0 y de I_1 en sus respectivas $\lambda-$representaciones. Por lo tanto esta construcción consiste en pegar a I_i un árbol que contiene toda la información conjunta de las distribuciones de I_0 y de I_1.



Para concluir, los modelos que demuestran el teorema de no estructura se construyen del siguiente modo: Dado $S \subseteq S^{\omega}_{\lambda} = \{\delta \in \lambda : cf(\delta) = \omega\}$, definimos

$$I(S) = \lambda^{<\omega} \cup \{\eta_\delta : \delta \in S\},$$

donde η_δ es una sucesión fija contable cofinal a δ. Ahora, articulando los dos teoremas anteriores tenemos que si J^0_S y J^1_S son los J_0 y J_1 obtenidos a partir de $\emptyset$ y de $I(S)$,donde $S \subseteq S^{\omega}_{\lambda}$ estacionario sobre λ, entonces $EM(J^0_S) \ncong \ EM(J^1_S)$ (pues las imágenes bajo S son distintas) pero $EM(J^0_S) \equiv_{\infty,\lambda} \ EM(J^1_S)$. Así el problema de la cantidad de modelos no isomorfos se reduce a un resultado conjuntista referente a la cantidad de conjuntos estacionarios sobre λ.

4. Modelos fuertemente equivalentes

En esta sección trabajamos fundamentalmente con juegos (incluso la definición de modelos fuertemente equivalentes es una definición hecha a partir de uno de ellos), por lo tanto, a pesar de alejarme inicialmente del problema de los teoremas de no estructura, prefiero comenzar la sección con las siguientes definiciones que buscan contextualizar al lector.

Definición 4.1 *Dados dos modelos M,N y un árbol t, definimos $G^t(M,N)$, el* juego de Ehrenfeucht-Fraïssé *de longitud t entre M y N, de la siguiente forma:*

•*En la jugada* $\alpha, \forall$ *escoge* $a_\alpha \in M$ *o* $b_\alpha \in N$ *y* $t_\alpha \in t$, *después* $\exists$ *escoge* $b_\alpha \in N$ *si* $\forall$ *escogió de* M *o* $\exists$ *escoge* $a_\alpha \in M$ *en caso contrario.*

•$\forall$ *debe jugar de tal manera que* $(t_\beta)_{\beta \leq \alpha}$ *sea una sucesión estrictamente creciente en* t, *mientras que* $\exists$ *juega de tal manera que* $\{(a_\beta, b_\beta) : \beta \leq \alpha\}$ *sea un isomorfismo parcial entre* M *y* N.

•*El primer jugador que tenga que romper las reglas pierde.*

Escribimos $M \equiv^t N$ si $\exists$ tiene una estrategia ganadora para $G^t(M, N)$ y decimos que M y N son *t-fuertemente equivalentes* . En estos juegos las ramas de t funcionan como medidores de la velocidad del juego y por esto mismo el hecho de ser t-fuertemente equivalentes resulta al menos tan fuerte como el de ser $L_{\infty,\lambda}-$equivalentes (claro, bajo algunas hipótesis de cardinal sobre t).

Supongamos que P_0 juega G contra P_1, decimos que P_0 *tiene una estrategia ganadora* para G, si de alguna forma él sabe *siempre,* es decir para *cualquier* jugada de P_1, como jugar para ganar G. En otras palabras es como si P_0 tuviera un oráculo que le indicara, de manera infalible, como jugar para ganar G.

Veamos la definición de otros juegos que nos serán útiles.

Definición 4.2 *Dados* $\lambda > \omega$ *regular,* $S \subseteq \lambda$ *y* t *un árbol, definimos* $GC^t(S)$, *el* juego del club de longitud t *en A, de la siguiente forma:*

•*En la jugada* $\alpha, \forall$ *escoge* $t_\alpha \in t$, *después* $\exists$ *escoge* $a_\alpha \in S$ *y finalmente* $\forall$ *escoge* $b_\alpha \in \lambda$.

•$\forall$ *debe jugar de tal manera que* $(t_\alpha)_{\beta \leq \alpha}$ *sea una sucesión estrictamente creciente en* t, $b_\alpha > a_\alpha$,*mientras que* $\exists$ *debe escoger* $a_\alpha > b_\beta$, *para* $\beta < \alpha$, *y si* α *es límite* $a_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} b_\alpha$ *(recordemos que* $\exists$ *sólo juega elementos de* A).

• *El primer jugador que tenga que romper las reglas pierde.*

El juego anterior se encarga de "probar" que S se comporta como un club; en la segunda condición, donde se pide que en los pasos límites se tomen supremos se encarga de mostrar que S es cerrado, del mismo modo cuando se pide que $a_\alpha > b_\beta$ se muestra que S no es acotado.

Definición 4.3 *Dados dos árboles* $t, t\prime$, *definimos* $G_{\leq}(t, t')$, *el* juego de comparación entre t *y* t', *de la siguiente forma:*

•*En la jugada* $\alpha, \forall$ *escoge* $a_\alpha \in t$, *después* $\exists$ *escoge* $b_\alpha \in t'$

•$\forall$ *debe jugar de tal manera que* $(a_\alpha)_{\beta \leq \alpha}$ *sea una sucesión estrictamente creciente en* t, *mientras que* $\exists$ *debe jugar de tal manera que* $(b_\alpha)_{\beta \leq \alpha}$ *sea una sucesión estrictamente creciente en* t'.

• *El primer jugador que tenga que romper las reglas pierde.*

Escribimos $t \sqsubseteq t'$ si $\exists$ tiene una estrategia ganadora para $G_{\leq}(t, t')$ y, si $\forall$ tiene una, $t' \Subset t$. A pesar de no tener diferencias profundas aparentes, el orden de la jugada ($\forall$ juega primero) determina diferencias en la relacion entre los árboles: En el primer caso, si $\exists$

tiene una estrategia ganadora lo que se tiene es que t' contiene un árbol que se parece a t cuyas ramas son al menos tan largas como las de t. En el segundo, lo que se tiene es que t es mucho mas alto que t', pues para cualquier rama de t' por la que se elija subir en cualquier momento, existe en t una rama más larga. Las relaciones $\sqsubseteq$ y $\Subset$ son estudiadas con detenimiento en [10], en este artículo los autores muestran que con estas relaciones se pueden tratar los arboles como ordinales generalizados:

Lema 4.4 *Dado un árbol t notamos por σt el árbol de todos los segmentos iniciales de las ramas de t.*

i) $t \Subset \sigma t$, $t \not\Subset t$

ii) Si $t \Subset t^*$, *entonces* $t \sqsubseteq t^*$

iii) No existe t^*, *tal que* $t \Subset t^* \Subset \sigma t$

iv) $t \Subset t^* \Leftrightarrow \sigma t \sqsubseteq t^*$

v) $t \sqsubseteq t^* \Leftrightarrow t \Subset \sigma t^*$

Como se puede suponer en esta sección se va a trabajar con árboles que midan la longitud de los juegos. Para establecer una notación vamos a decir que t es un $(\lambda, \kappa)-$árbol (i.e. $t \in T(\lambda, \kappa)$) si tiene una única raíz, la altura de t es $< \kappa$ y para todo $\eta \in t, |[\eta]| < \lambda$, donde $[\eta]$ es la clase de equivalencia de η en la relación "tener los mismos predecesores".

Como el lector habrá observado, las definiciones anteriores enuncian cierta sofisticación en el análisis de ciertos problemas, que, como en [4], permiten la obtención de resultados más elaborados. En [4], los autores utilizan los juegos anteriores como instrumentos para demostrar teoremas de no estructura con respecto a $\equiv^t$. Antes de internarnos en los resultados del artículo me gustaría explicar algunos detalles del esquema de la prueba de 3.6, con el fin de mostrar la relación esquemática entre el trabajo de Shelah y el realizado en este artículo.

Como dije antes (ver el comentario de la prueba del teorema 3.6), la prueba consiste en buscar un club C sobre λ que contradiga la hipótesis: $S(I) \neq S(J)$, a partir de la existencia de un isomorfismo $f : EM(I) \cong EM(J)$, notemos $f(\bar{a}_\mu) = \tau(\bar{b}_{\bar{\nu}(\mu)})$, donde los $\bar{a}_\eta$ y los $\bar{b}_\eta$ son los esqueletos de $EM(I)$ y de $EM(J)$ correspondientemente. Para esto se recurre a la existencia de η, η_1 y $\eta_2 \in I$ tales que $\eta_1 \sqsubseteq \eta, \eta_2 \not\sqsubseteq \eta$, *longitud*$(\eta_1) =$ *longitud*$(\eta_2) = n < \omega$, *longitud*$(\eta) = \omega$ y $tp_{at}(\bar{\nu}(\eta_1) \frown \bar{\nu}(\eta), \emptyset, J) = tp_{at}(\bar{\nu}(\eta_2) \frown \bar{\nu}(\eta), \emptyset, J)$. Para entender la relevancia de la igualdad de tipos remitámonos a las características de las ϕ_m dadas por el teorema 3.1, gracias a las cuales se cumple los siguiente:

$EM(J) \models \phi_n(\bar{\mu}_{\eta_1}(\bar{b}_{\bar{\nu}(\eta_1)}), \bar{\mu}_\eta(\bar{b}_{\bar{\nu}(\eta)})) \Longleftrightarrow \phi_n(\bar{\mu}_{\eta_2}(\bar{b}_{\bar{\nu}(\eta_2)}), \bar{\mu}_\eta(\bar{b}_{\bar{\nu}(\eta)}))$,

que escrito de otra manera es:

$EM(J) \models \phi_n(f(\bar{a}_{\eta_1}), f(\bar{a}_\eta)) \Leftrightarrow \phi_n(f(\bar{a}_{\eta_2}), f(\bar{a}_\eta))$,

pero como $\eta_2 \not\sqsubseteq \eta$ luego, por la misma caracterización de las ϕ_i :

$EM(I) \models \phi_n(\bar{a}_{\eta_1}, \bar{a}_\eta) \wedge \neg\phi_n(\bar{a}_{\eta_2}, \bar{a}_\eta)$

Contradiciendo de esta manera que f preserve la verdad de $\tau-$fórmulas.

Veamos cuál es relación de la que hablé anteriormente entre esta prueba y la del siguiente teorema.

Teorema 4.5 *Sea $\lambda > \omega$ un cardinal regular ($\lambda > \omega_1$ en el caso DOP). Si T es una teoría contable inestable o superestable con DOP o con OTOP de cardinal $< \lambda$, entonces,* *si $\mu = \lambda^{<\lambda}$, existe $M \in Mod_\mu(T)$ tal que para todo $t \in T(\lambda^+, \lambda)$ existe $N \in Mod_\mu(T)$ tales que*

$$M \equiv^t N \quad y \quad M \not\cong N$$

La prueba parte de dos resultados preliminares: el primero consiste en el establecimiento de parámetros de comparación en los órdenes que controlen el tipo de isomorfismo y el segundo en la construcción de órdenes que gracias a sus diferencias garanticen la no isomorfía de los modelos generados a partir de ellos. El parámetro es el siguiente:

Lema 4.6 *Sea t un árbol, $t' = (\oplus_{n<\omega} n) \times t$ y θ,η órdenes lineales densos. Si $\theta \equiv^{t'} \eta$, entonces $EM(\theta) \equiv^t EM(\eta)$.*

La construcción de los órdenes para el segundo resultado se basa en una maquinaria combinatoria complicada y tediosa cuya explicación no haré puesto que no tiene ninguna relevancia para el desarrollo del trabajo. Finalmente, la demostración del teorema, y este es el *porqué* de la explicación de la prueba, repite el mismo esquema de la prueba de Shelah: Se toman los modelos generados por los órdenes construídos, garantizando así la equivalencia fuerte, y se supone luego que existe un isomorfismo entre ambos, lo que implica, gracias a ciertas características de los órdenes, la inversión del orden en los tipos de algunos elementos que contradice, exactamente igual que antes, la definibilidad del orden dada por el teorema 3.1 (En los dos últimos casos, DOP y OTOP, al igual que para el caso de teorías inestables, se tiene que si I es un orden lineal denso, entonces es definible con una $L_{\infty,\omega_1}-$fórmula en el caso DOP y con una $L_{\lambda^+,\omega}(\tau)-$fórmula en el caso OTOP).

¿Y qué pasa con las teorías no superestables? El problema inicial es que la demostración del teorema anterior no se puede usar en este caso, gracias a que en las pruebas utilizadas para la demostración se utiliza fuertemente la finitud de las tuplas que componen los esqueletos de los modelos; pero esto podría ser solamente un problema de método. Pero puede que no. Los autores exponen un ejemplo de una teoría no superestable para la cual existen ciertos árboles t para los cuales $\equiv^t$ implica $\cong$.

Ejemplo 4.7 *La teoría en cuestión es: $T_\alpha = Th({}^{\alpha+1}\omega, (E_\iota)_{\iota<\alpha})$,donde $E_i(\eta, \nu)$ se tiene si $\eta \restriction (i{+}1) = \nu \restriction (i{+}1)$ y $\alpha \in [\omega, \omega_1)$. Los árboles que se utilizan son unos (ω_2, ω_1)-árboles que codifican la información de los modelos. Aunque no voy a entrar en los detalles del ejemplo, quisiera resaltar que éste es una generalización del ejemplo canónico de teorías estrictamente estables. Entonces, ¿qué pasa en el caso no superestable? La respuesta dada por los autores es remplazar $\equiv^t$por $\equiv^t_\forall$.*

Definición 4.8 *Decimos que M y N son* relativamente fuertemente equivalentes *($M \equiv^t_\forall N$), si $\forall$ no tiene una estrategia ganadora para $G^t(M, N)$.*

La siguiente definición es indispensable tanto en la prueba del teorema para teorías no superestables en este trabajo, como en [6].

Definición **4.9** *Un conjunto* $S \subseteq \lambda$ *se dice* fuertemente biestacionario *si es estacionario y para todo* $\beta < \lambda$, $\forall$ *no tiene una estrategia ganadora para* $GC^{\beta}(\lambda - S)$.

Que $\forall$ no tenga una estrategia ganadora para $GC^{\beta}(\lambda - S)$ quiere decir que $\exists$ siempre puede "codificar" una sucesión creciente cerrada para límites de longitud β en $\lambda - S$. Esta clausura será precisamente la que le da el carácter de "fuerte" a la definición. Es fácil ver que fuertemente biestacionario implica biestacionario; para ver que es más "fuerte" tomemos $\lambda = \alpha^{++}$ y $S = S^{\alpha}_{\lambda}$ (que es biestacionario). A no es fuertemente biestacionario pues si tomamos $b < \lambda, cf(b) = \alpha^{+}$, y una sucesión cofinal a b, $(b_{\gamma})_{\gamma<\alpha^{+}} \subseteq \lambda - S$, $\forall$ tiene una estrategia ganadora para $GC^{\alpha^{+}}(\lambda - S)$, que consiste en escoger a γ y a b_{γ} en la jugada γ. Igual que en la demostración del lema, es claro que $\exists$ tiene que romper las reglas en la jugada α^{+}.

El esquema de la prueba del siguiente teorema se desarrolla a partir de la siguiente cadena de afirmaciones: Si S es fuertemente biestacionario y $\forall$ tiene una estrategia ganadora para $G^{t}(EM(J^{1}_{S}), EM(J^{0}_{S}))$, entonces tiene una para $G^{v\times t}(J^{1}_{S}, J^{0}_{S})$. Además, si S es biestacionario tenemos que $t(\lambda - S) \Subset v \times t$ resulta ser lo mismo que $t(\lambda - S) \Subset t$ ($t(S)$ es el árbol de todas las sucesiones crecientes cerradas de elementos de S, ordenadas por $\sqsubseteq$). Viéndolo de la manera que nos interesa, tenemos que si $t(\lambda - S) \not\Subset t$ (que no es necesariamente $t \sqsubseteq t(\lambda - S)$, pues el juego puede no estar determinado), entonces $\forall$ no tiene una estrategia ganadora para $G^{t}(EM(J^{1}_{S}), EM(J^{0}_{S}))$,es decir, tenemos un teorema de no estructura para teorías no superestables.

Teorema **4.10** *Sea* λ *un cardinal regular y* A *un conjunto fuertemente biestacionario. Si* T *es una teoría completa no superestable de cardinal* $< \lambda$, *entonces existen modelos* $M, N \in Mod_{\lambda}(T)$ *tales que*

$$M \equiv^{t(\lambda-S)}_{\forall} N \quad y\ M \not\cong N$$

Para terminar voy a esbozar algunas pruebas de los resultados de la cadena que mencioné antes, estas pruebas sirven de ejemplos de técnicas utilizadas para llevar a cabo demostraciones con juegos.

Utilizo $WE_{\forall}(G, \sigma)$ como notación para "σ es una estrategia ganadora de $\forall$ para el juego G" y $WE_{\forall}(G)$ para decir "$\forall$ tiene una estrategia ganadora para G".

Notemos $v(\alpha) = \oplus_{\beta<\alpha}\beta$.

Lema **4.11** *Sean* $\lambda > \omega$ *regular,* t *un árbol y* $S \subseteq S^{\omega}_{\lambda}$. *Entonces*

$$WE_{\forall}(G^{t}(EM(J^{1}_{S}), EM(J^{0}_{S}))) \text{ si y sólo si } WE_{\forall}(G^{v(\omega)\times t}(J^{0}_{S}, J^{1}_{S})).$$

Demostración. La técnica para probar teoremas de este tipo es simular una partida en el juego del que se tiene la información sobre la existencia de estrategias ganadoras.

Sean $M_0 = EM(J^{0}_{S})$, $M_1 = EM(J^{1}_{S})$ y σ una estrategia ganadora de $\forall$ para $G^{t}(M_0, M_1)$.

En la jugada $\alpha = 0$: Sean $t_0 \in t$, $\mu_0(\bar{a}_{\bar{\eta}_0}) \in M_0$ las jugadas propuestas por σ. En $G^{v(\omega)\times t}$ $\forall$ escoge $\eta_0, ..., \eta_n \in J^0_S$ y $(i, f_i, t_0) \in v(\omega) \times t$ de manera natural,con $i = 0, ...n$. Sea $f(\bar{\eta}_n) = (f(\bar{\eta}_0), ..., f(\bar{\eta}_n)) \in J^1_S$ las respuestas dadas por $\exists$ a $\bar{\eta}_n$. De nuevo en G^t, $\exists$ juega $\mu'_0(\bar{b}_{f(\bar{\eta}_n)})$. Y así sucesivamente. Dado que los $\bar{a}$ y los $\bar{b}$ son indiscernibles, la estrategia que sigue $\exists$ en G^t le permite construir isomorfismos parciales y de esta manera juega a ganar. Pero sabemos que $\exists$ tiene que perder G^t en algún momento (pues $\forall$ tiene una estrategia ganadora), luego $\hat{\sigma}$ definida de esta es una estrategia ganadora para $\forall$ en $G^{v(\omega)\times t}$. ■

Lema 4.12 *Sean $\lambda > \omega$ regular y $S \subseteq S^\omega_\lambda$ fuertemente bi-estacionario. $WE_\forall(GC^t(S))$ si y sólo si $t(S) \Subset t$. (En la cadena A se toma como $(\lambda - S)$)*

Demostración. (Bosquejo) De nuevo la técnica es sacar información del juego GC^t para poder controlar que $\exists$ pierda en $G_\leq$. Voy a describir nada más cómo se hace la elección en cada jugada: Si $WE_\forall(GC^t, \sigma)$, $\forall$ juega en G_1 el mismo elemento de t que escoge siguiendo σ en GC^t. Sean (t_ξ, a_ξ) la jugada ξ de $\forall$ en GC^t y $\bar{b}_\xi$ la jugada ξ de $\exists$ en $G_\leq$. La jugada $\xi+1$ se realiza de la siguiente manera: $\forall$ escoge $t_{\xi+1}$ en GC^t (y en $G_\leq$) dado por σ, y si $sup(\bar{b}_\xi) > a_\xi$, entonces, como $\bar{b}_\xi$ es cerrada, $\exists$ escoge en $G_\leq$ a $\bar{b}_{\xi+1} = \sup(\bar{b}_\xi)$. Sino, como $\neg WE_\forall(G^{a_\xi+1}(S))$ (pues $\lambda - S$ es fuertenente biestacionario), $\exists$ puede jugar los siguientes $a_\xi + 1$ movimientos, $C = (\bar{c}_i : i \leq a_\xi)$, en GC^t sin perder, mientras $\forall$ sigue σ. $\exists$ juega entonces $\bar{b}_{\xi+1} \sqsupseteq C$, note que el $supC$ es mayor que a_ξ, pues se añadieron al menos $a_\xi + 1$ puntos nuevos a $sup(\bar{b}_\xi)$, y se continua con $G_\leq$. ■

El bosquejo anterior nos muestra otra técnica útil en el manejo de los juegos, ésta consiste en "parar" el juego del que se quiere probar el resultado mientras se juega el otro forzando la elección de elementos que sirvan, obligando así la escogencia futura de $\exists$.

Pero el enunciado del teorema anterior deja abierta la siguiente pregunta: ¿No hay un teorema de no estructura para teorías no superestables análogo al que se enunció para los otros casos? La respuesta a éste problema depende de la existencia de conjutos estacionarios S tales que para todo $t \in T(\lambda^+, \lambda)$, $t(\lambda - S) \not\sqsubseteq t$ (Recordemos que $t \Subset t^*$ implica $t \sqsubseteq t^*$).

Teorema 4.13 *Sea $\lambda = \kappa^+, \kappa$ regular, $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ y $2^\kappa = \lambda$. Entonces existe una extensión de forcing que preserva todos los cardinales, en la cual para todo $S \subseteq S^\omega_\lambda$ y para todo $t \in T(\lambda^+, \lambda)$, $t(\lambda - S) \not\sqsubseteq t$. Además si T es una teoría no superestable de cardinal $< \lambda$, entonces existe $M \in Mod_\lambda(T)$ tal que para todo $t \in T(\lambda^+, \lambda)$ existe $N \in Mod_\lambda(T)$ tales que*

$$M \equiv^t_\forall N \quad y \ M \ncong N$$

5. Modelos potencialmente isomorfos

El hecho de que el tipo de isomorfismo pueda ser alterado por extensiones genéricas del universo aparece por primera vez en [20]. En este artículo el autor muestra que a partir del sistema de back-and-forth obtenido de un par de estructuras $L_{\infty,\omega}-$equivalentes se puede establecer un orden que garantiza el isomorfismo de tales estructuras en cualquier extensión genérica. Es decir $\sim_\omega$ implica $\equiv_E^{pot}$, donde E es la clase de las extensiones genéricas del universo. De la implicación anterior se deduce, por el teorema de Karp (teorema 2.2), que $\equiv_{\infty,\lambda}$ implica $\equiv_E^{pot}$.

Enunciemos entonces la generalización del teorema de Karp para $\lambda > \omega$:

Teorema 5.1 *Para cualquier par de estructuras A y B, se tiene que*

$$A \sim_\lambda B \Leftrightarrow A \equiv_{\infty,\lambda} B$$

Ahora bien, notemos que la satisfacción de sentencias en $L_{\infty,\lambda}$ y que el enunciado "$F : A \sim_\lambda B$" son absolutos bajo extensiones que no colapsan cardinales $< \lambda$ ni añaden subconjuntos nuevos del modelo base de cardinal $< \lambda$ (i.e. extensiones $\lambda-$completas). Entonces, articulando lo anterior y el teorema 1.1, tenemos que para teorías clasificables se tiene una teoría de estructura para extensiones $\lambda-$completas.

En esta sección presento resultados de dos trabajos que están dedicados al análisis de las extensiones que cumplen una de las dos condiciones para ser $\lambda-$completas: No colapsar cardinales $< \lambda$ y no añadir subconjuntos nuevos de cardinal $< \lambda$. Por darles un nombre, diré que las extensiones que no añaden subconjutos nuevos de cardinal $< \lambda$ ($U[G_P] \cap {}^{<\lambda}U \subseteq U$) son extensiones $\lambda-$*fieles.*

5.1. Extensiones fieles

En [6] los autores definen los modelos potencialmente isomorfos como aquellos que son isomorfos en extensiones que no añaden subconjuntos nuevos de cardinal $< \lambda$. Para que la idea principal de los autores quede clara veamos la siguiente definición, la definición del parámetro de comparación de órdenes con el que trabajan.

Definición 5.2 *Sea $\lambda > \omega$ regular y $S \subsetneq \lambda$ estacionario. Si A,B son modelos de cardinal λ, decimos que* (A,B) tiene la propiedad $M(S)$*, si existen cadenas de modelos $\bar{A} = \langle A_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ y $\bar{B} = \langle B_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$, un conjunto de isomorfismos parciales F y una función $G : F \to (\lambda - S)$ tales que:*

i) $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son crecientes y continuas con $\cup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = A$ y $\cup_{\alpha<\lambda} B_\alpha = B$

ii) $F \neq \emptyset$ y para toda $f \in F$, $f : A_{G(f)} \to B_{G(f)}$

iii) para toda $f \in F$ y para todo $\alpha < \lambda$, existe $h \in F$ tal que $f \subseteq h$ y $G(h) \geq \alpha$

iv) Si $\langle f_\alpha \in F | \alpha < \beta \rangle$ es creciente con $\cup_{\alpha<\beta} G(f_\alpha) \in \lambda - S$, entonces $\cup_{\alpha<\beta} f_\alpha \in F$

La idea consiste en codificar un conjunto biestacionario S dentro de los modelos y así, utilizando una generalización natural de la técnica de matar estacionarios de [9], existe una extensión de forcing, que no añade subconjuntos nuevos de cardinal $< \lambda$, que fuerza un club en $\lambda - S$ y de esta manera, por las características de las componentes de la propiedad

$M(S)$, existe $f \in F$ un isomorfismo (en la extensión) entre los modelos iniciales, es decir los modelos iniciales devienen isomorfos en dicha extensión.

El siguiente lema es un lema de transferencia análogo a los que hemos visto anteriormente.

Lema 5.3 *Si (I,J) tiene la propiedad M(S) entonces* $(EM(I),EM(J))$ *tiene la propiedad M(S).*

La parte correspondiente a los teoremas de no estructura con respecto a la potencia se divide del mismo modo que en [4], la primera está dedicada a la demostración del teorema para teorías inestables, superestable con la DOP o superestable con la OTOP; y otra para el caso no superestable.

Teorema 5.4 *Sea* T *una* $\tau-$*teoría completa con* τ *contable y sea* λ *un cardinal regular. Suponga que se tiene cumple de las siguientes afirmaciones:*

i) T *es inestable*

ii) T *es superestable con DOP y* $\lambda^+ \geq 2^\omega$

iii) T *es superestable con OTOP*

Entonces existen $M, N \in Mod_{\lambda^+}(T)$ *no isomorfos y un orden parcial* P *tales que:*

$$M \cong_P^{pot} N \quad y\ U[G_P]\ es\ \lambda - fiel$$

La demostración de este teorema se hace a partir de la definición de unos ordenes lineales $(\Phi_\kappa(S))$ que generalizan los ordenes utilizados para el contraejemplo de la transitividad de $\cong_{\omega_1}^{pot}$que vimos al final de la primera sección. Aunque no defino estos órdenes, pues sus definiciones son complicadas y no son necesarias para este trabajo, enuncio la siguiente propiedad que es esencialmente el cuerpo de la prueba: Si $S_0, S_1 \subseteq S^\lambda_{\lambda^+}$ y $S = \lambda - (S_0 \cup S_1)$ es $\lambda-$estacionario, entonces $(\Phi_{\lambda^+}(S_0), \Phi_{\lambda^+}(S_1))$ tiene la propiedad $M(S_0 \cup S_1)$. La siguiente parte sigue el esquema de las pruebas anteriores y es encontrar unos S_0, S_1, S para los cuales $EM(\Phi_{\lambda^+}(S_0)) \ncong EM(\Phi_{\lambda^+}(S_1))$. Finalmente, como lo hemos hecho antes, gracias a una generalización del teorema 2.4, se encuentra una extensión que fuerce un club en el complemento de $S_0 \cup S_1$ y así se tiene el isomorfismo entre $EM(\Phi_{\lambda^+}(S_0))$ y $EM(\Phi_{\lambda^+}(S_1))$ en dicha extensión.

Como se ve en la prueba anterior, los autores articularon técnicas utilizadas en [7] y en [9], de tal manera que al ver la prueba, aunque la demostración técnicamente no es para nada sencilla, el esquema parece ser muy natural pues la propiedad $M(S)$ dirige la atención hacia la busqueda de resultados como el terorema 2.4. Del mismo modo, además de esta articulación, utilizaron, como en [4], la construcción de los J_A para encontrar los modelos que demuestran el teorema.

Teorema 5.5 *Sea* T *una teoría contable no superestable completa y* λ *un cardinal regular. Entonces existen* $M, N \in Mod_{\lambda^+}(T)$ *no isomorfos y un orden parcial* P *tales que:*

$$M \cong_P^{pot} N \quad y\ U[G_P]\ es\ \lambda\text{-}fiel$$

Demostración. (Bosquejo) Sea $S \subseteq S^{\omega}_{\lambda^+}$. Como S es estacionario, por teorema 3.6 tenemos que $EM(J^0_S) \ncong EM(J^1_S)$. Haciendo una fácil transformación de las componentes de la propiedad $M(S)$ se llega a que (J^0_S, J^0_S) tiene la propiedad $M(S)$ y por 5.3 se tiene entonces que $(EM(J^0_S), EM(J^1_S))$ la tiene también. Finalmente, como S es biestacionario, por la generalización del teorema de [9] tenemos la extensión que queremos. ■

Finalmente, la "homogeneidad" de los resultados de este artículo, queda enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 5.6 *Sea T una teoría contable completa y λ un cardinal regular. T es no clasificable si y sólo si existen $M, N \in Mod_{\lambda^+}(T)$ no isomorfos y un orden parcial P tales que:*

$$M \cong^{pot}_P N \quad \text{y } U[G_P] \text{ es } \lambda\text{-fiel}$$

5.2. Extensiones c.c.c.

Como dije al comienzo de la sección 5, veamos qué pasa cuando tomamos extensiones que sólo cumplen la hipótesis de no colapsar cardinales $< \lambda$. En esta parte voy a presentar los resultados que se obtuvieron en [5] realcionados con teoremas de no estructura con respecto a la potencia. En el artículo los autores trabajan con la definición de potencialmente isomorfo restringida a las extensiones de forcing c.c.c. que no colapsan cardinales $< \lambda$.

En este artículo, a diferencia de los demás, se tiene una prueba canónica que sirve para todas las teorías no clasificables. En las siguientes páginas voy a reconstruirla en detalle, para mostrar otra técnica de trabajo con forcing distinta a la que emplearon los autores en [6].

Notación 5.7 *Sea θ un orden lineal.*

i) Sea $L^t_P = L^t \cup \{P_\eta\}_{\eta \in \theta^\omega}$, donde los P_η representan predicados unarios y L^t denota el lenguaje de árboles con el que venimos trabajando.

ii) Dado $\eta \in \theta^\omega$. Notamos $G_\eta(\theta) = \{\sigma \in \theta^\omega : \sigma(2n) = \eta(n)\}$,

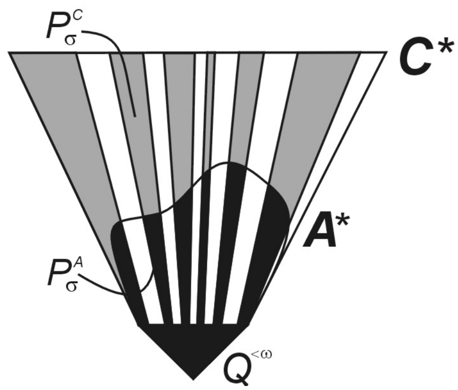
$S_\eta(\theta) = \{\sigma \in G_\eta : \sigma(2n+1) = 0$ salvo para finitos $n\}$.

iii) $C(\theta) = \cup_{\eta \in \theta^\omega} S_\eta(\theta)$.

iv) Dado $A \subseteq C(\theta)$. Notamos A^* la L^t_P-estructura cuyo universo es $A \cup \theta^{<\omega}$ y la interpretación de $P_\eta(\theta^*)$ es $S_\eta(\theta) \cap A$.

Definición 5.8 *Dado $A \subseteq C(\theta)$. Decimos que A^* es una* subestructura dispuesta *de $C(\theta)^*$ si dados $\eta \in \theta^\omega, n < \omega$ y $s \in \theta^n$, definimos $\varphi(x, \eta, s) = P_\eta(x) \wedge (s \sqsubseteq x)$ y tenemos que:*

$C(\theta)^* \vDash \exists x(\varphi(x, \eta, s)) \Longleftrightarrow A^* \vDash \exists x(\varphi(x, \eta, s))$



La última es una propiedad de clausura existencial que nos dice que si vemos a P_η como una relacíón de equivalencia, entonces los cocientes correspondientes de A^* y de $C(\theta)^*$ bajo esta relación, son iguales. Y esta igualdad es a la cual se apelará para demostración del siguiente lema.

Lema **5.9** *Si A^* y B^* son subestructuras dispuestas de $C(\mathbb{Q})^*$, entonces existe P orden parcial c.c.c. tal que $A^* \cong_P^{pot} B^*$*

Demostración. La idea es la usual: Encontrar a partir de un conjunto de isomorfismos parciales entre A y B un isomorfimo entre A^* y B^*. Construyamos entonces el orden que nos servirá (queremos que cumpla la c.c.c.): Sea P el conjunto de isomorfismos parciales finitos entre A y B ordenado de la siguiente manera: Para todos $p, q \in P, p \leq q$ si $dom(q) \subseteq dom(p)$ y $p \restriction dom(q) = q$, es decir, estamos ordenando por extensiones funcionales.

Para probar que P es c.c.c. definamos la siguiente relación: Dados $p, q \in P$, con $dom(p) = \langle a_1, ..., a_{n(p)} \rangle$ y $dom(q) = \langle a'_1, ..., a'_{n(q)} \rangle$ (ordenados lexicográficamente), decimos que $p \sim_{n,k} q$ si $n(p) = n(q) = n$, $k(p) = k(q) = k$ y para todo $i \leq n$ se tiene que $a_i \restriction k = a'_i \restriction k$ y $p(a_i) \restriction k = p(a_i) \restriction k$, donde $k(p)$ es el mínimo k talque:

$i)$ $\forall i, j(\ i \neq j \Longrightarrow (a_i \restriction k \neq a_j \restriction k) \ \wedge \ (p(a_i) \restriction k \neq p(a_j) \restriction k))$

$ii)$ $\forall n(2n + 1 \geq k \Longrightarrow (a_i(2n + 1) = 0) \wedge (p(a_i)(2n + 1) = 0)$

Es claro que $\sim_{n,k}$ es una relación de equivalencia que tiene ω clases.Por lo tanto si notamos por $P(n, k) = \{(p, q) \in P^2 : p\tilde{\ }_{n,k}q\}$,tenemos que $P = \cup_{n,k} P(n, k)$ y así P es c.c.c.

Para garantizar la existencia del $P-$genérico tenemos que mostrar que las clases $P(n, k)$ son cerradas para uniones, en otras palabras, tenemos que mostrar que dados dos elementos comparables en P existe $r \in P$ que los extiende a ambos:

Sean $p, q \in P(n, k)$. Veamos que $p \cup q \in P$.

Es suficiente probar que para todos $i, j \leq n$: Si $a_i < a'_j$, entonces $p(a_i) < q(a'_j)$.

Si $i \neq j$, por la definición de $\sim_{n,k}$ y gracias a que los dominios están organizados lexicográficamente, tenemos que si $i < j$, entonces $a_i \restriction k < a'_j \restriction k$ y $p(a_i) < q(a'_j)$

Si $i = j$, sea m el mínimo tal que $a_i(m) <_Q a'_i(m)$. Es claro que $m > k$ y par, porque para todo $h > k$ impar, $a_i(h) = 0 = a'_i(h)$. Supongamos que $P^A_\nu(a_i), P^A_\eta(a'_i)$. Veamos que $p(a_i) \restriction m = q(a'_i) \restriction m$. Sea $h < m$. Es claro que si $h \leq k$ o si h es impar y $k < h$, $p(a_i)(h) = q(a'_i)(h)$. Si h es par y $k < h$, como p y q preservan P_ν y P_η,entonces dado que m es mínimo:

$$p(a_i)(h) = \nu(h/2) = a_i(h) = a'_i(h) = \eta(h/2) = q(a'_i)(h)$$

Finalmente tenemos la desigualdad que buscabamos, gracias a que m es par y a la preservación de P_ν y P_η:

$$p(a_i)(h) = \nu(h/2) = a_i(h) < a'_i(h) = \eta(h/2) = q(a'_i)(h)$$

y así $p(a_i) < q(a'_j)$.

Para garantizar que el P-genérico es exhaustivo, necesitamos mostrar que podemos extender en un punto cualquier $p \in P$.

Tomemos $p \in P$, $a \in A \backslash dom(p)$, queremos encontrar $q \in P$ tal que $q \leq p$ y $dom(q) = dom(p) \cup \{a\}$. Sea $dom(p) = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ y sea $1 \leq r \leq n$ tal que $a_{r-1} < a < a_r$ y sea s el mínimo tal que $a_{r-1} \restriction s = a \restriction s$ y $a_{r-1}(s), a(s), a_r(s)$ sean diferentes. Supongamos además $P^A_\eta(a)$.

Sea $c = a_{r-1} \restriction s$.

Si s es par, como B^* es dispuesta, existe $\zeta \in B$, con $P^B_\theta(\zeta)$ y $p(c)^\frown \eta(s/2) \sqsubseteq \zeta$

Si s es impar, como Q es denso existe t tal que $p(a_{r-1})(s+1) < t < p(a_r)(s+1)$ para el cual existe $\zeta \in B$, con $P^B_\eta(\zeta)$ y $p(c)^\frown t \sqsubseteq \zeta$.

En cualquiera de los dos casos es fácil ver que $q = p \cup \{(a, \zeta)\} \in P$. ■

La idea de la demostración de los teoremas de no estructura en el fondo es la misma: El lema anterior nos da la fórmula para obtener el isomorfismo potencial de los órdenes que dirigirán los esqueletos de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski, que de esta manera resultan también isomorfos en la extensión. La segunda parte está destinada a probar que los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski basados en un par de estructuras dispuestas, no son isomorfos en el modelo base. La prueba de esta afirmación es muy parecida en cada uno de los casos, voy a probar para el caso particular de T no superestable, el siguiente teorema para que queden claros los detalles.

Teorema 5.10 *Sea T una $\tau-$teoría completa no superestable. Entonces existen $M, N \in Mod_{2^\omega}(T)$ y P orden parcial c.c.c. tales que*

$$M \cong^{pot}_P N \quad y\ M \not\cong N$$

Demostración. La idea principal de la prueba es encontrar dos subestrucuras dispuestas para poder aplicar el resultado del lema anterior. Como $\mathrm{Q}^{\leq\omega} \in K^\omega_{tr}$ por el teorema 3.1 existen $\{\varphi_n\}_{n<\omega}$y $\{\bar{a}_\eta : \eta \in Q^{\leq\omega}\}$ que atestiguan la no superestabilidad de T. Definamos para $\eta \in Q^\omega$, p_η el tipo sobre $E_{fin} = \{\bar{a}_\eta : \eta \in Q^{<\omega}\}$ que contiene $\{\varphi_n(\bar{x}, \bar{a}_{\eta\restriction n^\frown \eta(n)}) \wedge \neg \varphi_n(\bar{x}, \bar{a}_{\eta\restriction n^\frown \eta(n)+1}) : n < \omega\}$.

Ahora, Sea $C = C(Q)$, $C' = E_{fin} \cup \{\bar{a}_\eta : \eta \in C\}$ y $M_C = EM(C')$. Como E_{fin} es contable sólo existen $2^{\aleph_0}$ inmersiones de E_{fin} en M_C, notémoslas $\{f_\eta\}_{\eta \in Q^\omega}$. Sea $\rho_\eta \in S_\eta(Q)$ tal que para todo n, $\rho_\eta(2n+1) = 0$. Definamos ahora $A = \cup_{\eta \in Q^\omega} S'_\eta$, con

$$S'_\eta = \begin{cases} S_\eta(Q) & \text{si } M_C \text{ omite } f_\eta(p_{\rho_\eta}) \\ S_\eta(Q) - \{\rho_\eta\} & \text{si } M_C \text{ realiza } f_\eta(p_{\rho_\eta}) \end{cases}.$$

La construcción de A consiste en codificar información sobre la omisión de tipos en M_C. Esta "codificación" es muy parecida a la que se utlizó para la demostración de la no transitividad de $\equiv_P^{pot}$en la segunda sección, en esa prueba lo que hicimos fue "codificar", en los $\Phi(S)$, la información de la distribución del conjunto S en $\aleph_1$.

Volviendo a la prueba, veamos que A^* es una subestructura dispuesta de C^*:

Sea s$_n \in Q^n$, supongamos que existe $\nu \in Q^\omega$, tal que $s_n \sqsubseteq \rho_\nu (\rho_\nu \in P_\nu^C)$. Es claro que $s_n \sqsubseteq s \in P_\nu^A$, con s dado por: $s(m) = s_n(m)$, si $m \leq n$; $s(n+1) = \rho_\nu((n+1)/2)$ si $n+1$ es par y $s(n+1) = 1$ si $n+1$ es impar; $s(m) = \rho_\nu(m)$, si $m > n$.

Sean $A' = E_{fin} \cup \{\bar{a}_\eta : \eta \in A\}$ y $M_A = EM(A')$. Como $A^* \subseteq C^*$ son dispuestas, por el lema $A^* \cong_P^{pot} C^*$, entonces si G es el P-genérico, existe f talque $U[G] \vDash \hat{f} : A^* \cong C^*$, y por lo tanto $U[G] \vDash \hat{f} \restriction A : A \cong C$, de donde existe g tal que $U[G] \vDash \hat{g} : A' \cong C'$.

En $U[G]$ tomemos $F : M_A \to M_C$ dada por $F(\bar{a}_\eta) = \bar{a}_{g(\eta)}$. Es fácil constatar que si F es un isomorfismo entre M_A y M_C, entonces $M_A \cong_P^{pot} M_C$.

Para terminar la prueba nos falta comprobar que $M_A \ncong M_C$ en U (modelo base).

Supongamos que se tiene (*) definido por :

Para todo $\nu \in Q^\omega$, *para todo* $\bar{\eta} = (\eta_0, ..., \eta_n) \subseteq Q^\omega$ *y para todo* τ_1*−término* μ,*si* $\mu(\bar{a}_{ar\eta}) \in M$ *realiza* p_ν,*existe* i_0 *tal que* $\eta_{i_0} = \nu$.

Ahora se entenderá bien el papel de A: A codifica; pero, gracias a (*), no solo codifica información sobre la omisión de tipos sino que incluso codifica información sobre la pertenencia de algunos elementos a M_C.

Supongamos que $f : M_A \cong M_C$, y sea η tal que $f \restriction E_{fin} = f_\eta$. Si $\rho_\eta \in A$, M_C omite $f_\eta(p_{\rho_\eta})$ y obviamente M$_A$ lo realiza. Si $\rho_\eta \notin A, M_C$ realiza $f_\eta(p_{\rho_\eta})$ y M$_A$ lo omite, pues gracias a (*) si $\mu(\bar{a}_{\eta_0}, ..., \bar{a}_{\eta m}) \in M_A$ lo realiza, $\rho_\eta \in A'$(Absurdo). Entonces, en cualquier caso se contradice la existencia de dicho isomorfismo, luego tenemos el resultado que buscabamos. ■

Demostración de (*): Supongamos que $\nu \notin \bar{\eta}$. Sean m$_n$ el mínimo natural tal que $\eta_n(m_n) \neq \nu(m_n)$ y m el máximo de los $m_n + 1$. Entonces

$$tp_{at}(\eta_0, ..., \eta_n, \nu \restriction m^\frown \nu(m); \emptyset) = tp_{at}(\eta_0, ..., \eta_n, \nu \restriction m^\frown \nu(m) + 1; \emptyset)$$

y de esta manera, por la indiscernibilidad de los $\bar{a}_\eta$, tenemos que

$$tp_{at}(\bar{a}_{\bar{\eta}}^\frown \bar{a}_{\nu\restriction m^\frown \nu(m)}, \emptyset) = tp_{at}(\bar{a}_{\bar{\eta}}^\frown \bar{a}_{\nu\restriction m^\frown \nu(m)+1}, \emptyset)$$

y por argumentos semejantes a los de la prueba de Shelah:

$$M \models \varphi_m(\mu(\bar{a}_{\bar{\eta}}), \bar{a}_{\nu\restriction m^\frown \nu(m)}) \Longleftrightarrow \varphi_n(\mu(\bar{a}_{\bar{\eta}}), \bar{a}_{\nu\restriction m^\frown \nu(m)+1})$$

Entonces, $\mu(\bar{a}_{\bar{\eta}})$ no puede realizar p_ν. ■

Como dije al comienzo de eta parte esta prueba es canónica y nos servirá para los tres casos de teorías no clasificables. La adecuación de esta prueba a los otros dos casos (DOP y OTOP) consiste en tomar el orden $(I, <)$ del teorema 3.1 como $(\mathbb{Q}^{\leq\omega}, <)$ donde $<$ corresponde al orden lexicográfico. El teorema queda enunciado de la siguiente manera.

Teorema 5.11 *Si T es una teoría superestable completa contable con la DOP o la OTOP. Entonces existen $M, N \in Mod_{2^\omega}(T)$ y P orden parcial c.c.c. tales que*

$$M \cong_P^{pot} N \quad y\ M \ncong N$$

Hasta aquí los resultados han sido los esperados, es decir, teoremas de no estructura para teorías no clasificables, pero el siguiente ejemplo ilustra una dificultad que presentan este tipo de extensiones, deforman notoriamente el universo.

Ejemplo 5.12 *Sea $T = FER_\omega$, es decir la teoría de contables relaciones deequivalencia binarias E_n, tales que si $m > n$ entonces $E_m(a,b)$ implica $E_n(a,b)$ (E_m refina a E_n). Entonces existen $M, N \in Mod_{2^\omega}(T)$ y P orden parcial c.c.c. tales que*

$$M \cong_P^{pot} N \quad y\ M \ncong N$$

La prueba del anterior enunciado consiste principalmente en hacer un trabajo parecido al que se hizo para teorías no clasificables, cambiando $\mathbb{Q}^{\leq\omega}$ por $2^{\leq\omega}$.

Lo sorprendente de este ejemplo es que T es una teoría superestable, en otras palabras T es clasificable y tiene un teorema de no estructura con respecto a la potencia. Las deformaciones por extensiones de este tipo resultan entonces muy grandes en algunos casos. El problema que queda planteado después de este ejemplo es estudiado de nuevo en [16] donde los autores llegan a un resultado que generaliza este fenómeno a teorías superestables no $\aleph_0-$estables.

A. Apéndice

A.1. Más sobre modelos fuertemente equivalentes

De acuerdo con los resultados expuestos en la sección 3, queda todavía abierto el problema de establecer una relación de equivalencia a partir de la estrategia ganadora de $\exists$ entre los modelos de teorías no superestables. Recordemos que se presentó un ejemplo de una teoría estrictamente estable, T_α, para la cual el tipo de isomorfismo era capturable a partir de $\equiv^t$, mostrando de esta manera la imposibilidad del establecimiento de un teorema de no estructura análogo a los obtenidos para las demás teorías no clasificables. Para la resolución de este problema, es decir, para encontrar teoremas de no estructura que se tengan para todas las teorías no clasificables de manera homogenea (como por ejemplo 4.7 que demostramos en la sección 3) se han encontrado dos respuestas :

S. Shelah y T. Hyttinen, continuando en trabajo hecho en [4], publicaron una serie de tres artículos ([13],[14],[15]) dirigidos explicitamente a dar solución a este problema. En estos artículos trabajan con una definición de juego de Ehrenfeucht-Fraïssé generalizada (o de múltiples elecciones por jugada), formalmente estos juegos se diferencian de los definidos anteriormente en que en la jugada α el jugador $\forall$ tiene que elegir un cardinal $\kappa_\alpha < \lambda$, que será la cantidad de elementos que se escogerán en esa jugada, es decir, $\forall$ juega $\{x^\alpha_\beta : \beta < \kappa_\alpha\}$ y $\exists$ juega $\{y^\alpha_\beta : \beta < \kappa_\alpha\}$. Decimos ahora que M y N son $(t, \lambda)-$fuertemente equivalentes ($M \equiv^t_\lambda N$) si $\exists$ tiene una estrategia ganadora para $G^t_\lambda(M, N)$ (que denota el juego que acabamos de definir). Con respecto a esta nueva notación, tenemos que existen teorías no superestables (Por ejemplo: T_α. Ver sección 4) para las cuales, si $M, N \in Mod(T)$ entonces:

$$M \equiv^t_2 N \Rightarrow M \cong N$$

En [13], encuentran un resultado particular que resuelve el problema para teorías no superestables. En [14], el teorema principal es una respuesta global para el problema:

Teorema A.1 *Sean $\lambda = \mu^+, \kappa$ y μ regulares tales que $\kappa < \mu, \lambda^{<\lambda} = \lambda, \mu^\kappa = \mu$. Sea T un teoría no superestable, con $|T| \leq \lambda$ y $\kappa(T) > \kappa$. Entonces existen $M, N \in Mod_\lambda(T)$ tales que*

$$M \equiv^{\mu\times\kappa}_\lambda N \text{ y } M \ncong N$$

Para la demostración de este teorema se recurre a la construcción de un par de arboles J_0, J_1(obtenidos de $J^-_0, J^+_0, J^-_1, J^+_1$),que esquematicamente cumpliran un papel analogo al de J^0_S, J^1_S,es decir, se prueba que $J_0 \sim_\lambda J_1$ implica $EM(J_0) \equiv^{\mu\times\kappa}_\lambda EM(J_1)$. Después se muestra que $EM(J_0) \ncong EM(J_1)$ suponiendo que existe un isomorfismo y encontrando un par de sucesiones η, η' tales que $\eta \restriction (n + 1) \not\sqsubseteq \eta'$, para algun $n < \omega$, que contradicen las condiciones de las φ_n como en la prueba de Shelah. Note la analogía con la prueba del teorema 3.6. En [15], generalizan el resultado para teorías estables con DOP encontrando los modelos del teorema $F^a_\kappa-$saturados:

Teorema A.2 *Sean T una teoría estable con DOP, $\kappa = cf(\kappa) = \lambda(T) + \kappa^{<\kappa(T)} \geq \omega_1$, $\lambda = \lambda^{<\lambda} > \kappa^+$, tales que para $\alpha < \lambda$, $\alpha^\kappa < \lambda$. Entonces existe $M \in Mod_\lambda(T)$ $F^a_\kappa-$saturado, tal que para todo $t \in T(\lambda^+, \lambda)$, existe $N \in Mod_\lambda(T)$ $F^a_\kappa-$saturado tal que:*

$$M \equiv^t_\lambda N \text{ y } M \ncong N$$

Otra respuesta al problema de encontrar un teorema análogo para teorías no superestables aparece en [6] (análogo quiere decir que el teorema dependa de la existencia de una estrategia ganadora para $\exists$). En [6], la segunda parte del artículo está destinada al análisis de los teoremas de no estructura con respecto a la potencia que expuese en la sección 5. En la primera se da la respuesta al problema que estamos haciendo referencia. El enunciado es el siguiente:

Teorema A.3 *Suponga que dados $\lambda > \kappa$ un cardinal Mahlo y κ regular, existe $\kappa > \theta > \omega$ con $\theta^{<\theta} = \theta$. Entonces existe un orden parcial P tal que en cualquier extensión P-genérica se preservan todos los cardinales $< \kappa$, κ es regular y $\lambda = \kappa^+$ y además, si T es una $\tau-$teoría ($|\tau| \leq \omega$) no superestable, existen $M, N \in Mod_\lambda(T)$ tales que para todo $t \in U_\lambda$*

$$M \equiv_\lambda^t N \text{ y } M \ncong N$$

donde $U_\lambda = \cup_\kappa U_{\lambda,\kappa}$ y $U_{\lambda,\kappa} \subseteq T(\lambda,\kappa)$ el menor conjunto cerrado para $+, \times, \oplus$ que contiene α, para todo $\alpha < \lambda$.

Así, si es consistente la existencia de un cardinal Mahlo, tenemos el teorema que buscabamos para teorías no superestables. La prueba se apoya de en la construcción de los J_0, J_1 utilizada en [14]. Además de esto, los autores muestran una serie de consistencias equivalentes a la existencia de un cardinal Mahlo:

i) Existe un cardinal Mahlo

ii) Existe $S \subseteq S^{\omega_1}_{\omega_2}$ estacionario tal que $WE_\exists(GC^{\omega_1}(S^{\omega_1}_{\omega_2} - S, \omega_2))$

iii) Existen $I, J \in T(\omega_3, \omega+2)$ tales que $I \equiv^t_{\omega_2} J$ para todo $t \in U_{\omega_2}$, pero $I \ncong J$.

iv) Existen $I, J \in T(\omega_3, \omega+2)$ tales que $I \equiv^{\omega_1 \cdot \omega_1 + 1}_{\omega_2} J$,pero $I \ncong J$.

v) $I[\omega_2]$ es propio

Donde $I[\omega_2]$ denota el ideal de subconjuntos buenos de λ. $S \subseteq \lambda$ es bueno si existe un club C sobre λ y una sucesión $\{a_\beta\}_{\beta<\lambda} \subseteq \lambda$ tal que para todo $\alpha \in S \cap C$: α es límite singular y existe $B \subseteq \alpha$ con tipo de orden $cf(\alpha)$ no acotado en α tal que: $(\forall \gamma < \alpha)(\exists \beta < \alpha)(B \cap \gamma = a_\beta)$.

A.2. Más sobre modelos potencialmente isomorfos

Después del trabajo realizado por Baldwin,Laskowski y Shelah en [5], cuyos resultados fueron expuestos en la sección 5, Shelah y Laskowski [16] continuaron analizando esta relación ($\equiv_P^{pot}$). El problema que se tiene en [5] es la obtención de un teorema de no estructura con respecto a extensiones c.c.c. para algunas teorías clasificables (Recordemos que la teoría del ejemplo 5.12 es una teoría superestable). En [16] los autores muestran que para T superestable no $\aleph_0-$estable, con $|D(T)| \leq \aleph_0$(i.e. T tiene a lo más $\aleph_0$ $n-$tipos para todo n), se puede encontrar una extensión c.c.c. del universo W en la que se tiene el mismo teorema, es decir en W vale la siguiente proposición: Existe un par de modelos de

T no isomorfos potencialmente isomorfos. De donde podemos decir que las extensiones de este tipo deforman notoriamente el universo base.

La siguiente es la definición fundamental de [17].

Definición A.4 *$t \in T(\lambda, \kappa)$ es* debilmente semi-propio *si existe una noción de forcing P que preserva estacionarios y fuerza una rama de longitud κ en t, sin añadir subconjuntos de cardinal $< \kappa$.*

A. Hellsten, T. Hyttinen y S. Shelah son los autores de [17] que es la presentación de una investigación acerca de la existencia de $(\lambda^+, \lambda)-$árboles debilmente semi-propios. Su motivación gira entorno del siguiente resultado:

Teorema A.5 *Sea $\lambda = \lambda^{<\lambda} > \omega$. Entonces existe un $(\lambda^+, \lambda)-$árbol debilmente semi-propio si y sólo si para toda teoría T inestable, o superestable con DOP o con OTOP, existe un par de modelos no isomorfos potencialmente isomorfos en una extesión de forcing que preserva estacionarios y es λ-fiel (es decir, no añade subconjuntos de cardinal $< \lambda$).*

Este resultado lo podemos reescribir de la siguiente manera: Toda teoría no clasificable (excluyendo el caso no superestable) admite un teorema de no estructura con respecto a la potencia restringido a algunas extensiones de forcing *si y sólo si* existe un árbol con algunas características, en otras palabras, se esta analizando la existencia de teoremas de no estructura a partir de axiomas.

La investigación consistió en buscar bajo qué hipótesis se tenía la existencia o la no-existencia de dichos árboles. Entre estos resultados tenemos: Si λ es debilmente compacto, entonces no existen (λ^+, λ)-arboles debilmente semi-propios; Si $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, existe un $(\aleph_2, \aleph_1)$-árbol debilmente semi-propio; Si $\lambda = \theta^+ = 2^\theta$ para algún cardinal θ, entonces existe un $(\lambda^{++}, \lambda^+)-$árbol debilmente semi-propio.

Finalmente otro trabajo: [18], debido a D. Friedman, T. Hyttinen y M. Rautila, donde se encuentra otra equivalencia con respecto al establecimiento de teoremas de no estructura relativos a la potencia. El resultado obtenido por los autores es el siguiente:

Teorema A.6 *($0^\#$ existe) Sea T una teoría construible de primer orden, contable en L. T es clasificable si y sólo si el problema del isomorfismo potencial para modelos de cardinal $(\omega_2)^L$ es soluble para extensiones que preservan cardinales y no añaden conjuntos nuevos de cardinalidad $< \omega$.*

En otras palabras T es clasificable si y sólo si

$$\Big\{(M, N) \in L : M, N \in Mod_{\omega_2^L}(T) \ \wedge\ \exists P \in E(M \equiv_P^{pot} N)\Big\} \text{ es construíble}$$

donde E es la colección de nociones de forcing que preservan cadinales y no añaden reales nuevos, es decir ω-fieles.

Este último resultado es una caracterización muy interesante de las teorías clasificables, pues se realiza a partir de propiedades conjuntísticas de $Mod(T)$, mientras que la definición de teoría clasificable parte de propiedades dadas de la teoría de estabilidad. Con este último teorema queda claro que la clase $Mod(T)$, cuando T es clasificable, tiene cierta *estructura* que permite reconstruir la naturaleza de la teoría, que era la idea intuitiva con la que partimos de la introducción.

Referencias

[1] Baldwin,J. Fundamentals of Stability Theory. Springer-Verlag.1988.

[2] Shelah,S. Classification Theory and the number of non-isomorphic models. North-Holland.1991.

[3] Shelah,S. Classification of first order theories which have a structure theorem. Bull.Amer.Math.Soc. **12**,227–232.1985.

[4] Hyttinen,T.,Tuuri,H. Constructing strongly equivalent nonisomorfic models for unstable theories. APAL **52**,203–248.1991.

[5] Baldwin,J.,Laskowski,M.,Shelah,S. Forcing Isomorphism. JSL **58**,1291–1301.1993.

[6] Huuskonen,T.,Hyttinen,T.,Rautila,M. On potencial isomorphism and non-structure. Arch.Math.Logic **43**,85–120.2004.

[7] Nadel,M.,Stavi,J. $L_{\infty,\lambda}-$equivalence, isomorphism and potential isomorphism. Trans.Amer.Math.Soc. **236**,51–74.1978.

[8] Shelah,S. Existence of $L_{\infty,\lambda}-$equivalent, non isomorphic models of T of power λ. APAL **34** 291–310.1987.

[9] Baumgartner,J.,Harrington,L.,Kleinberg,E. Adding a closed unbounded set. JSL **41**,481–482.1976.

[10] Hyttinen,T.,Väänänen,J. On Scott and Karp trees of uncountable models. JSL **55**,897–908.1990.

[11] Hyttinen,T.,Shelah,S.,Tuuri,H. Remarks on strong nonstructure theorems. Notre Dame J. of Formal Logic **34**, 157–168.1993.

[12] Jech,T. Set Theory. Academic Press,New,York.1978.

[13] Hyttinen,T.,Shelah,S. Constructing strongly equivalent nonisomorphic models for unsuperstable theories.Part A. JSL **59**,984–996.1994.

[14] Hyttinen,T.,Shelah,S. Constructing strongly equivalent nonisomorphic models for unsuperstable theories.Part B. JSL **60**,1260–1272.1995.

[15] Hyttinen,T.,Shelah,S. Constructing strongly equivalent nonisomorphic models for unsuperstable theories.Part C. JSL **64**,634–642.1999.

[16] Laskowski,M.,Shelah,S. Forcing Isomorphism II. JSL **61**,1305–1320.1996.

[17] Hellsten,A.,Hyttinen,T.,Shelah,S. On potencial isomorphism and semi-proper trees.

[18] Friedman,D.,Hyttinen,T.,Rautila,M. Classification theory and $0^{\#}$. JSL **68**,580–588.2003.

[19] Hodges,W. Model Theory.Cambridge University Press. 1987.

[20] Barwise,J. Back and forth through infinitary logic. Studies in Model Theory,5–34. Mathematical Association of America. 1973.