Satisfacción y poder expresivo: algunos resultados sobre sistemas lógicos abstractos

Sebastian Ricardo Cristancho Sierra

Trabajo dirigido por: Andrés Villaveces Niño

Trabajo presentado para optar por título de
Matemático

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Colombia
Junio de 2018

Resumen

En este trabajo se estudian algunas propiedades de diferentes sistemas lógicos. En particular, se estudia la propiedad de compacidad y algunas de sus consecuencias. En la primera parte, se presenta el Teorema de Lindström. En la segunda parte, se presentan tres consecuencias importantes de compacidad en la lógica de primer orden: Interpolación de Craig, Consisitencia de Robinson y Definibilidad de Beth. En la tercera parte, se estudia la falla de la propiedad de compacidad en lógicas infinitarias y se exploran, según sea el caso, sustitutos naturales para obtener resultados análogos a los obtenidos en lógica de primer orden a partir de la compacidad.

Palabras clave: Lógicas, Compacidad, Interpolación, Consistencia, Definibilidad.

Índice general

Capítulo 1

Compacidad: el corazón de la lógica de primer orden

Una de las propiedades fundamentales de la lógica primer orden es la compacidad. Según esta propiedad un conjunto de sentencias es satisfactible si y solo si cada uno de sus subconjuntos finitos lo es. La compacidad enlaza lo finito con lo infinito y con ella se pueden probar resultados positivos y negativos. De un lado, la compacidad puede asegurar la existencia de modelos para teorías a partir de la verificación de la existencia de modelos para sus partes finitas (tarea que generalmente puede resultar más sencilla). De otro lado, la compacidad muestra los límites expresivos de la lógica de primer orden. Nos muestra qué conceptos no se pueden definir (buen orden, finitud, etc.), que estructuras no se pueden capturar mediante el lenguaje (aritmética estándar, reales estándar, grupos libres de torsión, cuerpos de característica cero, etc.). Además de estos resultados, la compacidad también se usa para probar otros teoremas importantes de la lógica de primer orden. En el capítulo dos exploraremos tres casos (Craig, Robinson, Beth).

Parece, pues, que la compacidad es una propiedad esencial de la lógica de primer orden. El Teorema de Lindström establece precisamente eso, que la compacidad es una propiedad en el corazón de la lógica de primer orden. De forma más precisa, el Teorema de Lindström asegura que la lógica de primer orden es la lógica más expresiva que cumple compacidad y Lowenheim-Skolem descendente.

1.1. ¿Qué es una lógica?

Definición 1.1.1. Una lógica $\mathcal{L}$ es una pareja $(L, \models_{\mathcal{L}})$ en la que L es una función que asocia a todo conjunto de símbolos S el conjunto *L(S)* (que serán las *S-sentencias* de la lógica $\mathcal{L}$) y $\models_{\mathcal{L}}$ es una relación binaria entre la clase de todas las estructuras y la clase de todas las sentencias. La función L y la relación $\models_{\mathcal{L}}$ cumplen las siguientes porpiedades:

1. Si $S_0 \subseteq S_1$, entonces $L(S_0) \subseteq L(S_1)$.
2. Si $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ (esto es, si $\mathfrak{A}$ está en la relación $\models_{\mathcal{L}}$ con φ), entonces existe un conjunto S tal que $\mathfrak{A}$ es una S-estructura y $\varphi \in S$.
3. *(Propiedad de isomorfismo).* Si $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \models_{\mathcal{L}} \varphi$.
4. *(Propiedad de reducto).* Si $S_0 \subseteq S_1$, $\varphi \in L(S_0)$ y $\mathfrak{A}$ es una S_1-estructura, entonces

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{si y solo si} \quad \mathfrak{A}|_{S_0} \models_{\mathcal{L}} \varphi$$

1.2. Ejemplos

Los siguientes son ejemplos de lógicas:

- **Lógica de primer orden ($\mathcal{L}_{ww}$).** La lógica de primer orden, también llamada $\mathcal{L}_{ww}$ por razones que quedarán claras más adelante, es el ejemplo más conocido de una lógica. Las definiciones de la función L y la relación $\models_{\mathcal{L}}$ son las usuales. La función L viene dada por las reglas inductivas de formación de fórmulas de la lógica de primer orden y la relación $\models_{\mathcal{L}_{ww}}$ está dada por la definición de la verdad de Tarski.
- **Lógica de segundo orden ($\mathcal{L}_{II}$).** La lógica de segundo orden es una extensión de la lógica de primer orden. A la sintaxis usual de la la lógica de primer orden se agregan nuevas variables. Por cada número natural n se agregan al lenguaje las variables

$$\begin{array}{c} X_1^1, X_1^2, X_1^3, ...X_1^n, ... \\ X_2^1, X_2^2, X_2^3, ...X_2^n, ... \\ \vdots \\ X_n^1, X_n^2, X_n^3, ...X_n^n, ... \end{array}$$

El objetivo de esta adición consiste en poder 'hablar' no solo acerca de objetos, como sucede en la lógica de primer orden, sino de relaciones entre objetos. La función L será la misma que en la lógica de primer orden con dos reglas adicionales:

1. Si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos, entonces $Xt_1t_2..., t_n$ es una fórmula.
2. Si φ es una fórmula de la lógica de segundo orden, entonces $\exists X\varphi$ también lo será.

La relación $\models_{\mathcal{L}_{II}}$ coincidirá con la relación de satisfacción de la lógica de primer orden. Para las fórmulas que incluyan los nuevos símbolos de variables se define la relación como:

1. $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{II}} Xt_1t_2..., t_n$ si y solo si $\gamma(X)$ vale para $t_1^M t_2^M ..., t_n^M$ ($\gamma(X)$ es la interpretación de la variable X dada por una función de asignación γ).
2. $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{II}} \exists X\varphi$ si y solo si existe $C \subseteq M^n$ tal que $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{II}} \varphi\left(\frac{C}{X}\right)$.

- **Lógicas infinitarias ($\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$)**. Las lógicas infinitarias forman otra extensión de la lógica de primer orden. Si la lógica de segundo orden suprime la limitación de la lógica de primer orden de cuantificar sobre un solo tipo de objetos, agregando variables para cuantificar sobre relaciones de cualquier aridad, las lógicas infinitarias eliminan las limitaciones relacionadas con la longitud de las fórmulas. En lógica de primer orden, las fórmulas son, por definición, cadenas finitas de símbolos. No se puede hacer conjunciones o disyunciones infinitas y tampoco se admiten como fórmulas expresiones con una cantidad infinita de cuantificadores anidados. La lógica $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$, donde κ y λ son cardinales infinitos, permite hacer conjunciones de cualquier cantidad menor que κ de fórmulas y permite formar expresiones con cualquier cantidad menor que λ de cuantificadores anidados. La lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ permite conjunciones y cuantificadores anidados de cualquier extensión. Ahora ya se puede ver por qué la lógica de primer orden también se denomina $\mathcal{L}_{ww}$. Trivialmente se puede verificar que todas las fórmulas de la lógica de primer orden son fórmulas de la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$. Pero en $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ valen adicionalmente la siguientes reglas de formación de fórmulas:

  1. Si I es un conjunto de fórmulas con $|I| < \kappa$, entonces $\bigwedge\limits_{\varphi \in I} \varphi$ también es fórmula.

2. Si φ es fórmula, entonces $\exists x_1 x_2 ... x_\alpha \varphi$ también es fórmula, donde $\alpha < \lambda$.

La relación de satisfacción $\models_{\mathcal{L}_{\kappa\lambda}}$ se define como en la lógica de primer orden agregando lo siguiente:

1. $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{\kappa\lambda}} \bigwedge\limits_{\varphi \in I} \varphi$ si y solo si $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{\kappa\lambda}} \varphi$ para todo $\varphi \in I$
2. $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{\kappa\lambda}} \exists x_1 x_2 ... x_\alpha \varphi$ si y solo si existen $c_1, c_2, ..., c_\alpha$ elementos de M tales que $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{\kappa\lambda}} \varphi \left(\frac{c_1}{x_1} \frac{c_2}{x_2} ... \frac{c_\alpha}{x_\alpha} \right)$.

- **Lógicas con cuantificadores generalizados ($\mathcal{L}_Q$).** Los cuantificadores generalizados fueron introducidos por Mostowski y posteriormente por Lindström en el marco de sus estudios acerca de la teoría de modelos abstracta. El cuantificador existencial de la la lógica de primer orden se interpreta como "existe al menos un elemento tal que...". Pero no hay información precisa acerca de la cardinalidad del conjunto de elementos que cumplen la propiedad. Con sencillas manipulaciones, anidando cuantificadores existenciales, en lógica de primer orden se puede expresar que existen al menos dos elementos que cumplen determinada propiedad. Lo mismo se puede hacer para tres, cuatro, cinco, ... Sin embargo, no hay ningún cuantificador en la lógica de primer orden que no permita decir, por ejemplo, que existen al menos $\aleph_0$ elementos que cumplen determinada propiedad. Y esto tampoco se puede obtener con ninguna combinación permitida de los cuantificadores de la lógica de primer orden. Las lógicas con cuatificadores generalizados extienden la lógica primer orden al agregar a la sintaxis de esta nuevos cuantificadores Q_n que serán interpretados como "existen al menos $\aleph_n$ elementos tales que...". En la lógica $\mathcal{L}_{Q_n}$, se agrega a las reglas usuales de formación de fórmulas de la lógica de primer orden la siguiente regla:

  1. Si φ es una fórmula, entonces $Q_n x \varphi$ también es fórmula.

  La relación $\models_{\mathcal{L}_{Q_n}}$ coincide con la relación de satisfacción de la lógica de primer orden extendiendo la definición para las nuevas fórmulas del siguiente modo:

  1. $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{Q_n}} Q_n x \varphi$ si y solo si $|\{ c \in M \mid \mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{Q_n}} \varphi \left(\frac{c}{x} \right) \}| \geq \aleph_n$.

1.3. ¿Cómo comparar lógicas?

Las lógicas se compararán de acuerdo a su expresividad. Una lógica $\mathcal{L}_1$ será más expresiva que otra $\mathcal{L}_2$ si con las fórmulas de $\mathcal{L}_1$ se puede caracterizar más estructuras que las que se pueden caracterizar con las fórmulas de $\mathcal{L}_2$. Antes de dar una definición más precisa, consideremos una lógica $\mathcal{L} = (L, \models_{\mathcal{L}}$), un conjunto de símbolos S y una $\varphi \in L(S)$, y definamos el siguiente conjunto de estructuras:

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \{\, \mathfrak{M} \text{ es una } S\text{-estructura} \mid \mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}} \varphi\}$$

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi)$ es la clase de todas las estructuras en las que vale la sentencia φ. En este sentido, podemos decir que φ describe esa clase de estructuras.

Definición 1.3.1. Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos lógicas. Decimos que $\mathcal{L}_2$ es *al menos tan expresiva* como $\mathcal{L}_1$, y lo notamos $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ si para todo S y toda $\varphi \in L_1(S)$ existe una $\psi \in L_2(S)$ tal que $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}_1}(\varphi) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}_2}(\psi)$. Si $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_1$ diremos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son *igualmente expresivas*, y lo notamos $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$.

En otras palabras, $\mathcal{L}_1$ es al menos tan expresiva $\mathcal{L}_2$ cuando, dada cualquier $\varphi \in L_1(S)$, existe $\psi \in L_2(S)$ que captura exactamente las mismas estructuras.

1.3.1. Resultados

A partir de esta definición se pueden verificar los siguientes resultados:

- $\mathcal{L}_{ww} \preceq \mathcal{L}_{II}$
- $\mathcal{L}_{ww} \preceq \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$
- $\mathcal{L}_{ww} \preceq \mathcal{L}_{Q_n}$
- $\mathcal{L}_{Q_n} \preceq \mathcal{L}_{w_{n+1}w_{n+1}}$

1.4. Propiedades de los sistemas lógicos

En la lógica de primer orden se puede demostrar, entre otras cosas, el Teorema de Compacidad y el Teorema de Lowenheim-Skolem descendente. Estos resultados pueden valer o no en otras lógicas.

- **Propiedad de Compacidad (Comp).** Diremos que en una lógica $\mathcal{L} = (L, \models_{\mathcal{L}})$ vale la propiedad de Compacidad si para todo S y todo $\Phi \subseteq L(S)$, se cumple lo sugiente: Φ es satisfactible si y solo si todo subconjunto finito de Φ es satisfactible.
- **Propiedad de Lowenheim-Skolem descendente (LS$\searrow$).** Diremos que en una lógica $\mathcal{L} = (L, \models_{\mathcal{L}})$ vale la propiedad de Lowenheim-Skolem descendente si para todo S y todo $\varphi \in L(S)$, se cumple lo sugiente: Si φ es satisfactible, entonces existe un modelos de φ cuyo dominio es, a lo más, contable.

1.4.1. Resultados

Se tienen los siguientes resultados:

- **$\mathcal{L}_{II}$ no cumple Comp ni LS$\searrow$.**
  - Un conjunto M es finito si toda función inyectiva de M en M es también sobreyectiva. Esta propiedad de puede expresar en la lógica de segundo orden mediante la siguiente fórmula:

    $$\forall X((\forall x \exists^{=1} y Xxy \to (\forall xyz(Xxz \land Xyz \to x = y) \to \forall y \exists x Xxy)$$

    Llamemos φ_{fin} a esta sentencia y consideremos ahora las sentencias $\varphi_{\geq n}$ que expresan "existen al menos n elementos". Estas sentencias se pueden escribir en la lógica de primer orden y, por tanto, forman parte también de las sentencias de segundo orden. El conjunto $\{\varphi_{fin}\} \cup \{\varphi_{\geq n} \mid n \geq 1\}$ es un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_{II}$. El lector puede verificar que se trata de un conjunto finitamente satisfactible pero no satisfactible. Esto muestra que $\mathcal{L}_{II}$ no cumple la propiedad de Compacidad.
  - Un conjunto M es contable si y solo si existe un orden lineal definido en M tal que para todo $m \in M$ se cumple que m tiene un número finito de predecesores. Se deja como ejercicio mostrar que esta propiedad de los conjuntos contables se puede expresar como una sentencia de la lógica de segundo orden. Llamemos $\varphi_{\leq contable}$ a esta sentencia. Supongamos que existe un modelo $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{II}} \neg\varphi_{\leq contable}$. En este caso $\neg\varphi_{\leq contable}$ tendría un modelo infinito pero no un modelo contable. Con ello se muestre que en $\mathcal{L}_{II}$ no se cumple la propiedad de Lowenheim-Skolem descendente.

- **$\mathcal{L}_{w_1w}$ no cumple Comp pero sí LS$\searrow$.**
  - Consideremos nuevamente las sentencias de la lógica de primer orden $\varphi_{\geq n}$ que expresan "existen al menos n elementos". Tales expresiones también on sentencias de $\mathcal{L}_{w_1w}$. Formemos la disyunción infinita $\bigvee\{\neg\varphi_{\geq n} \mid n \geq 1\}$. Esta disyunción es una sentencia de $m\mathcal{L}_{w_1w}$ y caracteriza a las estructuras finitas. Llamémosla φ_{fin}. Consideremos el conjunto de fórmulas $\{\varphi_{fin}\} \cap \{\varphi_{\geq n} \mid n \geq 1\}$. El lector puede verificar que este es un conjunto de sentencias de la lógica $\mathcal{L}_{w_1w}$ finitamente satisfactible pero no satisfactible. Esto muestra que $\mathcal{L}_{w_1w}$ no cumple la propiedad de compacidad. El mismo argumento sirve para probar que, en general, las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$, con κ diferente de w, no cumplen la propiedad de Compacidad.
  - La prueba de Lowenheim-Skolem descendente para la lógica $\mathcal{L}_{w_1w}$ puede encontrarde en Ebbinghaus, Flum y Thomas [1994].

- **$\mathcal{L}_{Q_1}$ no cumple LS$\searrow$ pero sí Comp.**
  - La sentencia $Q_1x\,x = x$ de la lógica $\mathcal{L}_{Q_1}$ vale en todos los modelos cuyo dominio tiene, al menos, $\aleph_1$ elementos. Es decir, si $\mathfrak{M} \models_{\mathcal{L}_{Q_1}} Q_1x\,x = x$, el dominio de $\mathfrak{M}$ es un conjunto no contable. La sentencia $Q_1x\,x = x$ tendría por tanto modelos infinitos pero no modelos contables. Esto muestra que en la lógica $\mathcal{L}_{Q_1}$ no vale la propiedad de Lowenheim-Skolem descendente. El mismo argumento sirve para mostrar que, en general, en las lógicas $\mathcal{L}_{Q_n}$ no se cumple la propiedad de Lowenheim-Skolem descendente.
  - La prueba de compacidad para $\mathcal{L}_{Q_1}$ puede encontrarse en Barwise y Fefermann [1985].

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos:

Lógica	Comp.	LS$\searrow$
$\mathcal{L}_{ww}$	$\surd$	$\surd$
$\mathcal{L}_{II}$	X	X
$\mathcal{L}_{w_1w}$	X	$\surd$
$\mathcal{L}_{Q_1}$	$\surd$	X

1.5. El teorema de Lindström

En la sección anterior se mostraron algunos resultados relacionados con extensiones de la lógica de primer orden. Las lógicas $\mathcal{L}_{II}$, $\mathcal{L}_{w_1 w}$ y $\mathcal{L}_{Q_1}$ tienen más poder expresivo que la lógica de primer orden. Sin embargo, en ellas deja de cumplirse la propiedad de compacidad o la propiedad de Lowenheim-Skolem descendente. Esto no es casualidad. En el fondo está el teorema de Lindström, que asegura que la lógica de primer orden es la lógica más expresiva que cumple Compacidad y Lowenheim-Skolem descendente. En otras palabras, si hay una lógica más expresiva que la lógica de primer orden, esa lógica no cumple Compacidad o Lowenheim-Skolem descendente. Una manera más interesante de interpretar el teorema de Lindström esta relacionada con la incapacidad de la lógica de primer orden para detectar diferencias entre los infinitos. Por los teoremas de Lowenheim-Skolem ascendente y descendente, válidos en lógica de primer orden, se tiene que cualquier teoría que tenga un modelo infinito, tiene modelos infinitos de cualquier cardinalidad. En ese sentido, se puede decir que la lógica de primer orden es ciega a la diferencia entre los infinitos. En esta interpretación el teorema de Lindström asegura que en cualquier lógica que detecte diferencias entre los infinitos debe fallar la compacidad o Lowenhem-Skolem descendente.

Antes de presentar el enunciado preciso del Teorema de Lindström definiremos el concepto de lógica regular.

Definición 1.5.1. Una lógica regular es una lógica que satisface las tres siguiente propiedades:

1. **Propiedad de conectivos booleanos**. Una lógica $\mathcal{L}$ satisface la propiedad de conectivos booleanos si:

   - Dado S un conjunto de símbolos y $\varphi \in L(S)$, existe un $\chi \in L(S)$ tal que para toda S-estructura $\mathfrak{A}$:
   $$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \chi \quad \text{si y solo si no} \quad \mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$$
   - Dado S un conjunto de símbolos y $\varphi, \psi \in L(S)$, existe un $\chi \in L(S)$ tal que para toda S-estructura $\mathfrak{A}$:
   $$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \chi \quad \text{si y solo si no} \quad \mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \text{ o } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$$

2. **Propiedad de relativización.** Una lógica $\mathcal{L}$ admite relativización si para todo conjunto de símbolos S, toda $\varphi \in L(S)$ y todo símbolo unario U existe una $\psi \in L(S \cup \{U\})$ tal que:

$$(\mathfrak{A}, U^A) \models_{\mathcal{L}} \psi \quad \text{si y solo si no} \quad [U^A]^{\mathfrak{A}} \models_{\mathcal{L}} \varphi.$$

para todas las S-estructuras $\mathfrak{A}$ y todos los S-conjuntos cerrados U^A de A, donde $[U^A]^{\mathfrak{A}}$ es la subestructura de $\mathfrak{A}$ con dominio U^A

3. **Propiedad de reemplazo.** Una lógica $\mathcal{L}$ admite reemplazo de símbolos de función y símbolos de constante por símbolos de relación si para todo conjunto de símbolos S y se toma S^r como el conjunto de símbolos en el que los símbolos de función y de contante son reemplazados por símbolos de relación para sus gráficos, entonces para toda $\varphi \in L(S)$ existe una $\psi \in L(S^r)$ tal que para toda S-estructura $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{si y solo si} \quad \mathfrak{A}^r \models_{\mathcal{L}} \psi.$$

La definición de $\mathfrak{A}^r$ es la natural.

Las lógicas regulares son, en una palabra, lógicas que tienen las mismas herramientas expresivas que la lógica de primer orden. El enunciado preciso del Teorema se muestra a continuación:

Teorema 1.5.1 (Lindström). *Dada $\mathcal{L}$ una lógica regular tal que $\mathcal{L}_{ww} \preceq \mathcal{L}$. Si en $\mathcal{L}$ se cumple Comp y $LS\searrow$, entonces $\mathcal{L}_{ww} \sim \mathcal{L}$.*

Antes de probar el teorema de Lindström, vamos a hacer algunas definiciones y observaciones. En primer lugar, definiremos qué es un m-isomorfismo, un isomorfismo parcial y un p-isomorfismo.

Definición 1.5.2.

1. Un *isomorfismo parcial* entre S-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es un isomorfismo entre subconjutos de A y B que respeta las constantes, las relaciones y las funciones funciones. En un isomorfismo parcial p llamamos $dom(p)$ al dominio de p y $rang(p)$ al rango de p.

2. Un *m-isomorfismo* es una sucesión $I_1, I_2, ...I_m$ de isomorfismos parciales tal que:

   a) (Propiedad *forth*) Para todo $p \in I_{n+1}$ y $a \in A$ existe un $q \in I_n$ con $q \supseteq p$ y $a \in dom(q)$.

b) (Propiedad *back*) Para todo $p \in I_{n+1}$ y $b \in B$ existe un $q \in I_n$ con $q \supseteq p$ y $b \in rang(q)$. Si hay un m-isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ decimos que $\mathfrak{A}$ y$\mathfrak{B}$ son *m-isomorfas* y lo notamos $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. **Nota:** Si $m = w$ decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *finitamente isomorfas.*

3. Un *p-isomorfismo* es un conjunto I de isomorfismos parciales tal que:

   a) (Propiedad *forth*) Para todo $p \in I$ y $a \in A$ existe un $q \in I$ con $q \supseteq p$ y $a \in dom(q)$.

   b) (Propiedad *back*) Para todo $p \in I$ y $b \in B$ existe un $q \in I$ con $q \supseteq p$ y $b \in rang(q)$. Si hay un p-isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *parcialmente isomorfas* y lo notamos $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Algunos resultados importantes relacionados con los conceptos anteriores son los teoremas de Fraissé y de Cantor. El teorema de Fraissé ofrece una caracterización puramente algebraica del concepto de equivalencia elemental. El teorema de Cantor establece el isomorfismo de estructuras contables parcialmente isomorfas. La prueba de estos resultados puede encontrarse en Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., Thomas, Wolfgang [1995]. En el caso del teorema de Cantor se trata de una aplicación del método de back and forth.

Teorema 1.5.2 (**Fraissé**). $\mathfrak{A} \cong_w \mathfrak{B}$ *si y solo si* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son elemtalmente equivalentes.*

Teorema 1.5.3 (**Cantor**). *Si* $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ *y* A *y* B *son contables,* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Los conceptos anteriores desempeñarán un papel fundamental en la prueba del Teorema de Lindström, en la medida que un m-isomorfismo puede expresarse como una sentencia de primer orden. Para ver esto, consideremos S un conjunto se símbolos que contenga únicamente símbolos de relación. Sea $L_r(S)$ el conjunto de las sentencias de primer orden que contengan a lo más las variables $x_0, x_1, ...x_{n-1}$. Definamos el conjunto de sentencias

$$\Phi_r = \{\, \varphi \mid \varphi \text{ es atómica o la negación de una atómica}\,\}$$

Se tiene que Φ_r es finito. Por otro lado, como S es un lenguaje puramente relacional, para cualquier S-subestructura $\mathfrak{B}$ y cualesquiera $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ se tiene que $\{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ es una subestructura. Ahora vamos a construir en una sentencia de la lógica de primer orden que capture la noción de m-isomorfismo en el sentido de que cualquier estructura $\mathfrak{A}$ que satisfaga esa sentencia sea m-isomorfa a $\mathfrak{B}$. De manera más precisa, para $\mathfrak{A}$ y $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

definiremos inductivamente formulas que definan un isomorfismo parcial entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ en $\{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ dado por $a_i \mapsto b_i$ que sea n veces extendible. Las fórmulas son las siguientes:

$$\varphi^0_{\mathfrak{B},b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}} := \{\, \varphi \mid \mathfrak{B} \models \varphi(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \,\}$$

$$\varphi^{n+1}_{\mathfrak{B},b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}} := \forall x_r \bigvee \{\, \varphi^n_{\mathfrak{B},b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}} \mid b \in \mathfrak{B} \,\} \wedge \bigwedge \{\, \exists x_r \varphi^n_{\mathfrak{B},b_0,b_1,\ldots,b_{r-1},b} \mid b \in \mathfrak{B} \,\}$$

Las fórmulas así definidas son los análogos en lógica de primer orden de la fórmula de Scott en lógica infinitaria. En particular, $\varphi^n_{\mathfrak{B},\emptyset}$ es una sentencia y $\mathfrak{A} \models \varphi^n_{\mathfrak{B},\emptyset}$ implica que existe un n-isomorfismo $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. La sentencia $\varphi^n_{\mathfrak{B},\emptyset}$ dice: *"Esta estructura es n-isomorfa a $\mathfrak{B}$"*. Con estos preliminares ya podemos entrar en la prueba del Teorema de Lindstöm.

Demostración. La prueba procede por contradicción. Se supone que existe un conjunto S y una sentencia $\psi \in L(S)$ que no es equivalente a ninguna sentencia de la lógica de primer orden. A continuación se siguen los siguientes pasos:

1. Se muestra que para todo $m \in \mathbb{N}$ existen S-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$, $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi$ y $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

2. Los m-isomorfismos de expresan como sentencias de primer orden y usando Compacidad se consiguen modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ p-isomorfos (parcialmente isomorfos) con $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$ y $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi$.

3. Por Lowenheim-Skolem descendente se puede asumir que los modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *contables*. Como $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *contables*, se tiene que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. De otro lado, teníamos que $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi$. Pero esto contradice la invarianza bajo isomorfismos presente en la definición de las lógicas.

Primer paso: Sea $\mathcal{L}$ una lógica regular que satisface Comp y LS$\searrow$. Asumamos que $\mathcal{L}_{ww} \prec \mathcal{L}$. Existiría entonces una sentencia $\psi \in L(S)$ no equivalente a ninguna sentencia de primer orden. Por Reemplazo, podemos asumir que S contiene únicamente símbolos de relación. Ahora probaremos que para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $S_0 \subseteq S$ finito existen S-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models_L \psi$, $\mathfrak{B} \models_L \neg\psi$ y $\mathfrak{A}|_{S_0} \cong_m \mathfrak{B}|_{S_0}$. Sea $S_0 \subseteq S$ finito y $m \in \mathbb{N}$. Definamos $\varphi := \bigvee \{\, \varphi^m_{\mathfrak{A}|_{S_0},\emptyset} \mid \mathfrak{A} \models \psi \,\}$. La sentencia φ es una sentencia de primer orden que dice algo como *"este estructura es m-isomorfa a $\mathfrak{A}|_{S_0}$ para alguna estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi$"*. En primer lugar, debemos notar que hay una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi$. En caso contrario ψ sería una una sentencia lógicamente equivalente a una contradicción, y por tanto, sería equivalente a una sentencia de la lógica de primer orden. En segundo lugar, podemos ver, a partir de la definición que $\varphi^m_{\mathfrak{A}|_{S_0},\emptyset}$ es una disyunción finita, de modo que φ es una sentencia de la lógica de primer orden. Por otro lado, notemos que si una S-estructura $\mathfrak{A}$ satisface $\mathfrak{A} \models \psi$ se cumple que su reducción a una S_0-estructura es m-isomorfa a sí misma. De ahí concluimos que $\psi \to \varphi$ es una fórmula válida. De otro lado, también tenemos que $\varphi \to \psi$ no puede ser una fórmula válida, pues en caso contrario ψ sería equivalente a una fórmula de primer orden (a φ). Por lo tanto la sentencia $\varphi \wedge \neg\psi$ es satisfactible, esto es, existe una S-estructura $\mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \neg\psi$. Con ello hemos encontrado S-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models_L \psi$, $\mathfrak{B} \models_L \neg\psi$ y $\mathfrak{A}|_{S_0} \cong_m \mathfrak{B}|_{S_0}$.

Segundo paso: Buscamos pasar de los m-isomorfismos a un p-isomorfismo usando el teorema de compacidad. Para poder aplicar compacidad debemos poder expresar el enunciado del primer paso en una sentencia de primer orden. Es decir, debemos encontrar una sentencia de nuestra lógica abstracta que exprese que para todo $m \in \mathbb{N}$ existen S-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$, $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi$ y $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Para conseguir este fin construiremos un nuevo vocabulario de la siguiente manera: Definimos $S^+ := S \cup \{U, V, W, P, <, I, G, f, c\}$ donde U, V, W, P sin símbolos de relación unarios, $<, I$ son símbolos de relación binarios, G es un símbolo de relación ternario, f un símbolo de función unario y c una constante. Formemos el conjunto $K_m := A \cup B \cup \{1, ..., m\} \cup P$ donde A y B son los dominios de las estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ respectivamente, $P := \bigcup_{n=1}^{m} I_n$ donde I_n es el conjunto de isomorfismos parciales n veces extendibles entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Interpretaremos los símbolos del siguiente modo:

- El símbolo U como el subconjunto A.
- El símbolo V como el subconjunto B.
- El símbolo W como el subconjunto $\{1, ..., m\}$.
- El símbolo P como el subconjunto P especificado anteriormente.
- El símbolo $<$ como la relación de orden en $W = \{1, ..., m\}$.
- El símbolo I como $I \subseteq W \times P$ dado por la realción $I(n, p)$ si y solo si $p \in I_n$.
- El símbolo G como el subconjunto $G \subseteq P \times A \times B$ donde $G(p, a, b)$ si y solo si $a \in dom(p)$ y $p(a) = b$.

- El símbolo f como la función predecesor sobre W.
- El símbolo c como el elemento maximal m de W.

La S^+-estructuda $\mathcal{K}_m$ formada por el conjunto K_m y los símbolos interpretados del modo mencionado satisface las siguientes sentencias de primer orden:

- $(W, <, f, c)$ es un conjunto totalmente ordenado con elemento maximal c y función predecesor f.
- Si $p \in P$, entonces p es un isomorfismo parcial entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.
- Si $n > 0$ y $p \in I_n$, entonces, para cualquier elección $a \in U$ o $b \in B$, existe $q \in I_{f(n)}$ extendiendo a p y con $a \in dom(q)$ o $b \in im(q)$ según sea el caso.
- ψ^U, $(\neg\psi)^V$ se cumplen. ¡Aquí utilizamos la propiedad de Relativización de la lógica abstracta!

Las anteriores son un conjunto finito de sentencias. Podemos, por tanto, formar su conjunción. Este paso lo podemos hacer dado que nuestra lógica abstracta cumple la porpiedad de conectivos booleanos. Llamemos γ a esta sentencia ¡Esta es la sentencia que estabamos buscando! Ahora mostraremos que para cualquier $S_0 \subseteq S$ finito existen S-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$, $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi$ y $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Para ello consideremos $\Gamma = \{\gamma\} \cup \{$ "W tiene al menos m elementos" $\mid m \in \mathbb{N}\}$. Todo subconjunto finito de Γ es satisfactible por alguna estructura $\mathcal{K}_m$. Por **Compacidad** concluimos que Γ es satisfactible, es decir, existe una S^+-estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$. Esta estructura $\mathcal{M}$ tiene un subconjunto $W \in M$ totalmente ordenado con elemento maximal y tiene subestructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A} \models \psi$ y $\mathfrak{B} \models \neg\psi$. Definamos $I := \{\, p \in P \mid p \in I_{f(n)(c)}$para algún$n \in \mathbb{N}\,\}$. Todo $p \in I$ es infinitamente extendible pues W es infinito, de manera que I es un p-isomorfismo y se tiene que $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Tercer paso: Ya tenemos todas las herramientas para probar el Teorema de Lindström. Hemos construido un modelo $\mathfrak{M}$ con submodelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ parcialmente isomorfos con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ con $\mathfrak{A} \models \psi$ y $\mathfrak{B} \models \neg\psi$. Ahora bien, sabemos que nuestra lógica $\mathcal{L}$ cumple la propiedad de Lowenheim-Skolem descendente. Si aplicamos esta propiedad a la estructura $\mathfrak{M}$ obtendremos una estructura $\mathfrak{M}'$ contable con subestructuras $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{B}'$ tales que $\mathfrak{A}' \models \psi$ y $\mathfrak{B}' \models \neg\psi$. Como

$\mathfrak{M}'$ es contable, también los son $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{B}'$. Tendríamos entonces dos estructuras parcialmente isomorfas que no satisfacen las mismas sentencias de la lógica de primer orden. ¡Pero esto es imposible! El teorema de Cantor asegura que dos estructuras contables parcialmente isomorfas son isomorfas y, por tanto, satisfacen las mismas sentencias de primer orden. $\square$

Capítulo 2

Un mundo con Compacidad: Craig, Beth y Robinson

Este capítulo está dedicado a mostrar una triada de teoremas de la lógica de primer orden: Craig, Robinson, Beth. Se presentarán las pruebas de cada uno y se mostrarán las conexiones entre ellos (implicaciones, equivalencias). Se hará especial énfasis en el papel que desempeña la compacidad en cada una de las pruebas.

2.1. Craig

En primer lugar probaremos el el teorema de interpolación de Craig. Dada una implicación entre dos sentencias de la lógica de primer orden, sentencias que pueden tener símbolos del lenguaje diferentes (¡este es el caso interesante¡), el teorema de interpolación de Craig asegura la existencia de una tercera sentencia que hace las veces de puente en la implicación -la tercera sentencia es implicada por la primera e implica a la segunda-; pero esta nueva sentencia tiene la particularidad de formar parte del lenguaje común de las otras dos. El teorema de interpolación refleja la idea de que la implicación entre dos sentencias surge de algo que es comun a ellas. En este punto seguimos de cerca a Chang y Kiesler [2012]. La prueba recordará mucho a la prueba de completitud de Henkin.

Teorema 2.1.1 (**Teorema de interpolación de Craig**). *Sea φ, ψ sentencias tales que $\varphi \models \psi$. Entonces existe una sentencia θ tal que*

- $\varphi \models \theta$ *y* $\theta \models \psi$,
- *Todo símbolo de relación, función o de constante (excluyendo la identidad) que aperezca en* θ *también aparece en* φ *y* ψ.

La sentencia θ se conoce como un interpolante de φ y ψ. Antes de presentar la prueba veremos algunos ejemplos.

1. $\varphi := \exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \quad \psi := \exists x Q(x)$. En este caso se cumple trivialmente la implicación $\varphi \models \psi$, toda vez que φ no tiene modelos. De otro, como las fórmulas no tienen ningún símbolo del lenguaje en común, el interpolante debería contener únicamente la igualdad. Efectivamente, puede verificarse que $\theta := \exists x(x \neq x)$ es un interpolante de φ y ψ.

2. $\varphi := \exists x Q(x), \quad \varphi := \exists x(P(x) \vee \neg P(x))$: En este caso se cumple trivialmente la implicación $\varphi \models \psi$, toda vez que ψ es una fórmula válida. De nuevo, las sentencias no tienen ningún símbolo del lenguaje en común, y el interpolante debería contener únicamente la igualdad. Efectivamente, puede verificarse que $\theta := \exists x(x = x)$ es un interpolante de φ y ψ.

3. $\varphi := \forall xy(x = y) \quad \psi := \forall xy(P(x) \iff P(y))$. Se deja como ejercicio al letcor encontrar el interpolante de φ y ψ.

Demostración. La prueba del teorema de interpolación de Craig procede por contradicción. Suponemos que no hay un interpolante θ de φ y ψ, y probamos que, bajo este supuesto, no se tendría que $\varphi \models \psi$. Para hacer esto, construiremos un modelo de $\varphi \wedge \neg\psi$.En realidad, formaremos dos teorías T_1 y T_2, con $\varphi \in T_1$ y $\psi \in T_2$, y mostraremos que existe un modelo que las satisface a ambas. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mathcal{L}$ es el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en φ o ψ (o en ambos). Sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje de todos los símbolos de φ, $\mathcal{L}_2$ el lenguaje de todos los símbolos de ψ, y $\mathcal{L}_0$ el lenguaje de todos los símbolos en , φ y ψ.

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$$

Formaremos una expansión $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ adicionando un conjunto contable C de nuevos símbolos de constantes a cada uno de los lenguajes. Sean

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 \cup C, \quad \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \cup C, \quad \mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_2 \cup C$$

Antes de proceder, debemos presentar la noción de teorías inseparables.

Definición 2.1.1. Considere un par de teorías T en $\mathcal{L}'_1$ y U en $\mathcal{L}'_2$. Una sentencia θ de $\mathcal{L}'_0$ *separa* T y U si y solo si

$$T \models \theta \quad y \quad U \models \neg\theta.$$

T y U se dicen *inseparables* si y solo si ninguna sentencia θ de $\mathcal{L}'_0$ las separa. Para empezar veamos que

En primer lugar, observe que

$\{\varphi\}$ y $\{\neg\psi\}$ son inseparables. Pues si $\theta(c_1...c_n)$ separa $\{\varphi\}$ y $\{\neg\psi\}$ y $u_1...,u_n$ son variables que no ocurren en $\theta(c_1...,c_n)$, entonces tendríamos que $(\forall u_1...u_n)$ es un interpolante de φ y ψ. ¡Pero esto contradice la suposicion inicial de que φ y ψ no tienen interpolante!.

La idea será construir dos "torres" de teorías inseparables a partir de $\{\varphi\}$ y $\{\neg\psi\}$ expandiéndolas convenientemente. La expansión se hará de la siguiente manera:

En primer luagar considere

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \psi_0, \psi_1, \psi_2, ...$$

enumeraciones de las sentencias de $\mathcal{L}'_1$ y de $\mathcal{L}'_2$ respectivamente. Queremos construir dos sucesiones crecientes de teorías de modo que

$$\{\varphi\} = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset ....,$$

$$\{\psi\} = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset ....,$$

en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$ respectivamente. Lo haremos siguiendo las siguientes reglas:

1. $\{\varphi\} = T_0$ y $\{\psi\} = U_0$.
2. T_m y U_m son conjuntos inseparables finitos de sentencias.
3. Si $T_m \cup \{\varphi_m\}$ y U_m son inseparables, entonces $\varphi_m \in T_{m+1}$. En caso contrario $T_{m+1} = T_m$. Si T_{m+1} y $U_m \cup \{\psi_m\}$ son inseparables, entonces $\psi_m \in U_{m+1}$. En caso contrario $U_{m+1} = U_m$
4. Si $\varphi_m = (\exists x)\sigma(x)$ y $\varphi_m \in T_{m+1}$, entonces $\sigma(c) \in T_{m+1}$ para alún $c \in C$. Si $\psi_m = (\exists x)\delta(x)$ y $\psi_m \in U_{m+1}$, entonces $\delta(d) \in U_{m+1}$ para algún $d \in C$.

Dados T_m y U_m, las teorías T_{m+1} y luego U_{m+1} son construidas en la forma obvia, agregando sentencias a las teorías anteriores si se preserva la inseparabilidad o manteniendo las teorías obtenidas en los pasos inmediatamente anteriores si al agregar una nueva sentencia las teorías resultan separables. Para (4), usamos constantes c y d que no ocurran en T_m, U_m, φ_m o ψ_m. Ahora formamos las siguientes uniones:

$$T_\omega = \bigcup_{m<\omega} T_m \quad U_\omega = \bigcup_{m<\omega} U_m.$$

T_ω y U_ω son inseparables. Esto es una consecuencia de **compacidad**. En efecto, si las teorías T_ω y U_ω fueran separables, tendríamos, por **compacidad**, que existirían subconjuntos finitos de T_ω y U_ω separables. Por tanto T_n y U_n serían separables para algún n. Sin embargo, por la manera como se definieron T_n y U_n esto es imposible. A partir de la inseparabilidad de T_ω y U_ω concluimos que T_ω y U_ω son satisfactibles. Si alguna de ellas no lo fuera, T_ω y U_ω serían separables trivialmente, toda vez que una teoría insatisfactible implica lógicamente cualquier sentencias. Ahora queremos mostrar que $T_\omega \cup U_\omega$ es satisfactible. Con ellos mostraríamos, en particular, que hay un modelo de $\varphi \wedge \neg\psi$. Para llegar a ese resultado nos apoyaremos en los siguientes hechos:

1. T_ω es una teoría maximal satisfactible en $\mathcal{L}_1'$, y U_ω es una teoría maximal satisfactible en $\mathcal{L}_2'$. Para ver esto, suponga que $\varphi_m \notin T_\omega$ y $(\neg\varphi_m) \notin T_\omega$. Como $T_m \cup \{\varphi_m\}$ es separable de U_m, existe $\theta \in \mathcal{L}_0'$ tal que

   $$T_\omega \models \varphi_m \to \theta, \qquad U_\omega \models \neg\theta.$$

   Vemos por el mismo argumento que existe un $\theta' \in \mathcal{L}_0'$ tal que

   $$T_\omega \models \neg\varphi_m \to \theta', \quad U_m \models \neg\theta'.$$

   De los pasos anteriores tenemos que

   $$T_\omega \models \theta \vee \theta', \qquad U_\omega \models \neg(\theta \vee \theta'),$$

   contradiciendo la inseparabilidad de T_ω y U_ω. Esto muestra que T_ω es maximal satisfactible en $\mathcal{L}_1'$. La maximalidad de U_w es similar.

2. $T_\omega \cup U_\omega$ es una teoría maximal satisfactible in $\mathcal{L}_0'$. Sea σ una sentencia de $\mathcal{L}_0'$. Por el punto anterior, o $\sigma \in T_\omega$ o $(\neg\sigma) \in T_\omega$. También se tiene que o $\sigma \in U_\omega$ o $(\neg\sigma) \in U_m$. Por inseparabilidad no podemos tener que $\sigma \in T_\omega$ y $(\neg\sigma) \in U_\omega$, o viceversa. Por lo tanto o $T_m \cap U_m \models \sigma$ o $T_m \cap U_m \models \neg\sigma$. Esto prueba la maximalidad.

Con los anteriores resultados podemos emprender la tarea de construir el modelo de $T_\omega \cup U_\omega$. Sea $\mathfrak{B}_1' = (B_{,1}, b_0, b_1, ...)$ un modelo de T_ω. Usando los hechos 1 y 2 probados anteriormente, podemos concluir que el submodelo $\mathfrak{A}_1' = (A_1, b_0, b_1, ...)$ con universo $A_1 = \{b_0, b_1, ...\}$ es también un modelo de T_ω. De forma similar, U_ω tiene un modelo $\mathfrak{U}_2' = (A_2, d_0, d_1, ...)$ con universo $A_2 = \{d_0, d_1, ...\}$. Por 2, los $\mathcal{L}_0'$-reductos de $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$ son isomorfos con la asignación $b_n \mapsto d_n$. Podemos por tanto identificarlos. Otra forma de proceder para conseguir esta identificación es apelando al que la teorías T_w y U_w son, por la manera como fueron construidas, teorías de Henkin y, por tanto, se puede usar directamente las constantes del lenguaje para construir un modelo. Tomando $b_n = d_n$ para cada n, concluimos que $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ tienen el mismo reducto $\mathcal{L}_0'$. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de $\mathcal{L}$ con $\mathcal{L}_1$ reducto de $\mathfrak{A}_1$ y $\mathcal{L}_2$ reducto de $\mathfrak{A}_2$. Como $\varphi \in T_\omega$ y $(\neg\psi) \in U_\omega$, $\mathfrak{A}$ es un modelo de $\varphi \wedge \neg\psi$. Hemos mostrado entonces que $\varphi \wedge \neg\psi$ tiene un modelo, lo cual contradice la hipótesis inicial $\varphi \models \psi$.

□

2.2. Beth

Una consecuencia sencilla pero muy importante del Teorema de interpolación de Craig es el Teorema de definibilidad de Beth. En pocas palabras, este restultado establece que un concepto se puede definir sintácticamente si y sólo si se puede definir semánticamente. Para cada concepto semánticamente caracterizado podemos encontrar una expresión del lenguaje que lo captura. Para presentar el teorema de Beth de forma más precisa, son necesarias las siguientes definiciones:

Definición 2.2.1.

- **Definicion implícita:** Dado $\Sigma(P)$ un conjunto de sentencias del lenguaje $\mathcal{L} \cup \{P\}$, y $\Sigma(P')$ el conjunto correspondiente de sentencias de $\mathcal{L} \cup \{P'\}$ formado al reemplazar P en todas partes por P'. Decimos que $\Sigma(P)$ *define implícitamente* a P si y solo si

$$\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \models (\forall x_1....x_n)[P(x_1...x_n) \leftrightarrow P'(x_1...x_n)].$$

De modo equivalente, $\Sigma(P)$ *define implícitamente* a P si y solo si para cualesquiera $(\mathcal{U}, R)$ y $(\mathcal{U}, R')$ modelos de $\Sigma(P)$, se tiene que $R = R'$

- **Definición explícita:** Se dice que $\Sigma(P)$ *define explícitamente* a P si y solo si existe una fórmula $\varphi(x_1...x_n)$ de $\mathcal{L}$ tal que

$$\Sigma(P) \models (\forall x_1....x_n)[P(x_1...x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1...x_n)].$$

Teorema 2.2.1 (**Teorema de Beth**). $\Sigma(P)$ *define implícitamente a* P *si y solo si* $\Sigma(P)$ *define explicítamente a* P.

Demostración. $\Leftarrow$ Esta dirección es muy sencilla. Basta hacer una pequeño análisis de las definiciones.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\Sigma(P)$ define implícitamente a P. Agreguemos nuevas constantes $c_1..c_n$ a $\mathcal{L}$. Directamente de la definición tenemos que

$$\Sigma(P) \cup \Sigma(P') \models P(c_1...c_n) \rightarrow P'(c_1...c_n).$$

Por **compacidad**, sabemos que existen subconjuntos finitos $\Delta \subset \Sigma(P)$, $\Delta' \subset \Sigma(P')$ tales que

$$\Delta \cup \Delta' \models P(c_1...c_n) \rightarrow P'(c_1...c_n).$$

Formemos ahora la conjunción $\psi(P)$ de todos los $\sigma(P) \in \Sigma(P)$ tales que o $\sigma(P) \in \Delta$ o $\sigma(P') \in \Delta'$. Tenemos entonces que

$$\psi(P) \vee \psi(P') \models P(c_1...c_n) \rightarrow P'(c_1...c_n).$$

La idea será usar el Teorema de interpolación de Craig para encontrar una sentencia que defina explícitamente a R, pero para poder aplicarlo debemos manipular la implicación anterior para que resulte la implicación entre una sentencia de un lenguaje, por un lado, y otra sentencia en otro lenguaje, por otro lado. Reordenamos, pues, la implicación para obtener todos los símbolos de P en un lado y todos los símbolos de P' en el otro lado:

$$\psi(P) \vee P(c_1...c_n) \models \psi(P') \rightarrow P'(c_1...c_n). \tag{2.1}$$

Por el **teorema de interpolación de Craig**, existe una sentencia $\theta(c_1...c_n)$ de $\mathcal{L} \cup \{c_1...c_n\}$ tal que

$$\psi(P) \wedge P(c_1...c_n) \models \theta(c_1...c_n), \tag{2.2}$$

$$\theta(P) \models \psi(P) \to P(c_1...c_n) \tag{2.3}$$

Por otro lado, sabemos que cualquier modelo $(\mathfrak{A}, R')$ para $\mathcal{L} \cup \{P', c_1, ..., c_n\}$ también es un modelo de $\mathcal{L} \cup \{P, c_1, ..., c_n\}$ cuando interpretamos P por P'. Luego (2-2) implica

$$\psi(P) \models P(c_1...c_n) \leftrightarrow \theta(c_1...c_n). \tag{2.4}$$

Como $c_1...c_n$ no ocurren en $\psi(P)$ (pues $\psi(P)$ es construido a partir de $\Sigma(P)$ y en $\Sigma(P)$ no aparecen $c_1...c_n$), tenemos que

$$\psi(P) \models \forall x_1....x_n[P(x_1...x_n) \leftrightarrow \theta(x_1...x_n)]. \tag{2.5}$$

donde $x_1, ..., x_n$ son variables que no ocurren en $\theta(c_1...c_n)$. Por lo tanto

$$\Sigma(P) \models \forall x_1....x_n[P(x_1...x_n) \leftrightarrow \theta(x_1...x_n)]. \tag{2.6}$$

La fórmula $\theta(x_1...x_n)$ define explícitamente a P y con eso termina la prueba.

$\square$

2.3. Robinson

Ahora probaremos el Teorema de Consistencia adjunta de Robinson, que establece las condiciones bajo las cuales la unión de dos teorías satistactibles es también satisfactible. La prueba del teorema de Robinson será una aplicación del método de los diagramas. Para esta sección nos basaremos en Goldstern y Judah [1998].

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{M}$ un modelo del lenguaje $\mathcal{L}$, y sea $A \subseteq M$. El lenguaje $\mathcal{L}(A)$ se define de la siguiente manera:

- $\mathcal{L}(A)$ tiene los mismos símbolos de relación y de función que $\mathcal{L}$.

- $\mathcal{L}(A)$ tiene todos los símbolos de constante de $\mathcal{L}$, pero además por cada elemento a de A agregamos un símbolo de constante $\bar{a}$. (Suponemos aquí que el A y $\mathcal{L}$ son disyuntos. Algunas veces no distinguiremos entre a y $\overline{a}$.).

Hay una manera natural de convertir $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura en una $\mathcal{L}(M)$-estructura interpretando cada $\bar{m}$ como m. Cuando consideremos a $\mathcal{M}$ como una $\mathcal{L}(M)$-estructura lo notaremos $\mathcal{M}_M$. Esto nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 2.3.2. El *diagrama completo* de $\mathcal{M}$ es el conjunto

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) := \{\, \theta \mid \theta \text{ es una } \mathcal{L}(M) \text{ sentencia y } \ \mathcal{M}_M \models \theta \,\}$$

Podemos dar una definición de la noción de submodelo elemental usando la noción de diagrama completo.

Definición 2.3.3. Sea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Decimos que $\mathcal{M}$ es un modelo elemental de $\mathcal{N}$, obreviado $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ si

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Diag}(\mathcal{N})$$

Se puede verificar fácilmente que este definición coincide con la definición usual: para toda n-fórmula φ en $\mathcal{L}$ y para todos los $a_1, ..., a_n$ en M

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, .., a_n) \quad \text{Si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(a_1, .., a_n)$$

Se puede verificar fácilmente que este definición coincide con la definición usual: para toda n-fórmula φ en $\mathcal{L}$ y para todos los $a_1, ..., a_n$ en M se cumple

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, .., a_n) \quad \text{Si y solo si} \quad \mathcal{N} \models \varphi(a_1, .., a_n)$$

Con estos preliminares ya podemos enunciar y probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Robinson). *Suponga que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son dos lenguajes de lógica de primer orden, y $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Si Γ_1 y Γ_2 son teorías satisfactibles y que $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ es satisfactible y completa en el lenguaje $\mathcal{L}_0$. Entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es consistente. Sea Γ_0 una teorí es satisfactible.*

Para probar el teorema usaremos dos lemas.

Lemma 2.3.2. Sean $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ como en el enunciado del Teorema de Robinson. Y sea $\mathcal{M}_1$ un modelo de Γ_1. Entonces existe un modelo $\mathcal{M}_2$ para Γ_2 tal que $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0$

Demostración. Consideremos $\Gamma = \Gamma_2 \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0)$. Mostraremos que Γ es satisfactible y para ellos usaremos compacidad. Si Γ fuera insatisfactible, por **compacidad** existirían subconjuntos finitos de Γ_2 y de $\mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0)$ tales que su unión sería un conjunto insatisfactible. Por lo tanto existiría una fórmula $\theta_1 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0)$ tal que $\{\varphi_2, \theta_1\}$ sería insatisfactible, donde φ_2 es la conjunción del subconjunto finito de Γ_2. Ahora bien, θ_1 es de la forma $\varphi_1(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$ (donde $\varphi_1 \in \mathcal{L}_0$), que es una fórmula en $\mathcal{L}_0(\{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)\})$, donde a_i son elementos de M_1. Así $\varphi_2 \models \neg\varphi_1(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n))$. Como los símbolos de constante no aparecen en φ_2, podemos aplicar el teorema de generalización sobre constantes y obtener $\varphi \models \forall x_1 .... \forall x_n \neg\varphi_1$. Así $\Gamma_2 \models \neg\exists x_1 ..... \exists x_n \varphi_1$. Por tanto es imposible que $\exists x_1 ..... \exists x_n \varphi_1 \in \Gamma_0$, entonces, por la completitud de Γ_0

$$\neg\exists x_1 ..... \exists x_n \varphi_1 \in \Gamma_0.$$

Pero como $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0 \models \theta_1$, se tiene que $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0 \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)$. Así $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0 \models \exists x_1 ..... \exists x_n \varphi_1$

Y debemos tener, gracias a la completez de Γ_0, que

$$\exists x_1 ..... \exists x_n \varphi_1 \in \Gamma_0$$

¡Pero esto es una contradicción!, pues Γ_0 es, por hipótesis, satisfactible. Ahora bien, como Γ es, tambipen por hipótesis, satisfactible podemos encontrar un modelo $\mathcal{M}_2'$ de Γ. $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0$ puede ser elementalmente sumergido en $\mathcal{M}_2' \big| \mathcal{L}_0$. Así podemos encontrar $\mathcal{M}_2$ como se buscaba.

□

Lemma 2.3.3. Suponga que $\mathcal{M}_1$ es un modelo de Γ_1, $\mathcal{M}_2$ es un modelo de Γ_2 y suponga que $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0$. Entonces existe un modelo $\mathcal{M}_3$ de Γ_1 tal que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ y $\mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_2 \prec \mathcal{M}_3 \big| \mathcal{L}_2$

Demostración. La prueba sigue la isma estrategia que la prueba del lema anterior. Consideremos $\Gamma := \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1) \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0)$. Γ es una teoría en el lenguaje $\mathcal{L}_1(M_2)$ que contiene Γ_1. Mostraremos que Γ es satisfactible. Por **compacidad** y por la definición del diagrama completo, basta probar que para todas fórmula $\theta_1 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1)$ y para toda $\theta_0 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0)$ tenemos que $\theta_1 \wedge \theta_0$ es satisfactible.

Procedamos por contradicción. Supongamos que $\theta_1 \wedge \theta_0$ no es satisfactible. Notemos primero que θ_0 es de la forma $\varphi_0(\underline{b}_1, ..\underline{b}_n)$ donde $b_1, ..., b_n \in M_2 - M_1$ y ψ_0 está en $\mathcal{L}_0(M_1)$. Como $\theta_1 \models \neg\theta_0$, también tenmos que $\{\theta_1\} \models \neg\psi_0$ por el teorema de generalización sobre constantes. De este modo obtenemos que $\{\theta_1\} \vdash \forall x_1 ... \forall x_n \psi_0$. A partir de ahí podemos concluir que

$$\forall x_1 ..... \forall x_n \neg\psi_0 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1).$$

Pero también tenemos que $\mathcal{M}_2 \models \psi_0(b_1, .., b_n)$, y por lo tanto $\exists x_1, ..., \exists x_n \psi_0 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0)$. De ello concluimos que

$$\exists x_1 ..... \exists x_n \psi_0 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0) \subseteq \mathrm{Diag}(\mathcal{M}_1)$$

¡Pero esto es una contradicción! Como Γ es satisfactible, podemos ahora encontrar un modelo $\mathcal{M}_3$ de Γ. Si hacemos $\mathcal{M}'_1 = \{\underline{a}^{\mathcal{M}'_3} : a \in \mathcal{M}_2\}$, obtenemos los submodelos $\mathcal{M}'_1$ y $\mathcal{M}'_2$, que son copias isomorfas de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$. Mas aún, $\mathcal{M}'_1 \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{M}'_2 \big| \mathcal{L}_0$. Así hemos encontrado el modelo $\mathcal{M}_3$ como deseábamos. □

La prueba del teorema de consistencia adjunta de Robinson consistirá en una aplicación iterada de los dos lemas anteriores.

Demostración. (Demostración del teorema de consistencia adjunta de Robinson) Sea $\mathcal{M}_1$ un modelo de Γ_1. Gracias al primer lema, podemos encontrar un modelo $\mathcal{M}_2$ de Γ_2 tal que $\mathcal{M}_1 \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0$. Y por el segundo lema, podemos encontrar un modelo $\mathcal{M}_3$ de Γ_1 con las propiedades $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_2 \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{M}_3 \big| \mathcal{L}_0$. Si aplicamos nuevamente el primer lema, encontramos un modelo $\mathcal{M}_4 \models \Gamma_2$, $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_3 \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{M}_4 \big| \mathcal{L}_0$. Repetimos el proceso indefinidamente. Finalmente, hacemos $N := \bigcup_n M_n$, y definimos un modelo $\mathcal{N}$ con universo N tal que para todo n $\mathcal{M}_n \big| \mathcal{L}_0 \prec \mathcal{N} \big| \mathcal{L}_0$, y para todo k, $\mathcal{M}_{2k} \prec \mathcal{N} \big| \mathcal{L}_2$, y para todo k $\mathcal{M}_{2k+1} \prec \mathcal{N} \big| \mathcal{L}_1$. Claramente $\mathcal{N} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. □

2.4. Conexiones

El teorema de compacidad fue indispensable en la prueba de los teoremas de Craig, Beth y Robinson. Oportunamente se señaló el papel que desempeñaba la compacidad en cada una de las pruebas. Ahora buscamos establecer las conexiones entre los tres teoremas. Un resultado que ya tenemos es que, asumiento compacidad, el teorema de interpolación implica el teorema de Beth.

Teorema 2.4.1 (Craig $\Rightarrow$ Beth).

Demostración. La prueba se presentó en la sección dedicada el teorema de Beth. $\square$

A continuación veremos que asumiendo la compacidad también se puede establecer la equivalentencia entre el teorema de interpolacion de Craig y el teorema de consistencia adjunta de Robinson.

Teorema 2.4.2 (Craig $\Rightarrow$ Robinson). .

Demostración. Suponga T_1 y T_2 como en las hipótesis del teorema de consistencia de Robinson. Y suponga que $T_1 \cup T_2$ no es satisfactible. Por **compacidad**, existen subconjuntos finitos $\Sigma_1 \subset T_1$, $\Sigma_2 \subset T_2$ tal que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ es insatisfactible. Sea σ_1 la conjunción de Σ_1 y sea σ_2 la conjunción de Σ_2. Se sigue que $\sigma_1 \models \neg\sigma_2$. Por el **teorema de interpolación de Craig**, existe una sentencia θ tal que $\sigma_1 \models \theta$, $\theta \models \neg\sigma_2$, y tod símbolo de relación, de función o de constante que aparece en θ ocurre en σ_1 y σ_2. Por lo tanto, θ es una sentencia de $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$. Volviendo a T_1 y T_2 en la prueba del teorema de interpolación de Craig, tenemos que $T_1 \models \theta$. Como T_1 es satisfactible, $T_1 \not\models \neg\theta$, de modo que $T \not\models \neg\theta$ (pues $T \subseteq T_1$). además, $T_2 \models \neg\theta$, y, por la satisfactibilidad de T_2, $T_2 \not\models \theta$. Así $T \not\models \theta$. Pero esto contradice la hipótesis de que T es una teoría completa en $\mathcal{L}$. Por lo tanto, $T_1 \cup T_2$ es satistactible. $\square$

Teorema 2.4.3 (Robinson $\Rightarrow$ Craig).

Demostración. Suponga φ y ψ como en las hipótesis del teorema de Craig. Queremos prbar que existe θ tal que $\varphi \models \theta$, $\theta \models \psi$ y θ es una sentencia en $\mathcal{L}_0$ el lenguaje común de φ y ψ. Para encontrar tal θ primero probaremos que el conjunto $\Gamma_0 := \{ \sigma \in \mathcal{L}_0 \mid \varphi \models \sigma \text{ o } \neg\psi \models \sigma \}$ es insatisfactible. Supongamos que Γ_0 es satisfactible y sea Γ_0' una extensión completa y satisfactible de Γ_0 en el lenguaje $\mathcal{L}_0$. Consideremos ahora $\Gamma_1 := \Gamma_0' \cup \{\varphi\}$ y $\Gamma_2 := \Gamma_0' \cup \{\neg\psi\}$. Como $\varphi \models \psi$, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. De ahí concluimos que Γ_1 o Γ_2 son insatisfactibles. Pues, en caso contrario, si Γ_1 y Γ_2 fueran satisfactibles, por el **teorema de Robinson** tendríamos que concluir que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es satisfactible. Tenemos entonces dos casos:

1. Γ_1 es insatisfactible. En esta caso, por **compacidad** y por la completitud de Γ_0', existiría un $\phi \in \Gamma_0'$ tal que $\{\varphi, \phi\}$ es insatisfactible. Por lo tanto $\varphi \models \neg\phi$ y, por tanto, por la definición de Γ_0, tendríamos que $\neg\phi \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma_0'$. De modo que $\phi \in \Gamma_0'$ y $\neg\phi \in \Gamma_0'$, y por tanto, Γ_0' sería inatisfactible, lo que contradice la definición de Γ_0'.

2. Γ_2 es insatisfactible. Se procede del mismo modo que en el caso anterior.

Concluimos entonces que Γ_0 es insatisfactible. Y por **compacidad**, existe un subconjunto finito de Γ_0 insatisfactible $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m, \}$ con $\varphi \models \gamma_i$ y $\neg\psi \models \delta_j$ para todo i y todo j. Tomemos $\gamma := \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge ... \wedge \gamma_n$ y $\delta := \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge ... \wedge \delta_m$. De lo anterior, tenemos que $\varphi \models \gamma$, $\neg\psi \models \delta$ y $\{\gamma, \delta\}$ es insatisfactible. Por lo tanto, $\varphi \models \gamma$, $\neg\delta \models \psi$ y $\gamma \models \neg\delta$. De ahí concluimos que γ o δ sirven como interpolante para φ y ψ . $\square$

Capítulo 3

Un mundo sin Compacidad: lógicas infinitarias

En el primer capítulo se introdujo la noción de lógica abstracta y se dieron varios ejemplos. Entre ellos, se mencionaron las lógicas infinitarias, lógicas que permiten conjunciones o cadenas de cuantificadores de longitud no finita. Y se mostró que las ninguna de las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ cumple la propiedad de compacidad. En el capítulo dos, por otro lado, nos ocupamos tres teoremas de la lógica de primer orden: Craig, Beth y Robinson. Pusimos énfasis en el hecho de que dichos resultados y las conexiones entre ellos dependían fuertemente de la compacidad. Surge entonces una pregunta natural: ¿Si se prescinde de la compacidad, como sucede en las lógicas infinitarias, se debe renunciar también a todas sus consecuencias, entre ellas los teoremas de Craig, Beth y Robinson? ¿O es posible recuperar esos resultados por otros caminos? ¿Hay en las lógicas infinitarias algún sustituto que nos permita llegar a resultados que en lógica de primer orden se obtenían por medio de la compacidad? En este capítulo responderemos a estas pregunta, restringiéndonos la posibilidad de obtener análogos al teorema de interpolación de Craig en las lógicas infinitarias. Veremos que en la lógica $\mathcal{L}_{w_1 w}$ podemos efectivamente encontrar un sustituto a la compacidad para probar el teorema de interpolación. Sin embargo, en las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa w}$ no tendremos tanta suerte.

3.1. $\mathcal{L}_{w_1 w}$

En la lógica $\mathcal{L}_{w_1 w}$ el teorema de la existencia de modelos sirve como sustituto a la compacidad para probar resultados análogos a teoremas válidos en la lógica de primer orden. Con el teorema de la existencia del modelo se puede probar la indefinibilidad del buen orden, el teorema de omisión de tipos y el teorema de interpolación en $\mathcal{L}_{w_1 w}$.

El teorema de la existencia del modelo está ligado a la propiedad de consistencia. Para las siguientes secciones seguiremos de cerca Marker [2016].

3.1.1. Propiedad de Consistencia

Definición 3.1.1. Dado τ un lenguaje y C un conjunto infinito de constante en τ, una *propiedad de consistencia* Σ es una colección de conjuntos contables σ de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-sentencias con las siguientes propiedades. Para cada $\sigma \in \Sigma$

1. Si $\mu \subseteq \sigma$, entonces $\mu \in \Sigma$.
2. Si $\varphi \in \sigma$, entonces $\neg\phi \notin \sigma$.
3. Si $\neg\phi \in \sigma$, existe un $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\sim \phi\} \subseteq \mu$.
4. Si $\bigwedge_{\phi \in X} \in \sigma$, entonces para todo $\phi \in X$ existe un $\mu \in \sigma$ tal que $\varphi \cup \{\phi\} \subseteq \mu$.
5. Si $\bigvee_{\phi \in X} \varphi \in \sigma$, entonces existe un $mu \in \Sigma$ y $\phi \in X$ tal que $\sigma \cup \{\phi\} \subseteq \mu$;
6. Si $\forall v \phi(v) \in \sigma$, entonces para todo $c \in C$ existe $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\ \phi(c)\} \subseteq \mu$.
7. Si $\exists v \phi(v) \in \sigma$, entonces existe $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\ \phi(c)\} \subseteq \mu$.
8. Sea t un término sin variables y sea $c, d \in C$,
    - Si $c = d \in \sigma$, entonces existe un $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{d = c\} \subseteq \mu$.
    - Si $c = t$, $\phi(t) \in \sigma$, luego existe un $\mu \in \Sigma$ tal que $\sigma \cup \{\phi(c)\} \subseteq \mu$.
    - Existe $\mu \in \Sigma$ y $e \in C$ tal que $\sigma \cup \{\ e = t\} \subseteq \mu$.

3.1.2. Teorema de existencia del modelo

Teorema 3.1.1 (Teorema de existencia del modelo). *Si Σ es una propiedad de consistencia y $\sigma \in \Sigma$, entonces existe un modelo contable $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \sigma$.*

Demostración. Sea Δ es el conjunto mas pequeño de $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$ sentencias tales que

- $\sigma \subseteq \Delta$;
- Si ϕ es una subsentencia de una sentencia de Δ, entonces $\phi \in \Delta$;
- Si $\phi(\overline{v})$ es una subfórmula de un sentencia en Δ y $\overline{c} \in C$, entonces $\phi(\overline{c}) \in \Delta$;
- Si $c, d \in C$, entonces $(c = d) \in \Delta$.

Consideremos $\phi_0, \phi_1, ...$, una enumeración de todas las sentencias en Δ. Supongamos que cada sentencia está listada un número infinito de veces. Sea $t_0, t_1, ...$, la lista de todos los τ-términos sin variables.

La idea será construir una cadena de conjuntos de sentencias tal que

$$\sigma = \sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq ......\sigma_n \subseteq ....$$

con $\sigma_i \in \Sigma$. Para este fin usaremos el hecho de que Σ es una propiedad de consistencia. Procedemos bajo las siguientes dos condiciones:

1. Si $\sigma_n \cup \{\phi_n\} \in \Sigma$, entonces $\{\phi_n\} \in \sigma_{n+1}$. Pueden suceder dos casos:
   a) Si ϕ_n es $\bigvee_{\phi \in X} \phi$, entonces $\phi \in \sigma_{n+1}$ para algún $\phi \in X$.
   b) Si ϕ_n es $\exists \phi(v)$, luego $\phi(c) \in \sigma_{n+1}$ para algún $c \in C$.
2. $(c = t_n) \in \sigma_n$ para algún $c \in C$.

Consideremos ahora $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. Construiremos a continuación un modelo de Γ. Para ello definimos la siguiente relación sobre los elementos de C: sean $c, d \in C$ decimos que $c \sim d$ si y solo si $c = d \in \Gamma$.

Probaremos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

- (Reflexividad) Sea $c \in C$. La sentencia $c = c$ es ϕ_n para algún n. Por la condición 1, $(c = c) \in \sigma_{n+1} \subset \Gamma$. Por lo tanto $c \sim c$.

- (Simetría) Si $(c = d) \in \Gamma$, entonces podemos encontrar n tal que $(c = d) \in \sigma_n$ y $(d = c)$ está en φ_n. Por el primer item de la definición de propiedad de consistencia y por la condición 1, tendríamos que $(d = c) \in \Gamma$.

- (Transitividad) Si $c = d$ y $d = e$, encontremos un n tal que $(c = d)$, $(d = e) \in \sigma_n$ y $c(= e)$ es ϕ_n. Por la condición 1 tendríamos que $c = e \in \Gamma$.

Construcción del modelo

Es hora de construir el modelo. La construcción se parecerá mucho a la contrucción de Henkin. Notaremos por $[c]$ la clase de equivalencia de c. Sea $M = \{[c] : c \in C$. Si d es un símbolo de constante de τ (probablemente no en C), entonces por la condición 2 existe $c \in C$ tal que $c = d \in \Gamma$. Interpretaremos $d^{\mathcal{M}}$ como $[c]$. Sea f símbolo de función n-aria de τ y sea $c_1, ..., c_n \in C$. Por 2 existe $d \in C$ tal que $d = f(c_1, ..., c_n) \in \Gamma$. Suponga $d_1 \in C$ y sea $d_1 = f(c_1, .., c_n) \in \Gamma$. Suponga que $d_1 \in C$ y $d_1 = f(c_1, ..., c_n)$ está también en Γ, usando la característica 8 de la definición de propiedad de consistencia y la condición 1 vemos que $(d = d_1) \in \Gamma$ y $d \sim d_1$. También note que $c_0 = f(c_1, ..., c_n) \in \Gamma$. Luego podemos definir $f^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$ por

$$f([c_1], ..., [c_n]) = [d] \iff f(c_1, ...c_n) = d \in \Gamma$$

Dado $t(v_1, ..., v_n)$ un término, $c_1, ...c_n, d \in C$. **Ahora probaremos que si** $d = t(c_1, .., c_n) \in \Gamma$**, entonces** $t^{\mathcal{M}}([c_1], ...[c_n]) = [d]$. Lo haremos por inducción sobre la complejidad de los términos. Supongamos que $t = f(t_1, ..t_m)$. Para $i \leq m$ existe $d_i \in C$ tal que $d_i = t_i(\overline{c}) \in \Gamma$. Por inducción $[d_i] = t_i^{\mathcal{M}([\overline{c}])}$. Luego por la definición de propiedad de consistencia y por la condición 1 tendríamos $d = f(d_{1,..,d_m}) \in \Gamma$. Así

$$t^{\mathcal{M}}([\overline{c}]) = f^{\mathcal{M}}([d_1], ..., [d_m]) = [d]$$

como deseábamos.

Para $c_1, .., c_n$ y R una relación n-aria el símbolo τ lo definimos como

$$R^{\mathcal{M}}([c_1], ..., [c_n]) \iff R(c_1, .., c_n) \in \Gamma.$$

Como arriba, podemos mostrar que esto no depende de la elección del representante $[c_i]$.

Ahora probaremos que si $\phi \in \Gamma$, entonces $\mathcal{M} \models \phi$. Lo probaremos por inducción sobre la complejidad de las fórmulas.

- Si ϕ es $t_1 = t_2$. Hay $c_1, c_2 \in C$ tales que $c_1 = t_1, c_2 = t_2 \in \Gamma$. Entonces $c_1 = c_2 \in \Gamma$ y por uno de los resultados previos de esta demostración, $t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$, así $\mathcal{M} \models \phi$.

- Si ϕ es $R(t_1, ..., t_n)$.

Se puede probar que $\mathcal{M} \models R(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$. Los otrs pasos de la inducción se muestran a continuación:

- ϕ es $\bigwedge_{\Psi} \Psi$, por la definición 2.0.3 y por (1), existe $\Psi \in \Gamma$ para cada $\Psi \in X$. Por inducción $\mathcal{M} \models \Psi$ para todo $\Psi \in X$. Luego $\mathcal{M} \models \phi$.

- Si ϕ es $\bigvee_{\Psi} \Psi$, por la definición 2.0.3 y por (1), existe $\Psi \in \Gamma$ tal que $\Psi \in \Gamma$. Por inducción $\mathcal{M} \models \Psi$.Así $\mathcal{M} \models \phi$.

- Si ϕ es $\forall \Psi(v)$, por la definición 2.0.3 y por (1), $\Psi(c) \in \Gamma$ para todo $c \in C$. Por inducción $\mathcal{M} \models \Psi(c)$ para todo $c \in C$. Como todo elemento de $\mathcal{M}$ es llamado por una constante de C, $\mathcal{M} \models \phi$

- Si ϕ es $\exists \Psi(v)$,por (1), existe $c \in C$ tal que $\Psi(c) \in \Gamma$. Por inducción $\mathcal{M} \models \Psi(c)$. Así $\mathcal{M} \models \phi$.

- Si ϕ es $\neg \Psi(v)$,por la definición de propiedad de consistencia y por (1), tenemos que $\sim \Psi(c) \in \Gamma$. Esto se divide en casos dependiendo de ψ:

    - Si ψ es $t_1 = t_2$. Hay 2 constantes $c_1, c_2 \in C$ tales que $c_i = t_i \in \Gamma$. Como $\sim \Psi$ es $t_1 \neq t_2$, por la definición 2.0.3 y por (1), $c_1 \neq c_2 \in \Gamma$. Suponga por contradicción, que $\mathcal{M} \models \Psi$. Por la segunda parte de la demostración $[c_i] = t_i^{\mathcal{M}}$. Así $\mathcal{M} \models c_1 = c_2$. Por lo tanto $c_1 \sim c_2$ y $c_1 = c_2 \in \Gamma$. Esto contradice la definición de propiedad de consistencia.

    - Si ψ es $R(t_1, .., t_m)$. Entonces $\neg R(t_1, .., t_m) \in \Gamma$. Hay constantes $c_1, ..., c_m \in C$ tales que $c_i = t_i \in \Gamma$. Luego $\neg R(t_1, .., t_m) \in \Gamma$. Por la definición 2.0.3 $R(t_1, .., t_m) \notin \Gamma$. De este modo

$$\mathcal{M} \models \neg R(c_1, .., c_m)$$

Y por la segunda parte de la demostración

$$\mathcal{M} \models \neg R(t_1, .., t_m)$$

Así $\mathcal{M} \models \phi$.

- ψ es $\neg\theta$. Luego $\theta \in \Gamma$. Por inducción $\mathcal{M} \models \theta$ y $\mathcal{M} \models \phi$.
- ψ es $\bigwedge_{\theta \in X} \theta$. Luego $\bigvee_{\theta \in X} \sim \theta \in \Gamma$ y $\sim \theta \in \Gamma$ para alguna $\theta \in X$. Por inducción $\mathcal{M} \models \neg\theta$. Así $\mathcal{M} \models \phi$.
- ψ es $\bigvee_{\theta \in X} \theta$. Luego $\bigwedge_{\theta \in X} \sim \theta \in \Gamma$ y $\sim \theta \in \Gamma$ para toda $\theta \in X$. Por inducción $\mathcal{M} \models \neg\theta$ para toda $\theta \in X$. Así $\mathcal{M} \models \phi$.
- ψ es $\exists v\theta(v)$. Luego $\forall \sim v\theta(v) \in \Gamma$ y $\sim \theta(c) \in \Gamma$ para toda $c \in C$. Por inducción $\mathcal{M} \models \theta(c)$ para toda $c \in C$. Así $\mathcal{M} \models \phi$.
- ψ es $\forall v\theta(v)$. Luego $\exists \sim v\theta(v) \in \Gamma$ y $\sim \theta(c) \in \Gamma$ para algún $c \in C$.Pero luego$\mathcal{M} \models \neg\theta(c)$ y $\mathcal{M} \models \phi$.

$\square$

Con esto terminamos la prueba. Contruimos un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$. Una consecuencia sencilla del teorema de existencia de modelos es el teorema de existencia de modelos extendido. La prueba de este teorema se hace modificando ligeramente el argumento de Henkin utilizado en la prueba anterior

Teorema 3.1.2 (Teorema de existencia de modelos extendido). . *Sea τ como en el teorema anterior. Sea T una conjunto contable de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\tau)-$sentencias. Suponga que Σ es una propiedad de consistencia tal que para todo $\sigma \in \Sigma$ y $\phi \in T$, $\sigma \cup \{\phi\} \in \Sigma$. Entonces existe $\mathcal{M} \models T$.*

Demostración. Sea $\theta_0, \theta_1, ...$ una enumeración de T. Modifique la construcción de $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq ....$ de modo que $\theta_n \in \sigma_{n+1}$ para todo n. Luego $T \subset \Gamma$ y $\mathcal{M} \models T$. Lo cual completa la demostración. $\square$

3.1.3. Craig... Otra vez

Una de las consecuencias importantes del teorema de la existencia de modelos es el teorema de interpolación. Este resultado fue originalmente probado por Lopez-Escobar usando una versión del cálculo de secuentes.

Teorema 3.1.3 (Teorema de interpolación de Craig). *Suponga que ϕ_1 y ϕ_2 son $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ sentencias con $\phi_1 \models \phi_2$. Existe una sentencia $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ θ tal que $\phi_1 \models \theta$, $\theta \models \phi_2$ y todo símbolo de relación, de función y de constante que ocurre en θ ocurre en ϕ_1 y ϕ_2.*

Demostración. Sea C una colección contable infinita de nuevos símbolos de constante. Sea τ_i el vocabulario mas pequeño que contiene C y todos los símbolos en ϕ_i y sea $\tau = \tau_1 \cap \tau_2$.

Sea Σ una colección infinita de $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ donde σ_i es un conjunto de τ_i-sentencias y si ψ_1, ψ_2 son τ-sentencias tales que $\sigma_1 \models \psi_1$ y $\sigma_2 \models \psi_2$, entonces $\psi_1 \wedge \psi_2$ es satisfacible.

σ es una propiedad de consistencia.

A continuación probaremos dos de las propiedades de la definición:

- Suponga que $\bigwedge \psi \in \sigma \in \Sigma$, donde $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ como arriba. Supona que $\bigwedge_{\psi\in X} \psi \in \sigma_1$. Sea $\sigma_1' = \sigma_1 \cup \{\psi\}$. Veamos que $\sigma_1 \cup \sigma_2 \in \Sigma$. Suponga que $\sigma_1 \models \theta_1$ y $\sigma_2 \models \theta_2$. Luego $\sigma_1 \models \theta_1$. Por hipótesis $\theta_1 \wedge \theta_2$ es satisfacible luego $\sigma_1' \cup \sigma_2 \in \Sigma$. Se procede del mismo modo si $\bigwedge_{\psi\in X} \psi \in \sigma_2$.

- Suponga $\bigvee_{\psi\in X} \psi \in \sigma_1$. Sea $\sigma_{1,\psi} = \sigma_1 \cup \{\psi\}$. Mostraremos que $\sigma_{1,\psi} \cup \sigma_2 \in \Sigma$. Suponga que no es así. Entonces para cada ψ existen $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\tau)$-sentencias $\theta_{1,\psi}, \theta_{2,\psi}$ tales que $\sigma_{1,\psi} \models \theta_{1,\psi}$, $\sigma_{2,\psi} \models \theta_{2,\psi}$ y $\theta_{1,\psi} \wedge \theta_{2,\psi}$ es insatisfactible. Luego $\theta_{1,\psi} \models \neg\theta_{2,\psi}$. Como

$$\sigma_1 \models \bigvee_{\psi\in X} \psi,$$

$$\sigma_1 \models \bigvee_{\psi\in X} \theta_{1,\psi}.$$

  Pero

$$\sigma_2 \models \bigvee_{\psi \in X} \theta_{2,\psi}$$

y

$$\bigwedge_{\psi \in X} \theta_{1,\psi} \models \bigvee_{\psi \in X} \theta_{2,\psi}$$

Esto contradice que $\sigma \in \Sigma$.

Las otras propiedades son más sencillas de probar. Ahora usaremos el teorema de la existencia de modelos para culminar la prueba del teorema de interpolación. Como $\phi_1 \models \phi_2$, por el teorema de existencia del modelo, $\{\phi_1, \neg\phi_2\} \notin \Sigma$. Por tanto, hay $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\tau)$-sentencias, θ_1 y θ_2 tales que $\phi_1 \models \theta_1$, $\neg\phi_2 \models \theta_2$ y $\theta_1 \wedge \theta_2$ es insatisfactible.

Así

$$\phi_1 \models \theta_1, \theta_1 \models \neg\theta_2, \quad \text{y} \quad \neg\theta_2 \models \phi_2.$$

De lo que se sigue que

$$\phi_1 \models \theta_1 \quad \text{y} \quad \theta_1 \models \phi_2$$

θ_1 puede contener constantes de C. Sea $\theta_1 = \psi(\overline{c})$, donde $\psi(\overline{v})$ es una τ-fórmula sin constantes de C. De esto obtenemos que

$$\phi_1 \models \forall\overline{v}\psi(\overline{v}) \quad \text{y} \quad \exists\overline{v}\psi(\overline{v}) \models \phi_2.$$

Y como

$$\forall\overline{v}\psi(\overline{v}) \models \exists\overline{v}\psi(\overline{v})$$

podemos tomar

$$\forall\overline{v}\psi(\overline{v})$$

como la sentencia interpolante. Con esto terminamos la demostración. $\square$

3.2. $\mathcal{L}_{\kappa w}$

La lógica $\mathcal{L}_{w_1 w}$ fue un caso esperanzador. No cumple compacidad, pero hay un resultado alternativo (el teorema de la existencia del modelo) que nos sirve como sustituto para probar resultados análogos a los que valen en la lógica de primer orden. En particular, el teorema de existencia de modelos sirve para probar el teorema de interpolación. ¿Podemos encontrar un resultado similar en las otras lógicas infinitarias? Desaroftunadamente, la respuesta es no. El teorema de interpolación no vale en ninguna de las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa w}$. En los dos siguientes resultados construimos el contraejemplo.

Lemma 3.2.1. Sea σ una sentencia de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ que tenga la igualdad pero ningún otro símbolo no lógico. Entonces σ es verdad en todas las estructuras de tamaño mayor o igual que λ o en ninguna de ellas.

Demostración. Sea $\varphi(\vec{x})$ una formula en $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}(\emptyset)$, esto es, φ es una formula de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ que no usa símbolos lógicos diferentes de la igualdad. Y sean A y B conjuntos tales que $A \subseteq B$ con $|A| \geq \lambda$. Sea $\vec{a} \in A^{|vl(\varphi)|}$ donde vl significa las variables libres de la fórmula $\varphi(\vec{a})$. El resultado que queremos probar se sigue directamente del siguiente resultado:

$$A \models \varphi(\vec{a}) \quad \text{si y solo si} \quad B \models \varphi(\vec{a})$$

Para probar este resultado hacemos inducción sobre la complejidad de φ. El único caso que supone dificultades es cuando $\varphi = \exists\vec{x}\psi$ con $\vec{x}$ de longitud estrictamente menor que λ. La implicación de izquierda a derecha es directa. En la otra dirección, supongamos que $B \models \varphi(\vec{a})$, entonces existe un $\vec{b}$ tal que $B \models \varphi(\vec{a}, \vec{b})$. Por la hipótesis de inducción tenemos que $C \models \varphi(\vec{a}\vec{b})$ donde $C = A \cup Rang(g)$. Como ψ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ tenemos que la cantidad de variables libres de ψ es estrictamente menos que λ y, por tanto, $|Rang(\vec{a}) \cup Rang(\vec{b})| < \lambda$. Dado que $|A| < \lambda$ existe $K \subseteq A$ tal que $K \cap Rang(\vec{a}) = \emptyset$ y $|K| = |M|$ donde $M = Rang(\vec{b}) - Rang(\vec{a})$. Sea h una biyección entre K y M. Ahora bien, h puede ser extendido de forma natural a un isomorfismo $\hat{h}$ entre las estructuras (C, c, k) y $(A, c, h(k))$ con $c \in Rang(\vec{a})$ y $k \in M$.De ahí tenemos que $A \models \psi(\vec{a}, \hat{h}(\vec{b}))$. Pero $\hat{h}(\vec{b}) \in A^{|vl(\varphi)|}$. Por lo tanto $A \models \varphi(\vec{a})$, que era lo que queríamos probar. $\square$

Teorema 3.2.2. *El teorema de interpolación falla en todas las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa w}$ con $\kappa > w_1$. De hecho, dados dos cardinales infinitos κ y υ con $\kappa > \upsilon^+$*

entonces existen sentencias σ_1 y σ_2 de $\mathcal{L}_{\kappa w}$ con $\sigma_1 \models \sigma_2$, pero dichas formulas no tienen interpolante en ninguna de las lógicas $\mathcal{L}_{\infty\upsilon}$.

Demostración. Construiremos directamente el contraejemplo que hace fallar la interpolación. Sea S el lenguaje que tiene una constante c_α por cada $\alpha < \upsilon^+$. Sean

$$\sigma_1 := \forall v \bigvee_{\alpha<\upsilon} (v = c_\alpha)$$

$$\sigma_2 := \bigvee_{\upsilon<\beta<\gamma<\upsilon^+} (c_\beta = c_\gamma)$$

La sentencia $\sigma_1 \models \sigma_2$ es una sentencas válida. De hecho, si $\mathfrak{A} \models \sigma_1$ entonces $|A| \leq \upsilon$ y por cada ordinal α podríamos formar los siguientes conjuntos:

$$X_\alpha := \{\, \beta \mid \upsilon < \beta < \upsilon^+ \wedge c_\alpha^{\mathfrak{A}} = c_\beta^{\mathfrak{A}} \,\}$$

Tenemos que $\bigcup_{\alpha\in\upsilon} X_\alpha = [\upsilon, \upsilon^+)$. Por lo tanto, por el principio del palomar, sabemos que existe un α ordinal con $\alpha \in \upsilon$ tal que $|X_\alpha| > \upsilon$. Naturalmente, de aquí se sigue que $\mathfrak{A} \models \sigma_2$. Si existiera un *sigma* interpolante para σ_1 y σ_2 en la lógica $\mathcal{L}_{\infty\upsilon}$, dicha sentencia σ no tendría símbolos lógicos adicionales diferentes de la igualdad, pues σ_1 y σ_2 no tienen símbolos no lógicos en común. Tendríamos entonces que $\sigma_1 \models \sigma$ y σ sería verdadera en alguna estructura de cardinalidad υ (cualquier conjunto de cardinalidad υ serviría como modelo para σ). Pero por el lema anterior, σ debería ser verdadera en todas las estructuras de cardinalidad mayor o igual que υ. Como $\sigma \models \sigma_2$, entonces σ_2 también sería verdadera en todas las estructuras de tamaño mayor o igual que υ. ¡Pero esto es falso!, pues σ_2 puede ser falsa en alguna estructura de cardinalidad υ^+. Puede considerarse, por ejemplo, la estructura cuyo dominio es el conjunto A de todos los ordinales menores que υ^+ y las contantes son precisamente todo los $\alpha \in A$, en la que cada constante c_α se interpreta como α. $\square$

Conclusiones

1. El teorema de Lindström muestra que la compacidad es una propiedad 'esencial' de la lógica de primer orden. Es una propiedad que caracteriza la lógica de primer orden.

2. En lógica de primer orden, la compacidad implica varios resultados, tanto limitativos (indefinibilidad de algunos conceptos o clases de estructuras) como constructivos (existencia de clases de modelos para ciertas teorías). En particular, la compacidad se usa en la prueba de Interpolación de Craig, Consistencia de Robinson, y Definibilidad de Beth. Además, en lógica de primer orden, gracias a la compacidad, los teoremas de Interpolación de Craig y de Consistencia de Robinson resultan equivalentes.

3. Por otro lado, la búsqueda de un sustituto para la compacidad en diferentes sistemas lógicos nos condujo por dos caminos diferentes. En lógicas infinitarias como $\mathcal{L}_{w_1w}$ se puede encontrar un resultado sustituto adecuado para ciertos fines. A saber: El teorema de la existencia de modelo. Con este teorema se pueden probar teoremas en $\mathcal{L}_{w_1w}$ análogos a resultados en $\mathcal{L}_{ww}$. En particular se puede probar un teorema de omisión de tipos, indefinibilidad del buen orden, e interpolación de Craig (que a su vez implica Definibilidad de Beth). Sin embargo, en $\mathcal{L}_{w_1w}$ no hay un sustitutos de la compacidad para probar resultados como la consistencia adjunta de Robinson o la equivalencia (que sí ocurre en $\mathcal{L}_{ww}$) entre el Teorema de interpolación de Craig y el Teorema de consisitencia adjunta de Robinson.

4. Los contraejemplos de Malitz conducen a afirmar que en las lógicas infinitarias $\mathcal{L}_{\kappa w}$ no se puede encontrar un sustituto adecuado para compacidad y que resultados como interpolación de Craig resultan, de hecho, falsos.

Bibliografía

- Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., Thomas, Wolfgang. *Mathematical logic. Ann. of Math* **89** (1969), 187–197.

- J. Barwise, S. Feferman, eds. *Model Theoretic Logics*. Springer-Verlag, 1985, New York.

- Keisler, H. J. *Model Theory for Infinitary Logic*. Amsterdam: North Holland, 1974.

- Keisler, H. J., Chang, C. C. *Model theory*. Amsterdam: North Holland, 1990.

- Dickmann, M. A. *Large Infinitary Languages*. Amsterdam: North Holland, 1975. .

- Goldstern, M., Judah, H. *The Incompleteness Phenomenon*. A K Peters/CRC, Wellesley, Mass., 1995.

- Marker, D. *Lectures on Infinitary Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.