Estructura matemática en música: ¿por qué? ¿para qué?

Andrés Villaveces

Departamento de Matemáticas - Universidad Nacional - Bogotá

Las formas en la matemática y la música

Tertulias Matemáticas - mayo de 2021

Contenido

Contenido

Música, mente, cuerpo, matemática.

La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando.

Gottfried Leibniz

Estructura...¿en el cuerpo? ¿en la mente?

$$\begin{tikzcd}
MUS \arrow[r, "\text{ejec}"] \arrow[d, "\text{mist}"] & Cuerpo \arrow[dl, "\text{? (MP)}"] \\
MAT \arrow[r, "\text{trans}"] & Mente
\end{tikzcd}$$

La pregunta inicial

¿Qué hace que suene bien la música?

La pregunta inicial

¿Qué hace que suene bien la música?

Se traduce en muchas preguntas más específicas:

- ¿Cómo podemos visualizar la música - por ejemplo la evolución de las voces - matemáticamente?
- ¿Cómo podemos subdividir/analizar una pieza compleja? ¿Qué partes tiene, y cómo los gestos macro se reflejan a nivel micro?
- ¿Y qué es, finalmente, el gesto?
- Y esa estructura…depende de la cultura de quien hace la música, o es algo primordial del ser humano?
- Y…¿cómo percibimos en el tiempo? ¿Qué rol juega la expectativa de lo conocido cuando se vuelve a escuchar una pieza?

La pregunta inicial

¿Qué hace que suene bien la música?

Se traduce en muchas preguntas más específicas:

- ¿Cómo podemos visualizar la música - por ejemplo la evolución de las voces - matemáticamente?
- ¿Cómo podemos subdividir/analizar una pieza compleja? ¿Qué partes tiene, y cómo los gestos macro se reflejan a nivel micro?
- ¿Y qué es, finalmente, el gesto?
- Y esa estructura…depende de la cultura de quien hace la música, o es algo primordial del ser humano?
- Y…¿cómo percibimos en el tiempo? ¿Qué rol juega la expectativa de lo conocido cuando se vuelve a escuchar una pieza?

Euler - (Hugo) Riemann - Heinrich Schenker - David Lewin - Guerino Mazzola - Dmitri Tymoczko -…

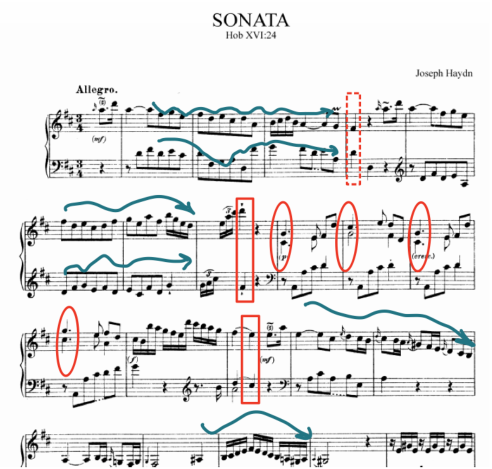
Las dos columnas - y la tensión

CONSonancia y DISonancia corresponden a distintos tipos de cuasi-simetría.

Las dos columnas - y la tensión

CONSonancia y DISonancia corresponden a distintos tipos de cuasi-simetría.
La música en "occidente" está en la confluencia de dos nociones en tensión:

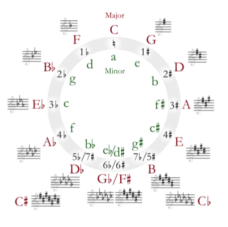
ARMONÍA	CONTRAPUNTO
harmotton	contra-punctus
acordes aceptables	conducción de voces
vertical	**horizontal**
sucesión de acordes	conectar lo horizontal (voces)
	de manera eficaz, independiente, separable


SONATA
Hob XVI:24
Joseph Haydn
Allegro.

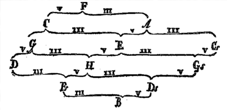
¿Cómo se articulan hARM y CONTRPct?

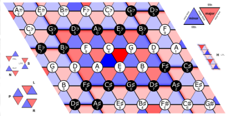
Algo de historia brevísima:

- Círculo de quintas (barroco): conducción de voces eficaz en 12 escalas mayores.



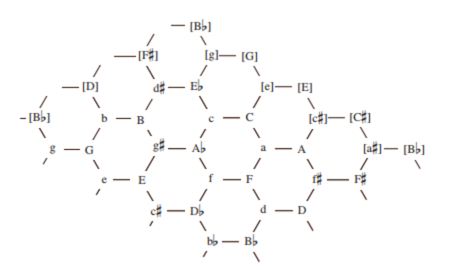
- Euler: Tonnetz (red tonal) - cond. de voces eficaz en 24 tríadas mayores y menores.





Otra visión del Tonnetz de Euler

(En realidad, dual geométrico)



¡Hugo Riemann hacia 1880 introduce la idea de <u>acciones de grupos</u> en música!

La hipótesis de Tymoczko - “meta-tonalidad”

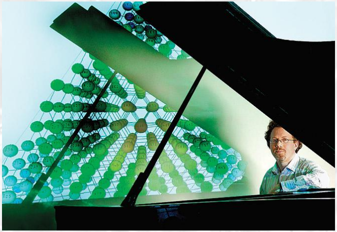
Aún así, falta una teoría de CUÁNDO y POR QUÉ es posible la conducción eficaz de voces.

La hipótesis de Tymoczko - "meta-tonalidad"

Aún así, falta una teoría de CUÁNDO y POR QUÉ es posible la conducción eficaz de voces.

Los siguientes cinco rasgos están en la mayoría de géneros musicales, occidentales o no, pasados y presentes:

1. **Movimiento melódico conjunto**
2. **Consonancia acústica**
3. **Consistencia armónica**
4. **Macroarmonía limitada**
5. **Centricidad**



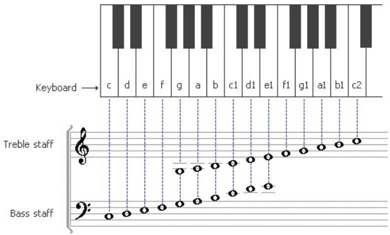
Dmitri Tymoczko - Profesor de composición y teoría musical en la Universidad de Princeton.

Tymoczko 5

1. **Movimiento melódico conjunto** - en melodías movimientos suelen preferir distancias **cortas** de nota a nota
2. **Consonancia acústica** - se prefieren en general armonías consonantes a armonías disonantes, y suelen ser usadas en puntos estables
3. **Consistencia armónica** - las armonías en un pasaje musical, tienden a ser estructuralmente similares entre sí
4. **Macroarmonía limitada** - la música tonal suele usar macroarmonías relativamente pequeñas (5 a 8 notas)
5. **Centricidad** - en lapsos de tiempo moderados una nota suele ser prominente - y sirve como objetivo emocional musical

Contenido

Sistemas numéricos y teclado: espacio tonal lineal

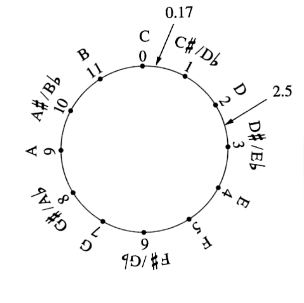


El teclado del piano (y la notación musical "usual" correspondiente) a DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO-... (C-D-E-F-G-A-B-C-...) se pueden modelar de manera natural sobre los enteros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

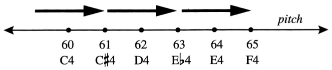
o incluso sobre los reales $\mathbb{R}$, llevando las cosas al extremo. El orden natural de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ es crucial aquí.

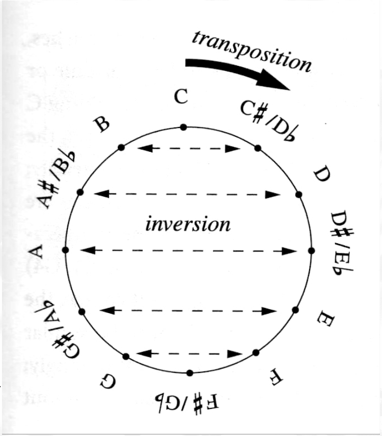
Aritmética modular



El espacio de tonos **circular** se construye "dividiendo" el espacio de tonos lineal por la relación de equivalencia "ser equivalente mod 12"

Transposiciones ≈ Traslaciones



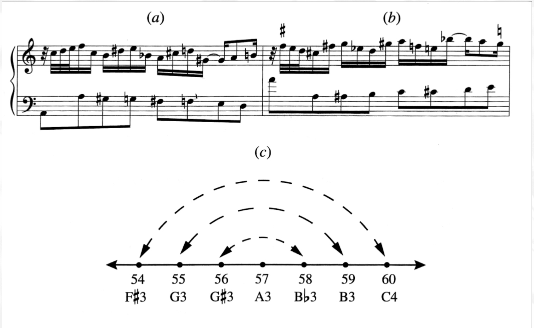


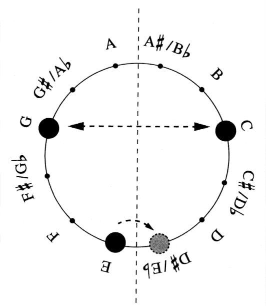
Transposiciones en espacio tonal lineal, en espacio tonal circular y en notación musical “clásica”.

La **transposición por** n (n un entero $\mod 12$) es la función

$$T_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto x+n \text{ m}$$

Inversiones





Inversiones en espacio tonal lineal, circular y en notación musical "clásica".
La **inversión** n es

$$I_n : \mathbb{Z}/12 \to \mathbb{Z}/12 : x \mapsto -x + n \bmod 12.$$

Transponer/Invertir acordes o melodías

Con esta notación, los acordes (llamados "pcsets" en teoría musical) o las melodías ("pcsegs" en t. mus.) se pueden transponer e invertir:

Transponer/Invertir acordes o melodías

Con esta notación, los acordes (llamados "pcsets" en teoría musical) o las melodías ("pcsegs" en t. mus.) se pueden transponer e invertir: Con la convención $\mathrm{DO} = 0, \mathrm{DO}\sharp = 1, \ldots, \mathrm{SI} = 11$, el acorde de DO mayor (DO-MI-SOL) es $\{0, 4, 7\}$ y si aplicamos T_7 lo transponemos a SOL mayor (SOL-SI-RE):

$$T_7\{0, 4, 7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{0+7, 4+7, 7+7\} = \{7, 11, 2\}.$$

Transponer/Invertir acordes o melodías

Con esta notación, los acordes (llamados "pcsets" en teoría musical) o las melodías ("pcsegs" en t. mus.) se pueden transponer e invertir: Con la convención DO $= 0$, DO$\sharp = 1, \ldots,$ SI $= 11$, el acorde de DO mayor (DO-MI-SOL) es $\{0, 4, 7\}$ y si aplicamos T_7 lo transponemos a SOL mayor (SOL-SI-RE):

$$T_7\{0, 4, 7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{0+7, 4+7, 7+7\} = \{7, 11, 2\}.$$

$$I_0\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle = \langle 0, 0, 8, 8, 5, 5, 8, 7, 7, 10, 10, 1, 1, 5\rangle$$

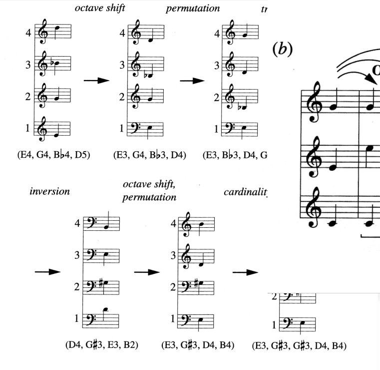
(Tema de la Sinfonía Sorpresa de Haydn. Ejemplos de Thomas Fiore.)

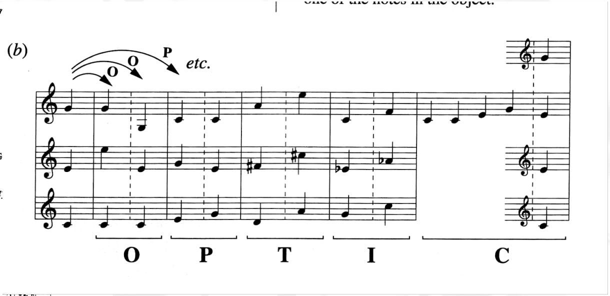
Más transformaciones: OPTIC

En teoría musical, dos objetos pertenecen a la misma clase (set class) si están relacionados por alguna de las cinco simetrías "OPTIC" (cambio de octava (O), permutación (P), transposición (T), inversión (I), cambio de cardinal (C)).

Operación	**Acción**
Octava	Mover cualquier nota a otra octava.
Permutación	Reordenar el objeto, cambio de voces.
Transposición	Transponer todo el objeto.
Inversión	Invertir el objeto completo.
Cardinal	Agregar una voz duplicante de una nota.

Transformaciones OPTIC





Grupos musicales

En teoría musical, los grupos son objetos matemáticos cruciales: los teóricos musicales usan los grupos como categorías conceptuales para hacer más tangible la estructura de la música.
¿Cómo interactúan las transposiciones y las inversiones?

Grupos musicales

En teoría musical, los grupos son objetos matemáticos cruciales: los teóricos musicales usan los grupos como categorías conceptuales para hacer más tangible la estructura de la música.
¿Cómo interactúan las transposiciones y las inversiones?

Forman un grupo, llamado el "grupo T/I". Otro grupo, esencialmente inventado por Hugo Riemann en el siglo XIX, el grupo *PLR* o neo-Riemanniano ayuda a entender muchas obras musicales.

El grupo T/I

Sea S el conjunto de todas las formas transpuestas e invertidas del acorde de DO mayor $\langle 0, 4, 7\rangle$ - formas primas y formas invertidas.

Formas primas	**Formas invertidas**
$C = \langle 0, 4, 7\rangle$	$\langle 0, 8, 5\rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8\rangle$	$\langle 1, 9, 6\rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9\rangle$	$\langle 2, 10, 7\rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10\rangle$	$\langle 3, 11, 8\rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11\rangle$	$\langle 4, 0, 9\rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0\rangle$	$\langle 5, 1, 10\rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1\rangle$	$\langle 6, 2, 11\rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2\rangle$	$\langle 7, 3, 0\rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3\rangle$	$\langle 8, 4, 1\rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4\rangle$	$\langle 9, 5, 2\rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5\rangle$	$\langle 10, 6, 3\rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6\rangle$	$\langle 11, 7, 4\rangle = e$

El grupo T/I

Lo anterior en música corresponde a los 24 acordes mayores y menores. Las transposiciones e inversiones inducen funciones $T_n : S \to S$ e $I_n : S \to S$ para $n = 0, \ldots, 11$, aplicando la función a cada entrada del pcseg correspondiente.

El grupo T/I

Lo anterior en música corresponde a los 24 acordes mayores y menores. Las transposiciones e inversiones inducen funciones $T_n : S \to S$ e $I_n : S \to S$ para $n = 0, \ldots, 11$, aplicando la función a cada entrada del pcseg correspondiente.

El grupo T/I consta de las 24 funciones $T_0, \ldots, T_{11}, I_0, \ldots, I_{11}$.

El grupo T/I

La composición $\circ$ en T/I obedece:

$$T_m \circ T_n = T_{m+n}$$

$$T_m \circ I_n = I_{m+n}$$

$$I_m \circ T_n = I_{m-n}$$

$$I_m \circ I_n = T_{m-n}$$

y corresponde (es isomorfo) a lo que en matemática se llama el grupo diedro de orden 24.

Otro grupo musical: el PLR

Éste (con menos detalles) es un grupo de funciones $S \to S$ como antes - "generado" por tres transformaciones musicales básicas P, L y R:

- $P\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 7, 3, 0\rangle$: intercambia primera y tercera nota, y cambio el tipo de acorde (de primo a invertido).
- L es como P, pero intercambiando segunda y tercera nota: $L\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 11, 7, 4\rangle$.
- R es como P, pero intercambiando primera y segunda nota: $R\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 4, 0, 9\rangle$.

Al componer estas funciones obtenemos objetos $L \circ R$, $R \circ R$, &c.

Otro grupo musical: el *PLR*

Éste (con menos detalles) es un grupo de funciones $S \to S$ como antes - “generado” por tres transformaciones musicales básicas P, L y R:

- $P\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 7, 3, 0\rangle$: intercambia primera y tercera nota, y cambio el tipo de acorde (de primo a invertido).
- L es como P, pero intercambiando segunda y tercera nota: $L\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 11, 7, 4\rangle$.
- R es como P, pero intercambiando primera y segunda nota: $R\langle 0, 4, 7\rangle = \langle 4, 0, 9\rangle$.

Al componer estas funciones obtenemos objetos $L \circ R$, $R \circ R$, &c.
En música, P lleva un acorde a su paralelo mayor o menor; convierte DO mayor en do menor y viceversa. L intercambia dominante: convierte DO mayor en mi menor, por ejemplo. R convierte un acorde en su relativo mayor o menor; convierte DO mayor en la menor, o la menor en DO mayor, por ejemplo.

PLR para matemáticos

El grupo *PLR* es isomorfo al grupo T/I, pero sus objetos representan transformaciones de acordes que han sido importantes en música durante siglos por razones distintas.

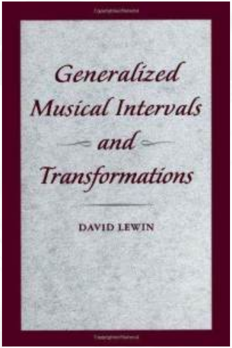
[Matemática: $PLR \approx T/I \approx D_{12}$ - el diedro de orden 24. Ésto es sorprendente.

Dentro del grupo de todas las permutaciones de S (un grupo con 24! elementos), T/I es el centralizador de PLR y viceversa.]

PLR para matemáticos

El grupo *PLR* es isomorfo al grupo T/I, pero sus objetos representan transformaciones de acordes que han sido importantes en música durante siglos por razones distintas.
[Matemática: $PLR \approx T/I \approx D_{12}$ - el diedro de orden 24. Ésto es sorprendente.
Dentro del grupo de todas las permutaciones de S (un grupo con 24! elementos), T/I es el centralizador de *PLR* y viceversa.]

Más allá del tecnicismo, lo importante es que la matemática revela una dualidad profunda entre distintas transformaciones importantes en música - a priori, no era obvio que transponer e invertir acordes fuera un "hermano gemelo desconocido" de tomar relativas, paralelas y cambios de dominantes en música. David Lewin explota esta dualidad.



Segundo mov. de la IX Sinfonía

Aparece la siguiente sucesión de acordes:

$$C, a, F, d, B\flat, g, E\flat, c, A\flat, f, D\flat, b\flat, G\flat, e\flat, B, g\sharp, E, c\sharp, A$$

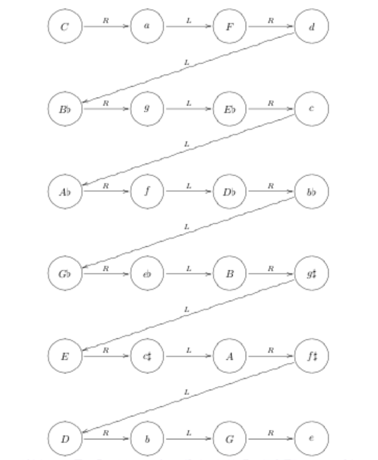
Toda la secuencia se puede obtener mediante aplicaciones de las transformaciones L y R del grupo PLR.

Segundo mov. de la IX Sinfonía

Aparece la siguiente sucesión de acordes:

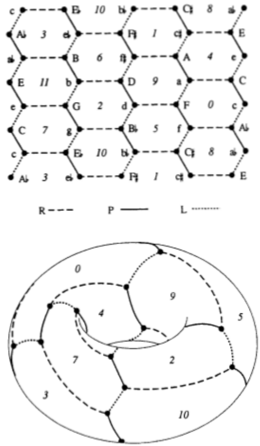
$$C, a, F, d, B\flat, g, E\flat, c, A\flat, f, D\flat, b\flat, G\flat, e\flat, B, g\sharp, E, c\sharp, A$$

Toda la secuencia se puede obtener mediante aplicaciones de las transformaciones L y R del grupo PLR.



Camino en un toro

Douthett y Steinbach encuentran patrones como este camino en un toro, dados por los acordes de la Novena Sinfonía de Beethoven (de hecho, Beethoven rompe la simetría dejando sólo 19 de los 24 acordes - la matemática nos permite examinar **rupturas** de simetría en distintos compositores):



Espacio tonal en dimensión 2

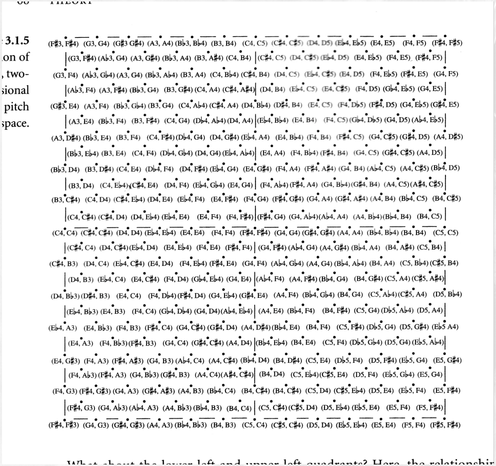
De manera análoga a como hacemos en matemática básica al "ubicar" pares de coordenadas en el plano cartesiano, podemos armar superficies al tratar de ubicar pares de notas... y estudiar el efecto de las transformaciones O, P, T, I, C sobre estas superficies.

Espacio tonal en dimensión 2

De manera análoga a como hacemos en matemática básica al "ubicar" pares de coordenadas en el plano cartesiano, podemos armar superficies al tratar de ubicar pares de notas... y estudiar el efecto de las transformaciones O, P, T, I, C sobre estas superficies. El resultado de llevar a cabo ésto de manera sistemática, en manos de Tymoczko y otros, ha llevado a

- Superficies tonales (análogas a cintas de Möbius)
- Análisis de **caminos** dados por el movimiento "vertical" (armonía) y "horizontal" (conducción de voces, contrapunto).
- Sistemas dinámicos asociados a obras musicales.

Espacios tonales



Espacio tonal - cinta de Moebius

Conducción de voces

Un par de ejemplos:

- Transposición (traslación): do mayor $\to$ fa mayor.
  {do,mi,sol} $\to$ {fa,la,do}

$$\{0, 4, 7\} \xrightarrow{+5 \bmod 12} \{5, 9, 0\}.$$

- Inversión (reflexión): do mayor $\to$ do menor.
  {do,mi,sol} $\to$ {do,mi♭,sol}

$$\{0, 4, 7\} \xrightarrow{7-\cdot \bmod 12} \{0, 3, 7\}.$$

Conducción de voces

En general: dados acordes $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$, una conducción de voces de X a Y es un conjunto de parejas ordenadas

$$\{\cdots, (x_i, y_j), \cdots\}$$

tal que todo elemento de X y de Y aparece en alguna pareja.
Escribimos $(x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_n)$.
Por ejemplo, $(do, do, fa, sol) \to (si, re, fa, sol)$

¿Dónde?

La idea es medir las conducciones de voces - la música en "occidente" intenta optimizar módulo simetría.

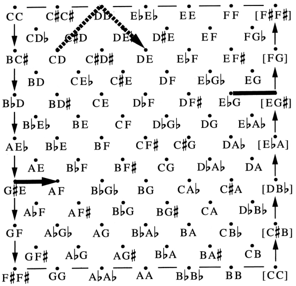
n-tupla de tonos	Punto en $\mathbb{R}^n$
Conducción de voces	Segmento en $\mathbb{R}^n$
n-tupla de clases tonales	Punto en $(\mathbb{R}/12\mathbb{Z})^n \approx \mathbb{T}^n$ (n-toro)
Sucesión NO ordenada de clases tonales	$(x_1, \cdots, x_n) \sim (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ con $\sigma \in S_n$.

Así, $\mathbb{T}^n/S_n$, el orbifold (cociente global) es el espacio natural para ubicar las sucesiones no ordenadas tonales.

Espacios tonales - «geodésicas musicales»

Por ejemplo, en el caso de dos tonos, $\mathbb{T}^2/S_2$ tiene estructura de cinta de Moebius.

Figure 3.4.2 The horizontal boundaries act like mirrors, whereas the vertical boundaries are glued together with a "twist." Voice leadings thus disappear off the left edge to reappear on the right, and vice versa. Here, the voice leadings (E♭, G) → (F, A) and (C, D) → (E, D) are shown.



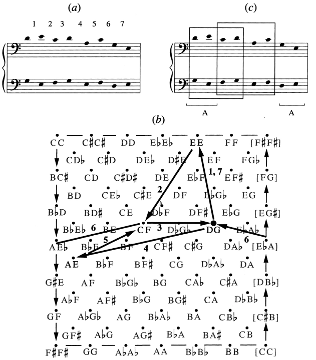
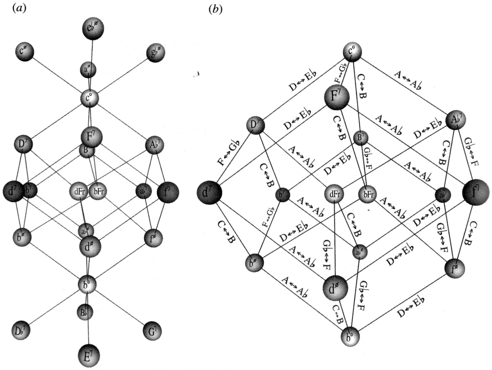


Figure 3.5.1 Plotting a phrase from the *Allelujia Justus et Palma* (*a*) on the Möbius strip (*b*) reveals interesting musical structure (*c*).

Conducciones de voces: ¡segmentos en el orbifold!

Más dimensiones

different ways of raising or lowering the notes of the diminished seventh chord.



sively raise or lower the notes of the tritone by semitone, while those in Figure 3.11.2a

En dimensiones más altas la idea es la misma (prismas con bordes identificados).

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.

Caminos - Segmentos - Progresiones

Resumiendo hasta ahora:

- Segmentos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - Conducciones de voces
- Caminos en $\mathbb{T}^n/S_n$ - "Progresiones" generalizadas
- La geometría de los orbifolds interpreta los segmentos como imágenes de segmentos en $\mathbb{R}^n$ o como segmentos "reflejados" en los bordes del orbifold.
- Los grupos de transposiciones/traslaciones (T), inversiones/reflexiones (I) y permutaciones (P) actúan sobre el orbifold tonal.
- ¡Podemos clasificar acordes y progresiones según estos grupos!

Simetrías e historia de la música

P-simetría: clusters, siglo XX
I-simetría: siglo XIX
T-simetría: independiente de época

T-simetría y consonancia acústica

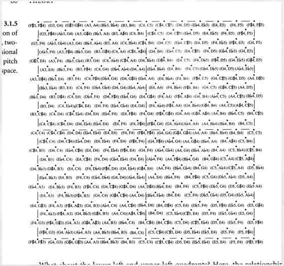
- “Centro” del orbifold: acordes que dividen la octava de manera “uniforme”.
- Segmentos paralelos a la coordenada de altura: transposiciones.
- T-simetría es por lo tanto “división de octavas en partes iguales o uniones de subconjuntos de tamaños iguales que también subdividen la octava en partes iguales.
- La conducción vocal a transpuestas es eficaz (minimalidad).

T-simetría y consonancia acústica

- "Centro" del orbifold: acordes que dividen la octava de manera "uniforme".
- Segmentos paralelos a la coordenada de altura: transposiciones.
- T-simetría es por lo tanto "división de octavas en partes iguales o uniones de subconjuntos de tamaños iguales que también subdividen la octava en partes iguales.
- La conducción vocal a transpuestas es eficaz (minimalidad).
- Problema: las conducciones de voces eficientes entre acordes perfectamente T-simétricos típicamente no son independientes. Por esto los compositores prefieren la cuasi-T-simetría a la T-simetría exacta.

T-simetría y consonancia acústica

- “Centro” del orbifold: acordes que dividen la octava de manera “uniforme”.
- Segmentos paralelos a la coordenada de altura: transposiciones.
- T-simetría es por lo tanto “división de octavas en partes iguales o uniones de subconjuntos de tamaños iguales que también subdividen la octava en partes iguales.
- La conducción vocal a transpuestas es eficaz (minimalidad).
- Problema: las conducciones de voces eficientes entre acordes perfectamente T-simétricos típicamente no son independientes. Por esto los compositores prefieren la cuasi-T-simetría a la T-simetría exacta.



P-simetría y "clusters" musicales

- La *P*-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.

P-simetría y "clusters" musicales

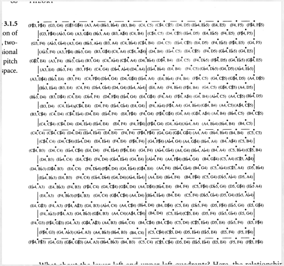
- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!

P-simetría y "clusters" musicales

- La P-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-P-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi P-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.

P-simetría y "clusters" musicales

- La *P*-simetría (bajo permutaciones) tiene lugar cerca de los bordes del orbifold musical; corresponde a clases tonales duplicadas.
- El caso más interesante es la cuasi-*P*-simetría: por ejemplo, un cluster como $\{mi, fa, sol\flat\}$ (notas "pegadas" en el piano) es casi *P*-simétrico.
- La conducción de voces eficiente entre clusters se refleja (espejo) en el borde del orbifold tonal.
- Hay conducciones de voces no triviales e independientes - eficientes desde el punto de vista musical — ¡disonantes!
- Música "estática" que se mueve distancias pequeñas sin cambiar armonía: Ligeti, Lutoslawski, etc.



I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de *I*-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\rightarrow$ fa dominante 7a

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de I-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\rightarrow$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\rightarrow$ fa–la–do–mi♭

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de I-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\rightarrow$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\rightarrow$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:
  $\{6, 9, 0, 4\} \xrightarrow{9-\cdot} \{5, 9, 0, 3\}$

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de I-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\rightarrow$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\rightarrow$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:
  $\{6, 9, 0, 4\} \xrightarrow{9-\cdot} \{5, 9, 0, 3\}$
- de nuevo, la casi-I-simetría es la más eficaz:

$$\{6, 9, 0, 4\} \approx \{5.5, 9.0, .3.5\} \approx \{5, 9, 0, 3\}$$

(El "acorde" de la mitad es totalmente I-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)

I-simetría y el siglo XIX

Un ejemplo básico de I-simetría (inversión/reflexión):

- fa♯ semidisminuida 7a $\rightarrow$ fa dominante 7a
- fa♯–la–do–mi $\rightarrow$ fa–la–do–mi♭
- en nuestro espacio log/lineal:
  $\{6, 9, 0, 4\} \xrightarrow{9-\cdot} \{5, 9, 0, 3\}$
- de nuevo, la casi-I-simetría es la más eficaz:

$$\{6, 9, 0, 4\} \approx \{5.5, 9.0, .3.5\} \approx \{5, 9, 0, 3\}$$

  (El “acorde” de la mitad es totalmente I-simétrico y muy cercano a fa♯-semid.-7a y a fa-dom.7a.)
- Schubert, Brahms, Wagner, Debussy usan muchísimo la cuasi I-simetría

¿Teoría de modelos de la música?

Hasta ahora: en CEROS.
La acción del grupo sobre la superficie y las geodésicas musicales dadas por la conducción de voces son objetos iniciales.
¡El tipo de una melodía, su invarianza bajo transformaciones, su «teoría de Galois» están esbozadas!