Teoría de modelos más allá de primer orden:

estabilidad, definibilidad y grupos de Galois

Andrés Villaveces - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*

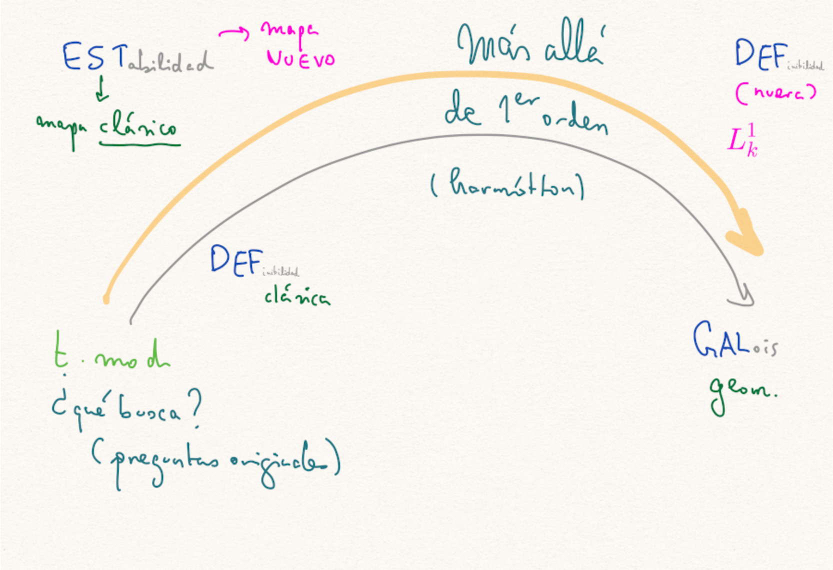
Conferencia magistral (Titularidad) - 15 de febrero de 2021

Etapas

¿Qué busca la teoría de modelos?

¿Y más allá de primer orden?

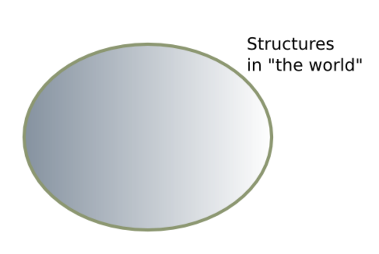
Resultados: Definibilidad, Estabilidad, Galois


ESTabilidad
→ mapa NUEVO
mapa clásico
Más allá de 1er orden
DEFinibilidad (nueva)
L^1_k
DEFinibilidad clásica
t. mod.
¿qué busca?
(preguntas originales)
GALois geom.

Plan

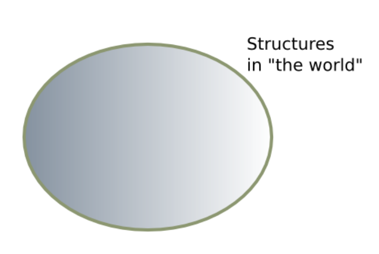
- ¿Qué busca la teoría de modelos?
  - Magma de estructuras / Tipos / Definibles / Mapa clásico
  - Algo de conexiones con lógica clásica
- ¿Y más allá de primer orden?
  - Harmótton vs logos
- Resultados: Definibilidad, Estabilidad, Galois
  - Definibilidad: hacia la lógica natural de las AECs
  - Estabilidad en AEC
  - Galois

Un mundo ideal



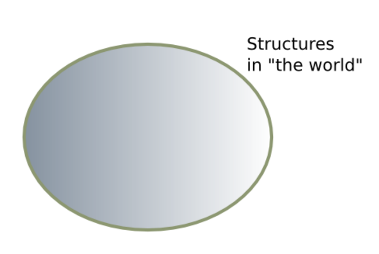
Observemos "desde lejos" los miles y miles de estructuras matemáticas que nosotros los humanos hemos inventado/descubierto a través de los siglos.

Un mundo ideal



Observemos "desde lejos" los miles y miles de estructuras matemáticas que nosotros los humanos hemos inventado/descubierto a través de los siglos.
Grupos, cuerpos, variedades algebraicas, espacios de Sobolev, modelos internos de teoría de conjuntos, espacios de funciones, y mucho más ...
¿Es un mundo homogéneo?

Un mundo ideal



Observemos “desde lejos” los miles y miles de estructuras matemáticas que nosotros los humanos hemos inventado/descubierto a través de los siglos.
Grupos, cuerpos, variedades algebraicas, espacios de Sobolev, modelos internos de teoría de conjuntos, espacios de funciones, y mucho más ...
¿Es un mundo homogéneo? La respuesta es un NO contundente, como todos aquí sabemos, ¡incluso antes de imaginar que existen tantas estructuras!

¿Hay estructuras inevitables?

Entre esos miles de estructuras, el paisaje está lejos de ser homogéneo - hay outliers muy altos - estructuras que son de alguna manera inevitables en cualquier cultura matemática:

- $\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - aritmética
- $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geometría algebraica
- $\langle \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geom. alg. real
- curvas elípticas
- espacios vectoriales (módulos, etc.)
- ciertos objetos de combinatoria
- espacios de Hilbert, ℓ_2, etc.
- ...

Teoría de modelos - teoría de invariantes

$\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - aritmética

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geometría algebraica

$\langle \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geom. alg. real

curvas elípticas

espacios vectoriales (módulos, etc.)

ciertos objetos de combinatoria

espacios de Hilbert, ℓ_2, etc.

...

Teoría de modelos - teoría de invariantes

$\langle \mathbb{N}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - aritmética

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geometría algebraica

$\langle \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ - geom. alg. real

curvas elípticas

espacios vectoriales (módulos, etc.)

ciertos objetos de combinatoria

espacios de Hilbert, ℓ_2, etc.

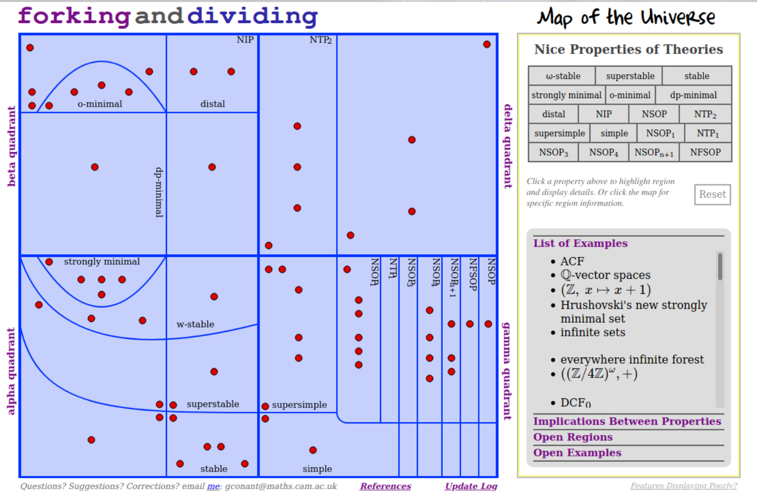
...

Palabras como "dimensión", "rango", "grado", "carácter de densidad" aparecen "amarradas" a muchas de esas estructuras, las controlan y nos permiten capturarlas

Teoría de Modelos: perspectiva y grano fino

1. **Estructuras** arbitrarias.
2. Jerarquía de tipos de estructuras (o sus teorías): Teoría de Estabilidad.
3. En la parte "más suave" de la jerarquía: topologías de Zariski generalizadas - Geometrías de Zariski de Hrushovski y Zilber: variedades algebraicas - estructuras "arbitrarias" cuyo lugar en la jerarquía les da automáticamente similitud fuerte con curvas algebraicas.
4. Objetos uni-dimensionales en estructuras de Zariski corresponden exactamente a cubiertas finitas de curvas algebraicas - ¡estos corresponden a estructuras que capturan fenómenos no-conmutativos en Cuántica!
5. Más recientemente: estructuras "límite" en teoría de modelos. Métodos de perturbación en otras áreas de la matemática pueden ser vistos modelo-teóricamente.

La jerarquía de estabilidad - "Mapa del universo (clásico, 2021)"



Teoría de modelos clásica: definabilidad. Fórmulas.

Inicialmente, la teoría de modelos permite dos cosas básicas:

Capturar clases de modelos

Aislar conjuntos definibles dentro de cada clase

Ejemplos:

Clases: (modelos de) axiomas de Peano, axiomas de grupos, axiomas de cuerpos, campos algebraicamente cerrados, etc. (espacios de Hilbert, ...).

Conjuntos definibles: dos niveles: a través de una fórmula o a través de conjuntos infinitos de fórmulas que aún tienen "conjuntos solución" (lugares geométricos).

Conjuntos definibles

En teoría de modelos un conjunto D es definible en una estructura $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que $D = \varphi(\mathfrak{A}) = \{a \in A | \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$.
D es el **lugar geométrico** de la fórmula φ, en $\mathfrak{A}$.
Ejemplos clásicos de conjuntos definibles en un cuerpo incluyen variedades afines: la curva elíptica dada por

$$y^2 = x^3 + ax + bc + c$$

se puede entender como el conjunto definible D_C sobre $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, a, b, c \rangle$,

$$D_C = \varphi_C(\mathbb{C}, a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | \varphi_C(x, y, a, b, c)\},$$

donde $\varphi_C(x, y, a, b, c)$ es la fórmula $y^2 = x^3 + ax + bc + c$.

Conjuntos tipo-definibles (I)

Dados a y C, el tipo de a sobre C en M es el conjunto

$$\mathrm{tp}(a/C, M) := \{\varphi(x, \bar{c}) | \bar{c} \in C, M \models \varphi[a, \bar{c}]\}.$$

1. $\mathrm{tp}(2/\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{x = 1 + 1, \cdots\}$
2. $\mathrm{tp}(\sqrt{2}/\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{x \cdot x = 1 + 1, \cdots\}$
3. $\mathrm{tp}(\pi/\mathbb{Q}, \mathbb{C}) = \{\neg(P(x) = 0) | P(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$

1 (tipo realizado): una fórmula, una solución
2 también determinado por una fórmula (tipo principal) pero tiene varias (finitas) soluciones: es algebraico
3 es un tipo no algebraico: no determinado por una fórmula - infinitas soluciones

Conjuntos tipo-definibles (II)

Podemos ahora ver un conjunto de fórmulas

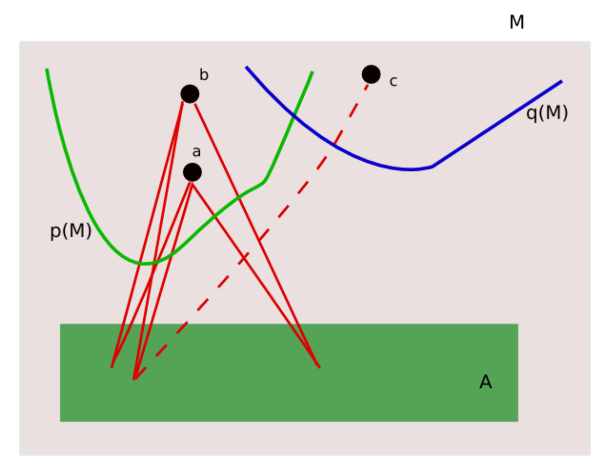
$$p = \{\varphi_i(x, \bar{b}) | i \in I\}$$

como un conjunto (tipo-)definible: busque el **lugar geométrico** de soluciones en un modelo M; esto arroja el tipo-definible

$$p(M) = \{a \in M | a \models p\}.$$

Naturalmente, se puede aplicar el mismo proceso para encontrar subconjuntos definibles y tipo-definibles de M^2, M^3, etc. incluso $M^{\mathbb{N}}$...

tp(a/A, M), ETC.



El papel de conjuntos definibles y tipo-definibles

Análogo al de ideales en geometría algebraica: por el Nullstellensatz de Hilbert, la información crucial en variedades queda capturada por los ideales radicales.
En $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$, “$\mathsf{a}$ y b tienen mismo tipo sobre V” queda capturado por ideales (elim. cuant.)
En general, son las bloques básicos de clasificación, generación, conteo de estructuras y de inmersiones entre estas.

Variantes

Tipos en teoría de modelos pueden ser vistos como

1. Conjuntos de fórmulas
2. Cerrados en topologías de Zariski
3. Órbitas bajo automorfismos de modelos monstruos
4. Más recientemente, medidas/estados o distribuciones.

Una visión no ortodoxa

La visión más usual del rol del teorema de Gödel dice básicamente que este asestó un golpe mortal al programa de Hilbert. Normalmente se ve el teorema de Completitud (anterior al de Incompletitud) como un paso "anterior", "menos complejo" que el teorema de Incompletitud.

Una visión no ortodoxa

La visión más usual del rol del teorema de Gödel dice básicamente que este asestó un golpe mortal al programa de Hilbert.
Normalmente se ve el teorema de Completitud (anterior al de Incompletitud) como un paso “anterior”, “menos complejo” que el teorema de Incompletitud.
Sin embargo (siguiendo ideas de Väänänen), una manera distinta de verlo es la siguiente: el teorema de Incompletitud es esencialmente anterior al teorema de Completitud.

Completitud: ¿terapéutica?

El teorema de Completitud en cierto sentido “subsana” problemas que señala el teorema de Incompletitud. El camino entonces es más bien

Completitud: ¿terapéutica?

El teorema de Completitud en cierto sentido "subsana" problemas que señala el teorema de Incompletitud. El camino entonces es más bien

$$\text{HILBert} \longrightarrow \text{INCompl.}_{\text{Gödel}} \longrightarrow \text{COMPL.}_{\text{Gödel}}$$

Cronología

Ahora bien, cabe aclarar que no fue así la aparición cronológica de los teoremas de Gödel: el teorema de Completitud apareció un año antes del de Incompletitud. Sin embargo, un año en la mente activa de un matemático suele tener un revuelto enorme de cosas, y es bastante difícil sostener que Gödel haya empezado a pensar en Incompletitud solo después de lograr Completitud. Es mucho más sensato afirmar que probablemente estaba pensando más o menos simultáneamente en ambas, ensayando una u otra posible solución que nunca vio la luz, y simplemente escribió Completitud primero e Incompletitud después…

Tres teoremas

Teorema (Indefinibilidad de la definibilidad - Tarski)

La relación $\mathsf{D}(\mathsf{m},\mathsf{n})$ *que dice que* m *es número de Gödel de una fórmula que define a* n *no es una relación definible en la aritmética.*

Tres teoremas

Teorema (Indefinibilidad de la definibilidad - Tarski)

La relación $\mathsf{D}(\mathsf{m},\mathsf{n})$ *que dice que* m *es número de Gödel de una fórmula que define a* n *no es una relación definible en la aritmética.*

Teorema (Indefinibilidad de la verdad - Tarski)

El conjunto de los números de Gödel de las sentencias verdaderas no es aritmético.

Tres teoremas

Teorema (Indefinibilidad de la definibilidad - Tarski)

La relación $\mathsf{D}(\mathsf{m},\mathsf{n})$ *que dice que* m *es número de Gödel de una fórmula que define a* n *no es una relación definible en la aritmética.*

Teorema (Indefinibilidad de la verdad - Tarski)

El conjunto de los números de Gödel de las sentencias verdaderas no es aritmético.

Teorema (Teorema de Incompletitud de Gödel)

Si un sistema axiomático aritmético $\mathcal{A}$ *es válido y recursivo, entonces existe una sentencia* $\varphi^{\mathcal{A}}_{\text{gödel}}$ *verdadera pero no* $\mathcal{A}$*-teorema.*

Un contexto sorprendente: la revolución romántica

Isaiah Berlin: la revolución romántica consistió en el primer ataque a los tres principios, “tres piernas sobre las cuales descansaba toda la tradición occidental”:

Un contexto sorprendente: la revolución romántica

Isaiah Berlin: la revolución romántica consistió en el primer ataque a los tres principios, “tres piernas sobre las cuales descansaba toda la tradición occidental”:

- toda pregunta real debe poder ser respondida (y si no tenemos respuesta la razón es probablemente nuestra ignorancia) o si algo no se puede responder, no es una pregunta,
- todo concepto real se puede transmitir, se puede enseñar (contrariamente a creencias de otras culturas según las cuales hay conceptos que no pueden ser transmitidos, o enseñados, a menos que uno sea un “iluminado”, bendito o “escogido”)
- que todas las respuestas deben ser compatibles las unas con las otras

¿Más allá? (Serra: "Tilted Arc")

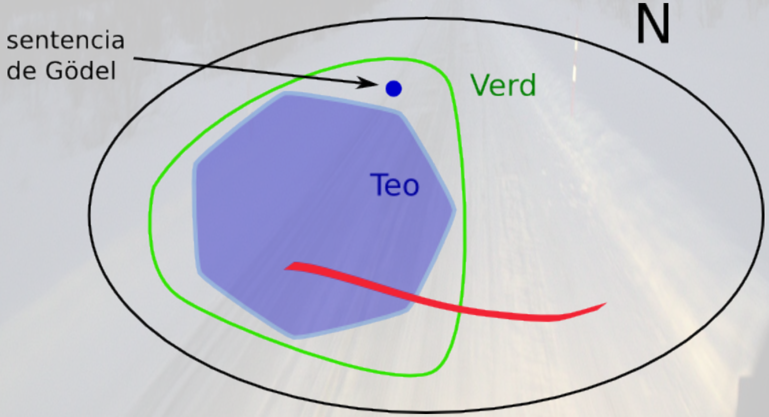
Simple, pero bloquea(ba) (según algunos...)

Sentencias de Gödel - Epiménides

Lo clave en los tres teoremas anteriores es la construcción (idea de Gödel) de una sentencia de Gödel $\varphi^{\mathsf{A}}_{\text{gödel}}$ que no puede estar ni en A ni por fuera de $\mathsf{Verd} = \{\ulcorner \varphi \urcorner | \mathbb{N} \models \varphi\} \subset \mathbb{N}$.

La sentencia de Gödel es una generalización supremamente sofisticada de la "paradoja del mentiroso", y aprovecha el poder enorme de codificación de la estructura $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ (la estructura inductiva de las fórmulas se puede reflejar en la estructura inductiva de los naturales.

Ruptura dicotómica



El rol de completitud

Aunque históricamente es anterior al de Incompletitud, el Teorema de Completitud de Gödel es casi contemporáneo, y se puede leer como una "solución" al problema que plantea el Teorema de Incompletitud[1].

Teorema (Teorema de Completitud de Gödel - versión 1)

Dada una teoría T *y una sentencia* φ *del lenguaje de* T, φ *es un* T*-teorema si y solo si* φ *vale en todos los modelos de* T.

$$\mathsf{T} \vdash \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{T} \models \varphi.$$

[1] Ojo: esta no es la visión más usual de estos teoremas - nuestro nuevo libro de Lógica Matemática con Jouko Väänänen sigue este camino.

Muchos mundos posibles

Una posible lectura de los dos teoremas es la siguiente: insistir en evaluar las sentencias en "un solo mundo" es necesariamente restrictivo. Aunque la teoría PA se puede ver como un instrumento para analizar el <u>modelo estándar</u> $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$, si uno pretende tener una equivalencia entre la sintaxis y la semántica está <u>obligado</u> a mirar todos los modelos posibles de la aritmética, en una especie de reivindicación tardía de las ideas de Leibniz.

Muchos mundos posibles

Una posible lectura de los dos teoremas es la siguiente: insistir en evaluar las sentencias en "un solo mundo" es necesariamente restrictivo. Aunque la teoría PA se puede ver como un instrumento para analizar el modelo estándar $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$, si uno pretende tener una equivalencia entre la sintaxis y la semántica está obligado a mirar todos los modelos posibles de la aritmética, en una especie de reivindicación tardía de las ideas de Leibniz.

Solo mirando simultáneamente muchos mundos se atrapa la teoría - restringirse a un ÚNICO mundo necesariamente da incompletitud.

Muchos mundos posibles

Paisaje, Irma Laukkanen

Matemática estructural

La explosión de modelos tuvo lugar en la primera mitad del siglo XX, en muchos dominios de la matemática, de manera natural:

- Análisis funcional - espacios de funciones, inmersiones
- Teoría de Galois - cuerpos, anillos, grupos, etc.
- Dominios universales de Weil
- Espacios de probabilidad
- …

Semántica liberada

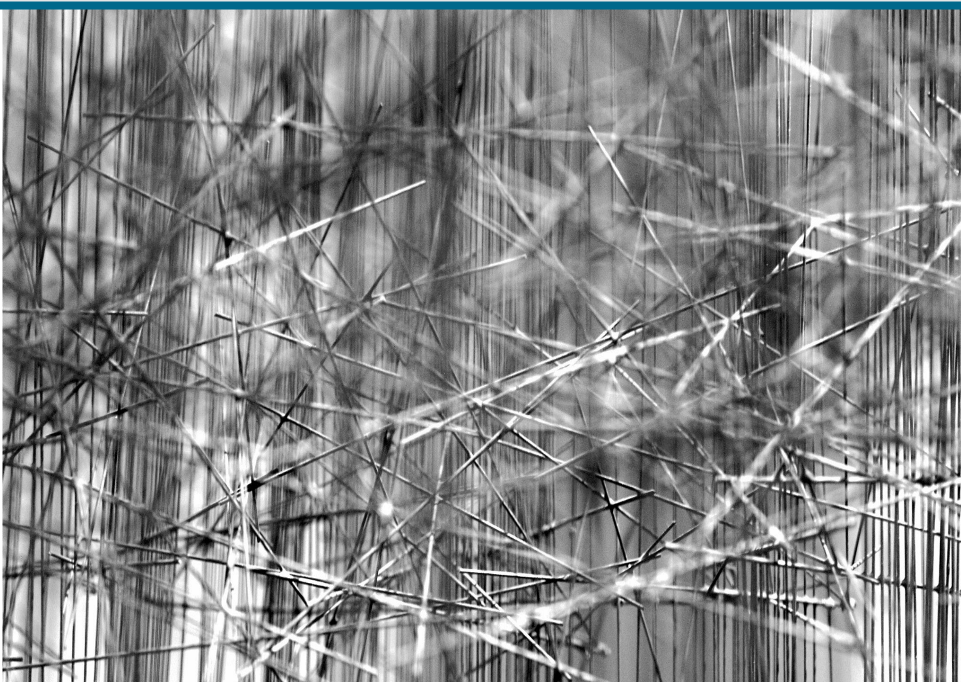
En conclusión, esta primera ruptura, generada (tal vez simultáneamente) entre los teoremas de Incompletitud y de Completitud, completa un proceso que venía desde la Teodicea de Leibniz, pero solo se hizo concreto en el primer tercio del siglo XX: la liberación de la semántica de un solo modelo a muchos modelos. Esta es simultáneamente una ruptura (del "modelo único") y una reparación terapéutica del fenómeno de Incompletitud (inherente a la teoría de conjuntos y a la aritmética, por su alto poder de codificación).

Plan

- ¿Qué busca la teoría de modelos?
  - Magma de estructuras / Tipos / Definibles / Mapa clásico
  - Algo de conexiones con lógica clásica
- ¿Y más allá de primer orden?
  - Harmótton vs logos
- Resultados: Definibilidad, Estabilidad, Galois
  - Definibilidad: hacia la lógica natural de las AECs
  - Estabilidad en AEC
  - Galois

Primer movimiento pendular: Significado surgido de lenguaje.

“Mirar” lógico y “actuar” geométrico



Podemos "hacer preguntas" a las estructuras:

- ¿Se puede ver la torre detrás de uno en un cuadro renacentista?
- ¿Se puede resolver su sonata en do mayor si empieza en re menor y es período clásico?
- ¿Se puede devolver el tiempo a ayer en física? ¿Y en ese caso, cómo?

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos - estiramos - recortamos - ...

nuestras estructuras.

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos - estiramos - recortamos - ...

nuestras estructuras.

La teoría de modelos es la teoría matemática que estudia en plena generalidad estas posibilidades - está naturalmente anclada en la lógica, en la posibilidad de hacer preguntas a una estructura, en el lenguaje implícito que sostiene.

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos - estiramos - recortamos - ...

nuestras estructuras.

La teoría de modelos es la teoría matemática que estudia en plena generalidad estas posibilidades - está naturalmente anclada en la lógica, en la posibilidad de hacer preguntas a una estructura, en el lenguaje implícito que sostiene.

La teoría de modelos provee los ladrillos básicos, los "colores primarios" de las estructuras

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos - estiramos - recortamos - ...

nuestras estructuras.

La teoría de modelos es la teoría matemática que estudia en plena generalidad estas posibilidades - está naturalmente anclada en la lógica, en la posibilidad de hacer preguntas a una estructura, en el lenguaje implícito que sostiene.

La teoría de modelos provee los ladrillos básicos, los "colores primarios" de las estructuras

y luego revuelve todo eso, ayudando a producir todos los "colores posibles", todas las estructuras posibles, y ...

Aún así, sorprendentemente

en años recientes - después de que la Teoría de Modelos hubiera afilado su propio anclaje (mirar) lógico hasta el punto de proveer una clasificación de todas teorías (de primer orden) posibles y líneas divisorias asintóticas (el llamado Main Gap), se embarcó en un "segundo zarpar", hacia el lado de la "acción", de la geometría, ¡aparentemente apartándose de la lógica!

¿De verdad?

"Tenemos en mente principalmente a aquellos interesados en teoría de modelos algebraically-minded (llevada, conducida por el álgebra), es decir, en modelos genéricos, la clase de los modelos existencialmente cerrados y universales-homogéneos en lugar de las clases elementales…"

Saharon Shelah, 1975.

¿Un segundo zarpar para la t. de modelos? De λόγος a ἁρμόττον

De vuelta a la estética: un concepto mejor adaptado (Patočka) a la estética que la "belleza" (τὸ καλὸς),

τὸ ἁρμόττον.

¿Un segundo zarpar para la t. de modelos? De λόγος a ἁρμόττον

De vuelta a la estética: un concepto mejor adaptado (Patočka) a la estética que la "belleza" (τὸ καλὸς),

τὸ ἁρμόττον.

Raíz: la misma mejor conocida como ἁρμονία, armonía, que significa belleza en el sentido de "cuadrar bien", "encajar".

¿Un segundo zarpar para la t. de modelos? De λόγος a ἁρμόττον

De vuelta a la estética: un concepto mejor adaptado (Patočka) a la estética que la "belleza" (τὸ καλὸς),

τὸ ἁρμόττον.

Raíz: la misma mejor conocida como ἁρμονία, armonía, que significa belleza en el sentido de "cuadrar bien", "encajar".
Esta categoría inicialmente parecería muy distinta de la definida por τὸ λόγος, la frase, la fórmula, el discurso - la descripción que normalmente asociamos a la lógica.

Esculpir estructuras y lenguaje: las Clases "Elementales" Abstractas

¿Cómo “cuadrar”, “encajar”? (ἁρμόττον)

¿Qué diferencia hay entre describir, decir explícitamente, axiomatizar y

¿Cómo "cuadrar", "encajar"? (ἁρμόττον)

¿Qué diferencia hay entre describir, decir explícitamente, axiomatizar y mirar cómo distintas variantes de una estructura "cuadran" entre sí, cómo se "reflejan" propiedades de lo grande en lo pequeño

Cambio de foco: de fórmulas a encajes

φ, T, …	$\prec_{\mathsf{K}}$
fórmulas, teorías	encajes, inmersiones, …

Un mundo de puros fenómenos...

……sin descripciones precisas, aparentemente, pero con una noción fuerte de cómo cuadran las piezas entre sí—ἁρμόττον
En teoría de modelos contemporáneo eso se llama "extensión fuerte", $\mathsf{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{N}$.
La idea (cruda) es que todas las configuraciones/problemas de M que tengan "solución" en N también tienen alguna solución en M.

Clases elementales abstractas (AEC) - los axiomas

Fijamos una clase de τ-estructuras $\mathcal{K}$ y $\prec_{\mathcal{K}}$ una relación binaria en $\mathcal{K}$.

Definición

$(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ es una clase elemental abstracta ssi

- *$\mathcal{K}$, $\prec_{\mathcal{K}}$ son* **cerradas bajo isomorfismo,**
- $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathcal{K}, \mathsf{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{N} \Rightarrow \mathsf{M} \subset \mathsf{N}$,
- *$\prec_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial,*
- *(**TV**)* $\mathsf{M} \subset \mathsf{N} \prec_{\mathcal{K}} \bar{\mathsf{N}}, \mathsf{M} \prec_{\mathcal{K}} \bar{\mathsf{N}} \Rightarrow \mathsf{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{N}$,

Clases elementales abstractas (AEC) - los axiomas

Fijamos una clase de τ-estructuras $\mathcal{K}$ y $\prec_{\mathcal{K}}$ una relación binaria en $\mathcal{K}$.

Definición

$(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ es una clase elemental abstracta *ssi*

- *$\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}$ son* **cerradas bajo isomorfismo**,
- $M, N \in \mathcal{K}, M \prec_{\mathcal{K}} N \Rightarrow M \subset N$,
- *$\prec_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial,*
- *(**TV**)* $M \subset N \prec_{\mathcal{K}} \bar{N}, M \prec_{\mathcal{K}} \bar{N} \Rightarrow M \prec_{\mathcal{K}} N$,
- *($\searrow$**LS**) Existe un cardinal $\kappa = LS(\mathcal{K}) \geq \aleph_0$ tal que para todo $M \in \mathcal{K}$, para todo $A \subset |M|$, existe $N \prec_{\mathcal{K}} M$ con $A \subset |N|$ y $\|N\| \leq |A| + LS(\mathcal{K})$,*
- *(**$\prec_{\mathcal{K}}$-límites**) La clase $\mathcal{K}$ es cerrada bajo $\prec_{\mathcal{K}}$-límites de sistemas dirigidos.*

Algunos ejemplos

¡Muchas construcciones matemáticas son AEC (o AEC métricas o…)!

1. Teorías completas de primer orden.
2. Clases axiomatizables en $L_{\omega_1,\omega}$ o $L_{\kappa,\omega}$.
3. Clases interesantes de módulos / álgebra homológica (Mazari-Armida).
4. AECs métricas (continuas) - triplas de Gelfand, espacios de Schwartz (Ochoa, V.).
5. AECs de C^*-algebras (Argoty, Berenstein, V.).
6. Expansiones de los complejos con funciones analíticas clásicas e^z, j, etc. (Zilber et al.).
7. Construcciones a la "Hart-Shelah" (Baldwin, Kolesnikov, Shelah, V. 2021): combinatoria finita y categoricidad.
8. Nuevas: AECs dependientes (NIP) (V. con Grossberg y VanDieren, V. con Shelah) - nuevos tipos de cuerpos valuados, mundo "motívico", etc.

El Teorema de Presentación - ¿El retorno de la sintaxis?

Aquí de nuevo el lenguaje, la lógica, reaparece, débilmente:
Dado cualquier sistema coherente, cerrado y bien controlado de modelos (clase elemental abstracta) $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ en L,

Así, $\prec_{\mathcal{K}}$ a pesar de estar originalmente dada como puro contenido, ¡resulta controlada por un lenguaje!

El Teorema de Presentación - ¿El retorno de la sintaxis?

Aquí de nuevo el lenguaje, la lógica, reaparece, débilmente:
Dado cualquier sistema coherente, cerrado y bien controlado de modelos (clase elemental abstracta) $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ en L,
existe un lenguaje más grande $\mathsf{L}' \supset \mathsf{L}$ en el cual se puede escribir una fórmula (¡regreso de la lógica!) infinitaria $\psi_{\mathcal{K}}$ que axiomatiza toda la clase $\mathcal{K}$. En dialecto matemático,

$$\mathcal{K} = \mathsf{PC}(\mathsf{L}, \psi_{\mathcal{K}})$$

Así, $\prec_{\mathcal{K}}$ a pesar de estar originalmente dada como puro contenido, ¡resulta controlada por un lenguaje!

¿Fenómenos puros sin logos? Tal vez no…

- El segundo zarpar…
- ¿Anclaje dónde?
- ¿Rol para una estética generalizada?
- OJO: hay dos niveles de lenguaje, el nuestro (básico, limitado) y el de L', mucho más fuerte, que no vemos…

Plan

¿Qué busca la teoría de modelos?
- Magma de estructuras / Tipos / Definibles / Mapa clásico
- Algo de conexiones con lógica clásica

¿Y más allá de primer orden?
- Harmótton vs logos

Resultados: Definibilidad, Estabilidad, Galois
- Definibilidad: hacia la lógica natural de las AECs
- Estabilidad en AEC
- Galois

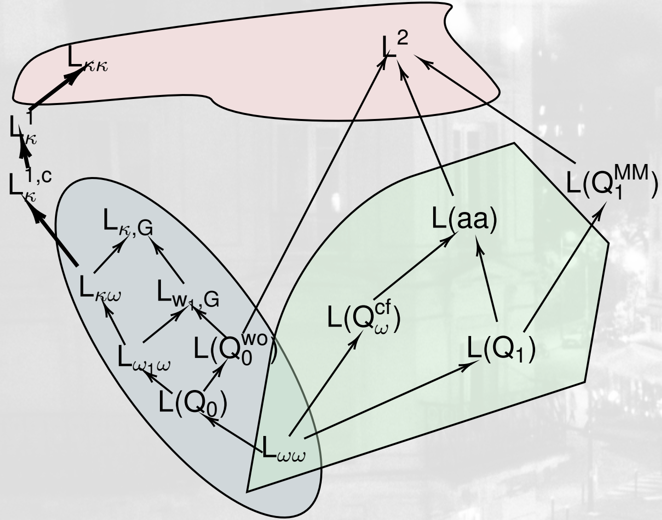
Teoremas de presentación y definibilidad en AEC

El teorema de presentación (Shelah, 1983) controla la semi-definibilidad en AEC:
toda AEC $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ es una clase semi-definible (PC). Esto trajo consecuencias profundas que menciono más adelante.

Teoremas de presentación y definibilidad en AEC

El teorema de presentación (Shelah, 1983) controla la semi-definibilidad en AEC:
toda AEC $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ es una clase semi-definible (PC). Esto trajo consecuencias profundas que menciono más adelante.
Sin embargo, en trabajo reciente mejoramos de manera bastante sustancial el resultado clásico:
Con el nuevo teorema (por aparecer en 2021, V.-Shelah) logramos controlar la definibilidad en AEC:
toda AEC $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ con número de LS κ es una clase **definible** en un fragmento adecuado (¿cuál exactamente?) de $\mathsf{L}_{(\beth_2(\kappa))^+,\kappa^+}$ **en su propio vocabulario original**.

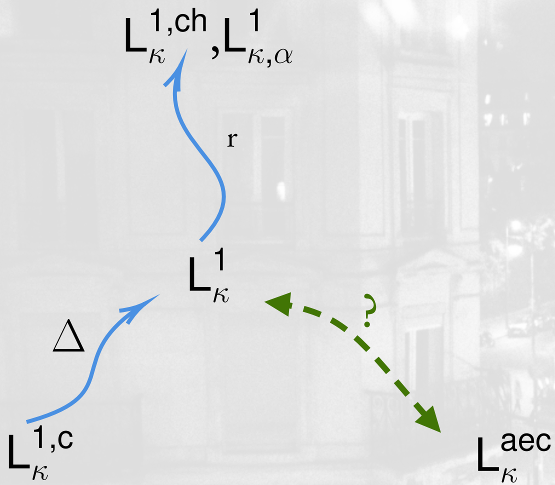
Varias lógicas...



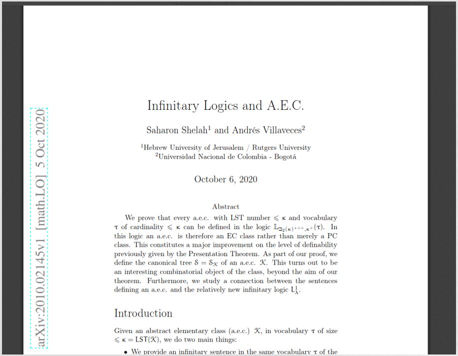
De cerca, una esquina interesante del mapa...

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{L}^{1,ch}_{\kappa}, \mathrm{L}^{1}_{\kappa,\alpha} & \\
 & \mathrm{L}^{1}_{\kappa} \arrow[u] \arrow[dr, dashed, leftrightarrow] & \\
\mathrm{L}^{1,c}_{\kappa} \arrow[ur] & & \mathrm{L}^{aec}_{\kappa}
\end{tikzcd}
$$

De cerca, una esquina interesante del mapa...



El árbol canónico de una clase elemental abstracta (Shelah-V.)



arXiv:2010.02145v1 [math.LO] 5 Oct 2020

Infinitary Logics and A.E.C.

Saharon Shelah[1] and Andrés Villaveces[2]

[1]Hebrew University of Jerusalem / Rutgers University
[2]Universidad Nacional de Colombia - Bogotá

October 6, 2020

Abstract

We prove that every a.e.c. with LST number $\leqslant \kappa$ and vocabulary τ of cardinality $\leqslant \kappa$ can be defined in the logic $\mathbb{L}_{\beth_2(\kappa)^{+++},\kappa^+}(\tau)$. In this logic an a.e.c. is therefore an EC class rather than merely a PC class. This constitutes a major improvement on the level of definability previously given by the Presentation Theorem. As part of our proof, we define the canonical tree $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ of an a.e.c. $\mathcal{K}$. This turns out to be an interesting combinatorial object of the class, beyond the aim of our theorem. Furthermore, we study a connection between the sentences defining an a.e.c. and the relatively new infinitary logic $\mathbb{L}^1_\lambda$.

Introduction

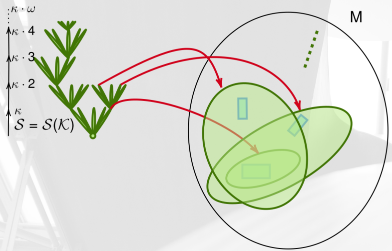
Given an abstract elementary class (a.e.c.) $\mathcal{K}$, in vocabulary τ of size $\leqslant \kappa = \mathrm{LST}(\mathcal{K})$, we do two main things:

- We provide an infinitary sentence in the same vocabulary τ of the

- Logramos (usando combinatoria infinita novedosa) axiomatizar $\mathcal{K}$ en lógica infinitaria - y capturar la noción de $\mathcal{K}$-inmersión.
- Construimos un objeto canónico “pequeño” para cada clase: su árbol fundamental.
- Con esto, obtenemos complejidad (“cuantificacional”) de la clase.

Detalles de lo anterior. . .

The mezcal test - Does $M \in \mathcal{K}$?



Formulas $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$

For M in the canonical tree $\mathcal{S}$ at level n, a formula with $\kappa \cdot n$ free variables, defined by induction on γ.

- $\gamma = 0$: $\varphi_{0,0} = \top$ ("truth"). If $n > 0$,

$$\varphi_{M,0,n} := \bigwedge \mathrm{Diag}^n_\kappa(M),$$

the atomic diagram of M in $\kappa \cdot n$ variables.

- γ limit: Then

$$\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n) := \bigwedge_{\beta<\gamma} \varphi_{M,\beta,n}(\bar{x}_n).$$

- $\gamma = \beta + 1$: Then $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$ is the $L_{\lambda^+,\kappa^+}(\tau)$ formula

$$\forall \bar{z}_{[\kappa]} \bigvee_{\substack{N \succ_{\mathcal{K}} M \\ N \in \mathcal{S}_{n+1}}} \exists \bar{x}_{=n} \left[\varphi_{N,\beta,n+1}(\bar{x}_{n+1}) \wedge \bigwedge_{\alpha<\alpha_n[N]} \bigvee_{\delta \in S[N]} z_\alpha = x_\delta \right]$$

Dentro del mar de resultados en estabilidad en AEC

- Shelah inicia hacia 1983 el gran proyecto. Los años iniciales son lentos y complicados. Definiciones cruciales tomarían mucho tiempo en ser afinadas.
- En 1997, cuando inicié mi trabajo en esa área (durante el postdoc en la Univ. Hebrea de Jerusalén) **solo tres otras personas** habían abordado el área (Shelah, Makkai, Grossberg, Kolman). El tema era intentar reducir el alto impacto que parecía tener la teoría de conjuntos (grandes cardinales, forcing).
- En 1999 salió nuestro primer artículo en el tema. Abrió las puertas a la reducción radical de hipótesis conjuntistas. Fue el primer análisis de la **superestabilidad** - abrió las puertas a varias tesis doctorales (VanDieren, Vasey, Boney, Zambrano) y muchos resultados que culminaron en teoremas de varios autores del grupo hacia…2018.

¡Superestabilidad ... y el nuevo mapa, 20 años después!

Download full text in PDF

ELSEVIER
Annals of Pure and Applied Logic
Volume 97, Issues 1–3, 21 March 1999, Pages 1-25

Toward categoricity for classes with no maximal models

Saharon Shelah[a, b, 1], Andrés Villaveces[a, c]

Show more

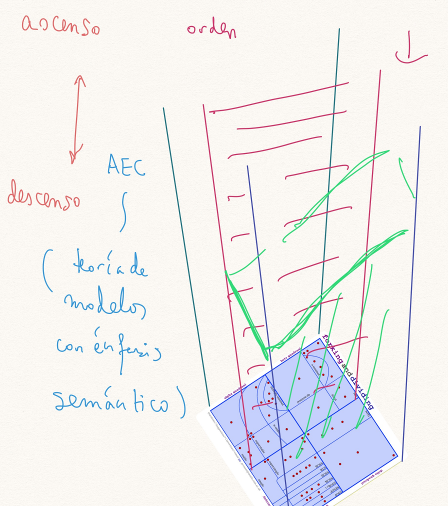
+ Add to Mendeley Share Cite

https://doi.org/10.1016/S0168-0072(98)00015-3

Abstract

We provide here the first steps toward a Classification Theory of Abstract Elementary Classes with no maximal models, plus some mild set theoretical assumptions, when the class is categorical in some λ greater than its Löwenheim-Skolem number. We study the degree to which amalgamation may be recovered, the behaviour of non μ-splitting types. Most importantly, the existence of saturated models in a strong enough sense is proved, as a first step toward a complete solution to the Łoś Conjecture for these classes. Further results are in preparation.

Previous article in issue Next article in issue



Más avatares de esa larga marcha…

Math. Log. Quart. **60**, No. 3, 211–227 (2014) / **DOI** 10.1002/malq.201300059

Around independence and domination in metric abstract elementary classes: assuming uniqueness of limit models

Andrés Villaveces[*] and **Pedro Zambrano**[**]

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, AK 30 # 45-03 código postal 111321, Bogotá, Colombia

Received 24 August 2013, revised 15 January 2014, accepted 20 January 2014
Published online 9 May 2014

We study notions of independence appropriate for a stability theory of metric abstract elementary classes (for short, MAECs). We build on previous notions used in the discrete case, and adapt definitions to the metric case. In particular, we study notions that behave well under superstability-like assumptions. Also, under uniqueness of limit models, we study domination, orthogonality and parallelism of Galois types in MAECs.

MATHEMATICAL LOGICAL QUARTERLY MLQ

Original Paper

Limit models in metric abstract elementary classes: the categorical case

Andrés Villaveces, Pedro Zambrano

First published: 12 September 2016 | https://doi.org/10.1002/malq.201300060 | Citations: 2

Abstract

We study versions of limit models adapted to the context of *metric abstract elementary classes*. Under categoricity and superstability-like assumptions, we generalize some

ELSEVIER

Annals of Pure and Applied Logic
Volume 172, Issue 6, June 2021, 102958

The Hart-Shelah example, in stronger logics

Saharon Shelah [a, b, 1], Andrés Villaveces [c, 2]

https://doi.org/10.1016/j.apal.2021.102958

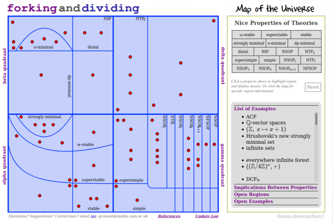
Abstract

We generalize the Hart-Shelah example [10] to higher infinitary logics. We build, for each natural number $k \geq 2$ and for each infinite cardinal λ, a sentence ψ_k^λ of the logic $L_{(2^\lambda)^+,\omega}$ that (modulo mild set theoretical hypotheses around λ and assuming $2^\lambda < \lambda^{+m}$) is categorical in $\lambda^+, \dots, \lambda^{+k-1}$ but not in $\beth_{k+1}(\lambda)^+$ (or beyond); we study the dimensional encoding of combinatorics involved in the construction of this sentence and study various model-theoretic properties of the resulting abstract elementary class $\mathscr{K}^*(\lambda, k) = (Mod(\psi_k^\lambda), \prec_{(2^\lambda)^+,\omega})$ in the finite interval of cardinals $\lambda, \lambda^+, \dots, \lambda^{+k}$.

NIP EN CLASES ELEMENTALES ABSTRACTAS

Un proyecto más nuevo: subir en el mapa a la “zona dependiente”

(¡Aún en proceso! Tesis Nicolás Nájar y Edwin Celis tienen que ver; Nájar con el desarrollo puro combinatorio, Celis con las nuevas conexiones entre teoría de modelos (clases dependientes) y el tan mencionado “machine learning”)



En 2013 empecé con las nuevas definiciones y teoremas (trabajos con Grossberg y VanDieren; en 2017 inicié con Shelah otra variante del tema). De momento: **extracción de indiscernibles** (usando combinatoria infinita de grafos) en clases dependientes

Las cuatro definiciones - Galois

Cerramos nuestro periplo con Galois. Habría podido ser el punto de arranque también.
Recuerdo tres definiciones famosas de la teoría de modelos:

Las cuatro definiciones - Galois

Cerramos nuestro periplo con Galois. Habría podido ser el punto de arranque también.
Recuerdo tres definiciones famosas de la teoría de modelos:

- (Chang-Keisler, 1973): model theory = universal algebra + logic
- (Hodges, 1991): model theory = algebraic geometry - fields
- (Hrushovski, c. 2005): model theory = the geography of tame mathematics

Las cuatro definiciones - Galois

Cerramos nuestro periplo con Galois. Habría podido ser el punto de arranque también.

Recuerdo tres definiciones famosas de la teoría de modelos:

- (Chang-Keisler, 1973): model theory = universal algebra + logic
- (Hodges, 1991): model theory = algebraic geometry - fields
- (Hrushovski, c. 2005): model theory = the geography of tame mathematics

Doy aquí una cuarta definición, surgida de conexiones entre AEC y topos:

$$\textbf{teoría de modelos} = ((\textbf{Teoría de Galois})^{\mathbf{Def}})_*$$

El grupo de Galois de una clase elemental abstracta

Un proyecto a largo plazo, conectado con nuestro grupo Conexión de GALoiS (lógica y geometría).
Un resultado sobre grupos de Galois de clases elementales abstractas dotadas de nociones de independencia/dimensión: la "Small Index Property" (con Zaniar Ghadernezhad).

Arch. Math. Logic (2018) 57:141–157
https://doi.org/10.1007/s00153-017-0587-y

Mathematical Logic

CrossMark

The small index property for homogeneous models in AEC's

Zaniar Ghadernezhad[1] · Andrés Villaveces[2]

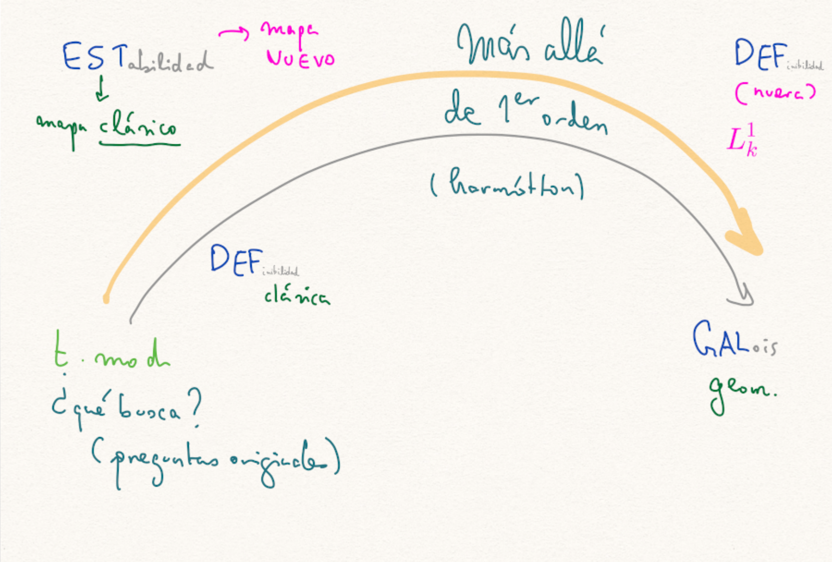
Received: 30 July 2016 / Accepted: 29 January 2017 / Published online: 14 September 2017

Abstract We prove a version of a small index property theorem for strong amalgamation classes. Our result builds on an earlier theorem by Lascar and Shelah (in their case, for saturated models of uncountable first-order theories). We then study versions of the small index property for various non-elementary classes. In particular, we obtain the small index property for quasiminimal pregeometry structures.

Keywords Model theory · Small index property · Quasiminimal pregeometry

Mathematics Subject Classification 03C48 · 22F50

El arco…


ESTabilidad
→ mapa NUEVO
mapa clásico
Más allá de 1er orden
DEFinibilidad
(nueva)
L^1_k
DEFinibilidad
clásica
t. mod
¿qué busca?
(preguntas originales)
GALois
geom.

¡Gracias por su atención!

(Con nostalgia de estos espacios maravillosos…)