Tra teoria dei modelli e teoria degli insiemi

Andrés Villaveces - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*
Università di Torino - Lezione speciale 3 (Teoria degli insiemi)

Maggio 2021

Sommario

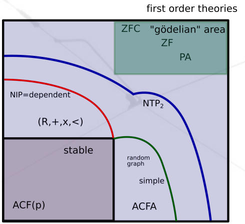
Teoria dei modelli / teoria degli insiemi: Mura / ponti

Prima del 1970: La teoria dei modelli stava diventando troppo "insiemistica" secondo qualche specialisti…(teoremi dei due cardinali - Morley, Chang, …)

Teoria dei modelli / teoria degli insiemi: Mura / ponti

Prima del 1970: La teoria dei modelli stava diventando troppo "insiemistica" secondo qualche specialisti…(teoremi dei due cardinali - Morley, Chang, …)

Circa 1970: Shelah fa i primi passi verso la sua teoria della stabilità



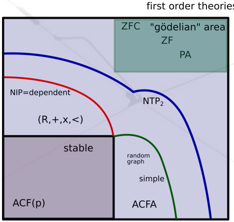
"mappa" dell'universo (modellistico, in Primo Ordine)

Teoria dei modelli / teoria degli insiemi: Mura / ponti

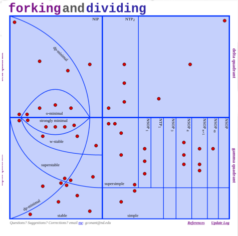
Prima del 1970: La teoria dei modelli stava diventando troppo "insiemistica" secondo qualche specialisti...(teoremi dei due cardinali - Morley, Chang, ...)

Circa 1970: Shelah fa i primi passi verso la sua teoria della stabilità

Ovvero



"mappa" dell'universo (modellistico, in Primo Ordine)



(ved. forkinganddividing.com / G. Conant)

Łoś, Morley, Shelah…

All'inizio del secolo scorso, Steinitz dimostrò che

«la geometria algebrica è categorica»:

Łoś, Morley, Shelah...

All'inizio del secolo scorso, Steinitz dimostrò che

«la geometria algebrica è categorica»:

più precisamente, egli dimostrò che ogni coppia di corpi algebricamente chiusi con stessa caratteristica e la stessa cardinalità devono essere isomorfi.

Łoś, Morley, Shelah...

All'inizio del secolo scorso, Steinitz dimostrò che

«la geometria algebrica è categorica»:

più precisamente, egli dimostrò che ogni coppia di corpi algebricamente chiusi con stessa caratteristica e la stessa cardinalità devono essere isomorfi.
Negli anni 1920 e 1930, Gödel, Carnap, Skolem, ... hanno studiato i risultati ben noti dell'incompletezza delle strutture «fisse» e la completezza quando si passa alle classi di strutture - e si abbandona l'idea di struttura fissa - la categoricità è emersa come una versione di completezza peculiare e molto speciale.

Łoś, Morley, Shelah...

All'inizio del secolo scorso, Steinitz dimostrò che

«la geometria algebrica è categorica»:

più precisamente, egli dimostrò che ogni coppia di corpi algebricamente chiusi con stessa caratteristica e la stessa cardinalità devono essere isomorfi.

Negli anni 1920 e 1930, Gödel, Carnap, Skolem, ... hanno studiato i risultati ben noti dell'incompletezza delle strutture «fisse» e la completezza quando si passa alle classi di strutture - e si abbandona l'idea di struttura fissa - la categoricità è emersa come una versione di completezza peculiare e molto speciale.

A metà degli anni 1950, basandosi su molte altre osservazioni, Łoś congetturò che ogni teoria del primo ordine in un vocabolario numerabile ha soltanto quattro tipi di spettro di categoricità:

$$\emptyset \qquad (\aleph_0) \qquad (> \aleph_0) \qquad (Card_\infty).$$

La congettura di Shelah (versione iniziale)

Un «test problem» centrale per un'ampia parte della teoria dei modelli fin dagli anni Novanta: trovare versioni del teorema de Morley e del teorema di trasferimento di categoricità di Shelah, per contesti più ampi: ad esempio, le classi elementari astratte (estensioni definite semanticamente della teoria dei modelli di $L_{\lambda^+,\omega}(Q), \ldots$).

La congettura di Shelah (versione iniziale)

Un «test problem» centrale per un'ampia parte della teoria dei modelli fin dagli anni Novanta: trovare versioni del teorema de Morley e del teorema di trasferimento di categoricità di Shelah, per contesti più ampi: ad esempio, le classi elementari astratte (estensioni definite semanticamente della teoria dei modelli di $L_{\lambda^+,\omega}(Q), \ldots$).

Congettura (Shelah)

Per ogni cardinale λ, esiste un μ_λ tale che se ψ è un enunciato della logica $L_{\omega_1,\omega}$ che soddisfa un teorema di «Löwenheim-Skolem» verso il basso fino a λ e se anche è categorica in qualche cardinale $\geq \mu_\lambda$, allora è categorica in tutti i cardinali oltre μ_λ.

Classi Elementari Astratte

Fissiamo un vocabolario τ.
Sia $\mathcal{K}$ una classe di τ-strutture, $\prec = \prec_{\mathcal{K}}$ una relazione binaria su $\mathcal{K}$.

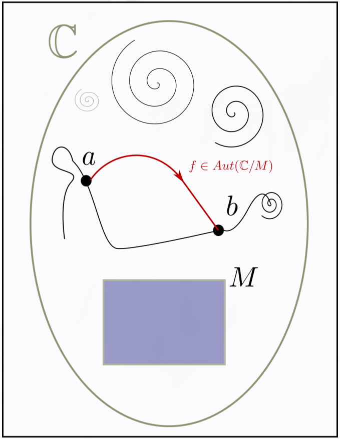
Definizione

Diciamo che $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ è una classe elementare astratta *(AEC) se*

- $\mathcal{K}$, $\prec_{\mathcal{K}}$ *sono* **chiuse per isomorfismi**,
- $M, N \in \mathcal{K}$, $M \prec_{\mathcal{K}} N \Rightarrow M \subset N$,
- $\prec_{\mathcal{K}}$ *è un ordine parziale,*
- *(***Tarski-Vaught***)* $M \subset N \prec_{\mathcal{K}} \bar{N}, M \prec_{\mathcal{K}} \bar{N} \Rightarrow M \prec_{\mathcal{K}} N$, *e...*
- *($\searrow$***LS***)* $\exists \kappa = LS(\mathcal{K}) \geq \aleph_0$ *tale che* $\forall M \in \mathcal{K}, \forall A \subset |M|, \exists N \prec_{\mathcal{K}} M$ *con* $A \subset |N|$ *e* $\|N\| \leq |A| + LS(\mathcal{K})$,
- *(***Unioni di $\prec_{\mathcal{K}}$-catene***) Un'unione di una $\prec_{\mathcal{K}}$-catena in $\mathcal{K}$ appartiene a $\mathcal{K}$, è una $\prec_{\mathcal{K}}$-estensione di tutti i modelli della catena e risulta essere anche l'estremo superiore della catena.*

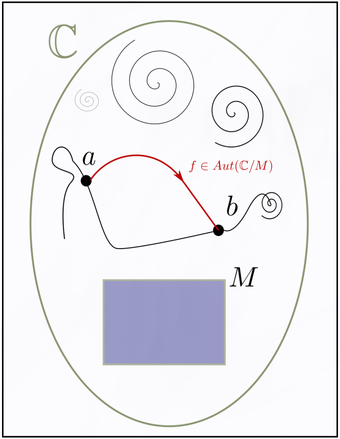
I TIPI DI GALOIS (ANCHE CHIAMATI «TIPI ORBITALI»)

La corretta nozione di tipo in una AEC (con le proprietà di amalgamazione **AP** e di «joint embedding» **JEP** [immersioni congiunte], senza modelli massimali (**NMM**)) è:



I tipi di Galois (anche chiamati «tipi orbitali»)

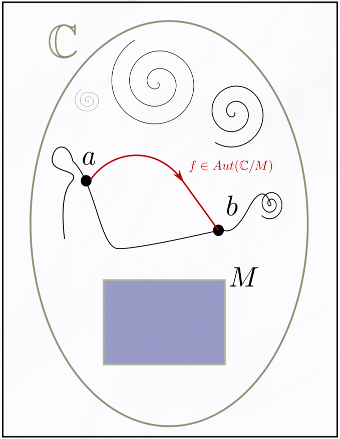
La corretta nozione di tipo in una AEC (con le proprietà di amalgamazione **AP** e di «joint embedding» **JEP** [immersioni congiunte], senza modelli massimali (**NMM**)) è:



1. Per le proprietà AP, JEP e NMM, è possibile la costruzione di un «monster model», un modello mostro (universale, modello-omogeneo) $\mathbb{C}$ nella classe.

I tipi di Galois (anche chiamati «tipi orbitali»)

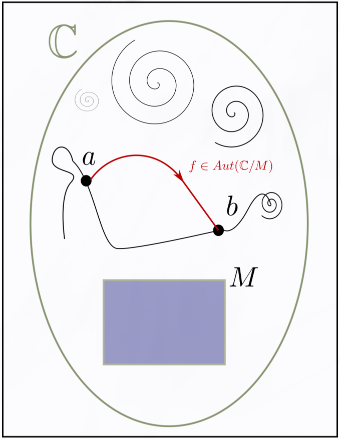
La corretta nozione di tipo in una AEC (con le proprietà di amalgamazione **AP** e di «joint embedding» **JEP** [immersioni congiunte], senza modelli massimali (**NMM**)) è:



1. Per le proprietà AP, JEP e NMM, è possibile la costruzione di un «monster model», un modello mostro (universale, modello-omogeneo) $\mathbb{C}$ nella classe.
2. Poi, definiamo $ga - tp(a/M) = ga - tp(b/M)$ sse esiste $f \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tale che $f(a) = b$.
3. Poi, dichiariamo (anche sotto le ipotesi aggiuntive AP, JEP, NMM) che i **tipi di Galois** su M sono le orbite dell'azione del gruppo $Aut_M(\mathbb{C})$ (gli automorfismi del mostro $\mathbb{C}$ che fissano M puntualmente).

I tipi di Galois (anche chiamati «tipi orbitali»)

La corretta nozione di tipo in una AEC (con le proprietà di amalgamazione **AP** e di «joint embedding» **JEP** [immersioni congiunte], senza modelli massimali (**NMM**)) è:



1. Per le proprietà AP, JEP e NMM, è possibile la costruzione di un «monster model», un modello mostro (universale, modello-omogeneo) $\mathbb{C}$ nella classe.
2. Poi, definiamo $ga - tp(a/M) = ga - tp(b/M)$ sse esiste $f \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tale che $f(a) = b$.
3. Poi, dichiariamo (anche sotto le ipotesi aggiuntive AP, JEP, NMM) che i **tipi di Galois** su M sono le orbite dell'azione del gruppo $Aut_M(\mathbb{C})$ (gli automorfismi del mostro $\mathbb{C}$ che fissano M puntualmente).
4. Possiamo dimostrare che questo generalizza la nozione (sintattica) di tipo. Inoltre, notiamo che esiste una nozione di «tipo di Galois» in situazioni molto più generali (senza AP, JEP o NMM); tuttavia, la loro definizione è meno diretta, siccome non necessariamente esiste in quei casi un «modello mostro».

Congettura di Categoricità di Shelah

- Un problema centrale nella teoria dei modelli delle Classi Elementari Astratte (AEC): dimostrare versioni del Teorema di Morley (Congettura di Łoś) per AEC - Trasferire la Categoricità.
- "Versioni semantiche" di teoria dei modelli di $L_{\lambda^+,\omega}(Q)$.

Congettura (La stessa Congettura di Shelah, riformulata intorno al 1980 nel contesto allora nuovo di AEC)

Per ogni λ, esiste μ_λ tale che ***se*** *$\mathcal{K}$ è una AEC con $LS(\mathcal{K}) = \lambda$, categorica in qualche cardinale $\geq \mu_\lambda$,* ***allora*** *$\mathcal{K}$ è categorica in tutte le cardinalità oltre μ_λ.*

Cronologia della dimostrazione (ca. 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (il problema originale, anni 1970). Qui, la

Cronologia della dimostrazione (ca. 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (il problema originale, anni 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.

Cronologia della dimostrazione (ca. 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (il problema originale, anni 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.
- Makkai-Shelah (1985): vale la Congettura per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ **fortemente compatto**.

Cronologia della dimostrazione (ca. 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (il problema originale, anni 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.
- Makkai-Shelah (1985): vale la Congettura per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ **fortemente compatto**.
- Kolman-Shelah (c. 1990): categoricità «all'ingiù» per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ **misurabile**.

Cronologia della dimostrazione (ca. 1980 a 2015)

- Il problema è aperto per frammenti numerabili di $L_{\omega_1,\omega}$ (il problema originale, anni 1970). Qui, la
- congettura è specificamente che $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$. Shelah, Jarden, Grossberg, Vasey hanno dei risultati parziali.
- Makkai-Shelah (1985): vale la Congettura per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ **fortemente compatto**.
- Kolman-Shelah (c. 1990): categoricità «all'ingiù» per classi assiomatizzate in $L_{\kappa,\omega}$ per κ **misurabile**.
- Boney (2013) consistenza dell'intera congettura, sotto ipotesi dell'esistenza di una classe propria di cardinali fortemente compatti. Qualche risultato adizionale di Vasey (più recente - forking per AEC).

Grossberg e VanDieren: la docilità viene isolata

Intorno all'anno 2000 Grossberg e VanDieren hanno dimostrato il seguente

Teorema

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con AP, JEP e senza modelli massimali (NMM). Allora

Grossberg e VanDieren: la docilità viene isolata

Intorno all'anno 2000 Grossberg e VanDieren hanno dimostrato il seguente

Teorema

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con AP, JEP e senza modelli massimali (NMM). Allora se $\mathcal{K}$ è χ-docile e λ^+-categorica per qualche $\lambda \geq LS(\mathcal{K})^+ + \chi$, anche $\mathcal{K}$ deve essere μ-categorica per tutti i $\mu \geq \lambda$.

Grossberg e VanDieren: la docilità viene isolata

Intorno all'anno 2000 Grossberg e VanDieren hanno dimostrato il seguente

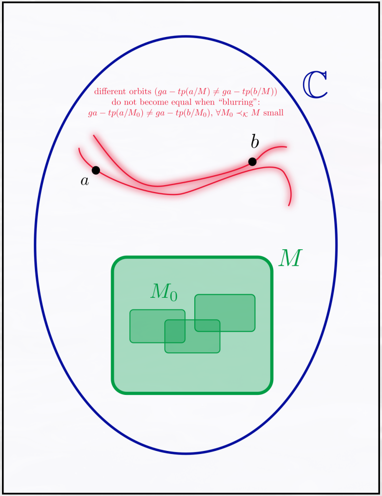
Teorema

Sia $\mathcal{K}$ una AEC con AP, JEP e senza modelli massimali (NMM). Allora se $\mathcal{K}$ è χ-docile e λ^+-categorica per qualche $\lambda \geq LS(\mathcal{K})^+ + \chi$, anche $\mathcal{K}$ deve essere μ-categorica per tutti i $\mu \geq \lambda$.

La loro dimostrazione è fondata su una dimostraziona precedente di trasferimento «all'ingiù» di categoricità, da Shelah; G e VD hanno aggiunto un elemento cruciale, isolando la nozione di docilità, in inglese tameness, «sotterrata» nella dimostrazione di trasferimento «all'ingiù» da Shelah - estrarre la nozione permette a G e VD anche di dimostrare la categoricità «verso l'alto».

Docilità: «localizzare la differenza» fra tipi

Idea: «localizzare» la condizione di... estendere una funzione f che fissi un modello M in una AEC $\mathcal{K}$ fino a ottenere una $\mathcal{K}$-immersione:

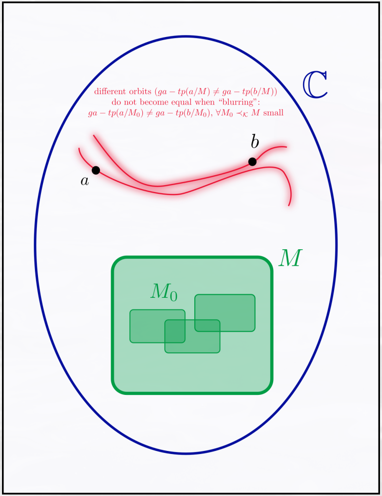


Docilità: «localizzare la differenza» fra tipi

Idea: «localizzare» la condizione di... estendere una funzione f che fissi un modello M in una AEC $\mathcal{K}$ fino a ottenere una $\mathcal{K}$-immersione:

- se non esiste immersione f che fissa M e invia qualche a sopra b allora abbiamo che

$$\mathrm{gatp}(a/M) \neq \mathrm{gatp}(b/M)$$



Docilità: «localizzare la differenza» fra tipi

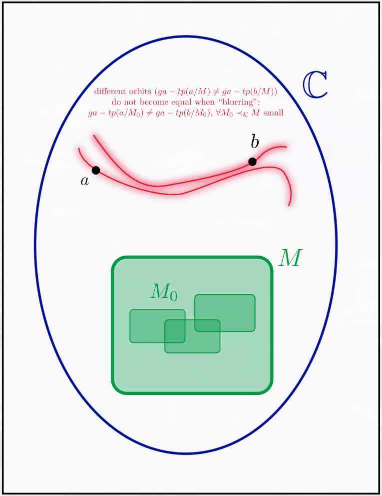
Idea: «localizzare» la condizione di... estendere una funzione f che fissi un modello M in una AEC $\mathcal{K}$ fino a ottenere una $\mathcal{K}$-immersione:

- se non esiste immersione f che fissa M e invia qualche a sopra b allora abbiamo che

$$\mathrm{gatp}(a/M) \neq \mathrm{gatp}(b/M)$$

- <u>vogliamo</u>: localizzare questa richiesta per controllare che esiste un sottomodello $M_0 \preceq_{\mathcal{K}} M$ tale che

$$\mathrm{gatp}(a/M_0) \neq \mathrm{gatp}(b/M_0).$$



Ottenere la docilità da grandi cardinali

Nel 2013, W. Boney ha aperto una strada nuova per capire la congettura: perché non concentrarsi sull'impatto dei grandi cardinali sulla docilità o nozioni correlate?

Ottenere la docilità da grandi cardinali

Nel 2013, W. Boney ha aperto una strada nuova per capire la congettura: perché non concentrarsi sull'impatto dei grandi cardinali sulla docilità o nozioni correlate?

Teorema (Boney)

Se κ è fortemente compatto e $\mathcal{K}$ è essenzialmente sotto κ (i.e. $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ ovvero $\mathcal{K} = Mod(\psi)$ per qualche $L_{\kappa,\omega}$-enunciato ψ) allora $\mathcal{K}$ è $(< \kappa, \kappa)$-docile.

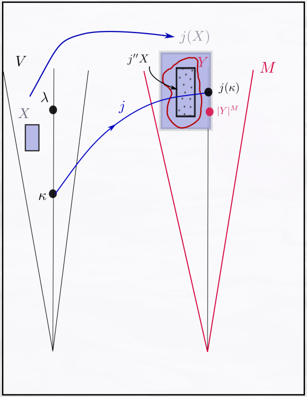
La dimostrazione è piuttosto diretta, data la forza dell'ipotesi. Boney e Unger hanno anche dimostrato che sotto l'inaccessibilità forte di κ, la $(< \kappa, \kappa)$-docilità di tutte le AEC (quasi) implica la compattezza forte di κ.

Riformuliamo la dimostrazione di Boney

Un cardinale κ è fortemente compatto sse per ogni $\lambda > \kappa$ esiste un'immersione elementare $j : V \to M$ con punto critico κ, ed esiste un insieme $Y \in M$ tale che $j''\lambda \subseteq Y$ e $|Y|^M < j(\kappa)$.

Riformuliamo la dimostrazione di Boney

Un cardinale κ è fortemente compatto sse per ogni $\lambda > \kappa$ esiste un'immersione elementare $j : V \to M$ con punto critico κ, ed esiste un insieme $Y \in M$ tale che $j''\lambda \subseteq Y$ e $|Y|^M < j(\kappa)$.

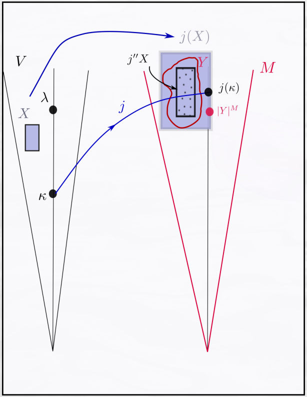


Definizione

Sia $j : V \to M$ un'immersione elementare. Diciamo che j soddisfa la proprietà di copertura (κ, λ) se per ogni X tale che $|X| \leq \lambda$ esiste $Y \in M$ tale che $j''X \subseteq Y \subseteq j(X)$ e $|Y|^M < j(\kappa)$.

Riformuliamo la dimostrazione di Boney

Un cardinale κ è <u>fortemente compatto</u> sse per ogni $\lambda > \kappa$ esiste un'immersione elementare $j : V \to M$ con punto critico κ, ed esiste un insieme $Y \in M$ tale che $j''\lambda \subseteq Y$ e $|Y|^M < j(\kappa)$.



Definizione

Sia $j : V \to M$ un'immersione elementare. Diciamo che j soddisfa la <u>proprietà di copertura</u> (κ, λ) se per ogni X tale che $|X| \leq \lambda$ esiste $Y \in M$ tale che $j''X \subseteq Y \subseteq j(X)$ e $|Y|^M < j(\kappa)$.

κ misurabile	j soddisfa la (κ, κ)-pc
κ λ-fortemente compatto	j soddisfa la (κ, λ)-pc

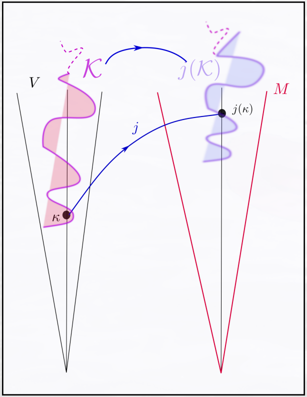
L'«immagine» di una AEC sotto $j : V \to M$

Sia $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ una AEC in τ.
Un teorema famoso di Shelah (Presentation Theorem) ci dà:

- $\tau' \supset \tau$,
- T' una τ'-teoria, e
- Γ' un insieme di T'-tipi

tali che

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{K} = PC(\tau, T', \Gamma') = \\ \{M' \restriction \tau \mid M' \models T' \text{ e } M' \text{ omette } \Gamma'\},\end{gathered}}$$



Definiamo $j(\mathcal{K})$ la classe $PC^M(j(\tau), j(T'), j(\Gamma'))$.
Per l'elementarità di j, $M \models j(\mathcal{K})$ è una AEC con numero di LS uguale a $j(LS(\mathcal{K}))$.

Come paragoniamo $\mathcal{K}$ e la sua «immagine» $j(\mathcal{K})$?

Tentiamo di ottenere $j(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ e $\prec_{j(\mathcal{K})} \subset \prec_{\mathcal{K}}$. La definizione importante è «j **rispetta** $\mathcal{K}$»:

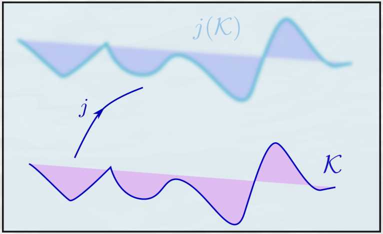
Come paragoniamo $\mathcal{K}$ e la sua «immagine» $j(\mathcal{K})$?

Tentiamo di ottenere $j(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ e $\prec_{j(\mathcal{K})} \subset \prec_{\mathcal{K}}$. La definizione importante è «j **rispetta** $\mathcal{K}$»:

Definizione

Sia $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ (una τ-AEC); dunque $j(\mathcal{M})$ è una $j(\tau)$-struttura. Diciamo che j rispetta $\mathcal{K}$ se valgono le seguenti condizioni:

- *Per ogni $\mathcal{M} \in j(\mathcal{K})$, $\mathcal{M} \restriction \tau \in \mathcal{K}$,*
- *per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in j(\mathcal{K})$, $\mathcal{M} \prec_{j(\mathcal{K})} \mathcal{N}$ implica $\mathcal{M} \restriction \tau \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N} \restriction \tau$,*
- *per ogni $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, $j''\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} j(\mathcal{M}) \restriction \tau$.*

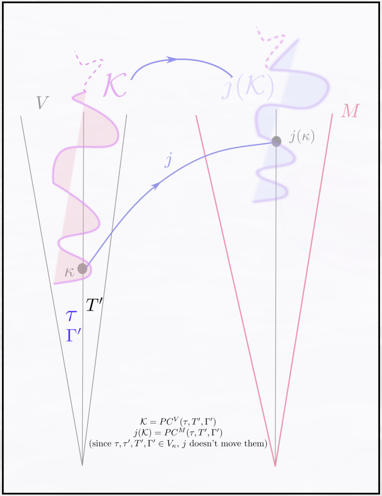


Due situazioni nelle quali «j rispetta $\mathcal{K}$»:

1. ($\mathcal{K}$ data **sotto** κ.) Sia $j : V \to M$ con punto critico κ; $\mathcal{K}$ una AEC con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$. **Allora,** $\mathcal{K} = PC(\tau', T', \Gamma')$, con $|\tau'| + |T'| + |\Gamma'| < \kappa$; spdg $\tau', T', \Gamma' \in V_\kappa$; dunque

$$j(\mathcal{K}) = PC^M(\tau, T', \Gamma')$$

$$= (\mathcal{K} \cap M, \prec_{\mathcal{K}} \cap M).$$



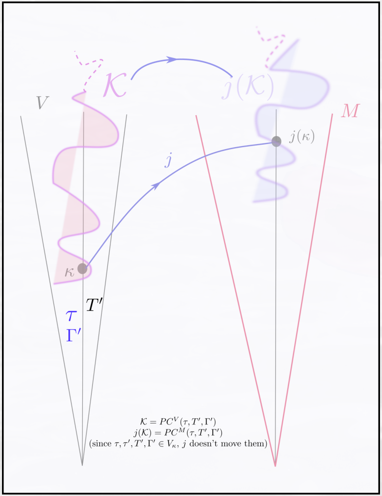
Due situazioni nelle quali «j rispetta $\mathcal{K}$»:

1. ($\mathcal{K}$ data **sotto** κ.) Sia $j : V \to M$ con punto critico κ; $\mathcal{K}$ una AEC con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$. **Allora,** $\mathcal{K} = PC(\tau', T', \Gamma')$, con $|\tau'| + |T'| + |\Gamma'| < \kappa$; spdg $\tau', T', \Gamma' \in V_\kappa$; dunque

$$j(\mathcal{K}) = PC^M(\tau, T', \Gamma')$$

$$= (\mathcal{K} \cap M, \prec_{\mathcal{K}} \cap M).$$

2. $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$, $\varphi \in L_{\kappa,\omega}$, con $\prec_{\mathcal{K}} = \subset^{TV}_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ frammento di $L_{\kappa,\omega}$.



Ottenere la docilità

Dimostriamo allora che se $\mathcal{K}$ è una AEC con $LS(\mathcal{K}) < \kappa < \lambda$, e $j : V \to M$ ha la proprietà di copertura (κ, λ) e rispetta $\mathcal{K}$ allora $\mathcal{K}$ è $(< \kappa, \lambda)$-docile.

Ottenere la docilità

Dimostriamo allora che se $\mathcal{K}$ è una AEC con $LS(\mathcal{K}) < \kappa < \lambda$, e $j : V \to M$ ha la proprietà di copertura (κ, λ) e rispetta $\mathcal{K}$ allora $\mathcal{K}$ è $(< \kappa, \lambda)$-docile.
Siano dunque $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\lambda$ e $p_1 = \text{gatp}(\vec{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_1)$, $p_2 = \text{gatp}(\vec{b}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_2)$ due tipi tali che per ogni $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ di cardinalità $< \kappa$ abbiamo

$$p_1 \restriction \mathcal{N} = p_2 \restriction \mathcal{N}.$$

(Qui, $\vec{a} = (a_i)_{i \in I}$, $\vec{b} = (b_i)_{i \in I}$.)

Ottenere la docilità

Sia adesso $Y \in M$ tale che $j''|\mathcal{M}| \subset Y \subset j(|\mathcal{M}|)$ e $|Y|^M < j(\kappa)$. Bisogna ricordare che in M, $LS(j(\mathcal{K})) = j(LS(\mathcal{K})) < j(\kappa)$, dunque esiste $\mathcal{M}' \in j(\mathcal{K})$ tale che $Y \subset |\mathcal{M}'|$, $\|\mathcal{M}'\| < j(\kappa)$ e $\mathcal{M}' \prec_{j(\mathcal{K})} j(\mathcal{M})$; per la transitività, $\mathcal{M}' \prec_{j(\mathcal{K})} j(\mathcal{N}_i)$, $i = 1, 2$.

Ottenere la docilità

Sia adesso $Y \in M$ tale che $j''|\mathcal{M}| \subset Y \subset j(|\mathcal{M}|)$ e $|Y|^M < j(\kappa)$.
Bisogna ricordare che in M, $LS(j(\mathcal{K})) = j(LS(\mathcal{K})) < j(\kappa)$, dunque esiste $\mathcal{M}' \in j(\mathcal{K})$ tale che $Y \subset |\mathcal{M}'|$, $\|\mathcal{M}'\| < j(\kappa)$ e $\mathcal{M}' \prec_{j(\mathcal{K})} j(\mathcal{M})$; per la transitività, $\mathcal{M}' \prec_{j(\mathcal{K})} j(\mathcal{N}_i)$, $i = 1, 2$.
Per l'elementarità, $M \models j(p_1) \restriction \mathcal{M}' = j(p_2) \restriction \mathcal{M}'$ (in $j(\mathcal{K})$)
da cui

Ottenere la docilità

Sia adesso $Y \in M$ tale che $j''|\mathcal{M}| \subset Y \subset j(|\mathcal{M}|)$ e $|Y|^M < j(\kappa)$. Bisogna ricordare che in M, $LS(j(\mathcal{K})) = j(LS(\mathcal{K})) < j(\kappa)$, dunque esiste $\mathcal{M}' \in j(\mathcal{K})$ tale che $Y \subset |\mathcal{M}'|$, $\|\mathcal{M}'\| < j(\kappa)$ e $\mathcal{M}' \prec_{j(\mathcal{K})} j(\mathcal{M})$; per la transitività, $\mathcal{M}' \prec_{j(\mathcal{K})} j(\mathcal{N}_i)$, $i = 1, 2$. Per l'elementarità, $M \models j(p_1) \upharpoonright \mathcal{M}' = j(p_2) \upharpoonright \mathcal{M}'$ (in $j(\mathcal{K})$) da cui

$$p_1' = \mathrm{gatp}(j(\vec{a})/\mathcal{M}' \upharpoonright \tau, j(\mathcal{N}_1) \upharpoonright \tau)$$
$$= \mathrm{gatp}(j(\vec{b})/\mathcal{M}' \upharpoonright \tau, j(\mathcal{N}_2) \upharpoonright \tau) = p_2'$$

in $\mathcal{K}$ (ancora, per la nostra ipotesi su j).

Ottenere la docilità

Siccome $j''\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} j(\mathcal{M})$ possiamo concludere che $j''\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction \tau$ (assioma di coerenza), restringendo allora abbiamo che

$$\mathrm{gatp}(j(\vec{a})/j''\mathcal{M}, j''\mathcal{N}_1) = \mathrm{gatp}(j(\vec{b})/j''\mathcal{M}, j''\mathcal{N}_2).$$

Ottenere la docilità

Siccome $j''\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} j(\mathcal{M})$ possiamo concludere che $j''\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction \tau$ (assioma di coerenza), restringendo allora abbiamo che

$$\mathrm{gatp}(j(\vec{a})/j''\mathcal{M}, j''\mathcal{N}_1) = \mathrm{gatp}(j(\vec{b})/j''\mathcal{M}, j''\mathcal{N}_2).$$

Restringendo ancora, otteniamo

$$\mathrm{gatp}(\vec{a}/j''\mathcal{M}, j''\mathcal{N}_1) = \mathrm{gatp}(\vec{b})/j''\mathcal{M}, j''\mathcal{N}_2),$$

e possiamo concludere che

$$p_1 = p_2. \qquad \square$$

Altre interazioni
Modelli / Insiemi

Un aneddoto di Shelah

Oh... I had a very strange referee report on the (proper forcing) paper. I think Moschovakis was the editor. So he thought "Saharon is a model theorist" well, he knew me - I was even a year in UCLA before, so he sent it to a model theorist. And the problem was in model theory, [of the form] "the consistency of...", and the referee report said "well, there is very little model theory". . .

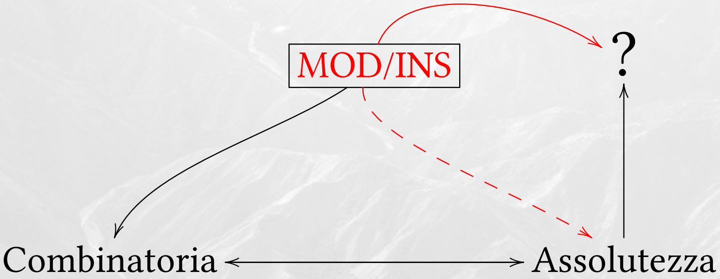
Saharon Shelah, in un'intervista (AV), 2017.

MOD/INS

$\boxed{\text{MOD/INS}}$

Combinatoria

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{MOD/INS}} \arrow[dl, bend right] & \\
\text{Combinatoria} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{Assolutezza}
\end{tikzcd}$$


MOD/INS
?
Combinatoria
Assolutezza

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{MOD/INS}} \arrow[dl] \arrow[dr, dashed] \arrow[r, bend left] & \text{AEC/Logica Inf} \\
\text{Combinatoria} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{Assolutezza} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Un comportamento dicotomico

- Sotto «diamante debole», cioè $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$ (conseg. di *GCH*!):

Teorema (Shelah, circa 1984)

*(Sotto $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$, oppure GCH.) Ogni AEC $\mathcal{K}$ con $LS(\mathcal{K}) \leq \kappa$, categorica in κ, che **non** soddisfa AP per modelli di cardinalità κ, ha necessariamente la massima quantità possibile, 2^{κ^+}, di modelli non-isomorfi di cardinalità κ^+.*

Un comportamento dicotomico

- Sotto «diamante debole», cioè $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$ (conseg. di *GCH*!):

> **Teorema (Shelah, circa 1984)**
> *(Sotto $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$, oppure GCH.) Ogni AEC $\mathcal{K}$ con $LS(\mathcal{K}) \leq \kappa$, categorica in κ, che* ***non*** *soddisfa AP per modelli di cardinalità κ, ha necessariamente la massima quantità possibile, 2^{κ^+}, di modelli non-isomorfi di cardinalità κ^+.*

- Purtroppo, sotto MA_{ω_1} il contrario accade:

> (MA_{ω_1}) Si può costruire una classe (assiomatizzabile nella logica $L_{\omega_1,\omega}(Q)$) che è $\aleph_0$-categorica, non soddisfa AP in $\aleph_0$ ed anche è categorica in $\aleph_1$ (la minima quantità possibile!).

Forzare l'isomorfismo / categoricità

Teorema (Asperó, V.)

L'esistenza di una AEC debole, categorica in $\aleph_1$ e in $\aleph_2$, in cui non vale AP in modelli di cardinalità $\aleph_1$, è consistente con $ZFC + CH + 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2}$.

Per dimostrare questo, facciamo un'iterazione di forcing di lunghezza ω_3 e lavoriamo con «risoluzioni» di modelli.
La situazione ha connessioni con certe possibilità di «fallimenti» del teorema di Morley: situazioni in cui una classe soddisfa categoricità fino ad una certa cardinalità oltre cui il numero di modelli diventa il massimo (Hart-Shelah 1985 per $L_{\omega_1,\omega}$, Shelah-V. 2021 per $L_{(2^\lambda)^{++},\omega}$).
Il nostro risultato è (paragonato a risultati positivi di Vasey e Shelah) la situazione più generale possibile di fallimento di Morley!

Il collasso e le sue limitazioni

Far collassare grandi cardinali mantenendo alcune delle loro proprietà ha una lunga storia di risultati interessanti. Per esempio,

- Mitchell ha fatto collassare cardinali debolmente compatti fino a $\aleph_2$ **mantenendo la proprietà dell'albero**. Questo è stato poi generalizzato (facendo collassare molto di più) per ottenere la proprietà dell'albero in tutti gli $\aleph_n$ ($n > 1$) e/o in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)

Il collasso e le sue limitazioni

Far collassare grandi cardinali mantenendo alcune delle loro proprietà ha una lunga storia di risultati interessanti. Per esempio,

- Mitchell ha fatto collassare cardinali debolmente compatti fino a $\aleph_2$ **mantenendo la proprietà dell'albero**. Questo è stato poi generalizzato (facendo collassare molto di più) per ottenere la proprietà dell'albero in tutti gli $\aleph_n$ ($n > 1$) e/o in $\aleph_{\omega+1}$ (Magidor, Cummings, Neeman, Fontanella, etc.)
- Per le proprietà «forti» o «super» dell'albero la forza di consistenza sarebbe prossima a un cardinale fortemente compatto / supercompatto rispettivamente (Weiss, Viale, Fontanella, Magidor).

Immersioni generiche

- Queste sono versioni di proprietà generali di riflessione/compattezza. Anche la docilità è una proprietà generalizzata di compattezza.

Immersioni generiche

- Queste sono versioni di proprietà generali di riflessione/compattezza. Anche la docilità è una proprietà generalizzata di compattezza.
- Il collasso diretto di (per esempio) un cardinale fortemente compatto κ (dove già sappiamo che c'è $(<\kappa, \kappa)$-docilità) a $\aleph_2$ non funziona:

Immersioni generiche

- Queste sono versioni di proprietà generali di riflessione/compattezza. Anche la docilità è una proprietà generalizzata di compattezza.
- Il collasso diretto di (per esempio) un cardinale fortemente compatto κ (dove già sappiamo che c'è $(< \kappa, \kappa)$-docilità) a $\aleph_2$ non funziona:
- Le classi risultanti $j(\mathcal{K})$ e (quando $\mathcal{K} = PC(L, T', \Gamma')$ le classi $\mathcal{K}^{V[G]} = PC^{V[G]}(L, T', j(\Gamma'))$ presentano una «docilità residua» interessante...

Immersioni generiche

- Queste sono versioni di proprietà generali di riflessione/compattezza. Anche la docilità è una proprietà generalizzata di compattezza.
- Il collasso diretto di (per esempio) un cardinale fortemente compatto κ (dove già sappiamo che c'è $(<\kappa, \kappa)$-docilità) a $\aleph_2$ non funziona:
- Le classi risultanti $j(\mathcal{K})$ e (quando $\mathcal{K} = PC(L, T', \Gamma')$ le classi $\mathcal{K}^{V[G]} = PC^{V[G]}(L, T', j(\Gamma'))$ presentano una «docilità residua» interessante…
- tuttavia, addattare il collasso di Lévy (iterazione di Easton) o le costruzioni più sofisticate menzionate non può dare la piena docilità; risulta soltanto quella residuale.

Fine...

Grazie!

Vorrei anche specialmente ringraziare Beatrice Degasperi, Miriam Marzaioli e Chiara Romano per tutti i loro suggerimenti linguistici (e per le loro correzioni)!