El método de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos:

una posible respuesta sobre la independencia de la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman

David Valderrama Hernández

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C., Colombia
2021

El método de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos:

una posible respuesta sobre la independencia de la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman

David Valderrama Hernández

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Matemáticas

Director:
Andrés Villaveces Niño
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C., Colombia
2021

Dream: Find a "forcing method" relative to PA which shows that PA and even ZFC does not decide "reasonable" arithmetical statements, just like the known forcing method works for showing that ZFC cannot decide reasonable set theoretic questions.

Logical Dreams, dream 2.1,
Saharon Shelah

Agradecimientos

Agradezco a mi madre por todo el apoyo brindado durante este tiempo. Al profesor Andrés Villaveces Niño por haber aceptado ser mi director de tesis; por todas sus ideas y consejos para poder realizar lo mejor posible este trabajo. Agradezco a la Universidad Nacional de Colombia por la formación que me dio durante este período.

Resumen

En esta tesis estudiamos la versión de Switzer del método de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos, originalmente desarrollado por Shelah como una manera más modelo-teórica de demostrar el teorema de Paris-Harrington, y para encontrar una Π_1^0-sentencia verdadera pero independiente de la aritmética de Peano (PA). El objetivo principal de este trabajo era investigar si se podían usar los $(\mathcal{L}, n)$-modelos para demostrar la independencia de la versión à la Paris-Harrington del teorema de Folkman de PA; sin embargo, encontramos una problemática en la prueba de Shelah del teorema de Paris-Harrington. Presentamos el contraejemplo y proponemos una nueva versión del cumplimiento denominada *cumplimiento en subsucesiones* para rescatar la demostración. Demostramos que la nueva versión satisface, con sus respectivas modificaciones, los teoremas principales del método; sin embargo, aún desconocemos si se pueda desarrollar en la aritmética de segundo orden (débil), hecho importante para demostrar los resultados de independencia.

Palabras clave: $(\mathcal{L}, n)$**-modelo, Cumplimiento, Teorema de Paris-Harrington, Semántica de Kripke, Sistemas de la aritmética de segundo orden** .

Abstract

In this thesis, we study Switzer's version of the method of $(\mathcal{L}, n)$-models. It was developed originally by Shelah as a model theoretic way of proving the Paris-Harrington theorem, and to find a true Π_1^0-sentence not provable in the Peano arithmetic (PA). The main objective of this work was to investigate whether the $(\mathcal{L}, n)$-models could be used to prove the independence of the Paris-Harrington version of Folkman's theorem of Peano arithmetic; however, we found an issue in Shelah's alternative proof of the Paris-Harrington theorem. We present the counterexample and propose a new version of fulfillment called *subsequence fulfillment* to rescue the proof. We show that the new version satisfies, with their respective modifications, the principal theorems of the method; nevertheless, we still do not know if it can be developed in weak second order arithmetic, which is important to prove the independent results.

Keywords: $(\mathcal{L}, n)$**-model, fulfillment, Paris-Harrington theorem, Kripke semantics, Subsystems of second order arithmetic**.

Contenido

1 Introducción

El método de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos fue introducido por Shelah en [2] como una manera más modelo-teórica de demostrar el teorema de Paris-Harrington, y para encontrar una Π^0_1-sentencia independiente de la aritmética de Peano (PA). De manera independiente, una noción similar fue descubierta por Kripke; no obstante, él no publicó su trabajo y sólo se conoce mediante otros autores, por ejemplo [3] y [4]. En términos generales, el método consiste en utilizar una nueva relación de satisfacción, denominada *cumplimiento* (nombre dado por Kripke), para cadenas crecientes finitas de $\mathcal{L}$-estructuras parciales. El método no generó ninguna reacción (publicada) hasta que, después de 25 años, Switzer presentó nuevamente en [1] las ideas desarrolladas por Shelah, en un lenguaje más moderno. Presentamos en detalle la versión de Switzer en la sección 2.2, con las siguientes correcciones:

- Modificamos la definición original de $(\mathcal{L}, n)$-modelo: además de exigir clausura por símbolos de función, clausuramos con los términos de una fórmula ϕ fija. A la nueva definición la denominamos (ϕ, n)-modelo, y a la colección de todos estos como la clase de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos.
- Sólo se define la noción de cumplimiento para las fórmulas normales prenexas.
- Presentamos un contraejemplo al *teorema de validez de la noción de cumplimiento* que aparece en [1], lema 2.13.
- El contraejemplo mencionado no afecta el método ya que la teoría se puede desarrollar en ACA_0. Por lo tanto el lema 2.12 y el corolario 2.15 de [1] se obtienen porque ACA_0 es una extensión conservadora de la aritmética de Peano.

En la misma sección se explican en detalle las razones de cada corrección y se verifica que los resultados de la primera parte de los artículos [1] y [2] se mantienen. Switzer además plantea la posibilidad de construir nuevas afirmaciones, del estilo de Paris-Harrington, **verdaderas** pero **independientes** de la aritmética de Peano. Persiguiendo ese objetivo, la intención original de este trabajo era investigar si se podían usar los $(\mathcal{L}, n)$-modelos para demostrar la independencia de PA de la versión à la Paris-Harrington del teorema de Folkman; sin embargo, en el camino encontramos una situación dudosa al aplicar el método que debilita parte de la demostración de Shelah del teorema de Paris-Harrington. El problema consiste en verificar el cumplimiento de una implicación de manera clásica: si se cumple el antecedente entonces se cumple el consecuente. En las secciones 2.3 y 2.4.1 presentamos contraejemplos a ese argumento y sus consecuencias.

Por lo anterior, nuestras investigaciones se centraron en buscar una nueva noción de cumplimiento. En la sección 2.4.1 presentamos una definición que denominamos **cumplimiento en segmentos**. Esta versión **no funciona** dado que no satisface un teorema de completitud (ver ejemplo 2.4.3), teorema importante para demostrar los resultados de independencia. Nos quedamos sólo con un posible candidato que vive en ZFC pero no hemos podido desarrollar en ACA_0. Esta nueva noción la denominamos **cumplimiento en subsucesiones** y se encuentra en la sección 2.4.2, con sus respectivos teoremas; además, señalamos las partes que hay que cambiar —si se puede— para poderlos ubicar en ACA_0. En conclusión, **aún desconocemos qué tanto se puede rescatar el argumento de Shelah.**

A medida que íbamos estudiando los conceptos de $(\mathcal{L}, n)$-modelo y cumplimiento en el capítulo 2, nos dimos cuenta de que tienen cierta similitud con los modelos de Kripke y la noción de *forcing*; por lo que decidimos investigar si realmente hay una relación. En el capítulo 3 presentamos los resultados de nuestra investigación. Dada la variedad de *forcings* que existen, hemos decidido restringir la comparación a dos: el forcing de Kripke y el forcing débil; sobre todo porque las lógicas internas de estos son la lógica intuicionista y la lógica clásica de primer orden, respectivamente. Descubrimos que sí existe una relación entre forcing y cumplimiento; es más, demostramos que **la lógica interna del cumplimiento está entre la lógica intuicionista y la lógica clásica**. En la sección 3.3 presentamos, a modo de ensayo, el anterior resultado.

En el capítulo 4 presentamos lo que se sabe hasta el momento sobre la independencia de la versión à la Paris-Harrington del teorema de Folkman con respecto a la aritmética de Peano. **Tiene relación con un problema abierto por más de 20 años: determinar si $\mathbf{ACA}_0$ puede demostrar el teorema de Hindman**. En caso afirmativo, por medio de un argumento de compacidad, podemos demostrar en PA la versión à la Paris-Harrington del teorema de Folkman; por lo tanto, si esta resulta ser independiente de PA, también el teorema de Hindman sería independiente de ACA_0. En la sección 4.1 presentamos en detalle la demostración del matemático Henry Towsner del teorema de Hindman en el sistema axiomático Π^1_1-TR_0 (ver [5]). Por otro lado, en la sección 4.2 presentamos una demostración del teorema de Folkman en PA, con métodos de combinatoria finita. No hay más información (que conozcamos) sobre la versión à la Paris-Harrington del teorema de Folkman. En dado caso que sea independiente, por los inconvenientes que tuvimos al desarrollar este trabajo, dudamos que esto se pueda argumentar usando los $(\mathcal{L}, n)$-modelos.

Para terminar, en la sección 4.4 presentamos la demostración de Shelah de Paris-Harrington, indicando los momentos en que aparecen las falacias. Se hicieron las siguientes correcciones:

- En [2] no se trabaja con la condición de Paris-Harrington, sino con una versión más fuerte que denominamos “Paris-Harrington reforzado”.
- Mejoramos la coloración hecha por Shelah para obtener un resultado más fuerte que

el *claim* 3.5 de [1]. Éste es nuestro hecho 4.4.4. Así garantizamos la minimalidad del elemento en subsucesiones de la misma longitud.

En la demostración explicamos por qué se arreglan las situaciones problemáticas si se usa la noción de cumplimiento en subsucesiones, en caso de que ésta se pueda desarrollar en ACA_0. Aún si no funciona la solución que proponemos, tenemos la sensación de que existe alguna manera de rescatar esta prueba.

2 El método de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos

El método de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos fue introducido por Shelah en [2] como una manera más modelo-teórica de demostrar el teorema de Paris-Harrington, y para encontrar una Π^0_1-sentencia independiente de la aritmética de Peano (PA). El método no generó ninguna reacción (publicada) hasta que, después de 25 años, Switzer presentó nuevamente en [1] las ideas desarrolladas por Shelah, ya con un lenguaje más moderno. En la sección 2.2 presentamos en profundidad la versión de Switzer; sin embargo, modificamos la definición original de $(\mathcal{L}, n)$-modelo: además de clausurar por símbolos de función, clausuramos con los términos de una fórmula ϕ fija. A la nueva definición la denominamos (ϕ, n)-modelo, y a la colección de todos estos como la clase de los $(\mathcal{L}, n)$-modelos. La razón del cambio se debe a cuestiones técnicas y se explicará en el desarrollo de la sección; no obstante, vamos a mostrar en detalle que la teoría desarrollada en [1], con sus respectivas adecuaciones, se mantiene con la nueva definición.

Originalmente, la segunda parte del capítulo se trataba de la demostración del teorema de Paris-Harrington usando los $(\mathcal{L}, n)$-modelos; sin embargo, encontramos una situación problemática al aplicar el método que debilita parte del argumento de Shelah. En la sección 2.3 explicamos en qué consiste, y mostramos los contraejemplos. Por tal motivo, nuestras investigaciones se centraron en buscar una nueva noción de cumplimiento que mantenga la teoría desarrollada en la sección 2.2. Presentamos nuestros resultados en la sección 2.4.

2.1. Aritmética de segundo orden (débil)

La teoría que presentamos en la sección 2.2 se desarrolla en la aritmética de segundo orden, específicamente en ACA_0. El acrónimo ACA significa *axioma de comprensión aritmética*, y el subíndice 0 representa una restricción al esquema de inducción. Denotamos L_2 al lenguaje de la aritmética de segundo orden basado en el vocabulario $(+, \cdot, 0, 1, <)$. Las siguientes definiciones son sacadas de [13].

Definición 2.1.1. Una **L_2-fórmula** es una fórmula de segundo orden del lenguaje L_2. Una L_2-fórmula es **aritmética** si todos sus cuantificadores son de primer orden.

Notemos que una fórmula aritmética puede tener variables libres, tanto de segundo como de primer orden. Por ejemplo

$$\forall n(n \in X \to \exists y(y + y = n + m))$$

es una L_2-fórmula aritmética con variables libres X y m.

Definición 2.1.2. El **sistema axiomático $\mathbf{ACA}_0$** consiste en la clausura universal de las siguientes L_2-fórmulas:

Aritmética de Robinson.

- $n + 1 \neq 0$
- $m + 1 = n + 1 \to m = n$
- $m + 0 = m$
- $m + (n + 1) = (m + n) + 1$
- $m \cdot 0 = 0$
- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$
- $\neg(m < 0)$
- $m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$

Axioma de inducción.

$$(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \to n + 1 \in X)) \to \forall n(n \in X)$$

Esquema de comprensión aritmética. Para toda L_2-fórmula aritmética $\phi(x)$ en la que X no es una variable libre

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \phi(n))$$

Una consecuencia inmediata del axioma de inducción y del esquema de comprensión aritmética es *el esquema de inducción aritmética*:

$$(\phi(0) \wedge \forall n(\phi(n) \to \phi(n + 1))) \to \forall n \phi(n) \tag{2-1}$$

para todas las L_2-fórmulas aritméticas $\phi(n)$.

Definición 2.1.3. Una **$\mathbf{L}_1$-fórmula** es una fórmula de primer orden del lenguaje L_2.

Notemos que la aritmética de Peano (PA) está conformada por la aritmética de Robinson y por el esquema de inducción para L_1-fórmulas. Luego, por (2-1), **todo teorema de PA es un teorema de $\mathbf{ACA}_0$**. El recíproco también se tiene.

Teorema 2.1.4. *El sistema* ACA_0 *es una* ***extensión conservadora*** *de la aritmética de Peano. Esto es, para toda* L_1*-fórmula* ϕ *se cumple que*

$$\mathrm{ACA}_0 \vdash \phi \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathrm{PA} \vdash \phi$$

Demostración. Ver teorema IX.1.5 de [13]. □

Por el teorema 2.1.4, todo lo que demostremos en la sección 2.2 que se pueda escribir en una L_1-fórmula es un teorema de PA. En [13] muestran que en ACA_0 se puede desarrollar varias teorías matemáticas. Una en particular es la lógica matemática. Dentro de ACA_0 se pueden definir las nociones de tupla, lenguaje, estructura, modelo, ...; incluso, se puede enunciar y demostrar el teorema de completitud de Gödel (ver teorema IV.3.3 de [13]). Por este motivo, en la siguiente sección trabajamos dentro de ACA_0.

2.2. El método

Todas las definiciones y teoremas presentados en esta sección se desarrollan en el sistema axiomático ACA_0. Vamos a usar la letra $\mathcal{L}$ para referirnos a un lenguaje finito de primer orden. A medida que avancemos nos concentraremos más en el lenguaje $\mathcal{L}_{PA}$ de la aritmética de Peano que consiste en $(+, \cdot, <, 0, 1)$. Notemos que este es el lenguaje que se define dentro de ACA_0, no con el que trabajamos en la sección 2.1.

Definición 2.2.1. Una estructura de primer orden $\mathcal{M} = (M, ...)$ se denomina una **$\mathcal{L}$-estructura parcial** si para todo símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$ existe una interpretación $c^M \in M$; todo símbolo de relación $R \in \mathcal{L}$ de aridad n tiene una interpretación $R^M \subset M^n$, y todo símbolo de función $f \in \mathcal{L}$ de aridad n tiene una interpretación $f^M : M^n \to M$ donde f^M puede ser una función parcial.

Dada $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura parcial y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula, la relación de satisfacción $\mathcal{M} \models \phi$ está definida de manera clásica siempre y cuando ϕ no involucre términos que no están definidos totalmente en M.

Ejemplo 2.2.2. Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje puramente relacional (no tiene símbolos de función), entonces las nociones de $\mathcal{L}$-estructura parcial y $\mathcal{L}$-estructura son las mismas.

Ejemplo 2.2.3. Sean $\mathcal{M} \models$PA y $n \in \mathcal{M}$ (n puede ser un número no estándar). Denotamos como $\mathcal{M}_{<n}$ la estructura cuyo universo es el segmento inicial $\{m \in \mathcal{M} \,|\, m < n\}$, y las interpretaciones de $\leq, +, \cdot$ son las mismas de $\mathcal{M}$ pero restringidas a a ese conjunto. Notemos que $\mathbb{N}_{<8} \models 2 + 5 = 7$ pero la fórmula $8 \cdot 2$ no tiene sentido en esa estructura.

Vamos a trabajar con cadenas crecientes de $\mathcal{L}$-estructuras parciales. Si queremos desarrollar una relación de satisfacción en esos objetos, entonces, dada una $\mathcal{L}$-formula ϕ, tenemos que asegurar que se puedan calcular los términos que aparecen en ϕ. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.4. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras parciales y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Decimos que $\mathcal{M}$ es **una ϕ-subestructura de $\mathcal{N}$** si se satisface lo siguiente.

- $M \subset N$.

- Las interpretaciones de lo símbolos de $\mathcal{M}$ coinciden con las interpretaciones de $\mathcal{N}$ restringidas a $\mathcal{M}$.
- Para todo símbolo de función $f \in \mathcal{L}$ y todo $\bar{a} \subset \mathcal{M}$, se cumple que $f^N(\bar{a})$ está definido en $\mathcal{N}$.
- Para todo ϕ-término $t(\bar{x})$ y todo $\bar{a} \subset \mathcal{M}$, se cumple que $t(\bar{a})$ está definido en $\mathcal{N}$.

Denotamos esta relación como $\mathcal{M} \subseteq_\phi \mathcal{N}$.

Ejemplo 2.2.5. Sean $\mathcal{M} \models$PA y $m \in \mathcal{M}$. Sea ϕ una $\mathcal{L}_{PA}$-formula. Denotamos como m^ϕ al menor elemento del conjunto

$$\{x \in \mathcal{M} \,|\, m^2 < x \text{ y } t(\bar{a}) < x \text{ para todo } \phi\text{-término } t(\bar{x}) \text{ y para todo } \bar{a} \subset \mathcal{M}_{<m}\}$$

Es sencillo verificar que $\mathcal{M}_{<m} \subseteq_\phi \mathcal{M}_{<m^\phi}$.

Definición 2.2.6. Sean $n \in \mathbb{N}$ y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Un (ϕ, n)**-modelo** es una sucesión de $\mathcal{L}$-estructuras parciales $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ tal que para todo $i < j \leq n$ se cumple que $\mathcal{A}_i \subseteq_\phi \mathcal{A}_j$.

Ejemplo 2.2.7. Sean $\mathcal{M} \models$PA y ϕ una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula. Sea $\vec{m} = \langle m_0, m_1, ..., m_n \rangle$ una sucesión de números de $\mathcal{M}$ tales que $m_i^\phi < m_{i+1}$ para todo $i < n$. Decimos que $\vec{m}$ es una *sucesión de ϕ-crecimiento*. Por el ejemplo 2.2.5, la sucesión $\mathcal{M}_{\vec{m}} := \langle \mathcal{M}_{<m_0}, ..., \mathcal{M}_{<m_n} \rangle$ es un (ϕ, n)-modelo. Decimos que $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ es el *modelo de ϕ-crecimiento asociado a $\vec{m}$*.

Definición 2.2.8. Sea $n \in \mathbb{N}$. La colección de los (ϕ, n)-modelos, donde ϕ es una $\mathcal{L}$-fórmula arbitraria, la denotamos como **la clase de los** $(\mathcal{L}, n)$**-modelos.**

Al trabajar con $(\mathcal{L}, n)$-modelos vamos a usar las siguiente notaciones.

Definición 2.2.9. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i < j \leq n$. Escribimos $\vec{\mathcal{A}}^\star := \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ y $\mathcal{A}^{[i,j]} := \langle \mathcal{A}_i, ..., \mathcal{A}_j \rangle$.

Definición 2.2.10. Sea $\phi(\vec{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en forma normal prenexa. Denotamos $dp(\phi)$ a **la profundidad de la fórmula** ϕ; es decir, el número de cuantificadores que tiene ϕ. Denotamos $|\phi|$ a la longitud de la fórmula ϕ.

Ahora definimos una nueva relación de satisfacción para los $(\mathcal{L}, n)$-modelos.

Definición 2.2.11. Sea $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en forma normal prenexa. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ un (ψ, n)-modelo tal que $n > dp(\psi)$. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos de $\mathcal{A}_0$ de la misma longitud de $\bar{x}$. Decimos que $\vec{\mathcal{A}}$ **cumple** $\psi(\bar{a})$ —lo denotamos $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$— si:

Caso atómico. Si $\psi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$ (esto tiene sentido ya que en $\mathcal{A}_1$ se pueden realizar los cálculos de los ψ-términos con elementos en $\mathcal{A}_0$).

Caso negación. Si $\psi(\bar{x}) = \neg\gamma(\bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\vec{\mathcal{A}} \not\models \gamma(\bar{a})$.

Caso conjunción. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \wedge \tau(\bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\vec{\mathcal{A}} \models \gamma(\bar{a})$ y $\vec{\mathcal{A}} \models \tau(\bar{a})$.

Caso disyunción. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \vee \tau(\bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\vec{\mathcal{A}} \models \gamma(\bar{a})$ o $\vec{\mathcal{A}} \models \tau(\bar{a})$.

Caso existencial. Si $\psi(\bar{x}) = \exists y\, \gamma(y, \bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si existe $b \in \mathcal{A}_1$ tal que $\vec{\mathcal{A}}^\star \models \gamma(b, \bar{a})$.

Caso universal. Si $\psi(\bar{x}) = \forall y\, \gamma(y, \bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si, para todo $k > dp(\gamma)$ tal que $n - k > 0$, y para todo $b \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \gamma(b, \bar{a})$.

Notemos que, como sólo estamos trabajando con fórmulas normales prenexas, los casos de la negación, conjunción y disyunción sólo aplican cuando la fórmula no tiene cuantificadores.

En pocas palabras, la noción de *cumplimiento* declara que una $\mathcal{L}$-fórmula ψ es verdadera en un $(\mathcal{L}, n)$-modelo, si es verdadera en todas las estructuras en donde ya se puede comprobar su validez. Para determinar cuáles son esas estructuras, nos apoyamos en la profundidad de la fórmula. El caso universal muestra claramente lo descrito; por otro lado, las proposiciones 2.2.13 y 2.2.14 demuestran que en el caso existencial es suficiente encontrar el testigo en el siguiente modelo, ya que ese mismo testigo sirve para las demás estructuras. En el caso de las fórmulas con complejidad cero —sin cuantificadores—, el hecho 2.2.12 nos dice que sólo hay que comprobar si la afirmación es verdadera en la primera estructura parcial. La demostración es consecuencia directa de la definición 2.2.11.

Hecho 2.2.12. *Sean $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula tal que $dp(\psi) = 0$, $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$. Entonces se cumple que*

$$\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a}) \iff \mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$$

Por el hecho 2.2.12, y como sólo estamos trabajando con fórmulas normales prenexas en la definición 2.2.11, las siguientes demostraciones por inducción sobre $\mathcal{L}$-fórmulas se reducen en tres casos: sin cuantificadores, existencial y universal.

Proposición 2.2.13. *Sean $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula, $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$ tal que $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$. Entonces $\mathcal{A}^{[0,m]} \models \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$.*

Demostración. Por inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas.

Caso sin cuantificadores. Supongamos que ψ es una fórmula sin cuantificadores. Dado que $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ entonces por el hecho 2.2.12 se cumple que $\mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$. Por el mismo hecho, $\mathcal{A}^{[0,m]} \models \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$.

Caso existencial. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y\, \gamma(y, \bar{x})$. Como $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ entonces, por definición, existe $b \in \mathcal{A}_1$ tal que $\vec{\mathcal{A}}^\star \models \gamma(b, \bar{a})$. Dado que $\vec{\mathcal{A}}^\star = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ —se empieza a contar desde 1—, por inducción, para todo m tal que $dp(\gamma) + 1 < m \leq n$ se cumple que $\mathcal{A}^{[1,m]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Por la definición del caso existencial, y como $dp(\psi) = dp(\gamma) + 1$, se cumple que $\mathcal{A}^{[0,m]} \models \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$.

Caso universal. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\, \gamma(y, \bar{x})$. Como $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$, por definición, para todo $k > dp(\gamma)$ tal que $n - k > 0$, y para todo $b \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Por inducción

$$\mathcal{A}^{[n-k,m]} \models \gamma(b, \bar{a}) \text{ para toda } m \text{ tal que } dp(\gamma) + n - k < m \leq n. \tag{2-2}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $dp(\psi) < m \leq n$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > dp(\gamma)$ y $m - k > 0$, y sea $b \in \mathcal{A}_{m-k}$. Veamos que $\mathcal{A}^{[m-k,m]} \models \gamma(b, \bar{a})$ para comprobar que $\mathcal{A}^{[0,m]} \models \psi(\bar{a})$. Notemos que existe $\hat{k} > dp(\gamma)$ tal que $m - k = n - \hat{k}$, entonces, por 2-2, para toda m' tal que $dp(\gamma) + m - k < m' \leq n$ se cumple que $\mathcal{A}^{[m-k,m']} \models \gamma(b, \bar{a})$. Como $m > dp(\gamma) + m - k$, entonces $\mathcal{A}^{[m-k,m]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Por definición del caso universal, $\mathcal{A}^{[0,m]} \models \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$.

□

Proposición 2.2.14. *Sean $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula, $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$, entonces para todo $m < n - dp(\psi)$ se cumple que $\mathcal{A}^{[m,n]} \models \psi(\bar{a})$.*

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre $\mathcal{L}$-fórmulas.

Caso sin cuantificadores. Supongamos que ψ es una fórmula sin cuantificadores. Si $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$, entonces, por el hecho 2.2.12, $\mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$. Como ψ es una fórmula sin cuantificadores, entonces $\mathcal{A}_{m+1} \models \psi(\bar{a})$ para todo $m < n - dp(\psi)$. Nuevamente, por el hecho 2.2.12 se cumple que $\mathcal{A}^{[m,n]} \models \psi(\bar{a})$.

Caso existencial. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y\, \gamma(y, \bar{x})$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$, entonces existe $b \in \mathcal{A}_1$ tal que $\mathcal{A}^\star \models \gamma(b, \bar{a})$. Como $\mathcal{A}^\star$ es un $(\mathcal{L}, n-1)$-modelo, por inducción, para todo $m < n - 1 - dp(\gamma)$ se cumple que $\mathcal{A}^{[m,n]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Como $b \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_m$, por definición del caso existencial $\mathcal{A}^{[m,n]} \models \psi(\bar{a})$ para todo $m < n - dp(\psi)$.

Caso universal. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\, \gamma(y, \bar{x})$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ entonces, para todo $k > dp(\gamma)$ tal que $n - k > 0$, y para todo $b \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \gamma(b, \bar{a})$. En particular, si fijamos $m < n - dp(\psi)$, para todo $k > dp(\gamma)$ tal que $n - k > m$, y para todo $b \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Por definición del caso universal $\mathcal{A}^{[m,n]} \models \psi(\bar{a})$ para todo $m < n - dp(\psi)$.

□

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.2.15. Denotemos como Q el conjunto de los axiomas de la aritmética de Robinson (ver definición 2.1.2). Sea ϕ una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula tal que tenga solamente $\bigwedge Q$-términos. Sea $\vec{m} = \langle m_0, m_1, ..., m_n \rangle$ una sucesión de ϕ-crecimiento y $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ el modelo de ϕ-crecimiento asociado a $\vec{m}$. Veamos que $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ cumple Q. Como la profundidad de los axiomas es a lo sumo 2, tenemos que suponer que $n \geq 3$. Dado que los argumentos son semejantes, sólo realizaremos la demostración de los siguientes axiomas:

- $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \forall x, y(x+1 = y+1 \to x = y)$: Veamos que para todo $k > 1$ tal que $n - k > 0$, y para todo $b \in \mathcal{M}_{<m_{n-k}}$ se cumple que $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \models \forall y(b+1 = y+1 \to b = y)$. Ahora tenemos que verificar que para todo k' tal que $n-k < k' < n$, y para todo $c \in \mathcal{M}_{<m_{k'}}$ se cumple que $\mathcal{M}^{[k',n]} \models b+1 = c+1 \to b = c$. Dado que $\mathcal{M}_{<m_{k'+1}} \models b+1 = c+1 \to b = c$ por ser segmento inicial, obtenemos lo anterior.

- $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \forall y \exists x(y = 0 \vee y = x+1)$: Veamos que para todo $k > 1$ tal que $n-k > 0$, y para todo $b \in \mathcal{M}_{<m_{n-k}}$ se cumple que $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \models \exists x(b = 0 \vee b = x+1)$. Si $b = 0$ entonces cualquier testigo en $\mathcal{M}_{<m_{n-k+1}}$ satisface la afirmación. Si $b \neq 0$ entonces el elemento $b - 1 \in \mathcal{M}_{<m_{n-k+1}}$ satisface que $\mathcal{M}^{[n-k+1,n]} \models b = (b-1)+1$.

La noción de cumplimiento tiene un lema similar al teorema de Löwenheim-Skolem descendente, conocido como el lema del modelo finito.

Lema 2.2.16 (Lema del modelo finito)**.** *Sean ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia y $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo tal que $\vec{\mathcal{A}} \models \phi$. Entonces existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$ que cumple ϕ tal que*

$$|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{L}| \qquad |\mathcal{B}_{i+1}| \leq |\phi|(|\mathcal{L}||\mathcal{B}_i|^k + |\phi||\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)})^{dp(\phi)}$$

donde k es el máximo de las aridades de los símbolos de función.

Demostración. La construcción se va a realizar por inducción. Para empezar definimos

$$\mathcal{B}_0 := \{c^{\mathcal{A}_0} \mid c \text{ es símbolo de constante}\}$$

Sea $i < n$ fijo. Supongamos que $\mathcal{B}_i$ ya está definido y $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}_i$. Primero vamos a clausurar por símbolos de función y por ϕ-términos.

$$\mathcal{B}_i^\star = B_i \cup \{f^{\mathcal{A}_{i+1}}(\bar{b}) \mid f \text{ es símbolo de función y } \bar{b} \subset \mathcal{B}_i\} \cup \{t^{\mathcal{A}_{i+1}}(\bar{b}) \mid t \text{ es } \phi\text{-término y } \bar{b} \subset \mathcal{B}_i\}$$

Ahora vamos a clausurar por existenciales y universales. Consideremos los siguientes conjuntos de fórmulas

$$Sub_\exists(\phi) := \{\exists y \psi(y, \bar{x}) \ \mid \exists y \psi(y, \bar{x}) \text{ es subfórmula de } \phi \ \}$$
$$Sub_\forall(\phi) := \{\forall y \psi(y, \bar{x}) \ \mid \forall y \psi(y, \bar{x}) \text{ es subfórmula de } \phi \ \}$$

Por cada $\exists y \psi(y, \bar{x}) \in Sub_\exists(\phi)$ y $\bar{a} \subset \mathcal{B}_i^\star$ escogemos $b_{\exists y \psi(y,\bar{a})} \in \{b \in \mathcal{A}_{i+1} \mid \mathcal{A}^{[i+1,n]} \models \psi(b, \bar{a})\}$, si tal elemento existe, de lo contrario definimos $b_{\exists y \psi(y,\bar{a})} = c^{\mathcal{A}_0}$ donde c puede ser cualquier constante. Por otro lado, por cada $\forall y\psi(y,\bar{x}) \in Sub_\forall(\phi)$ y $\bar{a} \subset \mathcal{B}_i^\star$ escogemos $b_{\forall y\psi(y,\bar{a})} \in \{b \in \mathcal{A}_{i+1} \,|\, \mathcal{A}^{[i+1,n]} \not\models \psi(b,\bar{a})\}$, si tal elemento existe, de lo contrario definimos $b_{\forall y\psi(y,\bar{a})} = c^{\mathcal{A}_0}$ donde c puede ser cualquier constante. Al finalizar, recolectamos todos los elementos anteriores:

$$\mathcal{B}_{i+1} := \mathcal{B}_i^\star \cup \bigcup_{\bar{a}\subseteq\mathcal{B}_i^\star} \{b_{\exists y\psi(y,\bar{a})} \,|\, \exists y\psi(y,\bar{x}) \in Sub_\exists(\phi)\} \cup \bigcup_{\bar{a}\subseteq\mathcal{B}_i^\star} \{b_{\forall y\psi(y,\bar{a})} \,|\, \forall y\psi(y,\bar{x}) \in Sub_\forall(\phi)\}$$

Dado que clausuramos por símbolos de función y por ϕ-términos, la sucesión $\vec{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B}_0, ..., \mathcal{B}_n\rangle$ es un (ϕ, n)-modelo. Por construcción $|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{L}|$. Para acotar la cardinalidad de los otros conjuntos vamos a usar que, como ϕ es sentencia, la longitud de las tuplas con las que trabajamos no superan $dp(\phi)$; por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{i+1}| &\leq |\mathcal{B}_i^\star| + \sum_{Sub_\exists(\phi)} |\mathcal{B}_i^\star|^{dp(\phi)} + \sum_{Sub_\forall(\phi)} |\mathcal{B}_i^\star|^{dp(\phi)} \\
&= |\mathcal{B}_i^\star| + dp(\phi)|\mathcal{B}_i^\star|^{dp(\phi)} \\
&\leq |\phi||\mathcal{B}_i^\star|^{dp(\phi)}
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que k es el máximo de las aridades de los símbolos de función, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_i^\star| &\leq |\mathcal{B}_i| + \sum_{f\in\mathcal{L}} |\mathcal{B}_i|^k + \sum_{t\in\phi} |\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)} \\
&\leq |\mathcal{L}||\mathcal{B}_i|^k + |\phi||\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)}
\end{aligned}$$

En conclusión

$$|\mathcal{B}_{i+1}| \leq |\phi|(|\mathcal{L}||\mathcal{B}_i|^k + |\phi||\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)})^{dp(\phi)}$$

Por último, demostremos que para toda subfórmula $\theta(\bar{x})$ de ϕ y para todo $\bar{b} \subset \mathcal{B}_i$ tal que $n - i > dp(\theta)$, se cumple que

$$\mathcal{A}^{[i,n]} \models \theta(\bar{b}) \Longleftrightarrow \mathcal{B}^{[i,n]} \models \theta(\bar{b}) \tag{2-3}$$

Caso sin cuantificadores. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es una fórmula sin cuantificadores. Sea i tal que $n - i > dp(\theta) = 0$ y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_i$. Notemos que, como $\mathcal{B}_{i+i}$ tiene la mismas interpretaciones de los símbolos que $\mathcal{A}_{i+1}$, entonces $\mathcal{A}_{i+1} \models \theta(\bar{b})$ si y sólo si $\mathcal{B}_{i+1} \models \theta(\bar{b})$. Por lo tanto, por el hecho 2.2.12 se cumple 2-3.

Caso existencial. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\exists y\psi(y,\bar{x})$. Sea i tal que $n - i > dp(\theta)$ y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_i$.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{A}^{[i,n]} \models \exists y\psi(y,\bar{b})$, por construcción existe $d \in \mathcal{B}_{i+1}$ tal que $\mathcal{A}^{[i+1,n]} \models \psi(d,\bar{b})$. Por inducción $\mathcal{B}^{[i+1,n]} \models \psi(d,\bar{b})$ y por lo tanto $\mathcal{B}^{[i,n]} \models \exists y\psi(y,\bar{b})$.

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{B}^{[i,n]} \models \exists y \psi(y, \bar{b})$, por definición existe $d \in \mathcal{B}_{i+1}$ tal que $\mathcal{B}^{[i+1,n]} \models \psi(d, \bar{b})$. Por inducción $\mathcal{A}^{[i+1,n]} \models \psi(d, \bar{b})$ y por lo tanto $\mathcal{A}^{[i,n]} \models \exists y \psi(y, \bar{b})$.

Caso universal. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\, \psi(y, \bar{x})$. Sea i tal que $n - i > dp(\theta)$ y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_i$.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{A}^{[i,n]} \models \forall y \psi(y, \bar{b})$ entonces para todo $k > dp(\psi)$ tal que $n - k > i$, y para todo $d \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \psi(d, \bar{b})$; en particular, para todo $d \in \mathcal{B}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \psi(d, \bar{b})$. Por inducción, $\mathcal{B}^{[n-k,n]} \models \psi(d, \bar{b})$ para todo $k > dp(\psi)$ tal que $n - k > i$, y para todo $d \in \mathcal{B}_{n-k}$. Por lo tanto $\mathcal{B}^{[i,n]} \models \forall y \psi(y, \bar{b})$.

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{A}^{[i,n]} \not\models \forall y \psi(y, \bar{b})$ entonces existen $k > dp(\psi)$ y $d \in \mathcal{A}_{n-k}$ tales que $n - k > i$ y $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \not\models \psi(d, \bar{b})$. Como $\bar{b} \subset \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{n-k-1}$, por construcción existe $d' \in \mathcal{B}_{n-k}$ tal que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \not\models \psi(d', \bar{b})$. Por inducción $\mathcal{B}^{[n-k,n]} \not\models \psi(d', \bar{b})$ y por lo tanto $\mathcal{B}^{[i,n]} \not\models \forall y \psi(y, \bar{b})$.

□

Ya con el lema del modelo finito **podemos garantizar la existencia de** $(\mathcal{L}, n)$**-modelos finitos que cumplen una** $\mathcal{L}$**-fórmula** ϕ. La siguiente definición es motivada por las cotas del lema 2.2.16.

Definición 2.2.17. Sea ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia. Para todo $i \in \mathbb{N}$ definimos recursivamente $Col(i, \phi)$ de la siguiente manera:

$$Col(0, \phi) = |\mathcal{L}|$$
$$Col(i+1, \phi) = |\phi|(|\mathcal{L}|Col(i, \phi)^k + |\phi|Col(i, \phi)^{dp(\phi)})^{dp(\phi)}$$

donde k es el máximo de las aridades de los símbolos de función.

Para ubicar los $(\mathcal{L}, n)$-modelos dentro de un conjunto finito fijo necesitamos introducir la noción de isomorfismo.

Definición 2.2.18. Sean $\vec{\mathcal{A}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ dos $(\mathcal{L}, n)$-modelos. Decimos que $\vec{\mathcal{A}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ son **isomorfos** —lo denotamos como $\vec{\mathcal{A}} \cong \vec{\mathcal{B}}$— si existe una biyección $g : \bigcup_{i=0}^{i=n} \mathcal{A}_i \to \bigcup_{i=0}^{i=n} \mathcal{B}_i$ tal que para todo $i \leq n$ la restricción $g \upharpoonright \mathcal{A}_i$ es un isomorfismo sobre $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{L}$-estructuras parciales.

El siguiente hecho es consecuencia inmediata de la definición 2.2.18.

Hecho 2.2.19. *Sean $\vec{\mathcal{A}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ dos $(\mathcal{L}, n)$-modelos tales que existe un isomorfismo g entre ellos. Entonces para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(\bar{x})$ y para toda tupla $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$ se cumple que $\vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\vec{\mathcal{B}} \models \phi(g(\bar{a}))$.*

Corolario 2.2.20. *Sea ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia. Sea $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo tal que $\vec{\mathcal{A}} \models \phi$. Entonces, existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{D}}$ que cumple ϕ tal que el dominio de $\mathcal{D}_i$ es un subconjunto del segmento $[0, Col(i, \phi)]$ para todo $i \leq n$. Decimos que $\vec{\mathcal{D}}$ es el F-**colapso**[1] **de $\mathcal{A}$ según** ϕ.*

Demostración. Por el lema 2.2.16 existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$ que cumple ϕ tal que $\mathcal{B}_i$ tiene tamaño menor que $Col(i, \phi)$. Recursivamente, podemos dotar un subconjunto $\mathcal{D}_i$ de $[0, Col(i, \phi)]$ con la misma estructura de $\mathcal{B}_i$ tal que $\mathcal{D}_i \subset_\phi \mathcal{D}_{i+1}$. Por el hecho 2.2.19, el $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{D}}$ cumple ϕ.

□

Ahora vamos a presentar el teorema de completitud de la noción de cumplimiento. La demostración usa el lema de König, que también se puede desarrollar en ACA_0 (ver teorema III.7.2 de [13]).

Teorema 2.2.21 (Teorema de completitud de la noción de cumplimiento)**.** **($\mathbf{ACA}_0$)** *Sea ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia. Entonces ϕ tiene un modelo clásico si y sólo si ϕ tiene un $(\mathcal{L}, n)$-modelo finito para todo $n > dp(\phi)$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \phi$. Es fácil verificar que, para todo $n > dp(\phi)$, el $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{A}} = \langle \underbrace{\mathcal{M}, ..., \mathcal{M}}_{n+1 \text{ veces}} \rangle$ cumple ϕ.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $i > dp(\phi)$ existe un $(\mathcal{L}, i)$-modelo $\vec{\mathcal{B}_i}$ tal que cumple ϕ. Vamos a encontrar una cadena creciente (con respecto a la contenencia) de $(\mathcal{L}, n)$-modelos que cumplen ϕ, tal que la unión de esa cadena es una $\mathcal{L}$-estructura que satisface ϕ. Para esto vamos a usar el lema de König. Sea

$$T = \left\{ \vec{\mathcal{A}} \,|\, \vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, n)\text{-modelo que cumple } \phi \text{ tal que } A_i \subset [0, Col(i, \phi)] \right\}$$

Vamos a definir sobre T una estructura de árbol. Dados $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\vec{\mathcal{B}}$ un $(\mathcal{L}, m)$-modelo, decimos que $\vec{\mathcal{A}} \leq_{fin} \vec{\mathcal{B}}$ si $n \leq m$ y para todo $k \leq n$ se cumple que $\mathcal{A}_k = \mathcal{B}_k$. Notemos que $(T, \leq_{fin})$ es un árbol por la proposición 2.2.13. De hecho, el nivel j del árbol está dado por:

$$Lev_j(T) = \left\{ \vec{\mathcal{A}} \,|\, \vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, j + dp(\phi) + 1)\text{-modelo que cumple } \phi \text{ tal que } A_i \subset [0, Col(i, \phi)] \right\}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Además, por el corolario 2.2.20, el F-colapso de $\vec{\mathcal{B}_i}$ según ϕ pertenece al nivel $i - dp(\phi) - 1$ de T para todo $i > dp(\phi)$. Por otro lado, todos los niveles de T son finitos ya que sólo una cantidad finita de $(\mathcal{L}, i)$-modelos se pueden definir en $[0, Col(i, \phi)]$. En conclusión, $(T, \leq_{fin})$ es un árbol infinito de ramificación finita. Por el lema de König existe una rama infinita de T que vamos a denotar como $\{\vec{\mathcal{A}_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Consideremos como $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de $\mathcal{L}$-estructuras parciales que tiene la rama. Definimos

$$\mathcal{M} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$$

[1] La F viene de la palabra *fulfillment*

Es sencillo comprobar que $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura. Veamos por inducción que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\psi(\bar{x})$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $\bar{a} \subset \mathcal{A}_i$ se cumple lo siguiente.

$$\mathcal{A}^{[i,j]} \models \psi(\bar{a}) \text{ para todo } j > i + dp(\psi) \Longrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \tag{2-4}$$

Caso sin cuantificadores. Supongamos que $dp(\psi) = 0$. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_i$. Si $\mathcal{A}^{[i,j]} \models \psi(\bar{a})$ para todo $j > i + dp(\psi)$, por el hecho 2.2.12 se tiene que $\mathcal{A}_{i+1} \models \psi(\bar{a})$. Como ψ no tiene cuantificadores entonces $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Caso existencial. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y\, \gamma(y, \bar{x})$. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_i$. Si $\mathcal{A}^{[i,j]} \models \psi(\bar{a})$ para todo $j > i + dp(\psi)$ entonces existe $b_j \in \mathcal{A}_{i+1}$ —depende de j— tal que $\mathcal{A}^{[i+1,j]} \models \gamma(b_j, \bar{a})$. Como $\mathcal{A}_{i+1}$ es finito, existe $b \in \mathcal{A}_{i+1}$ fijo y una sucesión de naturales $\{j_k\}_{k\geq 1}$ tal que $\mathcal{A}^{[i+1,j_k]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Por la proposición 2.2.13, podemos acortar los $(\mathcal{L}, n)$-modelos para que $\mathcal{A}^{[i+1,j]} \models \gamma(b, \bar{a})$ para todo $j > i + 1 + dp(\gamma)$. Por inducción $\mathcal{M} \models \gamma(b, \bar{a})$ y por lo tanto $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Caso universal. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\, \gamma(y, \bar{x})$. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_i$. Si $\mathcal{A}^{[i,j]} \models \psi(\bar{a})$ para todo $j > i+dp(\psi)$ entonces, para todo $k > dp(\gamma)$ tal que $j-k > i$, y para todo $b \in \mathcal{A}_{j-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[j-k,j]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Sea $b \in \mathcal{M}$. Notemos que existen $j_b > i + dp(\psi)$ y $k_b > dp(\gamma)$, con $j_b - k_b > i$, tales que $b \in \mathcal{A}_{j_b - k_b}$; luego para todo $j > j_b + dp(\gamma)$ se cumple que $\mathcal{A}^{[j_b-k_b,j]} \models \gamma(b, \bar{a})$. Por inducción $\mathcal{M} \models \gamma(b, \bar{a})$. Como $b \in \mathcal{M}$ era arbitrario, se concluye que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Dado que por construcción $\mathcal{A}^{[0,j]} \models \phi$ para todo $j > dp(\phi)$, por 2-4 se tiene que $\mathcal{M} \models \phi$.

□

Dado que la noción de cumplimiento para modelos finitos es expresable en PA, por el teorema 2.1.4 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.22 (PA). *La afirmación "para todo subconjunto finito* $\Gamma \subset$ PA *y para todo* $n > dp(\bigwedge \Gamma)$, $\bigwedge \Gamma$ *tiene un* $(\mathcal{L}_{PA}, n)$*-modelo finito" es equivalente a* Con(PA).

Por el segundo teorema de incompletitud de Gödel, la afirmación "para todo subconjunto finito $\Gamma \subset$PA y para todo $n > dp(\bigwedge \Gamma)$, $\bigwedge \Gamma$ tiene un $(\mathcal{L}_{PA}, n)$-modelo" es independiente de PA. Por lo tanto, un método para probar la independencia de PA de un $\mathcal{L}_{PA}$-teorema es demostrar que éste implica la afirmación anterior.

2.3. Problemáticas al aplicar el método

Primero, observamos que el argumento original de [1] para demostrar el corolario 2.2.22 pasa por la siguiente afirmación denominada *el teorema de validez de la noción de cumplimiento*:

Sea ψ *una* $\mathcal{L}$*-sentencia. Si* $\vdash \psi$ *entonces para todo* $n > dp(\psi)$*, todos los* $(\mathcal{L}, n)$*-modelos cumplen* ψ*.*

Sin embargo, se tiene el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.3.1. Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PA}$. Consideremos la fórmula

$$\exists y \exists x (y > x \wedge x^2 = x + x + x + x + x \wedge x \neq 0)$$

Notemos que su negación clásica (en forma normal prenexa) es:

$$\forall y \forall x (x \geq y \vee x^2 \neq x + x + x + x + x \vee x = 0)$$

Denotemos como ϕ la fórmula

$$\exists z \exists w \forall y \forall x ((z > w \wedge w^2 = w+w+w+w+w \wedge w \neq 0) \vee (x \geq y \vee x^2 \neq x+x+x+x+x \vee x = 0))$$

Por el tercio excluido, $\vdash \phi$. Sin embargo, si consideramos $\vec{\mathcal{A}}$ un (ϕ, n)-modelo $\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$, con $n > 4$, donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{0, 1\} \\ \mathcal{A}_1 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

Entonces:

$\vec{\mathcal{A}} \not\models \exists z \exists w (z > w \wedge w^2 = w + w + w + w + w \wedge w \neq 0)$ Ya que no existe un elemento en $\mathcal{A}_1$ que sea mayor que 5.

$\vec{\mathcal{A}} \not\models \forall y \forall x (x \geq y \vee x^2 \neq x + x + x + x + x \vee x = 0)$ Ya que en $\mathcal{A}_2$ hay elementos mayores que 5.

Luego, por lo anterior

$$\vec{\mathcal{A}} \not\models \phi$$

El ejemplo 2.3.1 muestra que la noción de cumplimiento no es del todo clásica. Otra situación del mismo estilo se presenta en la demostración de Paris-Harrington usando $(\mathcal{L}, n)$-modelos. Al probar que

$$\mathrm{LNP}(\phi) := \exists x \phi(x) \to \exists z \forall y (\phi(z) \wedge (\phi(y) \to z \leq y)$$

tiene un $(\mathcal{L}_{PA}, n)$-modelo para toda ϕ, se verifica que si se cumple el antecedente entonces se cumple en consecuente. El siguiente ejemplo muestra que ese argumento no es suficiente para que se cumpla una implicación, según la definición 2.2.11.

Ejemplo 2.3.2. Sea $\mathcal{L} = \{P\}$ un lenguaje con un solo símbolo de predicado. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \rangle$ el siguiente $(\mathcal{L}, 3)$-modelo.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \{\alpha\} & \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \{\alpha, \beta\} \\ P^{\mathcal{A}_0} = P^{\mathcal{A}_1} = \emptyset & P^{\mathcal{A}_2} = P^{\mathcal{A}_3} = \{\beta\} \end{array}$$

Notemos que si $\vec{\mathcal{A}} \models \exists x P(x)$ entonces $\vec{\mathcal{A}} \models P(\alpha)$. Sin embargo, dado que $\mathcal{A}_3 \models P(\beta) \wedge \neg P(\alpha)$, se tiene que

$$\vec{\mathcal{A}} \not\models \forall x (\neg P(x) \vee P(\alpha))$$

Observemos que $\forall x (\neg P(x) \vee P(\alpha))$ es la forma normal prenexa de $\exists x P(x) \to P(\alpha)$.

Para demostrar que un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ cumple una implicación, según la definición 2.2.11, hay que usar que $\psi \to \phi$ es equivalente (de manera clásica) a $\neg\psi \vee \phi$. Por lo tanto:

$$\vec{\mathcal{A}} \models \psi \to \phi \text{ si y sólo si, si } \vec{\mathcal{A}} \not\models \neg\psi \text{ entonces } \vec{\mathcal{A}} \models \phi \tag{2-5}$$

Como vimos en el ejemplo 2.3.1, $\vec{\mathcal{A}} \not\models \neg\psi$ no siempre implica que $\vec{\mathcal{A}} \models \psi$ (el recíproco sí es cierto). Por lo tanto la implicación (2-5) es más exigente que la implicación clásica. En la sección 2.4 vemos que si agregamos la implicación clásica en la definición 2.2.11, entonces el teorema 2.2.21 deja de ser cierto.

En la sección 4.4 presentamos en detalle la demostración de Shelah de Paris-Harrington, indicando los momentos en que se demuestra el cumplimiento de una implicación de forma clásica. Dado que no encontramos una manera para que la prueba siguiera funcionando usando la definición 2.2.11, optamos por buscar una nueva noción de cumplimiento que involucre todas las fórmulas (no sólo las que están en forma normal prenexa) y que mantenga la teoría desarrollada en la sección 2.2. A continuación mostramos nuestros resultados.

2.4. Propuestas para cambiar la noción de cumplimiento

Vamos a presentar dos versiones de la noción de cumplimiento que ya trabajan sobre todas las fórmulas. La primera la denominamos *cumplimiento en segmentos* ya que se verifica el cumplimento de una fórmula en cada segmento interno de un $(\mathcal{L}, n)$-modelo; y la segunda como *cumplimiento en subsucesiones* ya que se verifica el cumplimento de una fórmula en toda subsucesión de $\mathcal{L}$-estructuras parciales de un $(\mathcal{L}, n)$-modelo. Dado que ya no vamos a trabajar exclusivamente con fórmulas normales prenexas, vamos a complementar la definición de profundidad de una fórmula.

Definición 2.4.1. Sea $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Definimos la profundidad de la fórmula ψ —lo denotamos como $dp(\psi)$— de manera inductiva:

Caso atómico. Si $\psi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $dp(\psi) := 0$.

Caso conjunción. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \wedge \tau(\bar{x})$ entonces $dp(\psi) := \text{máx}\{dp(\gamma), dp(\tau)\}$.

Caso disyunción. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \vee \tau(\bar{x})$ entonces $dp(\psi) := \text{máx}\{dp(\gamma), dp(\tau)\}$.

Caso implicación. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$ entonces $dp(\psi) := \text{máx}\{dp(\gamma), dp(\tau)\}$.

Caso negación. Si $\psi(\bar{x}) = \neg\gamma(\bar{x})$ entonces $dp(\psi) := dp(\gamma)$.

Caso existencial. Si $\psi(\bar{x}) = \exists y\, \gamma(y, \bar{x})$ entonces $dp(\psi) := dp(\gamma) + 1$.

Caso universal. Si $\psi(\bar{x}) = \forall y\, \gamma(y, \bar{x})$ entonces $dp(\psi) := dp(\gamma) + 1$.

2.4.1. Cumplimiento en segmentos

Si detallamos la teoría desarrollada en la sección 2.2, las proposiciones 2.2.13 y 2.2.14 son la base para demostrar el lema del modelo finito y el teorema de completitud. Con el propósito de mantener esas proposiciones aparece la siguiente definición.

Definición 2.4.2. Sea $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula (ya no es necesario que esté en forma normal prenexa). Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ un (ψ, n)-modelo tal que $n > dp(\psi)$. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos de $\mathcal{A}_0$ de la misma longitud de $\bar{x}$. Decimos que $\vec{\mathcal{A}}$ **cumple** $\psi(\bar{a})$ **en segmentos** —lo denotamos $\vec{\mathcal{A}} \models_S \psi(\bar{a})$— si:

Caso atómico. Si $\psi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_S \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$.

Caso implicación. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$ entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_S \psi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $dp(\psi) < j - i$ se cumple que, si $\mathcal{A}^{[i,j]} \models_S \gamma(\bar{a})$ entonces $\mathcal{A}^{[i,j]} \models_S \tau(\bar{a})$.

Caso negación. Si $\psi(\bar{x}) = \neg\gamma(\bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models_S \psi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $dp(\psi) < j - i$ se cumple que $\mathcal{A}^{[i,j]} \not\models_S \gamma(\bar{a})$.

Los demás casos se definen de manera similar a la definición 2.2.11.

El siguiente ejemplo ilustra que la definición 2.4.2 no permite desarrollar un teorema de completitud.

Ejemplo 2.4.3. Sea $\mathcal{L} = \{P\}$ un lenguaje que sólo tiene un símbolo de relación binaria. Consideremos $(\mathbb{N}, P^{\mathbb{N}})$ la $\mathcal{L}$-estructura donde:

$$(x, y) \in P^{\mathbb{N}} \iff y = x + 2$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ mayor que 3. Sea $\vec{A} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ el $(\mathcal{L}, n)$-modelo tal que

$$\mathcal{A}_n = \{0, ..., n\}$$

Demostremos que:

$\vec{\mathcal{A}} \models_S \neg\forall x \exists y P(x, y)$ **:** Sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $j - i > 2$. Veamos que $\mathcal{A}^{[i,j]} \not\models_S \forall x \exists y P(x, y)$. Dado que $j - 2 \in \mathcal{A}_{j-2}$ y $j \notin \mathcal{A}_{j-1}$, entonces $\mathcal{A}^{[j-2,j]} \not\models_S \exists y P(j-2, y)$; por lo tanto $\mathcal{A}^{[i,j]} \not\models_S \forall x \exists y P(x, y)$. Como i, j eran número arbitrarios tales que $j - i > 2$, entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_S \neg\forall x \exists y P(x, y)$.

$\vec{\mathcal{A}} \models_S \forall x \exists z \exists y(z = z \wedge P(x, y))$ **:** Sean $k > 2$ y $b \in \mathcal{A}_{n-k}$. Veamos que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models_S \exists z \exists y(z = z \wedge P(b, y))$. Notemos que $\mathcal{A}^{[n-k+1,n]} \models_S \exists y(0 = 0 \wedge P(x, y))$, además, dado que $b + 2 \in \mathcal{A}_{n-k+2}$, entonces $\mathcal{A}^{[n-k+2,n]} \models_S 0 = 0 \wedge P(b, b+2)$. En conclusión $\vec{\mathcal{A}} \models_S \forall x \exists z \exists y(z = z \wedge P(x, y))$.

Juntando lo anterior, podemos deducir que

$$\vec{A} \models_S \neg\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists z \exists y(z = z \wedge P(x, y))$$

Entonces para todo n mayor que 3 existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo que cumple en segmentos la sentencia $\neg\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists z \exists y(z = z \wedge P(x, y))$. Sin embargo, no existe una $\mathcal{L}$-estructura que satisface esa sentencia. Notemos que lo mismo sucede con la sentencia $\forall w(w = w) \to (\neg\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists z \exists y(z = z \wedge P(x, y)))$

El ejemplo 2.4.3 muestra que el **cumplimiento en segmentos no satisface un teorema de completitud**; por lo tanto no se puede usar en el argumento de Shelah para demostrar Paris-Harrington. Observemos que si usamos en la definición 2.4.2 los siguientes casos:

Negación clásica. Si $\psi(\bar{x}) = \neg\gamma(\bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\vec{\mathcal{A}} \not\models \gamma(\bar{a})$.

Implicación clásica. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$ entonces $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a})$ si y sólo si, si $\mathcal{A} \models \gamma(\bar{a})$ entonces $\mathcal{A} \models \tau(\bar{a})$.

Tampoco funciona ya que 2.4.3 sigue sirviendo de contraejemplo.

2.4.2. Cumplimiento en subsucesiones

En la búsqueda de una versión del cumplimiento que mantenga las proposiciones 2.2.13 y 2.2.14, pero que sea más fuerte que el cumplimiento en segmentos, se nos ocurrió la siguiente definición.

Definición 2.4.4. Sea $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ un (ψ, n)-modelo tal que $n > dp(\psi)$. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos de $\mathcal{A}_0$ de la misma longitud de $\bar{x}$. Decimos que $\vec{\mathcal{A}}$ **cumple** $\psi(\bar{a})$ **en subsucesiones** —lo denotamos $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$— si:

Caso atómico. Si $\psi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$ si y sólo si $\mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$.

Caso implicación. Si $\psi(\bar{x}) = \gamma(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$ entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$ si y sólo si para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n, se cumple que, si $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{a})$ entonces $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \tau(\bar{a})$.

Caso negación. Si $\psi(\bar{x}) = \neg\gamma(\bar{x})$ entonces, $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$ si y sólo si para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m + 1$ números menores o iguales que n, se cumple que $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \not\models_I \gamma(\bar{a})$.

Los demás casos se definen de manera similar a la definición 2.2.11.

La siguiente proposición generaliza las proposiciones 2.2.13 y 2.2.14.

Proposición 2.4.5. *Sean $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula, $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$ tal que $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$. Entonces para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n, se cumple que $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$.*

Demostración. Veamos por inducción sobre las $\mathcal{L}$-fórmulas la proposición.

Caso atómico. Supongamos que ψ es una fórmula atómica. Dado que $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$ entonces por la definición 2.4.4 se cumple que $\mathcal{A}_1 \models \psi(\bar{a})$. Como ψ es una fórmula atómica entonces $\mathcal{A}_i \models \psi(\bar{a})$ para todo $1 \leq i \leq n$, luego, por la definición, para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n, se cumple que $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$.

Caso conjunción. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\gamma(\bar{x}) \wedge \tau(\bar{x})$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$, entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_I \gamma(\bar{a})$ y $\vec{\mathcal{A}} \models_I \tau(\bar{a})$. Por inducción, $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{a})$ y $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \tau(\bar{a})$. Luego $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n.

Caso disyunción. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\gamma(\bar{x}) \vee \tau(\bar{x})$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$, entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_I \gamma(\bar{a})$ o $\vec{\mathcal{A}} \models_I \tau(\bar{a})$. Por inducción, $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{a})$ o $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \tau(\bar{a})$. Luego $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n.

Caso implicación. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\gamma(\bar{x}) \rightarrow \tau(\bar{x})$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$, entonces, por definición, para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n, se cumple que, si $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{a})$ entonces $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \tau(\bar{a})$. Por esa misma razón, $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n.

Caso negación. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\neg\gamma(\bar{x})$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$, por definición, para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n, se cumple que $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \not\models_I \gamma(\bar{a})$. Por esa misma razón, $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n.

Caso existencial. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y\, \gamma(y, \bar{x})$. Como $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$ entonces, por definición, existe $b \in \mathcal{A}_1$ tal que $\vec{\mathcal{A}}^{\star} \models_I \gamma(b, \bar{a})$. Sea m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión de $m+1$ números menores o iguales que n. Notemos que $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ ya que por inducción $\langle \mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(b, \bar{a})$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n.

Caso universal. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\, \gamma(y, \bar{x})$. Como $\vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a})$, por definición, dado $k > dp(\gamma)$ tal que $n - k > 0$, y dado $b \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models_I \gamma(b, \bar{a})$. Por inducción, para toda m tal que $dp(\gamma) < m \leq k$ se cumple que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(b, \bar{a}) \text{ para toda sucesión de } m+1 \text{ números en } [n-k, n]. \quad \text{(2-6)}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de $m+1$ números menores o iguales que n. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > dp(\gamma)$ y $m - k > 0$, y sea $b \in \mathcal{A}_{i_{m-k}}$. Veamos que $\langle \mathcal{A}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(b, \bar{a})$ para comprobar que $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$. Notemos que existe $\hat{k} > dp(\gamma)$ tal que $i_{m-k} = n - \hat{k}$, entonces, por 2-6, dado que $dp(\gamma) < k \leq k'$ se tiene que $\langle \mathcal{A}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(b, \bar{a})$. Por la definición del caso universal, $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{a})$ para toda m tal que $dp(\psi) < m \leq n$, y para toda sucesión creciente $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ de $m+1$ números menores o iguales que n.

□

Dado que la noción de cumplimiento en subsucesiones involucra todas las subsucesiones de números entre 1 y n de un $(\mathcal{L}, n)$-modelo, ahora las cotas del lema del modelo finito dependen del n.

Lema 2.4.6 (Lema débil del modelo finito)**.** *Sean ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia y $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo tal que $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi$. Entonces existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$ que cumple ϕ en subsucesiones tal que*

$$|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{L}| \qquad |\mathcal{B}_{i+1}| \leq 2^n |\phi| (|\mathcal{L}||\mathcal{B}_i|^k + |\phi||\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)})^{dp(\phi)}$$

donde k es el máximo de las aridades de los símbolos de función.

Demostración. La construcción se va a realizar por inducción. Para empezar consideremos como

$$\mathcal{B}_0 := \{c^{A_0} \mid c \text{ es símbolo de constante}\}$$

Sea $i < n$ fijo. Supongamos que $\mathcal{B}_i$ ya está definido y $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{A}_i$. Primero vamos a clausurar por símbolos de función y por términos que aparecen en ϕ.

$$\mathcal{B}_i^\star = B_i \cup \{f^{\mathcal{A}_{i+1}}(\bar{b}) \mid f \text{ es símbolo de función y } \bar{b} \subset \mathcal{B}_i\} \cup \{t^{\mathcal{A}_{i+1}}(\bar{b}) \mid t \text{ es } \phi\text{-término y } \bar{b} \subset \mathcal{B}_i\}$$

Ahora vamos a clausurar por existenciales y universales. Consideremos los siguientes conjuntos de fórmulas

$$Sub_\exists(\phi) := \{\exists y \psi(y, \bar{x}) \ \mid \exists y \psi(y, \bar{x}) \text{ es subfórmula de } \phi\ \}$$
$$Sub_\forall(\phi) := \{\forall y \psi(y, \bar{x}) \ \mid \forall y \psi(y, \bar{x}) \text{ es subfórmula de } \phi\ \}$$

Para cada $\exists y \psi(y, \bar{x}) \in Sub_\exists(\phi)$, para todo $\bar{a} \subset \mathcal{B}_i^\star$ y para toda $\vec{j} = \langle j_1, ..., j_m \rangle$ sucesión creciente de naturales en el intervalo $(i+1, n]$, escogemos

$$b^{\vec{j}}_{\exists y \psi(y, \bar{a})} \in \{b \in \mathcal{A}_{i+1} \mid \langle \mathcal{A}_{i+1}, \mathcal{A}_{j_1}, ..., \mathcal{A}_{j_m} \rangle \models_I \psi(b, \bar{a})\}$$

si tal elemento existe, de lo contrario definimos $b^{\vec{j}}_{\exists y\psi(y,\bar{a})} = c^{\mathcal{A}_0}$ donde c puede ser cualquier constante. Por otro lado, por cada $\forall y\psi(y,\bar{x}) \in Sub_\forall(\phi)$, para todo $\bar{a} \subset \mathcal{B}^\star_i$ y para toda $\vec{j} = \langle j_1, ..., j_m\rangle$ sucesión creciente de naturales en el intervalo $(i+1, n]$, escogemos

$$b^{\vec{j}}_{\forall y\psi(y,\bar{a})} \in \{b \in \mathcal{A}_{i+1} \mid \langle \mathcal{A}_{i+1}, \mathcal{A}_{j_1}, ..., \mathcal{A}_{j_m}\rangle \not\models_I \psi(b, \bar{a})\}$$

si tal elemento existe, de lo contrario definimos $b^{\vec{j}}_{\forall y\psi(y,\bar{a})} = c^{\mathcal{A}_0}$ donde c puede ser cualquier constante. Por último, recolectamos todos los anteriores elementos:

$$\mathcal{B}_{i+1} := \mathcal{B}^\star_i \cup \bigcup_{\substack{\bar{a}\subseteq \mathcal{B}^\star_i \\ \vec{j}\subseteq(i+1,n]}} \{b^{\vec{j}}_{\exists y\psi(y,\bar{a})} \mid \exists y\psi(y,\bar{x}) \in Sub_\exists(\phi)\} \cup \bigcup_{\substack{\bar{a}\subseteq \mathcal{B}^\star_i \\ \vec{j}\subseteq(i+1,n]}} \{b^{\vec{j}}_{\forall y\psi(y,\bar{a})} \mid \forall y\psi(y,\bar{x}) \in Sub_\forall(\phi)\}$$

Dado que clausuramos por símbolos de función y por ϕ-términos, la sucesión $\vec{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B}_0, ..., \mathcal{B}_n\rangle$ es un $(\mathcal{L}, n)$-modelo. Por construcción $|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{L}|$. Para acotar la cardinalidad de los otros conjuntos vamos a usar que, como ϕ es sentencia, la longitud de las tuplas con las que trabajamos no superan $dp(\phi)$; por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_{i+1}| &\leq |\mathcal{B}^\star_i| + \sum_{2^n Sub_\exists(\phi)} |\mathcal{B}^\star_i|^{dp(\phi)} + \sum_{2^n Sub_\forall(\phi)} |\mathcal{B}^\star_i|^{dp(\phi)} \\
&= |\mathcal{B}^\star_i| + 2^n dp(\phi)|\mathcal{B}^\star_i|^{dp(\phi)} \\
&\leq 2^n|\phi||\mathcal{B}^\star_i|^{dp(\phi)}
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que k es el máximo de las aridades de los símbolos de función, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}^\star_i| &\leq |\mathcal{B}_i| + \sum_{f\in\mathcal{L}} |\mathcal{B}_i|^k + \sum_{t\in\phi} |\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)} \\
&\leq |\mathcal{L}||\mathcal{B}_i|^k + |\phi||\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)}
\end{aligned}$$

En conclusión

$$|\mathcal{B}_{i+1}| \leq 2^n|\phi|(|\mathcal{L}||\mathcal{B}_i|^k + |\phi||\mathcal{B}_i|^{dp(\phi)})^{dp(\phi)}$$

Por último, demostremos que para toda subfórmula $\theta(\bar{x})$ de ϕ, para toda sucesión creciente de naturales $\langle i_0, ..., i_m\rangle$ tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y para todo $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$ se cumple que:

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m}\rangle \models_I \theta(\bar{b}) \iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m}\rangle \models_I \theta(\bar{b}) \tag{2-7}$$

Caso atómico. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es una fórmula atómica. Sea $\langle i_0, ..., i_m\rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m}\rangle \models_I \theta(\bar{b}) &\iff \mathcal{A}_{i_1} \models_I \theta(\bar{b}) \\
&\iff \mathcal{B}_{i_1} \models_I \theta(\bar{b}) \qquad (\mathcal{B}_{i_1} \text{ es subestructura de } \mathcal{A}_{i_1}) \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m}\rangle \models_I \theta(\bar{b})
\end{aligned}$$

Caso conjunción. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \wedge \gamma(\bar{x})$. Sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b}) &\iff \langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{b}) \text{ y } \langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{b}) \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{b}) \text{ y } \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{b}) \qquad \text{(Inducción)} \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b})
\end{aligned}$$

Caso disyunción. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \vee \gamma(\bar{x})$. Sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b}) &\iff \langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{b}) \text{ o } \langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{b}) \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \psi(\bar{b}) \text{ o } \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \gamma(\bar{b}) \qquad \text{(Inducción)} \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b})
\end{aligned}$$

Caso implicación. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \to \gamma(\bar{x})$. Sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b}) &\iff \text{Si } \langle \mathcal{A}_{i_{j_0}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{m'}}} \rangle \models_I \psi(\bar{b}) \text{ entonces } \langle \mathcal{A}_{i_{j_0}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{m'}}} \rangle \models_I \gamma(\bar{b}) \\
&\iff \text{Si } \langle \mathcal{B}_{i_{j_0}}, ..., \mathcal{B}_{i_{j_{m'}}} \rangle \models_I \psi(\bar{b}) \text{ entonces } \langle \mathcal{B}_{i_{j_0}}, ..., \mathcal{B}_{i_{j_{m'}}} \rangle \models_I \gamma(\bar{b}) \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b})
\end{aligned}$$

Donde la primera y segunda implicación hace referencia a toda sucesión creciente $\langle j_0, ...j_{m'} \rangle$ de naturales tal que $dp(\theta) \leq m' \leq m$. La segunda implicación es consecuencia de la inducción.

Caso negación. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\neg\psi(\bar{x})$. Sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b}) &\iff \langle \mathcal{A}_{i_{j_0}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{m'}}} \rangle \not\models_I \psi(\bar{b}) \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_{j_0}}, ..., \mathcal{B}_{i_{j_{m'}}} \rangle \not\models_I \psi(\bar{b}) \\
&\iff \langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \theta(\bar{b})
\end{aligned}$$

Donde la primera y segunda implicación hace referencia a toda sucesión creciente $\langle j_0, ...j_{m'} \rangle$ de naturales tal que $dp(\theta) \leq m' \leq m$. La segunda implicación es consecuencia de la inducción.

Caso existencial. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\exists y \psi(y, \bar{x})$. Sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$\Rightarrow$) Si $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \exists y \psi(y, \bar{b})$, por construcción existe $d \in \mathcal{B}_{i_1}$ tal que $\langle \mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$. Por inducción $\langle \mathcal{B}_{i_1}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$ y por lo tanto $\langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \exists y \psi(y, \bar{b})$.

$\Leftarrow$) Si $\langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \exists y \psi(y, \bar{b})$, por definición existe $d \in \mathcal{B}_{i_1}$ tal que $\langle \mathcal{B}_{i_1}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$. Por inducción $\langle \mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$ y por lo tanto $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \exists y \psi(y, \bar{b})$.

Caso universal. Supongamos que $\theta(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\, \psi(y, \bar{x})$. Sea $\langle i_0, ..., i_m \rangle$ una sucesión creciente de naturales tal que $dp(\theta) < m \leq n$, y sea $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0}$. Entonces:

$\Rightarrow$) Si $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \forall y \psi(y, \bar{b})$ entonces para todo $k > dp(\psi)$ tal que $m - k > 0$, y para todo $d \in \mathcal{A}_{i_{m-k}}$ se cumple que $\langle \mathcal{A}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$; en particular para todo $d \in \mathcal{B}_{i_{m-k}}$ se cumple que $\langle \mathcal{A}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$. Por inducción, $\langle \mathcal{B}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \psi(d, \bar{b})$ para todo $k > dp(\psi)$ tal que $m - k > 0$, y para todo $d \in \mathcal{B}_{i_{m-k}}$; por lo tanto $\langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \models_I \forall y \psi(y, \bar{b})$.

$\Leftarrow$) Si $\langle \mathcal{A}_{i_0}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \not\models_I \forall y \psi(y, \bar{b})$ entonces existe $k > dp(\psi)$ tal que $m - k > 0$, y existe $d \in \mathcal{A}_{i_{m-k}}$ tal que $\langle \mathcal{A}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \not\models_I \psi(d, \bar{b})$. Como $\bar{b} \subset \mathcal{B}_{i_0} \subset \mathcal{B}_{i_{m-k-1}}$, entonces, por construcción, existe $d' \in \mathcal{B}_{i_{m-k}}$ tal que $\langle \mathcal{A}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{A}_{i_m} \rangle \not\models_I \psi(d', \bar{b})$. Por inducción $\langle \mathcal{B}_{i_{m-k}}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \not\models_I \psi(d', \bar{b})$ y por lo tanto $\langle \mathcal{B}_{i_0}, ..., \mathcal{B}_{i_m} \rangle \not\models_I \forall y \psi(y, \bar{b})$.

□

La siguiente definición está motivada por las cotas del lema 2.4.6.

Definición 2.4.7. Sea ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia. Para todo $n, i \in \mathbb{N}$ definimos recursivamente $Col(n, i, \phi)$ de la siguiente manera:

$$Col(n, 0, \phi) = |\mathcal{L}|$$
$$Col(n, i+1, \phi) = 2^n |\phi| (|\mathcal{L}| Col(i, \phi)^k + |\phi| Col(i, \phi)^{dp(\phi)})^{dp(\phi)}$$

donde k es el máximo de las aridades de los símbolos de función.

Como en la sección 2.2, vamos a ubicar los $(\mathcal{L}, n)$-modelos que cumplen una $\mathcal{L}$-fórmula ϕ en subsucesiones en un conjunto finito. El siguiente hecho es consecuencia de la definición 2.2.18.

Hecho 2.4.8. *Sean $\vec{\mathcal{A}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ dos $(\mathcal{L}, n)$-modelos tales que existe un isomorfismo g entre ellos. Entonces para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(\bar{x})$ y para toda tupla $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$ se cumple que $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\vec{\mathcal{B}} \models_I \phi(g(\bar{a}))$.*

Con el cumplimiento en subsucesiones tenemos una versión más débil del corolario 2.2.20.

Corolario 2.4.9. *Sea ϕ una $\mathcal{L}$-sentencia tal que existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ que la cumple en subsucesiones. Entonces existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{D}}$ que cumple ϕ en subsucesiones, tal que el dominio de $\mathcal{D}_i$ es un subconjunto del segmento $[Col(n, i, \phi)]$ para todo $i \leq n$. Decimos que $\vec{\mathcal{D}}$ es el I-**colapso de** $\vec{\mathcal{A}}$ **según** ϕ.*

Demostración. Por el lema 2.4.6 existe un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$ que cumple ϕ en subsucesiones, tal que $\mathcal{B}_i$ tiene tamaño menor o igual que $Col(n, i, \phi)$. Recursivamente, podemos dotar un subconjunto $\mathcal{D}_i$ de $[Col(n, i, \phi)]$ con la misma estructura de $\mathcal{B}_i$ tal que $\mathcal{D}_i \subset_\phi \mathcal{D}_{i+1}$. Por el hecho 2.4.8, el $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{D}}$ cumple ϕ en subsucesiones.

□

Si imitamos la demostración del teorema 2.2.21 para obtener un resultado similar, entonces el nuevo árbol:

$$T = \left\{\vec{\mathcal{A}} \,|\, \vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, n)\text{-modelo que cumple } \phi \text{ en subsucesiones tal que } A_i \subset [Col(n, i, \phi)]\right\}$$

no necesariamente es de ramificación finita. Esto se debe a que un $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ que cumple ϕ en subsucesiones tal que $A_i \subset [Col(n, i, \phi)]$, puede estar en un nivel inferior del n-ésimo, dado que si $m < n$ entonces $Col(m, i, \phi) < Col(n, i, \phi)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Desconocemos si existe una manera de conseguir una cadena de $(\mathcal{L}, n)$-modelos con la definición 2.4.4. No obstante, vamos a ver que si existe una cadena creciente de $(\mathcal{L}, n)$-modelos que cumplen una $\mathcal{L}$-fórmula ϕ en subsucesiones, entonces la $\mathcal{L}$-estructura que resulta de la unión satisface ϕ. Este resultado lo conseguimos para el siguiente conjunto de fórmulas.

Definición 2.4.10. Vamos a definir el conjunto MP de la siguiente manera:

- Si $\phi(\bar{x})$ es fórmula atómica entonces $\phi(\bar{x}) \in$ MP.
- Si $\phi(\bar{x}) \in$ MP entonces $\neg\phi(\bar{x}) \in$ MP
- Si $\phi(\bar{x}), \psi(\bar{x}) \in$ MP entonces $\phi(\bar{x}) \vee \psi(\bar{x}), \phi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x}), \phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}) \in$ MP si y sólo si $dp(\phi) = dp(\psi)$.
- Si $\phi(y, \bar{x}) \in$ MP entonces $\exists y \phi(y, \bar{x}), \forall y \phi(y, \bar{x}) \in$ MP

Las $\mathcal{L}$-fórmulas que pertenecen al conjunto MP satisfacen la siguiente propiedad.

Lema 2.4.11. *Sean $\phi(\bar{x}) \in MP$ y $\vec{\mathcal{A}}$ un $(\mathcal{L}, dp(\phi) + 1)$-modelo. Entonces existen dos $\mathcal{L}$-fórmulas $\phi'(\bar{x}), \phi_N(\bar{x}) \in MP$ tales que*

1. *La negación sólo aparece en sus subfórmulas atómicas.*
2. $dp(\phi') = dp(\phi_N) = dp(\phi)$.
3. $\vdash (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi'(\bar{x})) \wedge (\neg\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi_N(\bar{x}))$.
4. $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi(\bar{a})$ *si y sólo si* $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi'(\bar{a})$, *para todo* $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$.
5. $\vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a})$ *si y sólo si* $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a})$, *para todo* $\bar{a} \subset \mathcal{A}_0$.

Demostración. La prueba se hace por inducción.

Caso atómico. Si $\phi(\bar{x})$ es una fórmula atómica entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \neg\phi(\bar{x})$. Claramente esas fórmulas cumplen $(1) - (3)$. Además, se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll}
\vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \mathcal{A}_1 \not\models \phi(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)} \\
 & \Leftrightarrow & \mathcal{A}_1 \models \phi_N(\bar{a}) & (\vdash \neg\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi_N(\bar{x})) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)}
\end{array}$$

Es inmediato que $\phi'(\bar{x})$ cumple la condición (4).

Caso conjunción. Si $\phi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \wedge \gamma(\bar{x})$ entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \psi'(\bar{x}) \wedge \gamma'(\bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \psi_N(\bar{x}) \vee \gamma_N(\bar{x})$. Por inducción esas fórmulas cumplen $(1) - (3)$. Además, se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll}
\vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \phi(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \psi(\bar{a}) \text{ o } \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \gamma(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)} \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\psi(\bar{a}) \text{ o } \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\gamma(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi_N(\bar{a}) \text{ o } \vec{\mathcal{A}} \models_I \gamma_N(\bar{a}) & \text{(Hipótesis de inducción)} \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)}
\end{array}$$

Es inmediato que $\phi'(\bar{x})$ cumple la condición (4).

Caso disyunción. Si $\phi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \vee \gamma(\bar{x})$ entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \psi'(\bar{x}) \vee \gamma'(\bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \psi_N(\bar{x}) \wedge \gamma_N(\bar{x})$. Por inducción esas fórmulas cumplen $(1) - (3)$. Además, se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll}
\vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \phi(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \psi(\bar{a}) \text{ y } \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \gamma(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)} \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\psi(\bar{a}) \text{ y } \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\gamma(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi_N(\bar{a}) \text{ y } \vec{\mathcal{A}} \models_I \gamma_N(\bar{a}) & \text{(Hipótesis de inducción)} \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)}
\end{array}$$

Es inmediato que $\phi'(\bar{x})$ cumple la condición (4).

Caso implicación. Si $\phi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \to \gamma(\bar{x})$ entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \psi'(\bar{x}) \to \gamma'(\bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \psi'(\bar{x}) \wedge \gamma_N(\bar{x})$. Por inducción esas fórmulas cumplen $(1) - (3)$. Se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll}
\vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \phi(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a}) \text{ y } \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \gamma(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)} \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a}) \text{ y } \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\gamma(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ y } \vec{\mathcal{A}} \models_I \gamma_N(\bar{a}) & \text{(Hipótesis de inducción)} \\
 & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & \text{(Definición 2.4.4)}
\end{array}$$

Es inmediato que $\phi'(\bar{x})$ cumple la condición (4).

Caso negación. Si $\phi(\bar{x}) = \neg\psi(\bar{x})$ entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \psi_N(\bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \psi'(\bar{x})$. Claramente esas fórmulas cumplen $(1)-(3)$. Además, se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll} \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \phi(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \neg\psi(\bar{a}) & (\text{Definición de } \phi) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi(\bar{a}) & (\text{Definición 2.4.4}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \psi'(\bar{a}) & (\text{Hipótesis de inducción}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & (\text{Definición}) \end{array}$$

Por inducción $\phi'(\bar{x})$ cumple las condición (4).

Caso existencial. Si $\phi(\bar{x}) = \exists y\, \psi(y, \bar{x})$ entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \exists y\, \psi'(y, \bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \forall y \psi_N(y, \bar{x})$. Por inducción esas fórmulas cumplen $(1)-(3)$. Además, se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll} \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \phi(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\ & \Leftrightarrow & \forall b \in \mathcal{A}_1(\vec{\mathcal{A}}^{\star} \not\models_I \psi(b, \bar{a})) & (\text{Definición 2.4.4}) \\ & \Leftrightarrow & \forall b \in \mathcal{A}_1(\vec{\mathcal{A}}^{\star} \models_I \neg\psi(b, \bar{a})) & (\vec{\mathcal{A}}^{\star} \text{ es un es un } (\mathcal{L}, dp(\psi)+1)\text{-modelo}) \\ & \Leftrightarrow & \forall b \in \mathcal{A}_1(\vec{\mathcal{A}}^{\star} \models_I \psi_N(b, \bar{a})) & (\text{Hipótesis de inducción}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \forall y \psi_N(y, \bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & (\text{Definición}) \end{array}$$

Es inmediato que $\phi'(\bar{x})$ cumple la condición (4).

Caso universal. Si $\phi(\bar{x}) = \forall y\, \psi(y, \bar{x})$ entonces consideremos como $\phi'(\bar{x}) = \forall y\, \psi'(y, \bar{x})$ y $\phi_N(\bar{x}) = \exists y \psi_N(y, \bar{x})$. Por inducción esas fórmulas cumplen $(1)-(3)$. Además, se tienen las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{rcll} \vec{\mathcal{A}} \models_I \neg\phi(\bar{a}) & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \not\models_I \phi(\bar{a}) & (\vec{\mathcal{A}} \text{ es un } (\mathcal{L}, dp(\phi)+1)\text{-modelo}) \\ & \Leftrightarrow & \exists b \in \mathcal{A}_1(\vec{\mathcal{A}}^{\star} \not\models_I \psi(b, \bar{a})) & (\text{Definición 2.4.4}) \\ & \Leftrightarrow & \exists b \in \mathcal{A}_1(\vec{\mathcal{A}}^{\star} \models_I \neg\psi(b, \bar{a})) & (\vec{\mathcal{A}}^{\star} \text{ es un es un } (\mathcal{L}, dp(\psi)+1)\text{-modelo}) \\ & \Leftrightarrow & \exists b \in \mathcal{A}_1(\vec{\mathcal{A}}^{\star} \models_I \psi_N(b, \bar{a})) & (\text{Hipótesis de inducción}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \exists y \psi_N(y, \bar{a}) & (\text{Definición 2.4.4}) \\ & \Leftrightarrow & \vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_N(\bar{a}) & (\text{Definición}) \end{array}$$

Es inmediato que $\phi'(\bar{x})$ cumple la condición (4).

□

El siguiente teorema muestra el resultado de completitud que, hasta el momento, se tiene para la noción de cumplimiento en subsucesiones.

Teorema 2.4.12 (Teorema débil de completitud)**. (ZFC)** *Sea ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula tal que $\phi \in MP$. Sea $\{\vec{\mathcal{A}}_n\}_{n>dp(\phi)}$ una sucesión creciente de $(\mathcal{L}, n)$-modelos tales que cumplan ϕ en subsucesiones. Entonces $\mathcal{M} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ satisface ϕ.*

Demostración. Veamos por inducción que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\psi(\bar{x})$ y para todo $\bar{a} \subset \mathcal{M}$, se cumple que si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$. Por el lema 2.4.11, vamos a realizar la prueba con $\psi'(\bar{x})$ y con $\psi_N(\bar{x})$ ya que, como $\vdash \psi'(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$, entonces $\mathcal{M} \models \psi'(\bar{a})$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Caso atómico. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es una fórmula atómica. Si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces, en particular, $\mathcal{A}_{i_1} \models_I \psi'(\bar{a})$. Como $\psi'(\bar{x})$ también es una fórmula atómica, se tiene que $\mathcal{M} \models \psi'(\bar{a})$. Por otro lado, si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi_N(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces, en particular, $\mathcal{A}_{i_1} \models \psi_N(\bar{a})$. Como $\psi_N(\bar{x})$ también es una fórmula atómica, se tiene que $\mathcal{M} \models \psi_N(\bar{a})$.

Caso conjunción. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\gamma(\bar{x}) \wedge \tau(\bar{x})$. Si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces, para toda sucesión creciente $\langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$ se cumple que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \text{ y } \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \tau'(\bar{a})$$

Por inducción, $\mathcal{M} \models \gamma'(\bar{a})$ y $\mathcal{M} \models \tau'(\bar{a})$, luego $\mathcal{M} \models \psi'(\bar{a})$. Por otro lado, dado que $\psi_N(\bar{x}) = \gamma_N(\bar{x}) \vee \tau_N(\bar{x})$, el mismo argumento de la disyunción demuestra el caso ψ_N.

Caso disyunción. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\gamma(\bar{x}) \vee \tau(\bar{x})$. Si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces, para toda sucesión creciente $\langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$ se cumple que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \text{ o } \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \tau'(\bar{a})$$

Vamos a definir una coloración sobre los conjuntos de tamaño $dp(\psi) + 1$ de $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de la siguiente manera:

$$f(i_{j_1}, ..., i_{j_{dp(\psi)+1}}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \\ 1 & \text{si} \quad \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \tau'(\bar{a}) \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad, por Ramsey existe una sucesión creciente $\{i'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i'_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i'_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

Por inducción, $\mathcal{M} \models \gamma'(\bar{a})$ y por lo tanto $\mathcal{M} \models \psi'(\bar{a})$. Por otro lado, dado que $\psi_N(\bar{x}) = \gamma_N(\bar{x}) \wedge \tau_N(\bar{x})$, el mismo argumento de la conjunción demuestra el caso ψ_N.

Caso implicación. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\gamma(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$. Si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces, para toda sucesión creciente $\langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$ se cumple que

$$\text{Si } \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \text{ entonces } \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \tau'(\bar{a}) \quad (2\text{-}8)$$

Supongamos que $\mathcal{M} \models \gamma'(\bar{a})$. Vamos a definir una coloración sobre los conjuntos de tamaño $dp(\psi) + 1$ de $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de la siguiente manera:

$$f(i_{j_1}, ..., i_{j_{dp(\phi)+1}}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma_N(\bar{a}) \\ 1 & \text{si} \quad \langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \end{cases}$$

Por Ramsey, y dado que $\mathcal{M} \models \gamma'(\bar{a})$, existe una sucesión creciente $\{i'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i'_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i'_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \gamma'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

Luego, por 2-8, se tiene que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i'_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i'_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \tau'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

Por lo tanto, por inducción, $\mathcal{M} \models \tau(\bar{a})$. En conclusión $\mathcal{M} \models \gamma'(\bar{a}) \to \tau'(\bar{a})$. Por otro lado, dado que $\psi_N(\bar{x}) = \gamma'(\bar{x}) \wedge \tau_N(\bar{x})$, el mismo argumento de la conjunción demuestra el caso ψ_N.

Caso negación. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\neg\gamma(\bar{x})$. Notemos que $\psi'(\bar{x}) = \gamma_N(\bar{x})$ y $\psi_N(\bar{x}) = \gamma'(\bar{x})$, luego por inducción se tiene el resultado.

Caso existencial. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y\gamma(y,\bar{x})$. Si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}}\rangle \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1}\rangle$$

entonces, para toda sucesión creciente $\bar{j} = \langle j_2, ..., j_{dp(\psi)+1}\rangle$ existe $b_{\bar{j}} \in \mathcal{A}_{i_1}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_1}, \mathcal{A}_{i_{j_2}} ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}}\rangle \models_I \gamma'(b_{\bar{j}}, \bar{a})$$

Como $\mathcal{A}_{i_1}$ es finito, existe $b \in \mathcal{A}_{i_1}$ y una sucesión creciente $\{i'_n\}_{n\geq 2}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_1}, \mathcal{A}_{i'_{j_2}} ..., \mathcal{A}_{i'_{j_{dp(\psi)+1}}}\rangle \models_I \gamma'(b, \bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_2, ..., j_{dp(\psi)+1}\rangle$$

Por inducción $\mathcal{M} \models \gamma'(b,a)$, por lo tanto $\mathcal{M} \models \exists y\gamma'(y,a)$. Por otro lado, dado que $\psi_N(\bar{x}) = \forall y\gamma_N(y,\bar{x})$, el mismo argumento del caso universal demuestra el caso ψ_N.

Caso universal. Supongamos que $\psi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\gamma(y,\bar{x})$ y existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}}\rangle \models_I \psi'(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1}\rangle$$

Sea $b \in \mathcal{M}$. Existe $i_k > i_0$ tal que $b \in \mathcal{A}_{i_k}$. Consideremos la sucesión $\{i'_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{i_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que para toda sucesión creciente $\bar{j} = \langle j_2, ..., j_{dp(\psi)+1}\rangle$ se cumple lo siguiente.

$$\langle \mathcal{A}_{i_k}, \mathcal{A}_{i'_{j_2}} ..., \mathcal{A}_{i'_{j_{dp(\psi)+1}}}\rangle \models_I \gamma'(b, \bar{a})$$

Por inducción $\mathcal{M} \models \gamma'(b,a)$. Como b era arbitrario, se cumple que $\mathcal{M} \models \forall y\gamma'(y,a)$. Por otro lado, dado que $\psi_N(\bar{x}) = \exists y\gamma_N(y,\bar{x})$, el mismo argumento del caso existencial demuestra el caso ψ_N.

Volviendo al teorema, dado que todos los $(\mathcal{L},n)$-modelos cumplen ϕ en subsucesiones, por las proposición 2.4.5 se tiene que

$$\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\phi)+1}}}\rangle \models_I \phi \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\phi)+1}\rangle$$

Por el resultado anterior obtenemos que $\mathcal{M} \models \phi$.

$\square$

Sospechamos que el teorema 2.4.12 vale para todas las $\mathcal{L}$-fórmulas y no sólo para las del conjunto MP. Pensamos que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(\bar{x})$ existe una $\phi_M(\bar{x}) \in$ MP tal que $\vdash \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi_M(\bar{x})$ y, para todo $(\mathcal{L},n)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$, si $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi(\bar{a})$ entonces $\vec{\mathcal{A}} \models_I \phi_M(\bar{a})$.

El principal problema radica en que, dado que la demostración del teorema 2.4.12 usa el teorema de Ramsey, entonces no se puede bajar directamente a ACA_0[2]. De hecho, si denotamos como DC(k) la afirmación:

[2] ACA_0 sólo demuestra el teorema de Ramsey para números estándar. Ver lema III.7.4 de [13].

Sea $\psi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula tal que $\psi \in MP$ y $dp(\phi) = k$. Sea $\bar{a} \subset \mathcal{M}$. Si existe una sucesión creciente de naturales $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}_{i_0}, \mathcal{A}_{i_{j_1}}, ..., \mathcal{A}_{i_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle \models_I \psi(\bar{a}) \text{ para toda sucesión creciente } \langle j_1, ..., j_{dp(\psi)+1} \rangle$$

entonces $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

la demostración del teorema 2.4.12 implica que

$$\mathrm{ACA}_0 \vdash \mathrm{DC}(k) \to \mathrm{DC}(k+1)$$

Sin embargo, como $\mathrm{DC}(k)$ tiene un cuantificador de segundo orden, no lo podemos generalizar para todo k, pues en ACA_0 inducción sólo se aplica a fórmulas de primer orden.

En conclusión, **todavía desconocemos si se puede usar la definición 2.4.4 en la prueba de Shelah de Paris-Harrington**.

3 Relación con *forcing*

A medida que íbamos estudiando los conceptos de $(\mathcal{L}, n)$-modelo y *cumplimiento* en el capítulo 2, nos dimos cuenta que tienen cierta similitud con los modelos de Kripke y la noción de *forcing*. En este capítulo vamos a estudiar si realmente esas nociones tienen una relación. Dada la variedad de *forcings* que existen, hemos decidido restringir nuestra comparación a dos: el forcing de Kripke y el forcing débil; sobre todo porque las lógicas internas de estos son la lógica intuicionista y la lógica clásica de primer orden, respectivamente. Así, también podemos medir qué tan cercana es la noción de cumplimiento de estas lógicas.

Para empezar, vamos a repasar en las secciones 3.1 y 3.2 los temas de semántica de Kripke y forcing débil. Presentamos, además de la parte matemática, las motivaciones originales de cada concepto; motivos que después usaremos como argumentos en la sección 3.3. En ésta se encuentra, a modo de ensayo, los resultados de nuestra investigación.

3.1. Semántica de Kripke

Primero que todo vamos a recordar la semántica de Kripke. Para nuestros propósitos vamos a presentar dos definiciones: la primera es la versión original, que aparece en la mayoría de los textos, la cual trabaja puramente con la sintaxis; y la segunda es una versión más moderna que ya trabaja con estructuras clásicas de primer orden. Para distinguirlas llamamos a la primera **sistema de Kripke** y a la segunda **modelo de Kripke**. Aunque realmente las dos nociones son equivalentes (a partir de un sistema puedo construir un modelo, y viceversa), sus presentaciones tienen características particulares que nos ayudarán a la comparación con los $(\mathcal{L}, n)$-modelos.

Tradicionalmente, al trabajar con la semántica de Kripke, no se considera el símbolo de la igualdad dentro del lenguaje; por lo tanto, sólo se manejan símbolos de relación y constantes. No obstante, como nuestra objetivo es comparar esta noción con los $(\mathcal{L}, n)$-modelos, vamos a presentar la noción de semántica de Kripke usando el lenguaje clásico de prime orden. Las siguientes definiciones y teoremas son sacados de [8].

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Un **$\mathcal{L}$-sistema de Kripke** es una tupla $\mathcal{A} = (P, \leq, T, A)$ donde:

- $(P, \leq)$ es un orden parcial y se denomina *el marco de* $\mathcal{A}$. Los elementos de P se conocen como *nodos*.
- T es una función que a cada nodo $\alpha \in P$ le asigna un conjunto de $\mathcal{L}$-términos cerrados $T(\alpha)$:
$$\begin{array}{rcc} T : P & \to & \mathcal{P}(\mathrm{Term}(\mathcal{L})) \\ \alpha & \mapsto & T(\alpha) \end{array}$$
Además, se cumple que si $\alpha \leq \beta$ entonces $T(\alpha) \subseteq T(\beta)$.
- A es una función que a cada nodo $\alpha \in P$ le asigna un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas cerradas $A(\alpha)$:
$$\begin{array}{rcc} A : P & \to & \mathcal{P}(\mathrm{Atom}(\mathcal{L})) \\ \alpha & \mapsto & A(\alpha) \end{array}$$
tal que para toda fórmula $\phi \in A(\alpha)$, todo ϕ-término está en $T(\alpha)$. Además, si $\alpha \leq \beta$ entonces $A(\alpha) \subseteq A(\beta)$.

Gráficamente, como en la figura **3-1**, los nodos los representamos como círculos; los términos de cada nodo los colocamos dentro de cada círculo y las fórmulas atómicas encima de ellos.

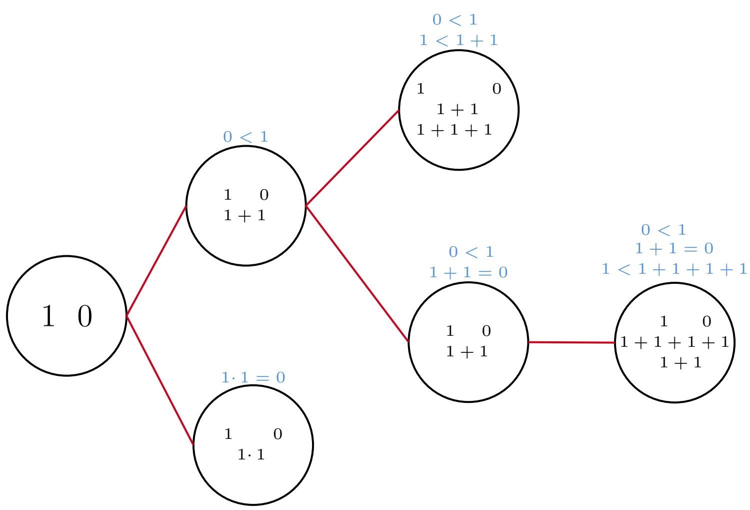

Figura 3-1: Un $\mathcal{L}_{PA}$-Sistema de Kripke.

También se puede representar la información que tiene un nodo α por medio de una $\mathcal{L}$-estructura parcial que satisface únicamente las fórmulas $A(\alpha)$. Esto se conoce como modelo de Kripke.

Definición 3.1.2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Un **$\mathcal{L}$-modelo de Kripke** es una tupla $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in P})$ donde:

- $(P, \leq)$ es un orden parcial y se denomina *el marco de* $\mathcal{A}$. Los elementos de P se conocen como *nodos*.

- A cada nodo $\alpha \in P$ se le asigna una $\mathcal{L}$-estructura parcial $\mathcal{A}_\alpha$.
- Para todo $\alpha, \beta \in P$ tales que $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathcal{A}_\alpha \subseteq^+ \mathcal{A}_\beta$, que significa que $A_\alpha \subseteq A_\beta$, $F^{\mathcal{A}_\alpha} \subseteq F^{\mathcal{A}_\beta}$ y $R^{\mathcal{A}_\alpha} \subseteq R^{\mathcal{A}_\beta}$ para todo símbolo de función F y para todo símbolo de relación R.

Definición 3.1.3. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura parcial. Denotamos $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ al lenguaje que consiste en agregar nuevas constantes, una por cada elemento de $\mathcal{A}$, a $\mathcal{L}$.

Las nociones de sistema de Kripke y modelo de Kripke son equivalentes de la siguiente forma.

Hecho 3.1.4. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Dado un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in P})$ existe un $\mathcal{L}(\bigcup_{\alpha \in P} \mathcal{A}_\alpha)$-sistema de Kripke $\mathcal{A} = (P, \leq, T, A)$ tal que para todo $\alpha \in P$ se cumple que*

$$A(\alpha) = \{\phi \,|\; \phi \text{ es } \mathcal{L}\left(\bigcup_{\alpha \in P} \mathcal{A}_\alpha\right)\text{-atómica cerrada y } \mathcal{A}_\alpha \models \phi\}$$

Por otro lado, dado un $\mathcal{L}$-sistema de Kripke $\mathcal{A} = (P, \leq, T, A)$ existe un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in P})$ tal que para todo $\alpha \in P$ se cumple que

$$\mathcal{A}_\alpha = \{t^{\mathcal{A}_\alpha} \,|\, t \in T(\alpha)\}$$

Una de las maneras de estudiar la veracidad de la información que contiene un modelo de Kripke (o un sistema de kripke) es por medio de la noción de *forcing.*

Definición 3.1.5. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in F})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke. Sean $\alpha \in P$ y $\phi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos de $\mathcal{A}_\alpha$ de la misma longitud de $\bar{x}$. Decimos que α **fuerza** $\phi(\bar{a})$ —lo denotamos $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$— si:

Caso atómico. Si $\phi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\mathcal{A}_\alpha \models \phi(\bar{a})$.

Caso conjunción. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \wedge \tau(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\alpha \Vdash \psi(\bar{a})$ y $\alpha \Vdash \tau(\bar{a})$.

Caso disyunción. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \vee \tau(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\alpha \Vdash \psi(\bar{a})$ o $\alpha \Vdash \tau(\bar{a})$.

Caso negación. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\neg\psi(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ se cumple que $\beta \nVdash \psi(\bar{a})$.

Caso implicación. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ se cumple que, $\beta \Vdash \psi(\bar{a})$ implica $\beta \Vdash \tau(\bar{a})$.

Caso existencial. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si existe $b \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $\alpha \Vdash \psi(\bar{a}, b)$.

Caso universal. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y \psi(\bar{x}, y)$, entonces $\alpha \Vdash \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ y para todo $b \in \mathcal{A}_\beta$ se cumple que $\beta \Vdash \psi(\bar{a}, b)$.

Vamos a explicar la definición 3.1.5. Intuitivamente, $\alpha \Vdash \phi$ significa que en todo instante $\beta \geq \alpha$ la fórmula ϕ es considerada como verdadera. Matemáticamente, lo anterior se expresa en el siguiente hecho.

Hecho 3.1.6. *Sea $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in F})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke. Sean $\alpha \in P$ y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Se cumple que, si $\alpha \Vdash \phi$ entonces $\beta \Vdash \phi$ para todo $\beta \geq \alpha$.*

Los casos de la negación, la implicación y el universal de la definición 3.1.5 están diseñados para que se pueda demostrar el hecho 3.1.6. Vamos a usar la siguiente notación cuando todos los nodos de un modelo de Kripke fuerzan una fórmula.

Definición 3.1.7. Sea $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in F})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Decimos que $\mathcal{A}$ **fuerza a** ϕ —lo denotamos como $\mathcal{A} \Vdash \phi$— si para todo nodo $\alpha \in P$ se cumple que $\alpha \Vdash \phi$.

Veamos un ejemplo que muestra que la noción de forcing de Kripke es distinta a la relación de satisfacción clásica.

Ejemplo 3.1.8. Consideremos $\mathcal{L} = (P, \{c_i\}_{i=0}^{\infty})$ un lenguaje de primer orden donde P es un símbolo de predicado unario y $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ un conjunto contable de constantes. Sea $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \leq, \{\mathcal{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke tal que $\mathcal{A}_i$ satisface que $\{c_0^{\mathcal{A}_i}, ..., c_i^{\mathcal{A}_i}\} = P^{\mathcal{A}_i}$. Entonces, para todo $i \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$i \nVdash P(c_{i+1}) \text{ y } i + 1 \Vdash P(c_{i+1})$$

luego

$$i \nVdash P(c_{i+1}) \vee \neg P(c_{i+1})$$

por lo tanto

$$i \nVdash \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$$

Como lo anterior se cumple para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$i \Vdash \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$$

En conclusión

$$\mathcal{A} \Vdash \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$$

El ejemplo 3.1.8 muestra un modelo de Kripke que fuerza la negación del tercio excluido; axioma vital de la lógica clásica. De hecho, la noción de modelo de Kripke se construyó, originalmente, para dar una semántica a la lógica intuicionista. Para enunciar el teorema de completitud, necesitamos las siguientes notaciones.

Definición 3.1.9. Sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y γ una $\mathcal{L}$-fórmula.

- Denotamos como $\Phi \vdash_I \gamma$ si existe una deducción intuicionista (ver [8], capítulo 9, sección 5) de γ a partir de Φ.
- Denotamos como $\Phi \Vdash \gamma$ si, para todo modelo de Kripke $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in F})$ y todo nodo $\alpha \in F$, si $\alpha \Vdash \Phi$ entonces $\alpha \Vdash \gamma$.

Teorema 3.1.10 (Teorema de completitud para la noción de forcing)**.** *Sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Se cumple que*

$$\Phi \vdash_I \phi \text{ si y sólo si } \Phi \Vdash \phi$$

*Decimos que la **lógica interna** del forcing 3.1.5 es la lógica intuicionista.*

Demostración. Ver [8], capítulo 9, sección 10. □

Ejemplo 3.1.11. Veamos que la lógica intuicionista, en general, no cumple el tercio excluido. Consideremos como $\mathcal{L} = (P, \{c_i\}_{i=0}^{\infty})$ un lenguaje de primer orden donde P es un símbolo de predicado unario y $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ un conjunto contable de constantes. Si $\vdash_I \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$, por el teorema de completitud se tendría que $\Vdash \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$; sin embargo, el modelo $\mathcal{A}$ del ejemplo 3.1.8 satisface que $\mathcal{A} \Vdash \neg\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$. Por lo tanto $\nvdash_I \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$.

Para más información de la semántica de Kripke de la lógica intuicionista ver [8] y [9].

3.2. Forcing débil

Ahora vamos a ver una versión del forcing cuya lógica interna es la lógica de primer orden. Podemos llegar a esta noción por medio de la traducción de Gödel–Gentzen.

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\phi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula. La traducción de Gödel–Gentzen de $\phi(\bar{x})$, que denotamos como $\phi^N(\bar{x})$, se define inductivamente de la siguiente manera:

Caso atómico. Si $\phi(\bar{x})$ es atómica, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\neg\neg\phi(\bar{x})$.

Caso conjunción. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \wedge \gamma(\bar{x})$, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\psi^N(\bar{x}) \wedge \gamma^N(\bar{x})$.

Caso disyunción. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \vee \gamma(\bar{x})$, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\neg(\neg\psi^N(\bar{x}) \wedge \neg\gamma^N(\bar{x}))$.

Caso implicación. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \to \gamma(\bar{x})$, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\psi^N(\bar{x}) \to \gamma^N(\bar{x})$.

Caso negación. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\neg\psi(\bar{x})$, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\neg\psi^N(\bar{x})$.

Caso universal. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y \psi(y, \bar{x})$, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\forall y \psi^N(y, \bar{x})$.

Caso existencial. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y \psi(y, \bar{x})$, entonces definimos $\phi^N(\bar{x})$ como $\neg\forall y \neg\psi^N(y, \bar{x})$.

La traducción de Gödel–Gentzen sirve para sumergir sintácticamente la lógica clásica dentro de la lógica intuicionista como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Se cumple que*

$$\Phi \vdash \phi \text{ si y sólo si } \Phi^N \vdash_I \phi^N$$

Demostración. Ver [8], capítulo 9, sección 11. □

Así mismo, también podemos sumergir semánticamente la lógica clásica dentro de la lógica intuicionista, dando origen a una noción de forcing para la lógica clásica.

Definición 3.2.3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in F})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke. Sea ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Decimos que $\mathcal{A}$ **fuerza débilmente** ϕ si $\mathcal{A} \Vdash \phi^N$. Denotamos la relación anterior como $\mathcal{A} \Vdash_C \phi$.

Para saber exactamente cómo trabaja el *forcing débil* vamos a desenvolver su significado en cada una de las fórmulas. Sea $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in F})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke. Sean $\alpha \in P$ y $\phi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos de $\mathcal{A}_\alpha$ de la misma longitud de $\bar{x}$. De manera inductiva $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si:

Caso atómico. Si $\phi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ existe $\gamma \geq \beta$ tal que $\mathcal{A}_\gamma \models \phi(\bar{a})$.

Caso conjunción. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \wedge \tau(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\alpha \Vdash_C \psi(\bar{a})$ y $\alpha \Vdash_C \tau(\bar{a})$.

Caso disyunción. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \vee \tau(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ existe $\gamma \geq \beta$ tal que $\gamma \Vdash_C \psi(\bar{a})$ o $\gamma \Vdash_C \tau(\bar{a})$.

Caso negación. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\neg\psi(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ se cumple que $\beta \nVdash_C \psi(\bar{a})$.

Caso implicación. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\psi(\bar{x}) \to \tau(\bar{x})$, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ se cumple que, $\beta \Vdash_C \psi(\bar{a})$ implica $\beta \Vdash_C \tau(\bar{a})$.

Caso existencial. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\exists y \psi(\bar{x}, y)$, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ existe $\gamma \geq \beta$ tal que existe $b \in \mathcal{A}_\gamma$ que cumple que $\gamma \Vdash_C \psi(\bar{a}, b)$.

Caso universal. Si $\phi(\bar{x})$ es de la forma $\forall y\psi(\bar{x}, y)$, entonces $\alpha \Vdash_C \phi(\bar{a})$ si y sólo si para todo $\beta \geq \alpha$ y para todo $b \in \mathcal{A}_\beta$ se cumple que $\beta \Vdash_C \psi(\bar{a}, b)$.

Como se puede apreciar, "$\Vdash_C$" debilita las condiciones de "$\Vdash$" en los casos de fórmulas atómicas, disyuntivas y existenciales: en vez de verificar en el mismo nodo, se pide que eventualmente la información sea verdadera. Increíblemente, sólo este cambio hace que la lógica interna de la noción de forcing débil sea la lógica clásica.

Teorema 3.2.4 (Teorema de Completitud para la noción de forcing débil)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea Φ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Se cumple que*

$$\Phi \vdash \phi \text{ si y sólo si } \Phi \Vdash_C \phi$$

Demostración. El resultado es consecuencia inmediata de teoremas anteriores.

$$\begin{aligned} \Phi \vdash \phi \iff& \Phi^N \vdash_I \phi^N && \text{(Teorema 3.2.2)} \\ \iff& \Phi^N \Vdash \phi^N && \text{(Teorema 3.1.10)} \\ \iff& \Phi \Vdash_C \phi && \text{(Definición 3.2.3)} \end{aligned}$$

□

Una importante consecuencia del teorema 3.2.4 lo ilustra la siguiente proposición.

Proposición 3.2.5 (Genericidad)**.** *Sea $\mathcal{A} = (P, \leq, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in F})$ un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke. Sean ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula y $p \in P$. Se cumple que*

$$p \Vdash_C \phi \text{ si y sólo si para todo } q \geq p \text{ existe } r \geq q \text{ tal que } r \Vdash_C \phi$$

Demostración. Dado que $\vdash \neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$, por el teorema 3.2.4, se tiene que $\Vdash_C \neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$. Luego para todo $p \in P$ se cumple que $p \Vdash_C \phi$ si y sólo si $p \Vdash_C \neg\neg\phi$. Notemos que $p \Vdash_C \neg\neg\phi$ si y sólo si para todo $q \geq p$ existe $r \geq q$ tal que $r \Vdash_C \phi$.

□

La proposición 3.2.5 muestra que, a diferencia de la proposición 3.1.6, el forcing débil verifica la información eventualmente para poderla declarar verdadera. Curiosamente esto viene de la doble negación; cosa que no ocurre en la lógica intuicionista. Recomendamos leer [12] donde se encuentra una interesante discusión sobre varias versiones del forcing.

3.3. Forcing *versus* cumplimiento

Las nociones de modelo de Kripke y *forcing*, presentadas en la sección 3.1, y las nociones de $(\mathcal{L}, n)$-modelo y *cumplimiento*, desarrolladas en la sección 2.2, tienen cierto parecido que nos hacen pensar que pueden estar relacionadas de alguna manera. En esta sección vamos a estudiar si realmente existe esa relación. Para empezar, el siguiente hecho nos dice cómo están conectados los $(\mathcal{L}, n)$-modelos y los modelos de Kripke.

Hecho 3.3.1. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Si $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ es un $(\mathcal{L}, n)$-modelo, entonces la tupla $([0, n], \leq, \vec{\mathcal{A}})$ es un modelo de Kripke.*

Observación 3.3.2. Según el contexto vamos a interpretar $\vec{\mathcal{A}}$ como un $(\mathcal{L}, n)$-modelo o como un modelo de Kripke. En el último caso, vamos a denotar como $\mathcal{A}_i$ al nodo i.

En pocas palabras, el hecho 3.3.1 nos dice que todo $(\mathcal{L}, n)$-modelo es un $\mathcal{L}$-modelo de Kripke finito con orden lineal. Sin embargo, el recíproco no es cierto dado que los nodos de los $\mathcal{L}$-modelos de Kripke no necesariamente se clausuran bajo símbolos de función. De hecho, no tienen ninguna condición estructural; sólo se pide que la información se acumule de un nodo al siguiente. Como se menciona en [10], los $\mathcal{L}$-modelos de Kripke son **modelos del conocimiento** ya que representan la manera de cómo éste se da: a partir de una sucesión de acontecimientos. Esto permite que, según la relación de satisfacción que se defina, se puedan usar los $\mathcal{L}$-modelos de Kripke como la semántica de varias lógicas. Ya los vimos en las secciones 3.1 y 3.2 como modelos de la lógica intuicionista y la lógica de primer orden. Por esa versatilidad, los $(\mathcal{L}, n)$-modelos también son $\mathcal{L}$-modelos de Kripke; no obstante, por las condiciones de clausura ya tienen una interpretación más concreta: **aproximaciones de estructuras de primer orden**.

Notemos que el hecho 3.3.1 implica que el forcing es una relación de satisfacción para los $(\mathcal{L}, n)$-modelos. Veamos si tiene alguna relación con la noción de cumplimiento. Recordemos que éste comprueba la veracidad de una fórmula en los nodos donde se puedan calcular sus términos. El forcing la comprueba en todos. Por lo anterior, se tiene que **cumplimiento no implica forcing**. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.3.3. Consideremos como $\mathcal{L} = (P)$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado unario. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$ el $(\mathcal{L}, 2)$-modelo tal que

$$\begin{array}{cc} A_0 = \{\alpha\} & A_1 = A_2 = \{\alpha, \beta\} \\ P^{\mathcal{A}_0} = \emptyset & P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{\beta\} \end{array}$$

La figura **3-2** muestra el $(\mathcal{L}, 2)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ como una estructura de Kripke.

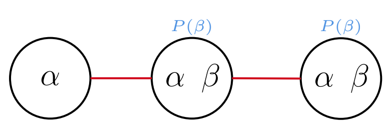

Figura 3-2: Estructura de Kripke del $(\mathcal{L}, 2)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$

Dado que $\mathcal{A}_0 \nVdash P(\alpha)$ entonces $\mathcal{A}_0 \nVdash \exists x P(x)$ y por lo tanto

$$\vec{\mathcal{A}} \nVdash \exists x P(x)$$

Por otro lado, dado que $\beta \in \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2 \models P(\beta)$ entonces

$$\vec{\mathcal{A}} \models \exists x P(x)$$

El ejemplo 3.3.3 muestra lo exigente que es el forcing al pedir los testigos en el mismos nodo; en cambio, el cumplimiento espera hasta el nodo siguiente. Incluso, en el contexto proposicional ocurre lo mismo, como lo muestra el ejemplo 3.3.4.

Ejemplo 3.3.4. Sea $\vec{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \rangle$ el $(\mathcal{L}_{PA}, 1)$-modelo tal que

$$\mathcal{B}_0 = \{0, 1, 2\} \qquad \mathcal{B}_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Vamos a enfocarnos en la fórmula atómica $\theta(x) : x + 1 = 1 + 1 + 1$. La figura **3-3** muestra el $(\mathcal{L}_{PA}, 1)$-modelo $\mathcal{B}$ como una estructura de Kripke.

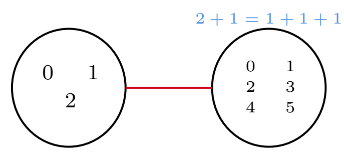

Figura 3-3: Estructura de Kripke del $(\mathcal{L}_{PA}, 1)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$

Notemos que $\mathcal{B}_0 \not\Vdash 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, por lo tanto $\vec{\mathcal{B}} \not\Vdash 2 + 1 = 1 + 1 + 1$. Sin embargo, dado que $\mathcal{B}_1 \models 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ entonces $\vec{\mathcal{B}} \models 2 + 1 = 1 + 1 + 1$. El ejemplo 3.3.4 ilustra lo mencionábamos hace poco: $\mathcal{B}$ no fuerza $2 + 1 = 1 + 1 + 1$ dado que no todos los nodos consideran que esa fórmula es verdadera; en cambio, $\mathcal{B}$ sí cumple $2 + 1 = 1 + 1 + 1$ porque es verdadera en los nodos donde ya se pueden calcular sus términos.

Con respecto al recíproco, veamos que **forcing implica cumplimiento**.

Proposición 3.3.5. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\phi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en forma normal prenexa. Para todo $\bar{a} \subseteq \mathcal{A}_0$ se cumple que*

$$\text{Si } \vec{\mathcal{A}} \Vdash \phi(\bar{a}) \text{ entonces } \vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a})$$

Demostración. La demostración se hace por inducción en fórmulas.

Caso sin cuantificadores. Sea $\phi(\bar{x})$ una fórmula sin cuantificadores. Si $\vec{\mathcal{A}} \Vdash \phi(\bar{a})$ por definición $\mathcal{A}_0 \models \phi(\bar{a})$. Como $\phi(\bar{x})$ no tiene cuantificadores entonces $\mathcal{A}_1 \models \phi(\bar{a})$. Por el hecho 2.2.12 se cumple que $\vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a})$.

Caso existencial. Sea $\phi(\bar{x})$ una fórmula de la forma $\exists y \psi(\bar{x}, y)$. Si $\vec{\mathcal{A}} \Vdash \phi(\bar{a})$, entonces existe $c \in \mathcal{A}_0$ tal que $\mathcal{A}_0 \Vdash \psi(\bar{a}, c)$. Por el hecho 3.1.6, se cumple que $\mathcal{A}_i \Vdash \psi(\bar{a}, c)$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$, por lo tanto $\vec{\mathcal{A}} \Vdash \psi(\bar{a}, c)$. Por hipótesis de inducción, $\vec{\mathcal{A}} \models \psi(\bar{a}, c)$. Por la proposición 2.2.14 se tiene que $\mathcal{A}^\star \models \psi(\bar{a}, c)$, luego $\vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a})$.

Caso universal. Sea ϕ una fórmula de la forma $\forall y \psi(\bar{x}, y)$. Si $\vec{\mathcal{A}} \Vdash \phi(\bar{a})$, entonces para todo $i \in \{0, ..., n\}$, para todo $c \in \mathcal{A}_i$ y para todo $j > i$ se cumple que $\mathcal{A}_j \Vdash \psi(\bar{a}, c)$. Por hipótesis de inducción, para todo $k > dp(\psi)$ tal que $n - k > 0$, y para todo $c \in \mathcal{A}_{n-k}$ se cumple que $\mathcal{A}^{[n-k,n]} \models \psi(\bar{a}, c)$. En conclusión $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

□

Dado que el cumplimento sólo está definido para fórmulas normales prenexas, la proposición 3.3.5 no se puede extender para todo el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Ya que estamos trabajando con lógicas no clásicas, no es cierto que toda fórmula es equivalente a una en forma normal prenexa. El ejemplo 3.3.6 ilustra esta situación.

Ejemplo 3.3.6. Consideremos como $\mathcal{L} = (P)$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado unario. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \rangle$ el $(\mathcal{L}, 3)$-modelo tal que

$$\begin{array}{ll} A_0 = A_1 = \{\alpha\} & \quad A_2 = A_3 = \{\alpha, \beta\} \\ P^{\mathcal{A}_0} = P^{\mathcal{A}_1} = \emptyset & \quad P^{\mathcal{A}_2} = P^{\mathcal{A}_3} = \{\beta\} \end{array}$$

La figura **3-4** muestra el $(\mathcal{L}, 3)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ como una estructura de Kripke.

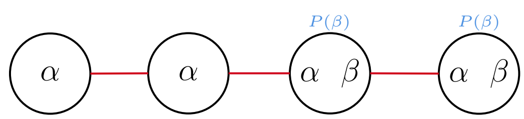

Figura 3-4: Estructura de Kripke del $(\mathcal{L}, 3)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$

Dado que $\mathcal{A}_3 \Vdash P(\beta)$, entonces $\mathcal{A}_i \nVdash \forall x \neg P(x)$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Por lo tanto

$$\vec{\mathcal{A}} \Vdash \neg \forall x \neg P(x)$$

Además, como $\mathcal{A}_0 \nVdash P(\alpha)$ entonces $\mathcal{A}_0 \nVdash \exists x P(x)$ y por lo tanto

$$\vec{\mathcal{A}} \nVdash \exists x P(x)$$

Notemos que $\exists x P(x)$ es la forma normal prenexa de $\neg \forall x \neg P(x)$. Por otro lado, dado que $\mathcal{A}_2 \not\models P(\alpha)$ entonces

$$\vec{\mathcal{A}} \not\models \exists x P(x)$$

Incluso, dado que $\mathcal{A}^{[0,2]} \models \forall x \neg P(x)$, se tiene que

$$\vec{\mathcal{A}} \not\models_I \neg \forall x \neg P(x)$$

Tal vez es posible extender la noción de cumplimiento para todas las $\mathcal{L}$-fórmulas y obtener una versión más general de la proposición 3.3.5. Sin embargo, el ejemplo 3.3.6 muestra que, en general, **forcing no implica cumplimiento en subsucesiones**, que es, hasta el momento, la noción más cercana al cumplimiento que trabaja con todas las $\mathcal{L}$-fórmulas (ver sección 2.4.2).

El hecho 3.3.1 también implica que el forcing débil es una relación de satisfacción para los $(\mathcal{L}, n)$-modelos. Veamos qué relación tiene con el cumplimiento. Recordemos que éste empieza a verificar la validez de una fórmula desde el nodo sucesor; el forcing débil espera, incluso hasta el último nodo. Esto crea situaciones en donde **forcing débil no implica cumplimiento**.

Ejemplo 3.3.7 (Continuación ejemplo 3.3.6)**.** Consideremos como $\mathcal{L} = (P)$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado unario. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \rangle$ el mismo $(\mathcal{L}, 3)$-modelo del ejemplo 3.3.6. Ya vimos que

$$\vec{\mathcal{A}} \not\models \exists x P(x)$$

Además, dado que $\beta \in \mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3 \models P(\beta)$ entonces

$$\vec{\mathcal{A}} \not\models \forall x \neg P(x)$$

Notemos que la fórmula $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ tiene dos formas normales prenexas. Demostremos que:

- $\vec{\mathcal{A}} \not\models \exists x \forall y (P(x) \vee \neg P(y))$: Dado que no existe un elemento en $\mathcal{A}_1$ que esté en el conjunto P; en cambio, ya en $\mathcal{A}_2$ ya hay elementos en P.
- $\vec{\mathcal{A}} \models \forall y \exists x (P(x) \vee \neg P(y))$: Ya que para todo $a \in \mathcal{A}_1$ existe $a \in \mathcal{A}_2$ (el mismo elemento) tal que $\mathcal{A}_3 \models P(a) \vee \neg P(a)$.

En cambio, dado que $\vdash \exists x \forall y (P(x) \vee \neg P(y))$, por el teorema 3.2.4 obtenemos que

$$\vec{\mathcal{A}} \Vdash_C \exists x \forall y (P(x) \vee \neg P(y))$$

Con respecto al recíproco, la proposición 3.3.8 muestra que **cumplimiento implica forcing débil en fórmulas normales prenexas existenciales**.

Proposición 3.3.8. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_0, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ un $(\mathcal{L}, n)$-modelo y $\phi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en forma normal prenexa con solo cuantificadores existenciales. Para todo $\bar{a} \subseteq \mathcal{A}_0$ Se cumple que*

$$\vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a}) \Rightarrow \vec{\mathcal{A}} \Vdash_C \phi(\bar{a})$$

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre fórmulas.

Caso sin cuantificadores. Sea $\phi(\bar{x})$ una fórmula sin cuantificadores. Si $\vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a})$, entonces por el hecho 2.2.12 se tiene que $\mathcal{A}_1 \models \phi(\bar{a})$. Es sencillo comprobar que $\mathcal{A}_1 \Vdash_C \phi(\bar{a})$. Por monotonicidad $\mathcal{A}_i \Vdash_C \phi(\bar{a})$ para todo $i \in \{1, .., n\}$. Por la proposición 3.2.5 se cumple que $\mathcal{A}_0 \Vdash_C \phi(\bar{a})$ y por lo tanto $\vec{\mathcal{A}} \Vdash_C \phi(\bar{a})$.

Caso existencial. Sea $\phi(\bar{x})$ una fórmula de la forma $\exists y \psi(y, (\bar{x}))$. Si $\vec{\mathcal{A}} \models \phi(\bar{a})$, entonces existe $b \in \mathcal{A}_1$ tal que $\vec{\mathcal{A}}^\star \models \psi(b, \bar{a})$. Por hipótesis de inducción $\vec{\mathcal{A}}^\star \Vdash_C \psi(b, \bar{a})$, luego $\mathcal{A}_i \Vdash_C \psi(b, \bar{a})$ para todo $i \in \{1, .., n\}$. Por la definición del caso existencial, $\mathcal{A}_0 \Vdash_C \exists y \psi(y, \bar{a})$, por lo tanto $\vec{\mathcal{A}} \Vdash_C \phi(\bar{a})$.

□

La proposición 3.3.8 no alcanza a cubrir el caso universal ya que, según la profundidad de la fórmula, el cumplimiento no escoge elementos de los último nodos porque es muy probable que ya sus operaciones no tengan sentido. El siguiente ejemplo ilustra lo descrito.

Ejemplo 3.3.9. Sea $\vec{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \rangle$ el $(\mathcal{L}_{PA}, 3)$-modelo tal que

$$\mathcal{B}_0 = [1] \quad \mathcal{B}_1 = [2] \quad \mathcal{B}_2 = [4] \quad \mathcal{B}_3 = [16]$$

La figura **3-5** representa el $(\mathcal{L}_{PA}, 3)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$

Figura 3-5: $(\mathcal{L}, 3)$-modelo $\vec{\mathcal{B}}$

Notemos que $\vec{\mathcal{B}} \models \forall x \exists y (x < y)$ ya que para todo $b \in \mathcal{B}_1$ existe $c \in \mathcal{B}_2$ tal que $\mathcal{B}_3 \models b < c$. En cambio $\vec{\mathcal{B}} \not\Vdash_C \forall x \exists y (x < y)$ ya que el número $16 \in \mathcal{B}_3$ no es acotado en $\vec{\mathcal{B}}$.

Nuestro propósito original era ubicar el cumplimiento entre las nociones de forcing de Kripke y forcing débil; sin embargo, el contraejemplo 3.3.9 daña la relación con la segunda. La gráfica **3-6** resume nuestros resultados.

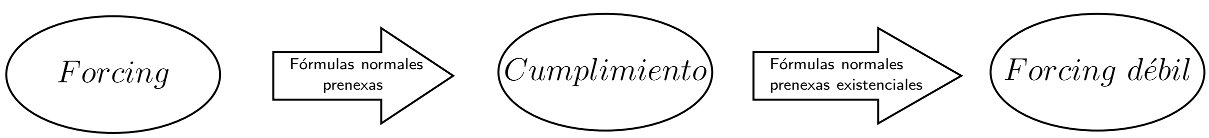

Figura 3-6: Implicaciones

Los recíprocos no se dan, incluso en fórmulas atómicas. Con lo anterior, ya podemos ubicar la lógica interna de la noción de cumplimiento. Veamos primero qué significa.

Definición 3.3.10. Sea ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula en forma normal prenexa. Denotamos como $\vdash_{Cum} \phi$ si para todo (ψ, n)-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ con $n > dp(\phi)$ tal que todos los ϕ-términos son ψ-términos, satisface que $\vec{\mathcal{A}} \models \phi$. Al conjunto de fórmulas ϕ tales que $\vdash_{Cum} \phi$, lo denominamos como **la lógica interna de la noción de cumplimiento**.

Ahora demostremos que **la lógica interna del cumplimiento está entre la lógica intuicionista y la lógica clásica**.

Teorema 3.3.11. *Sea ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula en forma normal prenexa. Se cumple que*

$$\textit{Si } \vdash_I \phi \textit{ entonces } \vdash_{Cum} \phi$$

Además,

$$\textit{Si } \vdash_{Cum} \phi \textit{ entonces } \vdash \phi$$

Demostración. Supongamos que $\vdash_I \phi$. Por el teorema 3.1.10 se tiene que todo $(\mathcal{L}, n)$-modelo $\vec{\mathcal{A}}$ satisface que $\vec{\mathcal{A}} \Vdash \phi$. Luego, por la proposición 3.3.5, obtenemos que $\vec{\mathcal{A}} \models \phi$. Por lo tanto $\vdash_{Cum} \phi$.

Ahora supongamos que $\vdash_{Cum} \phi$. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Notemos que $\vec{\mathcal{A}}_n = \langle \underbrace{\mathcal{M}, ..., \mathcal{M}}_{n+1 \text{ veces}} \rangle$ es un (ϕ, n)-modelo. Como $\vdash_{Cum} \phi$, entonces $\vec{\mathcal{A}}_n$ cumple ϕ para todo $n > dp(\phi)$. Por el teorema 2.2.21, se obtiene que $\mathcal{M} \models \phi$. Como $\mathcal{M}$ era una $\mathcal{L}$-estructura arbitraria se concluye que $\vdash \phi$.

□

Ya con el resultado del teorema 3.3.11, sería interesante determinar la "posición exacta" de la lógica interna del cumplimiento entre la lógica intuicionista y la clásica. El ejemplo 3.3.7 muestra que la lógica interna del cumplimiento no es la clásica; sin embargo, todavía no sabemos si ésta forma parte de la lógica intuicionista. Nuestra intuición nos dice que no. Concretamente, hay que ver si existe una fórmula ϕ tal que $\vdash_{cum} \phi$ pero $\nvdash_I \phi$, pero eso ya es contenido de otra investigación.

4 Sobre la versión à la Paris-Harrington del teorema de Folkman

El propósito original de este trabajo era investigar si se podían usar los $(\mathcal{L}, n)$-modelos para demostrar la independencia de la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman de la aritmética de Peano (PA); sin embargo, en el camino encontramos una falacia al aplicar el método que deja sin validez la demostración de Shelah del teorema de Paris-Harrington. En este capítulo presentamos lo que habíamos investigado sobre la independencia de la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman de PA. Tiene relación con un problema abierto por más de 20 años: determinar si ACA_0 puede demostrar el teorema de Hindman. En la sección 4.1 presentamos en detalle la demostración del matemático Henry Towsner del teorema de Hindman en el sistema axiomático Π^1_1-TR_0 (ver [5]). En la sección 4.2 presentamos una prueba del teorema de Folkman en PA. En la sección 4.3 estudiamos la condición de Paris-Harrington y al finalizar se encuentra una discusión sobre la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman, la cual todavía se desconoce si PA la puede demostrar.

Al final del capítulo, presentamos la demostración de Shelah del teorema de Paris-Harrington, indicando los momentos en que ocurren las falacias presentadas en 2.3. Hay que mencionar que no se demuestra Paris-Harrington sino una versión más débil, que denominamos Paris-Harrington reforzado.

4.1. Teorema de Hindman en la aritmética de segundo orden

Dada una coloración finita en los números naturales, es posible encontrar un conjunto infinito cuyas sumas finitas sean un conjunto monocromático. Este resultado es conocido como el teorema de Hindman, demostrado en el año 1974 por el matemático Neil Hindman usando métodos de combinatoria. En el año 1977, los matemáticos Fred Galvin y Steve Glazer demostraron el teorema por medio de ultrafiltros, específicamente encontrando un ultrafiltro idempotente en el espacio de Stone-Čech de los naturales. En [5] se presenta este argumento,

con ciertas acomodaciones, en la aritmética de segundo orden. A continuación lo presentaremos en detalle.
Dado S un subconjunto de $\mathbb{N}$, denotamos como

$$FS(S) := \left\{ \sum_{i \in F} i \mid F \subset S \text{ y } F \text{ es finito} \right\}$$

al conjunto de **las sumas finitas de** S. Además, denotamos como $NS(S)$ al conjunto $FS(S) \setminus \{0\}$. Vamos a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1 (Teorema de Hindman)**.** *Por cada partición finita de los números naturales,* $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_n$*, existe algún* $i \in \{1, ..., n\}$ *y un conjunto infinito* X *tal que* $NS(X) \subset C_i$*.*

La demostración se va a realizar en el sistema axiomático Π^1_1-$\mathbf{TR}_0$ que consiste en $\mathbf{ACA}_0$ más inducción transfinita en las Π^1_1 fórmulas (ver sección VI.7. de [13]). Como ya mencionamos, vamos a trabajar en el semigrupo de ultrafiltros; sin embargo para tratar con estos objetos en la aritmética de segundo orden necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 4.1.2.

- Sea $U = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión contable de subconjuntos de $\mathbb{N}$ y $F \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito. Denotamos como U_F al conjunto $\bigcap_{i \in F} U_i$. Decimos que U satisface **la propiedad de intersección finita** (*fip*) si para todo $F \subset \mathbb{N}$ finito, U_F es infinito.
- Usaremos las letras U, V para representar sucesiones contables de subconjuntos de $\mathbb{N}$; las letras X, Y, Z para representar cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$, y las letras F, G si son conjuntos finitos.
- Escribimos $X \mathrel{\widetilde{\in}} U$ si existe $F \subset \mathbb{N}$ tal que $U_F \subseteq X$.
- Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos como $X - n := \{m \mid m + n \in X\}$.
- Sean U, V tales que satisfacen *fip*. Escribimos $X \mathrel{\widetilde{\in}} U + V$ si existe $Y \mathrel{\widetilde{\in}} V$ tal que para todo $n \in Y$, $X - n \mathrel{\widetilde{\in}} U$.
- Decimos que U es **un semigrupo** si U satisface *fip* y para todo $X \in U$ se cumple que $X \mathrel{\widetilde{\in}} U + U$.
- Decimos que U es **un refinamiento** de V si $V \subseteq U$.

Podemos interpretar las sucesión contables que satisfacen *fip* como "aproximaciones" a ultrafiltros no principales en $\mathbf{ACA}_0$. La noción $\widetilde{\in}$ nos indica los elementos que, en potencia, podemos añadir a una sucesión U para poder mejorar la aproximación, i.e., encontrar un refinamiento de U. Por otro lado, $U + V$ representa la elevación de la adición de los naturales a su compactificación de Stone-Čech. Así mismo, los semigrupos los vamos a interpretar como "aproximaciones" de ultrafiltros idempotentes. Las siguientes propiedades son análogas a las de los ultrafiltros. Las pruebas son inmediatas de las definiciones.

Hecho 4.1.3. *Sea U una sucesión contable que satisface fip. Sean $F \subset \mathbb{N}$ y $\{X_i\}_{i\in F}$ una sucesión finita de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Se cumple que:*

- *Si $X_i \widetilde{\in} U$ para toda $i \in F$, entonces $\bigcap_{i\in F} X_i \widetilde{\in} U$.*
- $\bigcap_{i\in F} U_i - n = U_F - n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
- $(X-n)^C = X^C - n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
- *Si $X \widetilde{\in} U$ y $X \subset Y$, entonces $Y \widetilde{\in} U$.*

Veamos que los semigrupos satisfacen propiedades similares a las de ultrafiltros idempotentes.

Proposición 4.1.4. *Sea U un semigrupo*

1. *Para todo $F \subset \mathbb{N}$ se cumple que $U_F \widetilde{\in} U + U$.*
2. *Si $X \widetilde{\in} U$ entonces $X \widetilde{\in} U + U$.*

Demostración. 1. Por definición de semigrupo, por cada $i \in F$ existe $X_i \widetilde{\in} U$ tal que, para todo $n \in X_i$, se cumple que $U_i - n \widetilde{\in} U$. Del hecho 4.1.3 tenemos que $\bigcap_{i\in F} X_i \widetilde{\in} U$. Veamos que para todo $n \in \bigcap_{i\in F} X_i$ se tiene que $U_F - n \widetilde{\in} U$ y por lo tanto $U_F \widetilde{\in} U + U$. Sea $n \in \bigcap_{i\in F} X_i$. Dado que para todo $i \in F$ se cumple que $U_i - n \widetilde{\in} U$, entonces por el hecho 4.1.3 obtenemos que $\bigcap_{i\in F} U_i - n = U_F - n \widetilde{\in} U$.

2. Sea $X \widetilde{\in} U$. Por definición, existe $F \subset \mathbb{N}$ tal que $U_F \subseteq X$. Por el primer literal $U_F \widetilde{\in} U + U$, luego existe $Y \widetilde{\in} U$ tal que $U_F - n \widetilde{\in} U$ para todo $n \in Y$. Dado que $U_F - n \subset X - n$, por el hecho 4.1.3, se cumple que $X - n \widetilde{\in} U$ para todo $n \in Y$, y por lo tanto $X \widetilde{\in} U + U$.

□

Nuestra meta es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.1.5 (Π^1_1-$\mathbf{TR_0}$). *Dados un semigrupo U y $A \subseteq \mathbb{N}$, existe un semigrupo V que es un refinamiento de U tal que, $A \widetilde{\in} V$ ó $A^C \widetilde{\in} V$.*

El teorema de Hindman es un corolario del Teorema 4.1.5.

Demostración del teorema de Hindman. Sea $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup ... C_n$ una coloración de los números naturales. Sea U un semigrupo (puede ser el trivial). Eventualmente, por el teorema 4.1.5, podemos encontrar $i \in \{1, ..., n\}$ y un semigrupo V, que es refinamiento de U, tal que $C_i \widetilde{\in} V$. Por la proposición 4.1.4 se cumple que $C_i \widetilde{\in} V + V$, por lo tanto existe $X_0 \widetilde{\in} V$ tal que $C_i - n \widetilde{\in} V$ para todo $n \in X_0$. Escogemos un $x_0 \in C_i \cap X_0$ fijo. Notemos que $C_i \cap (C_i - x_0) \widetilde{\in} V$ ya que cada conjunto está en V según la relación $\widetilde{\in}$. Nuevamente, por la proposición 4.1.4 se cumple que $C_i \cap (C_i - x_0) \widetilde{\in} V + V$, luego existe $X_1 \widetilde{\in} V$ tal que

$$(C_i \cap (C_i - x_0)) - n = (C_i - n) \cap (C_i - x_0 - n) \widetilde{\in} V \text{ para todo } n \in X_1.$$

Fijamos un $x_1 \in C_i \cap (C_i - x_0) \cap X_1$. Notemos que $C_i \cap (C_i - x_0) \cap (C_i - x_1) \cap (C_i - x_1 - x_0) \,\widetilde{\in}\, V$ ya que cada conjunto está en V según la relación $\widetilde{\in}$. Repetimos el mismo argumento para encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_n \in \bigcap_{J\subset\{1,\dots,n\}} \left(C_i - \sum_{j\in J} x_j \right)$$

La gráfica **4-1** ilustra dónde se encuentran los elementos x_2 y x_3.

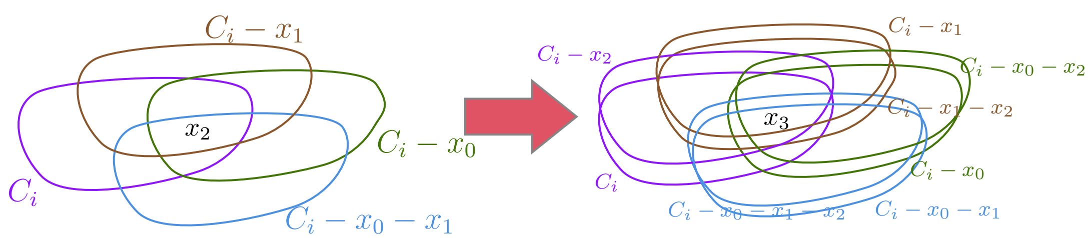

Figura 4-1: Construcción del conjunto monocromático.

Veamos que $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $NS(X) \subset C_i$. En efecto, sean $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ elementos de X, tales que $i_1 < \dots < i_m$. Por construcción $x_{i_m} \in C_i - x_{i_1} - x_{i_2} - \dots - x_{i_{m-1}}$, luego $x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \in C_i$.

□

Para demostrar el teorema 4.1.5 vamos a empezar con el caso “trivial”: la unión del semigrupo U y el conjunto $\{A\}$ no satisface *fip*.

Lema 4.1.6 (**ACA**$_0$)**.** *Sea U un semigrupo y A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tales que $U \cup \{A\}$ no satisface fip. Entonces existe $X \,\widetilde{\in}\, U$ con $0 \in X$ tal que $U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ es un semigrupo.*

Demostración. Dado que $U \cup \{A\}$ no satisface *fip* existe $F \subset \mathbb{N}$ tal que $U_F \cap A$ es finito. Consideremos como $X := \{n \,|\, U_F - n \,\widetilde{\in}\, U\}$. Veamos que $X \,\widetilde{\in}\, U$. Por la proposición 4.1.4 $U_F \,\widetilde{\in}\, U + U$, luego existe $Y \,\widetilde{\in}\, U$ tal que $U_F - n \,\widetilde{\in}\, U$ para todo $n \in Y$; por lo tanto $Y \subset X$ y, por el hecho 4.1.3, $X \,\widetilde{\in}\, U$. Notemos que $0 \in X$ ya que $U_F \,\widetilde{\in}\, U$. Falta comprobar que $U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ es un semigrupo:

Satisface *pif*. Sean $G \subset \mathbb{N}$ y $Z \subset X$ conjuntos finitos. Veamos que $U_G \cap \bigcap_{n\in Z} A^c - n$ es infinito. Dado que $U_F - n \,\widetilde{\in}\, U$ para todo $n \in Z$, entonces $\bigcap_{n\in Z} U_F - n \,\widetilde{\in}\, U$ por el hecho 4.1.3, por lo tanto $U_G \cap \bigcap_{n\in Z} U_F - n$ es infinito. Si denotamos como $W = U_G \cap \bigcap_{n\in Z} U_F - n$, entonces podemos expresar W, por el hecho 4.1.3, como:

$$W = \left(W \cap (\bigcap_{n\in Z} A^C - n) \right) \cup \left(W \cap (\bigcup_{n\in Z} A - n) \right)$$

Como $U_F - n \cap A - n$ es finito para todo $n \in Z$ y W es infinito se concluye que

$$W = \underbrace{\left(W \cap (\bigcap_{n\in Z} A^C - n)\right)}_{\text{infinito}} \cup \underbrace{\left(W \cap (\bigcup_{n\in Z} A - n)\right)}_{\text{finito}}$$

En particular $U_G \cap \bigcap_{n\in Z} A^c - n$ es infinito.

Condición de semigrupo. Sea $x \in U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$. Si $x \in U$, entonces $x \,\widetilde{\in}\, U + U$ y por lo tanto $x \,\widetilde{\in}\, U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\} + U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$. Si $x \in \{A^C - n \,|\, n \in X\}$, entonces existe $n \in X$ tal que $x = A^C - n$. Como $n \in X$, entonces $U_F - n \,\widetilde{\in}\, U$, luego, por la proposición 4.1.4, $U_F - n \,\widetilde{\in}\, U + U$. Entonces, existe $Y \,\widetilde{\in}\, U$ tal que $(U_F - n) - m \,\widetilde{\in}\, U$ para todo $m \in Y$. Por lo tanto para todo $m \in Y$ se cumple que $n + m \in X$ y así $A^C - n - m = x - m \,\widetilde{\in}\, U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$. Notemos que $Y \,\widetilde{\in}\, U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ y por lo tanto $U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ satisface la condición de semigrupo.

□

Si la unión del semigrupo U y el conjunto $\{A\}$ satisface *fip*, entonces existe la posibilidad de encontrar un semigrupo que es un refinamiento de U y contenga a A. Para esto, por lo menos deberíamos ser capaces de encontrar un conjunto X tal que $U \cup \{X\}$ y $U \cup \{A - n \,|\, n \in X\}$ satisfacen *fip*. En ese caso, no puede existir $Y \,\widetilde{\in}\, U$ tal que $U \cup \{A, A - n\}$ no satisface *fip* para todo $n \in Y$. El siguiente lema formaliza el anterior criterio.

Lema 4.1.7 ($\mathbf{ACA_0}$). *Sean U un semigrupo, A un subconjunto de $\mathbb{N}$ y $Y \,\widetilde{\in}\, U$. Si $U \cup \{A, A - n\}$ no satisface fip para todo $n \in Y$, entonces existe $X \,\widetilde{\in}\, U$ tal que $U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ es un semigrupo.*

Demostración. Si $U \cup \{A\}$ no satisface *fip* entonces la afirmación resulta del lema 4.1.6. Así, supongamos que $U \cup \{A\}$ satisface *fip*. Consideremos el conjunto $X := \{n \in Y \,|\, Y - n \,\widetilde{\in}\, U\}$. Usando los mismos argumentos de la demostración del lema 4.1.6, se concluye que $X \,\widetilde{\in}\, U$ y $U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ satisface la condición de semigrupo. Falta demostrar que satisface *fip*: sean $G \subset \mathbb{N}$ y $Z \subset X$ conjuntos finitos, veamos que $U_G \cap \bigcap_{n\in Z} A^c - n$ es infinito. Por hipótesis, por cada $n \in Z$ existe $F_n \subset \mathbb{N}$ tal que $U_{F_n} \cap A \cap A - n$ es finito. Si denotamos como W al conjunto $U_G \cap A \cap \bigcap_{n\in Z} U_{F_n}$ entonces podemos expresar W, por el hecho 4.1.3, como:

$$W = \left(W \cap (\bigcap_{n\in Z} A^C - n)\right) \cup \left(W \cap (\bigcup_{n\in Z} A - n)\right)$$

Como W es infinito —$U \cup \{A\}$ satisface *fip*— se concluye que

$$W = \underbrace{\left(W \cap (\bigcap_{n\in Z} A^C - n)\right)}_{\text{infinito}} \cup \underbrace{\left(W \cap (\bigcup_{n\in Z} A - n)\right)}_{\text{finito}}$$

En particular $U_G \cap \bigcap_{n \in Z} A^c - n$ debe ser infinito

$\square$

Sin embargo, el lema 4.1.7 todavía no logra conseguir un refinamiento de U que contenga a A^C (no necesariamente $0 \in X$); no obstante, sólo basta con agregarlo.

Lema 4.1.8 (**ACA**$_0$)**.** *Sean U un semigrupo, A un subconjunto de $\mathbb{N}$ y $X \mathrel{\widetilde{\in}} U$. Si $A - n \mathrel{\widetilde{\in}} U$ para todo $n \in X$, entonces $U \cup \{A\}$ es un semigrupo.*

Demostración. Falta demostrar que $U \cup \{A\}$ satisface *fip*. Sea $F \subset \mathbb{N}$. Veamos que $U_F \cap A$ es infinito. Por la proposición 4.1.4 se tiene que $U_F \mathrel{\widetilde{\in}} U + U$, luego existe $Y \mathrel{\widetilde{\in}} U$ tal que $U_F - n \mathrel{\widetilde{\in}} U$ para todo $n \in Y$. Sea $n \in X \cap Y$. Como $A - n \mathrel{\widetilde{\in}} U$ y $U_F - n \mathrel{\widetilde{\in}} U$, la intersección $A - n \cap U_F - n$ es infinita dado que U satisface *fip*. Es sencillo verificar que $A \cap U_F$ tiene el mismo cardinal de $A - n \cap U_F - n$, por lo tanto $U \cup \{A\}$ satisface *fip*.

$\square$

Corolario 4.1.9 (**ACA**$_0$)**.** *Sean U un semigrupo, A un subconjunto de $\mathbb{N}$ y $Y \mathrel{\widetilde{\in}} U$ tal que $U \cup \{A, A - n\}$ no satisface fip para todo $n \in Y$. Entonces existe un semigrupo V que es un refinamiento de U y contiene a A^c.*

Demostración. Por el lema 4.1.7 existe $X \mathrel{\widetilde{\in}} U$ tal que $U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ es un semigrupo. Como $X \mathrel{\widetilde{\in}} U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ y $A^C - n \mathrel{\widetilde{\in}} U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\}$ para todo $n \in X$, por el lema 4.1.8 se cumple que $V := U \cup \{A^C - n \,|\, n \in X\} \cup \{A^C\}$ es un semigrupo.

$\square$

Ahora vamos a ver el caso en que $U \cup \{A\}$ satisface *fip* y no se cumplen las hipótesis del corolario 4.1.9, i.e., para todo $Y \mathrel{\widetilde{\in}} U$ existe $n \in Y$ tal que $U \cup \{A, A-n\}$ satisface *fip*. En ese caso, dada una enumeración $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de los subconjuntos finitos de los naturales, podemos construir un conjunto X tal que $U \cup \{X\}$ y $U \cup \{A - n \,|\, n \in X\}$ satisfacen *fip*: simplemente escogemos un elemento $x_n \in U_{F_n}$ tal que $U \cup \{A, A - x_n\}$ satisface *fip*. Ahora falta encontrarle testigos para los conjuntos $A - n$ para todo $n \in X$, i.e., encontrar un conjunto X_n tal que $U \cup \{X_n\}$ y $U \cup \{A - n - m \,|\, m \in X_n\}$ satisfacen *fip*. Por esa razón, vamos a construir X de tal manera que exista un conjunto S tal que $X = FS(S)$; así, el mismo $FS(S)$ sirve de testigo para todos los conjuntos $A - n$ donde $n \in FS(S)$. Al realizar esa construcción, también tenemos que verificar que $FS(S)$ es su mismo testigo, i.e., $U \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\}$ satisface *fip*.

Teorema 4.1.10 (**ACA**$_0$)**.** *Sean U un semigrupo y A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Entonces existe un semigrupo V que es un refinamiento de U tal que $V \cup \{A\}$ no satisface fip, ó, existe un conjunto infinito S tal que*

$$U \cup \{A - n \,|\, n \in FS(S)\}$$

y

$$U \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\}$$

satisfacen fip.

Demostración. La construcción la vamos a hacer por recursión transfinita. Sea $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los subconjuntos finitos de los naturales. Consideremos el árbol T de las sucesiones $\sigma = (s_1, ..., s_n)$ tales que:

1. $s_1 < ... < s_n$.
2. $s_i \in U_{F_i}$ para toda $i \leq n$.
3. $U \cup \{A - n \,|\, n \in FS(\sigma)\}$ satisface *fip*.

La primera y segunda condición sirven para garantizar que el conjunto S sea infinito y que $U \cup \{S\}$ satisface *fip*. La tercera condición garantiza que $U \cup \{A - n \,|\, n \in FS(S)\}$ satisface *fip*. Si no se puede hacer la construcción, significa que en todas las posibles opciones, en algún momento, no se pudo agregar más elementos a la sucesión. Para estudiar este caso, vamos a ordenar T usando el orden de Kleene-Brouwer: decimos que $\sigma \prec \tau$ si existe n tal que $\sigma \restriction^n = \tau \restriction^n$ y $\sigma(n) < \tau(n)$, ó, $\sigma \restriction^n = \tau \restriction^n$ y $\sigma(n)$ está definido pero $\tau(n)$ está indefinido. Prácticamente es como si fuera el orden inverso del lexicográfico. Hay dos posibilidades.

$(T, \prec)$ **es un buen orden.** En este caso el conjunto S no se pudo construir; sin embargo, usando el corolario 4.1.9 podemos encontrar un refinamiento de U que contenga a A^C. Por cada $\sigma \in T$ vamos a construir, por inducción, un semigrupo V_σ que es un refinamiento de U, tal que

$$\text{para todo } \tau \preceq \sigma,\ V_\tau \subset V_\sigma \text{ y } V_\sigma \cup \{A - n \,|\, n \in FS(\tau)\} \text{ no satisface } \textit{fip}. \tag{4-1}$$

Fijemos $\sigma \in T$ y supongamos que para todo $\tau \prec \sigma$ existe un semigrupo V_τ que es refinamiento de U y satisface 4-1. Es sencillo verificar que $V_{\prec\sigma} := \bigcup_{\tau\prec\sigma} V_\tau$ es un semigrupo (en caso de ser σ un elemento inicial definimos $V_{\prec\sigma} := U$). Denotamos como $l(\sigma)$ a la longitud de σ. Dado que toda extensión propia de σ es menor que éste, para todo $n > \text{máx}\,\sigma$ tal que $n \in U_{F_{l(\sigma)}+1}$, se cumple que

$$V_{\prec\sigma} \cup \{A - m \,|\, m \in FS(\sigma \cup \{n\})\}$$

no satisface *fip* —ya sea porque no pertenecen a T por la tercera condición, ó, si pertenecen, $V_{(\sigma\cup\{n\})}$ satisface 4-1—. Como $V_{\prec\sigma} \cup \{1, ..., \text{máx}\,\sigma\}$ no satisface *fip*, por el lema 4.1.6, existe un refinamiento $V'_{\prec\sigma}$ de $V_{\prec\sigma}$, tal que $U^{>\text{máx}\,\sigma}_{F_{l(\sigma)}+1} := \{x > \text{máx}\,\sigma \,|\, x \in U_{F_{l(\sigma)}+1}\} \,\widetilde{\in}\, V'_{\prec\sigma}$. Juntando las afirmaciones anteriores, se concluye que para todo $n \in U^{>\text{máx}\,\sigma}_{F_{l(\sigma)}+1}$ se tiene que

$$V'_{\prec\sigma} \cup \left\{ \bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m\,,\ \bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m - n \right\}$$

no satisface *fip*. Por el corolario 4.1.9, existe un semigrupo V_σ que es un refinamiento de $V'_{\prec\sigma}$ tal que contiene a $\bigcup_{m\in FS(\sigma)} A^c - m$. Por lo anterior V_σ satisface 4-1. Esto completa la inducción. En particular, $V_\emptyset \cup \{A\}$ no satisface *fip*.

$(T, \prec)$ **no es un buen orden.** Existe una cadena $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ descendente infinita en T. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que σ_j es extensión propia de σ_i si $j > i$ —quitamos los elementos que no son extensiones de la cadena original— y consideramos como $S := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i$. Por la primera condición para pertenecer a T, el conjunto S es infinito, y por la tercera se tiene que $U\cup\{A-n \mid n \in FS(S)\}$ satisface *fip*. Falta ver que $U\cup\{FS(S)-n \mid n \in FS(S)\}$ satisface *fip*. Sean $F \subset \mathbb{N}$ y $Z \subset FS(S)$ conjuntos finitos. Veamos que $U_F \cap \bigcap_{n\in Z} FS(S) - n$ es infinito. Sea $Y := \{n > \text{máx}\, Z \mid F \subset F_n\}$. Por cada $n \in Y$ escogemos $s_n \in S \cap U_{F_n}$ —existe por la segunda condición para pertenecer a T— y como $n > \text{máx}\, Z$ entonces $s_n + i \in FS(S)$ para todo $i \in Z$, ya que es distinto a todos los sumando que aparecen en Z. Por lo tanto $s_n \in U_{F_n} \cap \bigcap_{n\in Z} FS(S) - n \subset U_F \cap \bigcap_{n\in Z} FS(S) - n$. Como Y es infinito se concluye que $U_F \cap \bigcap_{n\in Z} FS(S) - n$ es infinito.

□

El teorema 4.1.10, en el caso que se pueda hacer la construcción del conjunto S, nos da dos refinamientos del conjunto U donde el único que es un semigrupo es el conjunto $U \cup \{FS(S)-n \mid n \in FS(S)\}$. Sólo nos falta garantizar que A pertenece, según $\widetilde{\in}$, a ese conjunto. Para lograr esto, nuevamente tenemos que hacer la construcción del conjunto S, pero esta vez, además de las condiciones anteriores, vamos a pedir que $FS(S) \subset A$.

Teorema 4.1.11 (Π^1_1-$\mathbf{TR}_0$). *Sean U un semigrupo y A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Entonces existe un semigrupo V que es un refinamiento de U tal que $V \cup \{A\}$ no satisface fip, ó, existe un conjunto infinito S tal que $FS(S) \subset A$ y*

$$U \cup \{FS(S) - n \mid n \in FS(S)\}$$

satisface fip.

Demostración. Sea $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los subconjuntos finitos de los naturales. Consideremos el árbol T de las sucesiones $\sigma = (s_1, ..., s_n)$ tales que:

1. $s_1 < ... < s_n$.
2. $NS(\sigma) \subseteq A$
3. $s_i \in F_i$ para toda $i \leq n$.
4. $U \cup \{A - n \mid n \in FS(\sigma)\}$ satisface *fip*.

Notemos que se añade una nueva condición a la construcción del conjunto S del teorema 4.1.10; ésta garantiza que $FS(S) \subset A$. Vamos a ordenar T usando el orden de Kleene-Brouwer. Hay dos posibilidades:

$(T, \prec)$ **es un buen orden.** En este caso el conjunto S no se pudo construir; sin embargo, usando el teorema 4.1.10 podemos encontrar un refinamiento de U que contenga a A^C. Por cada $\sigma \in T$ vamos a construir, por inducción, un semigrupo V_σ que es refinamiento de U, tal que

$$\text{para todo } \tau \preceq \sigma,\ V_\tau \subset V_\sigma \text{ y } V_\sigma \cup \{A - n \,|\, n \in FS(\tau)\} \text{ no satisface } \mathit{fip}. \tag{4-2}$$

Fijemos $\sigma \in T$ y supongamos que para todo $\tau \prec \sigma$ existe un semigrupo V_τ que es refinamiento de U y satisface 4-2. Es sencillo verificar que $V_{\prec\sigma} := \bigcup_{\tau\prec\sigma} V_\tau$ es un semigrupo, luego por el teorema 4.1.10 existe un semigrupo V_σ que es un refinamiento de $V_{\prec\sigma}$ tal que $V_\sigma \cup \{\bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m\}$ no satisface *fip*, ó, existe un conjunto infinito S tal que

$$V_{\prec\sigma} \cup \left\{ \bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m - n \,|\, n \in FS(S) \right\} \tag{4-3}$$

y

$$V_{\prec\sigma} \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\} \tag{4-4}$$

satisfacen *fip*. En el primer caso ya completaríamos la inducción. En el segundo caso, consideramos como $V_\sigma := V_{\prec\sigma} \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\}$. V_σ es un semigrupo ya que satisface *fip* y, dado $n \in FS(S)$, $FS(S) - n - m \,\widetilde{\in}\, V_\sigma$ para todo $m \in FS(S)$. Denotemos como $l(\sigma)$ a la longitud de σ. Veamos que $V_\sigma \cup \{\bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m\}$ no satisface *fip*. Razonemos por contradicción. Si $U_{F_{l(\sigma)+1}} \cap FS(S) \cap \bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m$ fuera infinito, entonces existiría n en ese conjunto mayor que $\max \sigma$. Notemos que $\sigma^\frown\{n\} \in T$ ya que 4-3 satisface *fip*. Dado que $\sigma^\frown\{n\} \prec \sigma$, por inducción $V_{\prec\sigma} \cup \{A - m \,|\, m \in FS(\sigma \cup \{n\})\}$ no satisface *fip*, que contradice que 4-3 satisface *fip*. Por lo tanto $V_\sigma \cup \{\bigcap_{m\in FS(\sigma)} A - m\}$ no satisface *fip* y esto completa la inducción. En particular $V_\emptyset \cup \{A\}$ no satisface *fip*.

$(T, \prec)$ **no es un buen orden.** Existe una cadena $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ descendiente infinita en T. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que σ_j es extensión propia de σ_i si $j > i$ —quitamos los elementos que no son extensiones de la cadena original— y consideramos como $S := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i$. Por la primera condición para pertenecer a T, el conjunto S es infinito, por la segunda condición $FS(S) \subseteq A$ y, repitiendo el mismo argumento de la última parte de la demostración del teorema 4.1.10, se concluye que $U \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\}$ satisface *fip*.

□

Demostración del teorema 4.1.5. Por el teorema 4.1.11 hay dos posibilidades. En el primer caso existe un refinamiento V' de U tal que $V' \cup \{A\}$ no satisface *fip*, luego por el lema 4.1.6, existe un refinamiento V de V' tal que $A^C \,\widetilde{\in}\, V$. En el segundo caso existe un conjunto infinito S tal que $FS(S) \subset A$ y $U \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\}$ satisface *fip*. Es sencillo verificar que $V = U \cup \{FS(S) - n \,|\, n \in FS(S)\}$ es un semigrupo y como $FS(S) \subset A$ entonces $A \,\widetilde{\in}\, V$.

□

4.2. Teorema de Folkman en PA

La versión finita del teorema de Hindman es usualmente conocida como el teorema de Folkman que, naturalmente, se puede derivar por medio de un argumento de compacidad; no obstante su demostración ya se conocía desde 1965 y se puede llevar a cabo en la aritmética de Peano. Vamos a presentar las dos demostraciones. Antes, vamos a recordar el teorema de compacidad en el contexto de la teoría de Ramsey.

Definición 4.2.1. Sea $k \in \mathbb{N}$. Denotamos como $[k]$ al conjunto $\{1, ..., k\}$. Dado un conjunto X, decimos que f es una **k-coloración de** X si f es una función con dominio X y rango $[k]$. Dada f una k-coloración de X, decimos que $Y \subseteq X$ es **un conjunto monocromático de** f si la imagen de Y es constante en f.

Teorema 4.2.2 (Compacidad)**.** *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos finitos de X. Suponga que por cada k-coloración f de X existe un conjunto monocromático de f en $\mathcal{A}$. Entonces existe un conjunto finito de $F \subseteq X$ tal que por cada k-coloración f de F existe un conjunto monocromático de f en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Dotemos a $[k]$ con la topología discreta. Al ser finito, este espacio es compacto. Por el teorema de Tychonoff el espacio $Y := \prod_{x \in X}[k]$ es compacto. Notemos que los elementos del espacio Y son las k-coloraciones de X. Para todo $G \in \mathcal{A}$ y para todo $i \in [k]$ consideremos el conjunto

$$U_{G,i} = \{f \in Y \mid f(x) = i \text{ para toda } x \in G\}$$

Dado que los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ son finitos, entonces $U_{G,i}$ es abierto para todo $G \in \mathcal{A}$ y para todo $i \in [k]$. Además, por hipótesis, para todo $f \in Y$ existen $i \in [k]$ y $G \in \mathcal{A}$ tales que $f(x) = i$ para todo $x \in G$, i.e., $f \in U_{G,i}$. Por lo tanto la colección $\{U_{G,i} \mid G \in \mathcal{A}, i \in [k]\}$ es un cubrimiento abierto de Y. Por compacidad, existen $G_1, ..., G_n \in \mathcal{A}$, $i_1, ..., i_n \in [k]$ tales que

$$Y = U_{G_1,i_1} \cup ... \cup U_{G_n,i_n}$$

Consideremos como $F := G_1 \cup ... \cup G_n$. Sea f una k-coloración de F. Extendemos f a una k-coloración f' de X (puede ser cualquier extensión). Entonces existe m tal que $f' \in U_{G_m,i_m}$. Luego G_m es un conjunto monocromático de f' y, como $G_m \subset F$, también de f.

□

El teorema de Folkman es consecuencia inmediata del teorema de Hindman y el teorema de compacidad.

Teorema 4.2.3 (Teorema de Folkman)**.** *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$ existe $F(k, r) \in \mathbb{N}$ tal que para toda r-coloración de $[F(k, r)]$ existe un conjunto A, de tamaño k, tal que $NS(A)$ es monocromático.*

Demostración. Sea R el conjunto de las r-coloraciones de los números naturales. Sea $f \in R$. Por el teorema de Hindman existe un conjunto $S = \{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ infinito tal que $NS(S)$ es un conjunto monocromático de f. Denotamos como A_f al conjunto $NS(\{s_1, ..., s_k\})$. Por el teorema de compacidad, aplicado a la colección $\mathcal{A} = \{A_f\}_{f \in R}$, existe $F(k,r) \in \mathbb{N}$ tal que para toda r-coloración f de $[F(k,r)]$ existe un conjunto monocromático de f en $\mathcal{A}$, i.e., un conjunto A de tamaño k tal que $NS(A)$ es un conjunto monocromático de f.

□

La demostración presentada en 4.2.3 no se puede bajar a la aritmética de Peano ya que se desconoce si ACA_0 puede demostrar el teorema de Hindman. No obstante, el teorema de Folkman se puede desarrollar en PA usando el teorema de Van Der Waerden.

Teorema 4.2.4 (Teorema de Van Der Waerden)**.** *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$ existe $W(k,r) \in \mathbb{N}$ tal que, para toda r-coloración f de $[W(k,r)]$, existen $a, d \in \mathbb{N}$ tales que*

$$f(a) = f(a+d) = f(a+2d) = \cdots = f(a+(k-1)d)$$

En [7] pueden encontrar varias demostraciones del teorema de Van Der Waerden, incluso una de Shelah en que demuestra que la función $W(k,r)$ —el menor número que satisface el teorema de Van Der Waerden para k y r— es primitiva recursiva. El teorema de Folkman es corolario del siguiente lema.

Lema 4.2.5. *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$ existe $G(k,r) \in \mathbb{N}$ tal que para toda r-coloración f de $[G(k,r)]$ existe una sucesión de k elementos distintos, $\{b_1, ..., b_k\}$, tal que para todo $I \subset [k]$ se cumple que $f(\sum_{i \in I} b_i) = f(b_{\text{máx}\, I})$.*

Demostración. La prueba se desarrolla por por inducción sobre k. El caso $G(1,r)$ es inmediato para todo $r \in \mathbb{N}$. Fijemos $r \in \mathbb{N}$ y supongamos que ya existe $n = G(k-1,r)$. Veamos que

$$G(k,r) \leq 2W(n+1,r)$$

Denotemos como $N = 2W(n+1,r)$. Consideremos $f : [N] \to r$ una r-coloración. Por el teorema de Vand Der Waerden en el intervalo $[N/2+1, N]$ existe una progresión aritmética monocromática de longitud $n+1$:

$$\{a, a+d, ..., a+nd\}$$

Hay dos casos:

Si $a = d$. La progresión aritmética $\{d, ..., (n+1)d\}$ satisface la condición del lema.

Si $a \neq d$. Por hipótesis de inducción, en el conjunto $\{d, 2d, ..., nd\}$ existe una sucesión de $k-1$ elementos distintos, $\{b_1, ..., b_{k-1}\}$, tal que para todo $I \subset [k-1]$ se cumple que $f(\sum_{i \in I} b_i) = f(b_{\text{máx}\, I})$. Consideramos como $b_k := a$. Veamos que el conjunto $\{b_1, ..., b_{k-1}, b_k\}$ satisface la condición del lema. Sea $I \subset [k]$. Si $k \notin I$, por inducción $f(\sum_{i \in I} b_i) = f(b_{\text{máx}\, I})$; si $k \in I$, entonces $f(\sum_{i \in I} b_i) = f(b_k) = f(a)$ ya que la progresión aritmética es monocromática.

□

Demostración del teorema de Folkman en la aritmética de Peano. Veamos que

$$F(k,r) \leq G(r(k-1)+1,r)$$

Denotemos como $N = G(r(k-1)+1,r)$. Sea $f : [N] \to r$ una r-coloración. Por el lema 4.2.5 existe una sucesión de $r(k-1)+1$ elementos distintos, $\{b_1, ..., b_{r(k-1)+1}\}$, tales que para todo $I \subset [r(k-1)+1]$ se cumple que $f(\sum_{i \in I} b_i) = f(b_{\text{máx}\, I})$. Por el principio de las casillas existe un subconjunto $A = \{b_{i_1}, ..., b_{i_k}\}$ de $\{b_1, ..., b_{r(k-1)+1}\}$ que es monocromático —hay r colores y $r(k-1)+1$ elementos—, por lo tanto A satisface que $NS(A)$ es un conjunto monocromático.

□

4.3. Condición de Paris-Harrington

El teorema de Paris-Harrington trata sobre la primera afirmación descubierta, de contenido puramente matemático, que es verdadera en $\mathbb{N}$ pero la aritmética de Peano no puede demostrar. La afirmación surge al agregar la siguiente condición al teorema de Ramsey infinito.

Condición de Paris-Harrington. El tamaño del conjunto monocromático debe ser mayor que su mínimo elemento.

Vamos a usar la siguiente terminología para dar el enunciado.

Definición 4.3.1. Sean $m, k, c \in \mathbb{N}$ y sea $X \subset \mathbb{N}$. La notación $X \to^{\star} (m)^k_c$ significa que para toda función $f : [X]^k \to c$ existe un conjunto $H \subset X$ tal que $|H| > \text{mín}\, H + m$ y la imagen de $[H]^k$ es constante.

La afirmación

$$\text{PH: Para todo } k, m, c \text{ existe } n \text{ tal que } [n] \to^{\star} (m)^k_c$$

es verdadera en $\mathbb{N}$ gracias al teorema de Ramsey infinito y al teorema de compacidad; sin embargo, Jeff Paris y Leo Harrington demostraron en 1977 el siguiente teorema

Teorema 4.3.2 (Paris-Harrington)**.** *La afirmación* PH *no es demostrable en la Aritmética de Peano.*

La demostración que propone Shelah en [2] no demuestra el teorema 4.3.2 sino una versión más débil ya que se colorean sucesiones en lugar de segmentos iniciales. La versión reforzada dice lo siguiente:

PH*: Para toda sucesión creciente (x_i) de números naturales, y para todo k, m, c existe n tal que $\{x_1, ..., x_n\} \to^\star (m)^k_c$.

Usando un argumento de compacidad, la afirmación PH* es verdadera en $\mathbb{N}$.

Teorema 4.3.3. $\mathbb{N} \models$ PH*.

Demostración. Sea $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Fijemos $m, k, c \in \mathbb{N}$. Denotemos como R al conjunto de las c-coloraciones del conjunto $[X]^k$. Por el teorema de Ramsey, por cada $f \in R$ existe un subconjunto infinito $M = (x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de X, tal que $[M]^k$ es monocromático. Definamos como

$$A_f = \{x_{n_1}, ..., x_{n_m}, x_{n_{m+1}}, ..., x_{n_{m+x_{n_1}}}\}$$

Por el teorema de compacidad, aplicado a la colección $\mathcal{A} = \{[A_f]^k\}_{f\in R}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_1, ..., x_n\} \to^\star (m)^k_c$.

□

Por lo tanto, ahora el resultado de independencia que se quiere demostrar es:

Teorema 4.3.4 (Paris-Harrington reforzado)**.** *La afirmación* PH* *no es demostrable en* ACA$_0$.

Notemos que el teorema 4.3.2 implica 4.3.4 ya que ACA$_0$ es una extensión conservadora de PA. En la sección 4.4 presentamos la posible demostración de Shelah del teorema 4.3.4 usando los $(\mathcal{L}, n)$-modelos. Vamos a indicar exactamente las partes que dejan de funcionar por el error que encontramos en la sección 2.3; además, cómo éstas vuelven a tener a validez si se usa la noción de cumplimiento en subsucesiones presentada en la sección 2.4.2.

Ante los anteriores resultados, queda la pregunta si lo que ocurre con el teorema 4.3.2 pasa con otros teoremas de combinatoria; por esta razón, vamos agregar la condición de Paris-Harrington al teorema de Folkman y estudiar su relación con la aritmética de Peano. Naturalmente, el teorema es verdadero en $\mathbb{N}$.

Teorema 4.3.5 (Versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman)**.** *Para todo $k, r \in \mathbb{N}$ existe $PHF(k, r) \in \mathbb{N}$ tal que para toda r-coloración de $[PHF(k, r)]$ existe un conjunto A, de tamaño al menos k, tal que $|A| > \min A$ y $NS(A)$ es monocromático.*

Demostración. Sea R el conjunto de las r-coloraciones de los números naturales. Sea $f \in R$. Por el teorema de Hindman existe un conjunto $S = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ infinito tal que $NS(S)$ es un conjunto monocromático de f. Denotemos como A_f al conjunto $NS(\{s_1, ..., s_k, s_{k+1}, ..., s_{k+s_1}\})$. Por el teorema de compacidad, aplicado a la colección $\mathcal{A} = \{A_f\}_{f\in R}$, existe un número $PHF(k, r) \in \mathbb{N}$ tal que para toda r-coloración f de $[PHF(k, r)]$ existe un conjunto monocromático de f en $\mathcal{A}$, i.e., un conjunto A de tamaño al menos k, tal que $|A| > \min A$ y $NS(A)$ es monocromático.

□

Todavía se desconoce si PA puede demostrar la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman. Esto tiene relación con un problema abierto de más de 20 años: determinar si ACA_0 puede demostrar el teorema de Hindman. En caso afirmativo, la demostración que realizamos del teorema 4.3.5, con sus respectivas adecuaciones, se puede realizar en ACA_0 ya que sólo depende del teorema de Hindman y del teorema de compacidad[1]; luego, como ACA_0 es una extensión conservativa de Peano, se concluye que PA demuestra la versión a la Paris-Harrington del teorema de Folkman. Por lo anterior, si ésta resulta ser independiente de PA, también el teorema de Hindman sería independiente de ACA_0. Hasta el momento, el sistema más cercano a ACA_0 en que se ha podido desarrollar la demostración del teorema de Hindman es el sistema axiomático ACA_0^+ (Ver [6]).

4.4. Posible demostración del teorema de Paris-Harrington reforzado

A continuación presentaremos el argumento que propone Shelah para demostrar el teorema 4.3.4 usando los (L, n)-modelos. Recordemos que la afirmación $\mathrm{PH}^\star$ dice:

Para toda sucesión (x_i) y para todo k, m, c existe n tal que $\{x_1, ..., x_n\} \to^\star (m)^k_c$.

La idea consiste en asumir $\mathrm{PH}^\star$ y construir, para todo subconjunto finito $\Gamma \subset \mathrm{PA}$ y para todo n suficientemente grande, un $(\mathcal{L}_{PA}, n)$-modelo que cumple $\bigwedge \Gamma$; así, por el corolario 2.2.22, concluiríamos que $\mathrm{ACA}_0 + \mathrm{PH}^\star \vdash \mathrm{Con(PA)}$ y por lo tanto $\mathrm{ACA}_0 \nvdash \mathrm{PH}^\star$, ya que $\mathrm{ACA}_0 \nvdash \mathrm{Con(PA)}$ por ser una extensión conservativa de PA.

Sea $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un orden primitivo recursivo de las $\mathcal{L}_{PA}$-fórmulas con un solo parámetro. Dada $\phi(x)$ una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula, definimos

$$\mathrm{LNP}(\phi) := \exists x \phi(x) \to \exists z \forall y (\phi(z) \wedge (\phi(y) \to z \leq y))$$

Consideremos la teoría PA_k^{PF} que tiene los axiomas de la aritmética de Robinson (Q) con las primeras k instancias del principio del buen orden, es decir:

$$Q + \{\mathrm{LNP}(\phi_i)\}_{i=1}^k$$

Notemos que PA es equivalente a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{PA}_k^{PF}$. La siguiente afirmación resume lo descrito anteriormente.

Conjetura 4.4.1. $\mathrm{ACA}_0 + \mathrm{PH}^\star$ *implica que, para todo k y n suficientemente grande, existe un $(\mathcal{L}_{PA}, n)$-modelo que cumple $\bigwedge \mathrm{PA}_k^{PF}$.*

[1]En ACA_0 hay que usar el lema de König para demostrar una versión contable del teorema 4.2.2

Veamos la demostración que propone Shelah de la conjetura 4.4.1. Vamos a fijar un modelo $\mathcal{M} \models$ACA$_0$ + PH* y trabajar internamente en $\mathcal{M}$. Ya vimos en el ejemplo 2.2.15, que existen modelos de ϕ-crecimiento que cumplen la aritmética de Robinson; luego, falta comprobar que existen modelos de ϕ-crecimiento, suficientemente grandes, que cumplen finitas instancias del principio del buen orden. Por lo tanto, hay que demostrar la siguiente afirmación.

Conjetura 4.4.2. *Sea $\psi(x)$ una $\mathcal{L}_{PA}$-fórmula. Para todo $n > dp(\mathrm{LNP}(\psi)) + 3$ existe un $(\mathcal{L}_{PA}, n)$-modelo de ϕ-crecimiento que cumple* LNP(ψ).

El argumento que se realiza en [2] para demostrar la conjetura 4.4.2 contiene el error que mencionamos en la sección 2.3. Vamos a desarrollar la demostración indicando "los huecos" que se generan; además, mostraremos que si se puede usar la noción de cumplimiento en subsucesiones, entonces se mantiene la prueba.

Posible demostración de la conjetura 4.4.2. Fijemos un $n > dp(\mathrm{LNP}(\psi)) + 3$ y una $\mathcal{L}$-fórmula ϕ que contiene todos los ψ-términos. Sea $X = \{m_i\}_{i\in\mathcal{M}}$ una sucesión de ϕ-crecimiento. Como $\mathcal{M} \models \mathrm{PH}^\star$, entonces existe $k \in \mathcal{M}$ tal que $\{m_0, ..., m_k\} \rightarrow^\star (n)^{n+1}_{n^2}$. Denotemos como $S = \{m_0, ..., m_k\}$. Para desarrollar la demostración necesitamos introducir nuevas notaciones.

Definición 4.4.3. Sea $\vec{m} = \langle m_{i_0}, ..., m_{i_n}\rangle$ una subsucesión de S. Denotamos como $\vec{m}^k$ a la sucesión $\langle m_{i_0}, ..., m_{i_k}\rangle$ de longitud $k + 1$, y como $\vec{m}^k_j$ a la sucesión de longitud k que resulta al quitarle el elemento m_{i_j} de $\vec{m}^k$. Por ejemplo $\vec{m}^4_2 = \langle m_{i_0}, m_{i_1}, m_{i_3}, m_{i_4}\rangle$.

Fijemos una enumeración $g_\psi \in \mathcal{M}$, que empieza desde 1, de las tuplas (k, j) donde $dp(\psi)+1 < k \leq n$ y $0 < j < k$. Vamos a empezar a colorear. Dada una subsucesión $\vec{m} = \langle m_{i_0}, ..., m_{i_k}\rangle$ creciente de S, de longitud $dp(\psi) + 1 \leq k < n$, definamos

$$F_\psi(m_{i_0}, ..., m_{i_k}) := \text{mín}\{a < m_{i_0} \mid \mathcal{M}_{\vec{m}} \models \psi(a)\}$$

En caso que ese mínimo no exista, establecemos como $F_\psi(m_{i_0}, ..., m_{i_k}) := m_{i_0}$. Ahora, dada una subsucesión creciente $\vec{m} = \langle m_{i_0}, ..., m_{i_n}\rangle$ de S definamos

$$F'_\psi(\vec{m}) = \text{mín}\{g_\psi(k, j) \mid F_\psi(\vec{m}^k_j) \neq F_\psi(\vec{m}^k_{j+1})\}$$

En caso que ese mínimo no exista, establecemos como $F'_\psi(\vec{m}) := 0$. Como la función F'_ψ es una (n^2)-coloración de $[S]^{n+1}$, entonces existe un subconjunto homogéneo $H \subset S$ de F'_ψ tal que $|H| > \text{mín}\, H + n$. Denotemos como $h_0 < h_2 < ... < h_m$ los elementos de H, donde $m := |H| - 1$.

Hecho 4.4.4. $F'_\psi \upharpoonright [H]^{n+1} = 0$.

Demostración. Razonemos por contradicción: supongamos que $F'_\psi \upharpoonright [H]^{n+1} = g(k, j)$ donde $dp(\psi) + 1 < k \leq n$ y $0 < j < k$. Entonces, dados $h_\alpha, h_\beta \in H$ tales que $j \leq \alpha < \beta < m - n + j + 2$, se cumple que

$$F'_\psi(\underbrace{h_0, ..., h_{j-1},}_{\text{primeros } j \text{ elementos}} \; h_\alpha, h_\beta, \underbrace{h_{m-n+j+2}, ..., h_{m-n+k}, \overbrace{h_{m-n+k+1}, ..., h_m}^{\text{últimos } n-k \text{ elementos}}}_{\text{últimos } n-j-1 \text{ elementos}}) = g(k, j)$$

Es decir:

$$F_\psi(h_0, ..., h_{j-1}, h_\alpha, h_{m-n+j+2}, ..., h_{m-n+k}) \neq F_\psi(h_0, ..., h_{j-1}, h_\beta, h_{m-n+j+2}, ..., h_{m-n+k})$$

Por otro lado, por definición:

$$F_\psi(h_0, ..., h_{j-1}, h_\alpha, h_{m-n+j+2}, ..., h_{m-n+k}), F_\psi(h_0, ..., h_{j-1}, h_\beta, h_{m-n+j+2}, ..., h_{m-n+k}) \leq h_0$$

Como α y β están entre j y $m-n+j+2$, de lo anterior podemos deducir que $h_0 \geq m-n+2$. Como $h_0 = \min H$ y $m = |H| - 1$, se concluye que $\min H + n \geq |H|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $F'_\psi \restriction [H]^{n+1} = 0$.

□

Denotemos como $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ al modelo de ϕ-crecimiento asociado a $\vec{m} = \langle h_0, h_1, ..., h_n \rangle$. La idea es demostrar que $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ cumple LNP(ψ). Por el hecho 4.4.4 podemos concluir lo siguiente:

Proposición 4.4.5. *Supongamos que $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \exists x \psi(x)$. Sea k tal que $dp(\psi) + 2 \leq k \leq n$. Dada una subsucesión creciente $\langle h_{i_1}, ..., h_{i_k} \rangle$ de H tal que $i_k \leq m - n + k$, se cumple que*

$$F_\psi(h_1, ..., h_k) = F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_k})$$

En particular, dadas dos subsucesiones $\langle h_{i_1}, ..., h_{i_k} \rangle$ y $\langle h_{j_1}, ..., h_{j_k} \rangle$ de H tales que $i_k, j_k \leq m - n + k$, se cumple que

$$F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_k}) = F_\psi(h_{j_1}, ..., h_{j_k})$$

Demostración. Si $h_{i_k} = h_k$ ya se cumple la afirmación. Luego, podemos suponer que $h_{i_k} > h_k$. Por el hecho 4.4.4 se cumple que

$$F'_\psi(h_1, ..., h_k, h_{i_k}, h_{m-n+k+1}, ..., h_m) = 0$$

Luego, por la definición de F'_ψ, obtenemos:

$$F_\psi(h_1, ..., h_{k-1}, h_k) = F_\psi(h_1, ..., h_{k-1}, h_{i_k})$$

Si $h_{i_{k-1}} = h_{k-1}$ ya se cumple la afirmación. Luego, podemos suponer que $h_{i_{k-1}} > h_{k-1}$. Por el hecho 4.4.4 se cumple que

$$F'_\psi(h_1, ..., h_{k-1}, h_{i_{k-1}}, h_{i_k}, h_{m-n+k+1}, ..., h_m) = 0$$

Luego, por la definición de F'_ψ, obtenemos:

$$F_\psi(h_1, ..., h_{k-1}, h_{i_k}) = F_\psi(h_1, ..., h_{i_{k-1}}, h_{i_k})$$

Siguiendo el mismo argumento, podemos usar el hecho 4.4.4 para intercambiar cada posición para obtener:

$$F_\psi(h_1, h_2, ..., h_k) = F_\psi(h_1, h_{i_2}, ..., h_{i_k})$$

Sin embargo el hecho 4.4.4 no nos permite intercambiar el primer elemento. Para esto, es sencillo verificar por inducción sobre fórmulas que, para todo $a \in \mathcal{M}_{<h_1}$, se cumple que

$$\langle \mathcal{M}_{<h_1}, \mathcal{M}_{<h_{i_2}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{i_k}} \rangle \models \psi(a) \text{ si y sólo si } \langle \mathcal{M}_{<h_{i_1}}, \mathcal{M}_{<h_{i_2}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{i_k}} \rangle \models \psi(a) \tag{4-5}$$

Por lo tanto, tenemos que $F_\psi(h_1, ..., h_k) \leq F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_k})$. Para la otra desigualdad, usamos que $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \exists x \psi(x)$ para garantizar que existe $b \in \mathcal{M}_{<h_1}$ tal que $\mathcal{M}^\star_{\vec{m}} \models \psi(b)$. Luego, por la proposición 2.4.5, se tiene que $\langle \mathcal{M}_{<h_{i_1}}, \mathcal{M}_{<h_{i_2}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{i_k}} \rangle \models \psi(b)$ y así $F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_k}) \in \mathcal{M}_{<h_1}$. Por 4-5 se concluye que $F_\psi(h_1, ..., h_k) = F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_k})$.

□

Acá se encuentra el primer "hueco" de la demostración. Para poder usar la proposición 4.4.5 tenemos que asumir que $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \exists x \psi(x)$. Sin embargo, como mencionamos en la sección 2.3, para demostrar que $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ cumple

$$\exists x \psi(x) \to \exists z \forall y (\psi(z) \land (\psi(y) \to z \leq y))$$

hay que suponer que $\mathcal{M}_{\vec{m}} \not\models \forall x \neg \psi(x)$, i.e., que existe $k > dp(\psi)$ y $b \in \mathcal{M}_{<h_{n-k}}$ tales que $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \not\models \neg\psi(b)$. Dado que $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \not\models \neg\psi(b)$ no siempre implica que $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \models \psi(b)$, en este caso ni siquiera tenemos un testigo para la fórmula $\psi(x)$; testigo que el consecuente pide en $\mathcal{M}_{<h_1}$. La noción de cumplimiento en subsucesiones sí permite asumir $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \exists x \psi(x)$.

Si disponemos de la proposición 4.4.5, entonces entre subsucesiones de la misma longitud se mantiene el mínimo elemento que cumple ψ. La siguiente afirmación dice que el mínimo se mantiene sin importar la longitud. La demostración que desarrollamos asume que en H se puede seguir aplicando PH*; hecho que todavía no sabemos cómo garantizar o cambiar.

Conjetura 4.4.6. *Sea k tal que $dp(\psi) + 2 \leq k < n$. Existe una subsucesión $\langle h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}} \rangle$ de H tal que $j_{k+1} \leq m - n + k + 1$, que satisface*

$$F_\psi(h_1, ..., h_k) = F_\psi(h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}})$$

Posible demostración de la conjetura 4.4.6. Fijemos k tal que $dp(\psi) + 2 \leq k < n$. Denotemos como $b := F_\psi(h_1, ..., h_k)$. Por las proposiciones 2.4.5 y 4.4.5 se obtiene que $b \leq F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_{k+1}})$ para toda subsucesión $\langle h_{i_1}, ..., h_{i_{k+1}} \rangle$ de H tal que $i_{k+1} \leq m-n+k+1$. Así que sólo basta mostrar que existe una subsucesión $\langle h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}} \rangle$ tal que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_1}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \psi(b)$ para deducir que $F_\psi(h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}}) = b$. La demostración se hace por inducción sobre el número de cuantificadores de ψ.

Caso sin cuantificadores. Supongamos que la fórmula ψ no tiene cuantificadores. Dado que $\langle \mathcal{M}_{<h_1}, ..., \mathcal{M}_{<h_k} \rangle \models \psi(b)$, por el hecho 2.2.12, se tiene que $\mathcal{M}_{<h_2} \models \psi(b)$. Nuevamente, por el hecho 2.2.12, se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_1}, ..., \mathcal{M}_{<h_{k+1}} \rangle \models \psi(b)$.

Caso con cuantificadores. Supongamos que $dp(\psi) > 0$. Consideremos como $h_{j_1} := h_1$. Para el i-ésimo cuantificado de ψ, contando de izquierda a derecha, vamos a escoger el número $h_{j_{i+1}}$. En cada paso de la construcción vamos a asignar dos valores: T^i_ψ como la colección de i-tuplas que servirán como testigos para el $(i+1)$-ésimo cuantificador, y H^i_ψ que representará la lista de estructuras sobre la cual los testigos serán "invariantes".

Primer cuantificador.

Caso universal. Si $\psi(x)$ es de la forma $\forall x_1 \gamma_1(x_1, x)$, entonces escogemos como $h_{j_2} = h_2$. Por la proposición 4.4.5, se tiene que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_2}}, \mathcal{M}_{<h_{i_3}} ..., \mathcal{M}_{<h_{i_{k+1}}} \rangle \models \psi(b)$ para toda subsucesión $\langle h_{i_3}, ..., h_{i_{k+1}} \rangle$ de H tal que $i_{k+1} \leq m - n + k + 1$. Por lo tanto $\langle \mathcal{M}_{<h_{i_3}} ..., \mathcal{M}_{<h_{i_{k+1}}} \rangle \models \gamma_1(a, b)$ para todo $a \in \mathcal{M}_{<h_{j_2}}$ y para toda subsucesión $\langle h_{i_3}, ..., h_{i_{k+1}} \rangle$ de H tal que $i_{k+1} \leq m - n + k + 1$. Establecemos como $T^1_\psi = \mathcal{M}_{<h_{j_2}}$ y $H^1_\psi = H \setminus \{h_{m-n+k+1}, ..., h_m\}$.

Caso existencial. Si $\psi(x)$ es de la forma $\exists x_1 \gamma_1(x_1, x)$, entonces, dada una subsucesión $\vec{h} = \langle h_{i_0}, ..., h_{i_{k-2}} \rangle$ de H, definimos

$$F_{\gamma_1}(h_{i_0}, ..., h_{i_{k-2}}) := \text{mín}\{a_1 < h_{i_0} \mid \mathcal{M}_{\vec{h}} \models \gamma_1(a_1, b)\}$$

Ese mínimo siempre existe por la proposición 4.4.5. Ahora, dada una subsucesión $\vec{h} = \langle h_{i_0}, ..., h_{i_{k-1}} \rangle$ de H tal que $h_{i_0} > h_1$ y $h_{i_{k-1}} \leq m - n + k + 1$, definimos

$$F'_{\gamma_1}(\vec{h}) = \text{mín}\{0 < j \leq k - 2 \mid F_{\gamma_1}(\vec{h}_j) \neq F_{\gamma_1}(\vec{h}_{j+1})\}$$

En caso que ese mínimo no exista, definimos $F'_{\gamma_1}(\vec{h}) = 0$. Como la función F'_{γ_1} es una $(k-1)$-coloración de $[H]^k$, por PH*, existe un subconjunto homogéneo $H_1 \subset H$ de F'_{γ_1} tal que $|H_1| > \text{mín}\, H_1 + n$. Sea $m_1 := |H_1| - 1$. Denotemos como $h^1_0 < h^1_2 < ... < h^1_{m_1}$ los elementos de H_1. Usando el mismo argumento de la demostración del hecho 4.4.4, podemos concluir que $F'_{\gamma_1} \upharpoonright [H_1]^k = 0$. Escogemos como $h_{j_2} = h^1_0$ y definimos como $a_1 = F_{\gamma_1}(h^1_0, ..., h^1_{k-2})$. Notemos que por el mismo argumento de la proposición 4.4.5, para toda subsucesión $\langle h^1_{i_0}, ..., h^1_{i_{k-2}} \rangle$ de H_1 se cumple que $a_1 = F_{\gamma_1}(h^1_{i_0}, ..., h^1_{i_{k-2}})$. Establecemos como $T^1_\psi = \{a_1\}$ y $H^1_\psi = H_1$.

i-ésimo cuantificador. Denotemos como γ_{i-1} a la subfórmula de ψ asociada al $(i-1)$-ésimo cuantificador. Supongamos que ya están definidos T^{i-1}_ψ y H^{i-1}_ψ tales que para todo $\vec{a} \in T^{i-1}_\psi$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h^{i-1}_{\alpha_{i+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h^{i-1}_{\alpha_{k+1}}} \rangle \models \gamma_{i-1}(\vec{a}, b)$ para toda subsucesión $\langle h^{i-1}_{\alpha_{i+1}}, ..., h^{i-1}_{\alpha_{k+1}} \rangle$ de H^{i-1}_ψ; además que ya se seleccionó un número h_{j_i} donde $h_{j_i} \in H^{i-1}_\psi$. Para escoger la estructura del i-ésimo cuantificador hay 2 casos posibles.

Caso universal. Si el i-ésimo cuantificador es un universal, entonces la subfórmula γ_{i-1} es de la forma $\forall x_i \gamma_i(x_1, ..., x_i, x)$. Escogemos como $h_{j_{i+1}}$ al siguiente número que sigue después de h_{j_i} en H^{i-1}_ψ. Por hipótesis, para todo

$\vec{a} \in T_\psi^{i-1}$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{i+1}}}, \mathcal{M}_{<h^{i-1}_{\alpha_{i+2}}} ..., \mathcal{M}_{<h^{i-1}_{\alpha_{k+1}}} \rangle \models \gamma_{i-1}(\vec{a}, b)$ para toda subsucesión $\langle h^{i-1}_{\alpha_{i+2}}, ..., h^{i-1}_{\alpha_{k+1}} \rangle$ de H_ψ^{i-1}. Por lo tanto, si establecemos como $T_\psi^i = T_\psi^{i-1} \times \mathcal{M}_{<h_{j_{i+1}}}$ y $H_\psi^i = H_\psi^{i-1}$, se cumple que todo $\vec{a} \in T_\psi^i$ satisface que $\langle \mathcal{M}_{<h^i_{\alpha_{i+2}}}, ..., \mathcal{M}_{<h^i_{\alpha_{k+1}}} \rangle \models \gamma_i(\vec{a}, b)$ para toda subsucesión $\langle h^i_{\alpha_{i+2}}, ..., h^i_{\alpha_{k+1}} \rangle$ de H_ψ^i.

Caso existencial. Si el i-ésimo cuantificador es un existencial, entonces la subfórmula de $\psi(x)$ asociada a ese cuantificador es de la forma $\exists x_i \gamma_i(x_1, ..., x_i, x)$. Para cada $\vec{a} \in T_\psi^{i-1}$ definimos una función de la siguiente manera: dada una subsucesión $\vec{h} = \langle h_{i_0}, ..., h_{i_{k-i-1}} \rangle$ de H_ψ^{i-1}, se define

$$F^{\vec{a}}_{\gamma_i}(h_{i_0}, ..., h_{i_{k-i-1}}) := \text{mín}\{a_i < h_{i_0} \mid \mathcal{M}_{\vec{h}} \models \gamma_i(\vec{a}, a_i, b)\}$$

Como el conjunto $T_\psi^{i-1} \times \{1, ..., k-i-1\}$ es finito, consideremos $g_i \in \mathcal{M}$ una enumeración, que empiece en 1, de ese conjunto. Ahora, dada una subsucesión $\vec{h} = \langle h_{i_0}, ..., h_{i_{k-i}} \rangle$ de H_ψ^{i-1}, tal que $h_{i_0} > h_{j_i}$, definimos:

$$F'_{\gamma_i}(\vec{h}) = \text{mín}\{g_i(\vec{a}, j) \mid F^{\vec{a}}_{\gamma_i}(\vec{h}_j) \neq F^{\vec{a}}_{\gamma_i}(\vec{h}_{j+1}) \text{ donde } \vec{a} \in T_\psi^{i-1}, 0 < j \leq k-i-1\}$$

En caso que ese mínimo no exista, definimos $F'_{\gamma_i}(\vec{h}) = 0$. Notemos que la función F'_{γ_i} es una $(j_i^{dp(\psi)} \cdot n)$-coloración de $[H_\psi^{i-1}]^{k-i+1}$. Por PH*, existe un subconjunto homogéneo $H_i \subset H_\psi^{i-1}$ de F'_{γ_i} tal que $|H_i| > \text{mín}\, H_i + n$. Sea $m_i := |H_i| - 1$. Denotemos como $h_0^i < h_2^i < ... < h^i_{m_i}$ los elementos de H_i. Razonando como la demostración del hecho 4.4.4 podemos concluir que $F'_{\gamma_i} \restriction [H_i]^{k-i+1} = 0$. Escogemos como $h_{j_{i+1}} = h_0^i$. Para cada $\vec{a} \in T_\psi^{i-1}$, definimos como $a_i^{\vec{a}} = F^{\vec{a}}_{\gamma_i}(h_0^i, ..., h^i_{k-i-1})$. Notemos que por el mismo argumento de la proposición 4.4.5, para toda subsucesión $\langle h^i_{i_0}, ..., h^i_{i_{k-i-1}} \rangle$ de H_i se cumple que $a_i^{\vec{a}} = F^{\vec{a}}_{\gamma_i}(h^i_{i_0}, ..., h^i_{i_{k-i-1}})$. Establecemos como $T_\psi^i = \{(\vec{a}, a_i^{\vec{a}}) \mid \vec{a} \in T_\psi^{i-1}\}$ y $H_\psi^i = H_i$.

Al final de la construcción obtenemos el $(\mathcal{L}, dp(\psi)+1)$-modelo $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_1}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{dp(\psi)+1}}} \rangle$, y una colección de testigos T_ψ^i para cada $1 \leq i \leq dp(\psi)$ que son "invariantes" a la lista $H_\psi^{dp(\psi)}$. Para terminar la construcción escogemos como $h_{j_{dp(\psi)+2}}, ..., h_{j_{k+1}}$ a los elementos que siguen después de $h_{j_{dp(\psi)+1}}$ en la lista $H_\psi^{dp(\psi)}$. Veamos por inducción sobre los cuantificadores de ψ que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_1}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \psi(b)$.

Primer cuantificador.

Caso existencial. Si ψ es de la forma $\exists x_1 \gamma(x_1, x)$, entonces seleccionamos el testigo $b_1 \in \mathcal{M}_{<h_{j_2}}$ que aparece en T_ψ^1 y pasamos al siguiente cuantificador para verificar que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_2}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma(b_1, b)$

Caso universal. Si ψ es de la forma $\forall x_1 \gamma(x_1, x)$ entonces, por construcción, $\mathcal{M}_{<h_{j_2}} = T^1_\psi$. Notemos que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_2}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \psi(b)$ por la proposición 4.4.5. Luego para todo $k' > dp(\psi)$ tal que $k+1-k' > 2$; y para todo $c \in \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1-k'}}}$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1-k'}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma(c, b)$. Falta verificar que para todo $c \in \mathcal{M}_{<h_{j_2}}$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_2}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma(c, b)$; para esto seguimos con el siguiente cuantificador.

i-ésimo cuantificador. Denotemos como γ_{i-1} a la subfórmula de ψ asociada al $(i-1)$-ésimo cuantificador. Supongamos que falta verificar que para todo $\vec{a} \in T^{i-1}_\psi$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_i}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_{i-1}(\vec{a}, b)$.

Caso existencial. Si γ_{i-1} es de la forma $\exists x_i \gamma_i(x_1, ..., x_i, x)$ entonces, por construcción, por cada $\vec{a} \in T^{i-1}_\psi$ existe un testigo $b^{\vec{a}}_i \in \mathcal{M}_{<h_{j_{i+1}}}$ tal que $(\vec{a}, b^{\vec{a}}_i) \in T^i_\psi$. Pasamos al siguiente cuantificador para verificar que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{i+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_i(\vec{a}, b^{\vec{a}}_i, b)$ para cada $(\vec{a}, b^{\vec{a}}_i) \in T^i_\psi$.

Caso universal. Si γ_{i-1} es de la forma $\forall x_i \gamma_i(x_1, ..., x_i, x)$ entonces $T^i_\psi = T^{i-1}_\psi \times \mathcal{M}_{j_{i+1}}$. Por construcción, para todo $\vec{a} \in T^{i-1}_\psi$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{i+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_{i-1}(\vec{a}, b)$; luego, para todo $k' > dp(\gamma_i)$ tal que $k+1-k' > i+1$, y para todo $d \in \mathcal{M}_{j_{k+1-k'}}$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1-k'}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_i(\vec{a}, d, b)$. Nos falta verificar que para todo $(\vec{a}, c) \in T^i_\psi$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{i+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_i(\vec{a}, c, b)$.

Al llegar al último cuantificador, falta verificar que todo $\vec{a} \in T^{dp(\psi)}_\psi$ satisface que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{dp(\psi)+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_{dp(\psi)}(\vec{a}, b)$. Gracias a la construcción, para todo $\vec{a} \in T^{dp(\psi)}_\psi$ se cumple que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{dp(\psi)+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_k}} \rangle \models \gamma_{dp(\psi)}(\vec{a}, b)$. Como $\gamma_{dp(\psi)}$ no tiene cuantificadores, podemos concluir que $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_{dp(\psi)+1}}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \gamma_{dp(\psi)}(\vec{a}, b)$ para todo $\vec{a} \in T^{dp(\psi)}_\psi$. Por lo tanto $\langle \mathcal{M}_{<h_{j_1}}, ..., \mathcal{M}_{<h_{j_{k+1}}} \rangle \models \psi(b)$.

□

Si se logra demostrar la conjetura 4.4.6 entonces el mínimo elemento que cumple ψ se mantiene para toda subsucesión de $\vec{\mathcal{M}}$.

Corolario 4.4.7. *Sea k tal que $dp(\psi) + 1 \leq k < n$. Dadas dos subsucesiones $\langle h_{i_1}, ..., h_{i_k} \rangle$ y $\langle h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}} \rangle$ de H tales que $i_k < m - n + k$ y $j_k \leq m - n + k + 1$, se cumple que*

$$F_\psi(h_{i_1}, ..., h_{i_k}) = F_\psi(h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}})$$

Demostración. Por la conjetura 4.4.6 existe una subsucesión $\langle h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}} \rangle$ de H tal que $j_{k+1} \leq m - n + k + 1$, que satisface

$$F_\psi(h_1, ..., h_k) = F_\psi(h_{j_1}, ..., h_{j_{k+1}})$$

Luego por la proposición 4.4.5 se obtiene el resultado.

□

Si denotamos como $a = F_\psi(h_1, ..., h_n)$, por el corolario 4.4.7 para todo $k > dp(\psi)$ tal que $n - k > 0$ se cumple que $a = F_\psi(h_{n-k}, ..., h_n)$. Acá aparece el tercer "hueco" de la demostración. Para demostrar que $\mathcal{M}_{\vec{m}}$ cumple

$$\forall y(\psi(y) \to a \leq y)$$

tenemos que ver que para todo $k > dp(\psi)$ tal que $n - k > 0$, y para todo $b \in \mathcal{M}_{<h_{n-k}}$, si $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \not\models \neg\psi(b)$ entonces $a \leq b$. No obstante, el resultado que tenemos es que si $\mathcal{M}^{[n-k,n]} \models \psi(b)$ entonces $a \leq b$. Nuevamente el problema aparece por la implicación. Si se logran sobrepasar esas dificultades, al final se obtiene que $\mathcal{M}_{\vec{m}} \models \mathrm{LNP}(\psi)$.

Fin de la posible demostración de la conjetura 4.4.2

Lista de Figuras

Bibliografía

[1] C. Switzer, *Independence in Arithmetic: The Method of (L, n)-Models*, Mathematics ArXiv. arXiv: 1906.04273 [math.LO], 2019.

[2] S. Shelah, *On logical sentences in PA*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 112, 12 1984.

[3] J. E. Quinsey, *Some Problems in Logic: Applications of Kripke's Notion of Fulfilment,* PhD thesis, St. Catherine's College, Oxford, arXiv:1904.10540 [math.LO], 1980.

[4] M. G. Olsson, *A Model-Theoretic Proof of Gödel's Theorem: Kripke's Notion of Fulfilment*, MSc thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, 2017.

[5] H. Towsner, *Hindman's Theorem: An Ultrafilter Argument in Second Order Arithmetic*, Journal of Symbolic Logic. 76. 10.2178/jsl/1294171005, 2011.

[6] H. Towsner, *A Simple Proof and Some Difficult Examples for Hindman's Theorem*, Notre Dame J. Formal Logic 53 (1) 53 - 65, 2012.

[7] W. Gasarch, C. Kruskal, A. Parrish, *Van der Waerden's Theorem: Variants and "Applications"*, 2018.

[8] J. L. Bell, M. Machover, *A course in mathematical logic*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[9] M. C. Fitting, *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North-Holland Publishing Company, 1969.

[10] R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, M. Y. Vardi, *Reasoning About Knowledge*, Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

[11] D. M. Gabbay, *Model Theory for Intuitionistic Logic*, Mathematical Logic Quarterly, 18: 49-54, 1972.

[12] J. Avigad, *Forcing in Proof Theory*. The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 10, no. 3, 2004, pp. 305–333. JSTOR, www.jstor.org/stable/3185188. Accessed 16 Jan. 2021.

[13] S.G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, 2nd edn. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.