Geometría transformacional, 1° semestre matemáticas:

un registro de caso, y una comparación de dos libros.

Andrés Villaveces - *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*

25° Encuentro de Geometría - Universidad Pedagógica Nacional

Etapas

Geometría transformacional en primer semestre de matemáticas

Lorenzo Acosta / Laurent Lafforgue

Experiencias

Una pregunta frecuentemente discutida (?) ...

¿Qué temas, qué enfoque, qué visión es conveniente en el primer semestre de la carrera, en la entrada a la Universidad, para estudiantes que más adelante harán investigación, trabajarán con otros profesionales en matemática aplicada, o enseñarán matemáticas en universidades o colegios?

- ¿Matemática estructural?
- ¿Fundamentos?
- ¿Geometría?

Experiencia personal (1986-I / 2021-II)

En un intento de acotar temas tan amplios (y combinarlos con la experiencia personal), por primera vez hace unos meses asumí la responsabilidad de enseñar el curso Geometría Elemental, obligatorio para estudiantes de primer semestre de Matemáticas en la Universidad Nacional, siguiendo un enfoque transformacional desde el primer día.

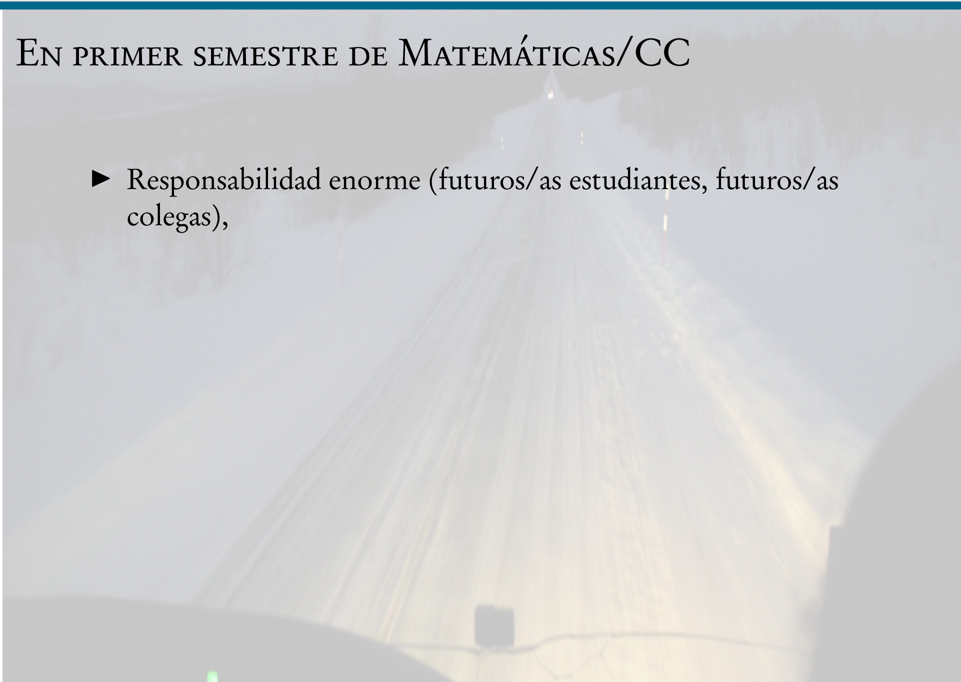
Estudio de caso (I)

Tuve la fortuna de poder usar las notas (aún en borrador) de Lorenzo Acosta, basadas en esa visión, y experimentar con la enseñanza de la geometría desde esta perspectiva, con un grupo de primer semestre. A lo largo del curso surgieron muchas actividades laterales (proyectos de estudiantes en temas que van desde revisiones históricas hasta etnomatemática, pasando por aplicaciones a la música y en el caso de un grupo muy motivado por temas más recientes, un estudio del semiplano de Poincaré), y pude comprobar la riqueza de posibilidades del enfoque transformacional, y algunas de sus dificultades.

Un libro estudiado, uno inspirador

En mi conferencia, planeo abordar de nuevo las preguntas originales e ilustrarlas con varias situaciones concretas y reales que surgieron durante el curso. También haré una comparación crítica entre dos textos recientes relevantes al tema: el libro Geometría sin medida en planos afines (etapa de pre-publicación, Lorenzo Acosta Gempeler, Universidad Nacional de Colombia) y el libro Géométrie plane et algèbre (2018, Hermann, París - Laurent Lafforgue, Institut des Hautes Études Scientifiques, Francia).

En primer semestre de Matemáticas/CC



- Responsabilidad enorme (futuros/as estudiantes, futuros/as colegas),

En primer semestre de Matemáticas/CC

- Responsabilidad enorme (futuros/as estudiantes, futuros/as colegas),
- Vienen de formación muy variada,

En primer semestre de Matemáticas/CC

- Responsabilidad enorme (futuros/as estudiantes, futuros/as colegas),
- Vienen de formación muy variada,
- Visión muy diversa (programadores/as, humanistas, estilo aún colegio a veces),

En primer semestre de Matemáticas/CC

- Responsabilidad enorme (futuros/as estudiantes, futuros/as colegas),
- Vienen de formación muy variada,
- Visión muy diversa (programadores/as, humanistas, estilo aún colegio a veces),
- ¿Qué <u>necesitan</u> saber?

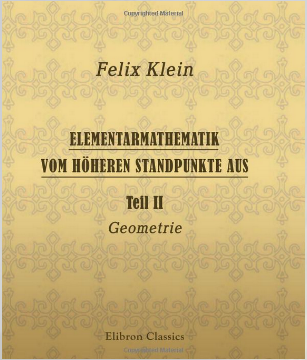
En primer semestre de Matemáticas/CC

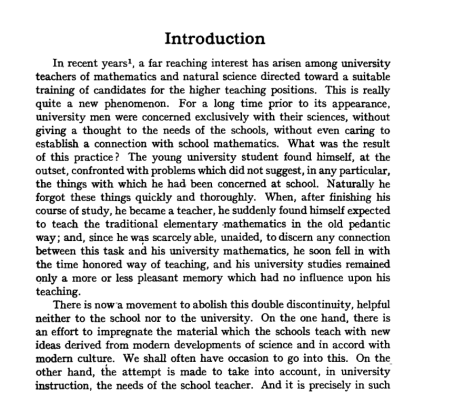
- Responsabilidad enorme (futuros/as estudiantes, futuros/as colegas),
- Vienen de formación muy variada,
- Visión muy diversa (programadores/as, humanistas, estilo aún colegio a veces),
- ¿Qué necesitan saber?
- O mejor: ¿qué experiencia de pensamiento/construcción puede servir?

FUND / ESTRUCT / GEOM

Voces kleinianas: "abolir la doble discontinuidad"

Felix Klein confronta en su serie "Matemática elemental desde un punto de vista avanzado" la disociación entre el quehacer matemático y su enseñanza.





Introduction

In recent years[1], a far reaching interest has arisen among university teachers of mathematics and natural science directed toward a suitable training of candidates for the higher teaching positions. This is really quite a new phenomenon. For a long time prior to its appearance, university men were concerned exclusively with their sciences, without giving a thought to the needs of the schools, without even caring to establish a connection with school mathematics. What was the result of this practice? The young university student found himself, at the outset, confronted with problems which did not suggest, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally he forgot these things quickly and thoroughly. When, after finishing his course of study, he became a teacher, he suddenly found himself expected to teach the traditional elementary mathematics in the old pedantic way; and, since he was scarcely able, unaided, to discern any connection between this task and his university mathematics, he soon fell in with the time honored way of teaching, and his university studies remained only a more or less pleasant memory which had no influence upon his teaching.

There is now a movement to abolish this double discontinuity, helpful neither to the school nor to the university. On the one hand, there is an effort to impregnate the material which the schools teach with new ideas derived from modern developments of science and in accord with modern culture. We shall often have occasion to go into this. On the other hand, the attempt is made to take into account, in university instruction, the needs of the school teacher. And it is precisely in such

Una visión compre(he)nsiva de la geometría

Historia, transformaciones, Euclides, en vaivén

especial to add to what was said in the foreword to Part I. However, a word seems necessary concerning the new form which this second part has assumed.

This form is, in fact, quite unlike that of Part I. I made up my mind to give, above all, a *comprehensive view* of the field of geometry, of such a range as I should wish every teacher in a higher school to have; the discussions about geometric *instruction* were pushed into the background and were placed in connected form at the end, insofar as there was room.

The choice of this new order was motivated partly by the desire to avoid a stereotyped form. There were, however, weightier and deeper reasons. In geometry we possess no unified textbooks corresponding to the general level of the science, such as exist in algebra and analysis, thanks to the model French Cours. We find, rather, a single page here, another there, of an ex-

... en conexión con otras disciplinas

Álgebra, Cálculo Diferencial, etc. - Klein va en contra de la hiperespecialización

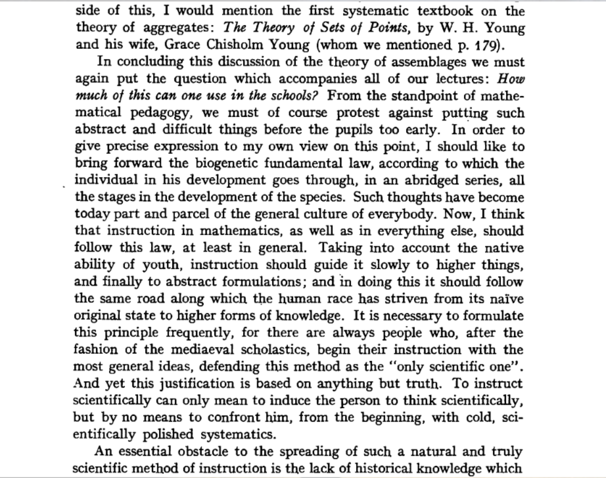
notions are found in Grassmann. Even in texts on geometry today, vectors are often scarcely mentioned as independent concepts.

From time to time, it has been proposed that geometry, as an independent subject of instruction, be separated from mathematics, and that, generally speaking, mathematics, for purposes of instruction, be resolved into its separate disciplines. In fact, there have been created, especially in foreign universities, special professorships for geometry, algebra, differential calculus, etc. From the preceding discussion, I should like to draw the inference that the creation of such narrow limits is not advisable. On the contrary, the greatest possible living interaction of the different branches of the science which have a common interest should be permitted. Each single branch should feel itself, in principle, as representing mathematics as a whole. Following the same idea, I favor the most active relations between mathematicians and the representatives of all the different sciences.

With this, I bring our digression to an end and I shall resume considera-

Siguiendo la «ley bio-genética» fundamental

«Todo individuo recrea la evolución de su especie, en tiempo corto»



side of this, I would mention the first systematic textbook on the theory of aggregates: *The Theory of Sets of Points*, by W. H. Young and his wife, Grace Chisholm Young (whom we mentioned p. 179).

In concluding this discussion of the theory of assemblages we must again put the question which accompanies all of our lectures: *How much of this can one use in the schools?* From the standpoint of mathematical pedagogy, we must of course protest against putting such abstract and difficult things before the pupils too early. In order to give precise expression to my own view on this point, I should like to bring forward the biogenetic fundamental law, according to which the individual in his development goes through, in an abridged series, all the stages in the development of the species. Such thoughts have become today part and parcel of the general culture of everybody. Now, I think that instruction in mathematics, as well as in everything else, should follow this law, at least in general. Taking into account the native ability of youth, instruction should guide it slowly to higher things, and finally to abstract formulations; and in doing this it should follow the same road along which the human race has striven from its naïve original state to higher forms of knowledge. It is necessary to formulate this principle frequently, for there are always people who, after the fashion of the mediaeval scholastics, begin their instruction with the most general ideas, defending this method as the "only scientific one". And yet this justification is based on anything but truth. To instruct scientifically can only mean to induce the person to think scientifically, but by no means to confront him, from the beginning, with cold, scientifically polished systematics.

An essential obstacle to the spreading of such a natural and truly scientific method of instruction is the lack of historical knowledge which

Mucho énfasis (naturalmente) en transformaciones

riques, entitled *Vorlesungen über projective Geometrie*.[1]

For general purposes of instruction, I prefer another method of developing the subject of geometry, to which I now turn. For simplicity's sake I confine myself to *geometry of the plane*.

1. Development of Plane Geometry with Emphasis upon Motions

We shall take as fundamental notions *point* and *straight line*, and we shall assume for them axioms of *connection, order, and continuity*. Here again, the theorems of connection contain only the facts of perception *that through any two points there always passes one and only one line*, while two lines can have either *one point or none in common*. Concerning the *order* of the points on a line we shall retain the conditions already indicated above. A careful formulation of the additional axioms of order and of the axioms of continuity will be considered during the course of the investigation.

With this foundation, we shall now avoid the roundabout use of projectivities, and we shall introduce immediately the *group of ∞^3 motions in the plane*, in order, through it, to reach our goal, the system of plane analytic

the point system consisting of all the corners S, undergoes an affine transformation with every change of the total jointed system. This will become clear (see Fig. 53) if we make an oblique coordinate system out of two of the diagonal lines of the shears. We can get additional points belonging to the same affine transformation if we insert additional shears of the same sort between any two points S of the triangle and consider their corners S. (In the figure, these shears are represented by their diagonal lines.) On this principle, we can set up [1] plane and space models of variable affine systems of the greatest variety.

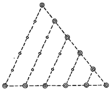


Fig. 53

I shall not go farther into the discussion of properties of affine transformations. Instead, I shall show how these transformations can be used.

In the first place, an example of how they *supply an excellent device for the discovery of new geometric theorems*. The affine transformation of the sphere into the ellipsoid, explained above, enables us to get *new theorems on the ellipsoid* from known properties of the sphere. For example, if we con-

Introduction

In recent years[1], a far reaching interest has arisen among university teachers of mathematics and natural science directed toward a suitable training of candidates for the higher teaching positions. This is really quite a new phenomenon. For a long time prior to its appearance, university men were concerned exclusively with their sciences, without giving a thought to the needs of the schools, without even caring to establish a connection with school mathematics. What was the result of this practice? The young university student found himself, at the outset, confronted with problems which did not suggest, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally he forgot these things quickly and thoroughly. When, after finishing his course of study, he became a teacher, he suddenly found himself expected to teach the traditional elementary mathematics in the old pedantic way; and, since he was scarcely able, unaided, to discern any connection between this task and his university mathematics, he soon fell in with the time honored way of teaching, and his university studies remained only a more or less pleasant memory which had no influence upon his teaching.

There is now a movement to abolish this double discontinuity, helpful neither to the school nor to the university. On the one hand, there is an effort to impregnate the material which the schools teach with new ideas derived from modern developments of science and in accord with modern culture. We shall often have occasion to go into this. On the other hand, the attempt is made to take into account, in university instruction, the needs of the school teacher. And it is precisely in such

Finalmente: geometría transformacional

En primer semestre cierto enfoque más tradicional (Euclides) ha predominado, con algunos resultados muy buenos (e.g. María Falk de Losada en años 80), pero es hora de reenfocar (siguiendo el espíritu kleiniano) las razones de lo que se hace.
En 2016, Lorenzo Acosta intentó por primera vez un enfoque puramente transformacional. Seguí sus pasos en 2021-II. A continuación cuento un poco cómo enfoqué los temas.

Plan

- Geometría tranformacional en primer semestre de matemáticas
  - Un reto siempre difícil: enseñar en primer semestre
  - ¿Por qué geometría transformacional?
- Lorenzo Acosta / Laurent Lafforgue
  - Dos libros recientes
    - En Colombia: Lorenzo Acosta
    - En Francia: Laurent Lafforgue
  - Algunas notas comparativas
- Experiencias
  - Blogs de grupos de estudiantes

Geometría transformacional

El énfasis en grupos de transformaciones (y más recientemente, en grupoides, en toda clase de objetos algebraicos complejos) fue entronizado principalmente por Klein en el siglo XIX, en el libro que hemos visto antes.

Geometría transformacional

El énfasis en grupos de transformaciones (y más recientemente, en grupoides, en toda clase de objetos algebraicos complejos) fue entronizado principalmente por Klein en el siglo XIX, en el libro que hemos visto antes.
Más adelante, Hilbert y Artin darían pasos enormes en esa dirección. Artin produce su Geometric Algebra en 1957: un texto dirigido a estudiantes de final de pregrado o inicio de posgrado, que a la vez decanta temas que provenían desde Klein (y Abel y Galois, pero muy indirectamente) y produce un enfoque coherente para cursos relativamente avanzados.

Geometría transformacional

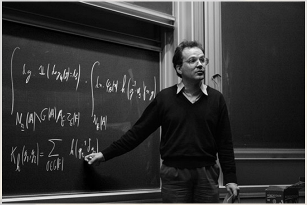
El énfasis en grupos de transformaciones (y más recientemente, en grupoides, en toda clase de objetos algebraicos complejos) fue entronizado principalmente por Klein en el siglo XIX, en el libro que hemos visto antes.

Más adelante, Hilbert y Artin darían pasos enormes en esa dirección. Artin produce su Geometric Algebra en 1957: un texto dirigido a estudiantes de final de pregrado o inicio de posgrado, que a la vez decanta temas que provenían desde Klein (y Abel y Galois, pero muy indirectamente) y produce un enfoque coherente para cursos relativamente avanzados.

Otros libros famosos tenían otros enfoques (Moise, Yaglom), con pasos leves por los grupos de transformaciones, pero aún muy anclados en general en los Elementos.

Dos libros inspiradores (de maneras distintas), recientes

- **2016**: primera versión (borrador) de La geometría a través de las transformaciones en el contexto de los planos afines - Notas de clase. Lorenzo Acosta Gempeler, Universidad Nacional de Colombia.
- **2018**: Géométrie Plane et Algèbre. Laurent Lafforgue. Hermann, Paris.



En Colombia: el libro de Acosta

El libro de L. Acosta ha sido ya usado (al menos dos veces, por el autor y por mí) recientemente, en la Universidad Nacional, carrera de matemáticas, primer semestre (materia Geometría Elemental).

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

La geometría a través de las transformaciones en el contexto de los planos afines

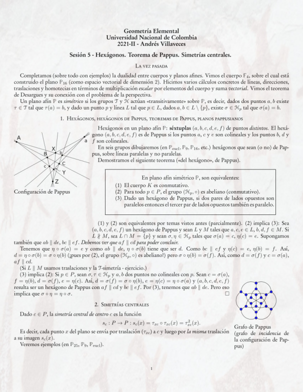
Notas de clase

Lorenzo Acosta Gempeler
Profesor Titular

Temas: planos afines, dilataciones, cuerpos, planos simétricos, rotaciones y ángulos (a partir de grupos), ortogonalidades, etc.

Índice general

Naturalmente, mucho material de apoyo mío



Geometría Elemental
Universidad Nacional de Colombia
2021-II - Andrés Villaveces

Sesión 5 - Hexágonos. Teorema de Pappus. Simetrías centrales.

La vez pasada

Completamos (sobre todo con ejemplos) la dualidad entre cuerpos y planos afines. Vimos el cuerpo $\mathbb{F}_4$, sobre el cual está construido el plano $\mathbb{P}_{16}$ (como espacio vectorial de dimensión 2). Hicimos varios cálculos concretos de líneas, direcciones, traslaciones y homotecias en términos de multiplicación *escalar* por elementos del cuerpo y suma *vectorial*. Vimos el teorema de Desargues y su conexión con el problema de la perspectiva.

Un plano afín $\mathbb{P}$ es *simétrico* si los grupos $\mathcal{T}$ y $\mathcal{H}$ actúan «transitivamente» sobre $\mathbb{P}$, es decir, dados dos puntos a, b existe $\tau \in \mathcal{T}$ tal que $\tau(a) = b$, y dado un punto p y línea L tal que $p \in L$, dados $a, b \in L \setminus \{p\}$, existe $\sigma \in \mathcal{H}_p$ tal que $\sigma(a) = b$.

1. Hexágonos, hexágonos de Pappus, teoremas de Pappus, planos pappusianos

A
a
X
B
b
C
c
Y
Z

Configuración de Pappus

Hexágonos en un plano afín $\mathbb{P}$: **séxtuplas** (a, b, c, d, e, f) de puntos *distintos*. El hexágono (a, b, c, d, e, f) es de Pappus si los puntos a, c y e son colineales y los puntos b, d y f son colineales.

En seis grupos dibujaremos (en $\mathbb{P}_{eucl}$, $\mathbb{P}_9$, $\mathbb{P}_{16}$, etc.) hexágonos que sean (o no) de Pappus, sobre líneas paralelas y no paralelas.

Demostramos el siguiente teorema («del hexágono», de Pappus).

En plano afín simétrico $\mathbb{P}$, son equivalentes:
(1) El cuerpo K es conmutativo.
(2) Para todo $p \in P$, el grupo $(\mathcal{H}_p, \circ)$ es abeliano (conmutativo).
(3) Dado un hexágono de Pappus, si dos pares de lados opuestos son paralelos entonces el tercer par de lados opuestos también es paralelo.

(1) y (2) son equivalentes por temas vistos antes (parcialmente). (2) implica (3): Sea (a, b, c, d, e, f) un hexágono de Pappus y sean L y M tales que $a, c, e \in L$, $b, d, f \in M$. Si $L \nparallel M$, sea $L \cap M = \{p\}$ y sean $\sigma, \eta \in \mathcal{H}_p$ tales que $\sigma(a) = c$, $\eta(c) = e$. Supongamos también que $ab \parallel de$, $bc \parallel ef$. *Debemos ver que $af \parallel cd$ para poder concluir.*

Tenemos que $\eta \circ \sigma(a) = e$ y como $ab \parallel de$, $\eta \circ \sigma(b)$ tiene que ser d. Como $bc \parallel ef$ y $\eta(c) = e$, $\eta(b) = f$. Así, $d = \eta \circ \sigma(b) = \sigma \circ \eta(b)$ (¡pues por (2), el grupo $(\mathcal{H}_p, \circ)$ es abeliano!) pero $\sigma \circ \eta(b) = \sigma(f)$. Así, como $d = \sigma(f)$ y $c = \sigma(a)$, $af \parallel cd$.

(Si $L \parallel M$ usamos traslaciones y la $\mathcal{T}$-simetría - ejercicio.)

(3) implica (2): Si $p \in P$, sean $\sigma, \tau \in \mathcal{H}_p$ y a, b dos puntos no colineales con p. Sean $c = \sigma(a)$, $f = \eta(b)$, $d = \sigma(f)$, $e = \eta(c)$. Así, $d = \sigma(f) = \sigma \circ \eta(b)$, $e = \eta(c) = \eta \circ \sigma(a)$ y (a, b, c, d, e, f) resulta ser un hexágono de Pappus con $af \parallel cd$ y $bc \parallel ef$. Por (3), tenemos que $ab \parallel de$. Pero eso implica que $\sigma \circ \eta = \eta \circ \sigma$. $\square$

Grafo de Pappus (grafo de *incidencia* de la configuración de Pappus)

2. Simetrías centrales

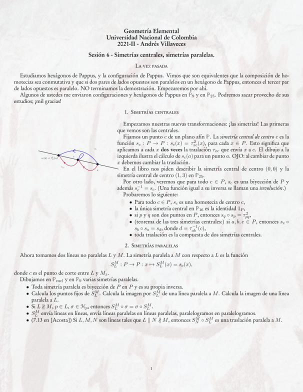
Dado $c \in P$, la *simetría central de centro* c es la función

$$s_c : P \to P : s_c(x) = \tau_{xc} \circ \tau_{xc}(x) = \tau_{xc}^2(x).$$

Es decir, cada punto x del plano se envía por traslación (τ_{xc}) a c y luego por *la misma* traslación a su imagen $s_c(x)$.

Veremos ejemplos (en $\mathbb{P}_{25}$, $\mathbb{P}_9$, $\mathbb{P}_{eucl}$).

1



Geometría Elemental
Universidad Nacional de Colombia
2021-II - Andrés Villaveces

Sesión 6 - Simetrías centrales, simetrías paralelas.

La vez pasada

Estudiamos hexágonos de Pappus, y la configuración de Pappus. Vimos que son equivalentes que la composición de homotecias sea conmutativa y que si dos pares de lados opuestos son paralelos en un hexágono de Pappus, entonces el tercer par de lados opuestos es paralelo. NO terminamos la demostración. Empezaremos por ahí.

Algunos de ustedes me enviaron configuraciones y hexágonos de Pappus en $\mathbb{P}_9$ y en $\mathbb{P}_{25}$. Podremos sacar provecho de sus estudios; ¡mil gracias!

1. Simetrías centrales

Empezamos nuestras nuevas transformaciones: ¡las simetrías! Las primeras que vemos son las centrales.

Fijamos un punto c de un plano afín $\mathbb{P}$. La *simetría central de centro* c es la función $s_c : P \to P : s_c(x) = \tau_{xc}^2(x)$, para cada $x \in P$. Esto significa que aplicamos a cada x **dos veces** la traslación τ_{xc} que envía x a c. El dibujo a la izquierda ilustra el cálculo de $s_c(a)$ para un punto a. OJO: al cambiar de punto x debemos cambiar la traslación.

En el libro nos piden describir la simetría central de centro $(0, 0)$ y la simetría central de centro $(1, 3)$ en $\mathbb{P}_{25}$.

Por otro lado, veremos que para todo $c \in P$, s_c es una biyección de P y además $s_c^{-1} = s_c$. (Una función igual a su inversa se llaman una *involución*.)

Probaremos lo siguiente:

- Para todo $c \in P$, s_c es una homotecia de centro c,
- la única simetría central en $\mathbb{P}_{16}$ es la identidad 1_P,
- si p y q son dos puntos en P, entonces $s_q \circ s_p = \tau_{pq}^2$,
- (teorema de las tres simetrías centrales:) si $a, b, c \in P$, entonces $s_c \circ s_b \circ s_a = s_d$, donde $d = \tau_{ab}^{-1}(c)$,
- toda traslación es la compuesta de dos simetrías centrales.

2. Simetrías paralelas

Ahora tomamos dos líneas no paralelas L y M. La simetría paralela a M con respecto a L es la función

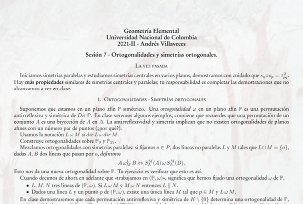
$$S_L^M : P \to P : x \mapsto S_L^M(x) = s_c(x),$$

donde c es el punto de corte entre L y M_x.

Dibujamos en $\mathbb{P}_{eucl}$ y en $\mathbb{P}_9$ varias simetrías paralelas.

- Toda simetría paralela es biyección de P en P y es su propia inversa.
- Calcula los puntos fijos de S_L^M. Calcula la imagen por S_L^M de una línea paralela a M. Calcula la imagen de una línea paralela a L.
- Si $L \nparallel M$, $p \in L$, $\sigma \in \mathcal{H}_p$, entonces $S_L^M \circ \sigma = \sigma \circ S_L^M$.
- S_L^M envía líneas en líneas, envía líneas paralelas en líneas paralelas, paralelogramos en paralelogramos.
- (7.13 en [Acosta]) Si L, M, N son líneas tales que $L \parallel N \nparallel M$, entonces $S_N^M \circ S_L^M$ es una traslación paralela a M.

1



Geometría Elemental
Universidad Nacional de Colombia
2021-II - Andrés Villaveces

Sesión 7 - Ortogonalidades y simetrías ortogonales.

La vez pasada

Iniciamos simetrías paralelas y estudiamos simetrías centrales en varios planos; demostramos con cuidado que $s_q \circ s_p = \tau_{pq}^2$. Hay **más propiedades** similares de simetrías centrales y paralelas; tu responsabilidad es completar las demostraciones que no alcanzamos a ver en clase.

1. Ortogonalidades - Simetrías ortogonales

Suponemos que estamos en un plano afín $\mathbb{P}$ simétrico. Una *ortogonalidad* ω en un plano afín $\mathbb{P}$ es una permutación antirreflexiva y simétrica de $Dir\,\mathbb{P}$. En clase veremos algunos ejemplos; conviene que recuerdes que una permutación de un conjunto A es una biyección de A en A. La antirreflexividad y simetría implican que no existen ortogonalidades de planos afines con un número par de puntos (¿por qué?).

Usamos la notación $L\,\omega\,M$ si $dir\,L\,\omega\,dir\,M$.

Construye ortogonalidades sobre $\mathbb{P}_9$ y $\mathbb{P}_{25}$.

Mezclamos ortogonalidades con simetrías paralelas: si fijamos $o \in P$, dos líneas no paralelas L y M tales que $L \cap M = \{o\}$, dadas A, B dos líneas que pasan por o, *definimos*

$$A\,\omega_M^L\,B \Leftrightarrow S_L^M(A)\,\omega\,S_L^M(B).$$

Esto nos da una nueva ortogonalidad sobre $\mathbb{P}$. Tu ejercicio es verificar que esto es así.

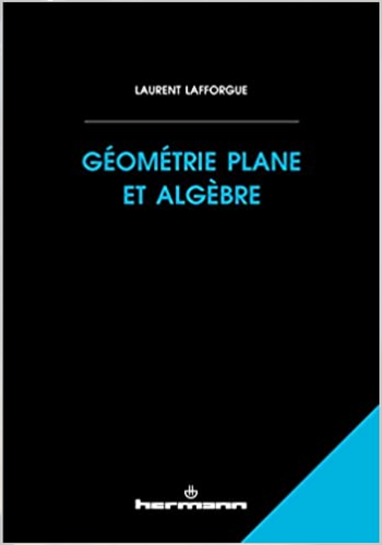
Cuando decimos de ahora en adelante que «trabajamos en $(\mathbb{P}, \omega)$», significa que hemos fijado una ortogonalidad ω de $\mathbb{P}$.

- L, M, N tres líneas de $(\mathbb{P}, \omega)$. Si $L\,\omega\,M$ y $M\,\omega\,N$ entonces $L \parallel N$.
- Dados una línea L y un punto p de $(\mathbb{P}, \omega)$, existe una única línea M tal que $p \in M$ y $L\,\omega\,M$.

En clase demostraremos que cada permutación antirreflexiva y simétrica de $K \setminus \{0\}$ determina una ortogonalidad de $\mathbb{P}$,

En Francia: el libro reciente de Lafforgue (2018)

Laurent Lafforgue (medallista Fields, 2002, trabajos en programa de Langlands, profesor en IHES, ahora trabaja en Huawei Francia) escribió este libro interesantísimo a partir de un curso en la EPP (École professorale de Paris) con el objetivo de mostrar la equivalencia entre planos afines euclidianos y la teoría de cuerpos y sus ecuaciones lineales o cuadráticas.



Detalles

Sommaire

Notas de los dos libros [GTTCPA], [GPA]

- El público ideal es distinto. [GTTCPA] está claramente pensado para estudiantes de matemáticas. Es altamente exigente en su parte inicial; inicia de entrada usando axiomas y transformaciones. Pero a la vez va introduciendo conceptos de cuerpos subyacentes a planos afines de manera pausada. Es muy gráfico, muy en el espíritu pedagógico de G. Papy (Bruselas, 1920-2011).

Notas de los dos libros [GTTCPA], [GPA]

- El público ideal es distinto. [GTTCPA] está claramente pensado para estudiantes de matemáticas. Es altamente exigente en su parte inicial; inicia de entrada usando axiomas y transformaciones. Pero a la vez va introduciendo conceptos de cuerpos subyacentes a planos afines de manera pausada. Es muy gráfico, muy en el espíritu pedagógico de G. Papy (Bruselas, 1920-2011).
- El público de [GPA] es principalmente profesores de colegio que ya han pasado por agrégation en Francia; profesionales de la matemática que deben ampliar su panorama para enseñar mejor en los colegios. Lafforgue usa libremente teoría de categorías, da una versión un poco extraña de teoría de modelos para armar su comparación de teorías. Solo en página 75 empieza los planos afines.

Algunas conclusiones

- El libro [GPA] no es utilizable, ni remotamente, en clase. Pero sí es un excelente libro de cabecera para profesores/as tanto de colegio como de primeros semestres de universidad. Se trata de un matemático de calibre muy alto contemporáneo, hablando con parte de su comunidad, y explicando algunos puentes. Muy kleiniano en espíritu (aunque, creo, mucho menos libre al hacer asociaciones culturales que Klein). Algunas de sus construcciones dan un marco muy interesante para temas más avanzados.

Algunas conclusiones

- El libro [GPA] no es utilizable, ni remotamente, en clase. Pero sí es un excelente libro de cabecera para profesores/as tanto de colegio como de primeros semestres de universidad. Se trata de un matemático de calibre muy alto contemporáneo, hablando con parte de su comunidad, y explicando algunos puentes. Muy kleiniano en espíritu (aunque, creo, mucho menos libre al hacer asociaciones culturales que Klein). Algunas de sus construcciones dan un marco muy interesante para temas más avanzados.
- El libro [GTTCPA] es utilizable (¡por lo menos eso creo!) pero requiere mucho trabajo complementario por parte del profesor/la profesora que lo enseñe. No es totalmente autocontenido ni se puede soltar a la mayoría de (nuestros/as) estudiantes el libro. Sin embargo, con guía, es un excelente texto, mejor que la mayoría que vemos por ahí.

Algunas conclusiones

Yo terminé agregando algunos apartados históricos que no están en el libro, a lo largo del semestre, y tuve dos clases magistrales (María Clara Cortés, sobre Piero della Francesca y geometría proyectiva - Alejandro Martín, sobre Marcel Duchamp y geometría transformacional).

Plan

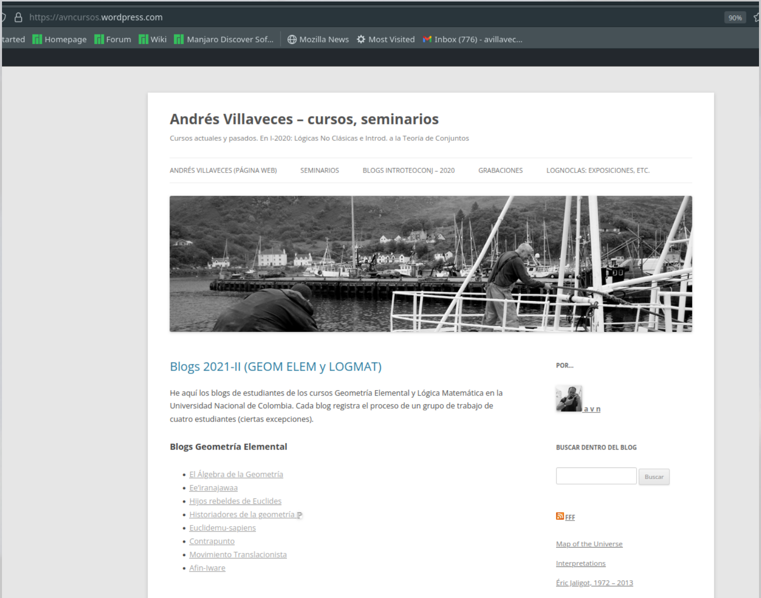
- Geometría tranformacional en primer semestre de matemáticas
  - Un reto siempre difícil: enseñar en primer semestre
  - ¿Por qué Geometría transformacional?
- Lorenzo Acosta / Laurent Lafforgue
  - Dos libros recientes
    - En Colombia: Lorenzo Acosta
    - En Francia: Laurent Lafforgue
  - Algunas notas comparativas
- Experiencias
  - Blogs de grupos de estudiantes

Experiencias

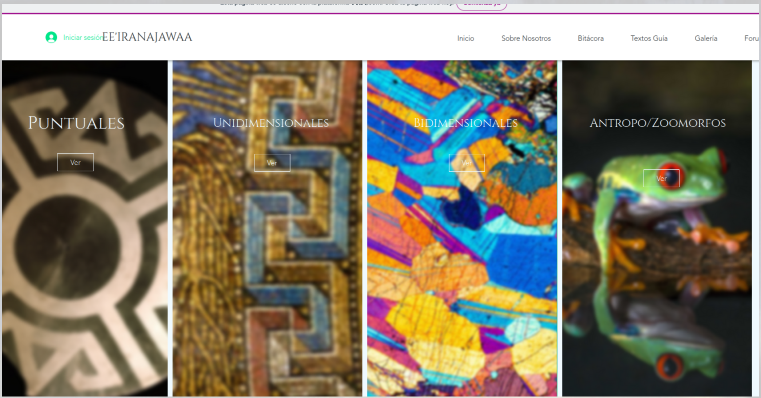
Esta última sección de experiencias, lo que realmente se pudo hacer, el «trabajo de campo», me parece fundamental. Además de las magistrales y los laboratorios (y además de las dos conferencias especiales de M.C. Cortés y A. Martín), los/as estudiantes tuvieron desde el principio de semestre que conformar grupos y estudiar temas que fueron encontrando en trabajo acompañado a lo largo del semestre. Produjeron **bitácoras** (blogs).

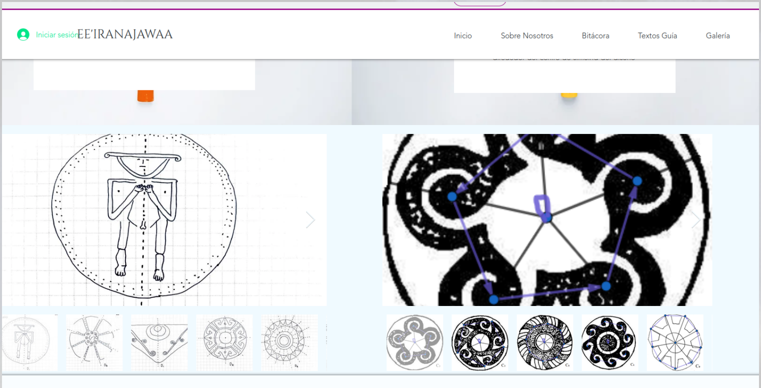
Los temas de los blogs

- **El Álgebra de la Geometría:** indagaron más a fondo en el tema central
- **Ee'iranajawaa:** hicieron algo de etnomatemática (grupos) en Museo del Oro
- **Hijos rebeldes de Euclides:** estudiaron el semiplano de Poincaré, expandiendo temas del curso
- **Historiadores de la geometría $\mathbb{P}$:** geometría proyectiva, Desargues
- **Euclidemu-sapiens:** Historia asociada al Quinto Postulado
- **Contrapunto:** teoría musical en planos afines finitos, experimentación de escalas surgidas de transformaciones afines en $\mathbb{P}_{25}$
- **Movimiento Translacionista:** produjeron software básico para estudiar planos afines finitos.


https://avncursos.wordpress.com
90%
tarted Homepage Forum Wiki Manjaro Discover Sof... Mozilla News Most Visited Inbox (776) - avillavec...
Andrés Villaveces – cursos, seminarios
Cursos actuales y pasados. En I-2020: Lógicas No Clásicas e Introd. a la Teoría de Conjuntos
ANDRÉS VILLAVECES (PÁGINA WEB) SEMINARIOS BLOGS INTROTEOCONJ – 2020 GRABACIONES LOGNOCLAS: EXPOSICIONES, ETC.
Blogs 2021-II (GEOM ELEM y LOGMAT)
He aquí los blogs de estudiantes de los cursos Geometría Elemental y Lógica Matemática en la Universidad Nacional de Colombia. Cada blog registra el proceso de un grupo de trabajo de cuatro estudiantes (ciertas excepciones).
Blogs Geometría Elemental
El Álgebra de la Geometría
Ee'iranajawaa
Hijos rebeldes de Euclides
Historiadores de la geometría
Euclidemu-sapiens
Contrapunto
Movimiento Translacionista
Afin-Iware
POR...
a v n
BUSCAR DENTRO DEL BLOG
Buscar
FFF
Map of the Universe
Interpretations
Éric Jaligot, 1972 – 2013


Iniciar sesión
EE'IRANAJAWAA
Inicio
Sobre Nosotros
Bitácora
Textos Guía
Galería
ORFEBRERÍA PRECOLOMBINA
Clasificación transformacional
Ver más


Iniciar sesión
EE'IRANAJAWAA
Inicio
Sobre Nosotros
Bitácora
Textos Guía
Galería
PUNTUALES
Ver
UNIDIMENSIONALES
Ver
BIDIMENSIONALES
Ver
ANTROPO/ZOOMORFOS
Ver


Iniciar sesión
EE'IRANAJAWAA
Inicio
Sobre Nosotros
Bitácora
Textos Guía
Galería

esión EE'IRANAJAWAA

Inicio | Sobre Nosotros | Bitácora

Jeiner Andres Parody Ochoa
1 dic 2021 · 1 min.

PRIMER ACERCAMIENTO

En este apartado se realiza una síntesis del trabajo de campo de los estudiantes en el museo del oro del banco de la república de...

6 visualizaciones 0 comentarios

Marby Sofia Arque Gomez
1 dic 2021 · 1 min.

PRIMER TRABAJO DE CAMPO

Al momento de elegir la temática del proyecto no tenia certeza de cómo esta seria abordada, sin embargo, cautivo mi atención por...

4 visualizaciones 0 comentarios

://geometria185527353.wordpress.com/category/bitacora-colectiva/

omepage Forum Wiki Manjaro Discover Sof... Mozilla News Most Visited Inbox (776) - avillavec...

Crea tu sitio web con WordPress.com Comenzar

Hijos rebeldes de Euclides

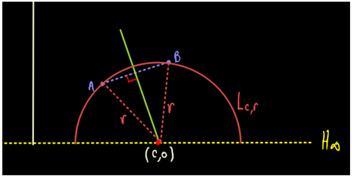
Una mirada a la geometría

- ¿Hijos rebeldes de Euclides?
- Semiplano de Poincaré
- **Bitácora Colectiva**
- Blogs Individuales
- Nosotros

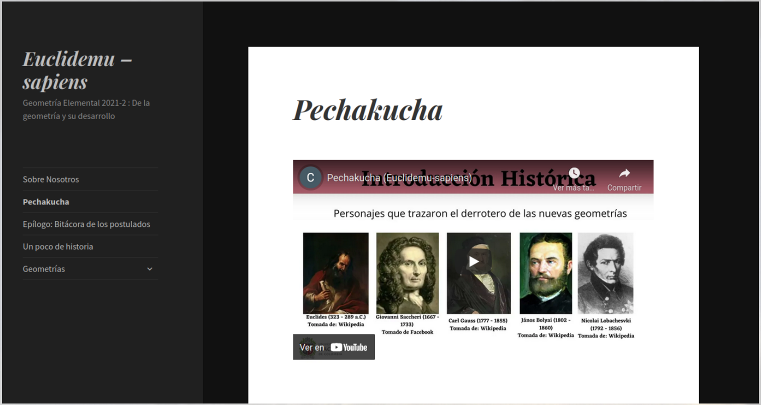
existe otra línea de la forma $L_{c,r}$ a la que pertezcan los puntos A y B.

Prueba por contradicción.

Suponga que A y B también pertenecen a la línea $L_{c',r'}$. Entonces $(c',0)$ es equidistante r' de A y B, esto quiere decir que existe una bisectriz l al segmento AB. Pero l corta H_∞ en un sólo punto que era $(c,0)$. Por lo que $(c,0) = (c',0)$ y $r = r'$ y $L_{c',r'} = L_{c,r}$.



5 de noviembre, 2021 Jhon Deivid Acosta Ruiz Bitácora Colectiva Deja un comentario


Euclidemu – sapiens
Geometría Elemental 2021-2 : De la geometría y su desarrollo
Sobre Nosotros
Pechakucha
Epílogo: Bitácora de los postulados
Un poco de historia
Geometrías
Pechakucha
Pechakucha (Euclidemu-sapiens)
Introducción Histórica
Compartir
Personajes que trazaron el derrotero de las nuevas geometrías
Euclides (323 - 289 a.C.) Tomada de: Wikipedia
Giovanni Saccheri (1667 - 1733) Tomado de Facebook
Carl Gauss (1777 - 1855) Tomada de: Wikipedia
János Bolyai (1802 - 1860) Tomada de: Wikipedia
Nicolai Lobachesvki (1792 - 1856) Tomada de: Wikipedia
Ver en YouTube

Mostrando las entradas con la etiqueta **P25**. Mostrar todas las entradas

martes, 14 de diciembre de 2021

Primer experimento - P25 y la escala pentatónica.

Primer experimento

La escala pentatónica y P25

¿Se puede musicalizar un plano afín
y planificar una melodía?

1) *Acerca de P25.*

En clase hemos conocido muchos planos de los que muchos no habíamos siquiera escuchado, todos con propiedades comunes y cada uno con características muy especiales. Uno de ellos es el plano afín de 25 puntos, P25.

P25 es un plano de n x n puntos, n = 5, donde:

-Por dos puntos distintos pasa una única línea.

-Dada una línea *l* y un punto externo *x*, existe una única línea paralela a *l* que pasa por *x*.

Páginas de nuestros cre

- mrodriguezza@unal.
- msalamancacu@una
- hperilla@unal.edu.co

- Referencias
- Física del sonido
- Aritmética en las figu rítmicas
- Transformaciones en música
- ¿Homotecias en los instrumentos de cue
- ¿Pueden las escalas musicales ser definic traslaciones?
- Curiosidades: músico matemáticos (o mate músicos, si así dese llamarlos)
- ¿Bach compuso mús fractal?
- Primer experimento

Entradas populares

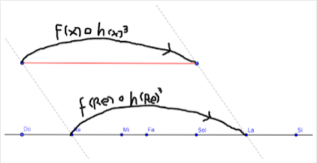

¿Por contr


Contr

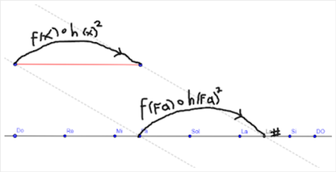
Puesto que un Intervalo es la composición de tonos y semitonos, dependiendo de la configuración de cada uno se compondrá la adecuada cantidad de estos.

Para que sea más fácil de comprender, he aquí la representación gráfica de algunos intervalos usando traslaciones

Quinta justa de Re



Cuarta justa de Fa

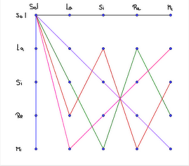


Aplicar un intervalo a una nota es igual a sumarle su equivalente en tonos y semitonos, en el caso de la quinta justa estamos sumando 3 tonos y medio a Re, lo que resulta en La, y en el caso de la cuarta justa estamos sumando 2 tonos y medio a Fa, que resulta en La#.

Llegados a este punto podemos ver las escalas musicales como el conjunto de imágenes de cierta configuración de intervalos más x. Así podemos empezar a definir algunas escalas:

teoriamusical.blogspot.com/search/label/P25

Forum Wiki Manjaro Discover Sof... Mozilla News Most Visited Inbox (776) - avillavec...



P25 y las notas de la escala pentatónica.

Las líneas son las correspondientes a las seis direcciones

que pasan por en punto (sol, sol).

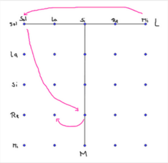
Para este experimento vamos a tomar solo las líneas que pasan por el punto (sol, sol). ¿Cómo sonaría cada una?

1. **Línea Verde.**

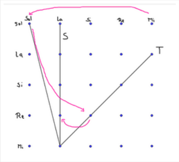
La línea verde tiene como puntos (sol, sol), (si, la), (mi, si), (la, re), (re, mi).

Los puntos en los que resumí la melodía son (sol, mi), (sol, sol), (re, si), (re, la).

Esta vez las líneas que conectan los puntos no son del todo evidentes, así que valdrá la pena ir por partes.



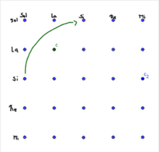
-Si definimos L ortogonal a M, tenemos que la imagen de la simetría ortogonal de (sol, mi) es (sol, sol).



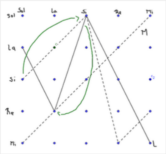
-Si ahora determinamos S ortogonal a T, tenemos que la imagen al aplicar la simetría ortogonal a S de (sol, sol) es (re, si).

Los puntos en los que resumí la melodía son (si, sol), (sol, si), (re, la), (re, la) (sol, re) (re, la) (re, la) (sol, re)

Esta también será analizada por partes:



-Hay una simetría central de centro c (la, la) que manda (si, sol) a (sol, si).



Esta puede verse de dos maneras:

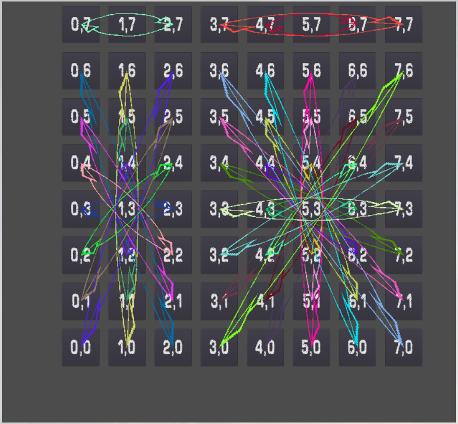
-Traslación que manda a (sol, si) sobre (re, la)

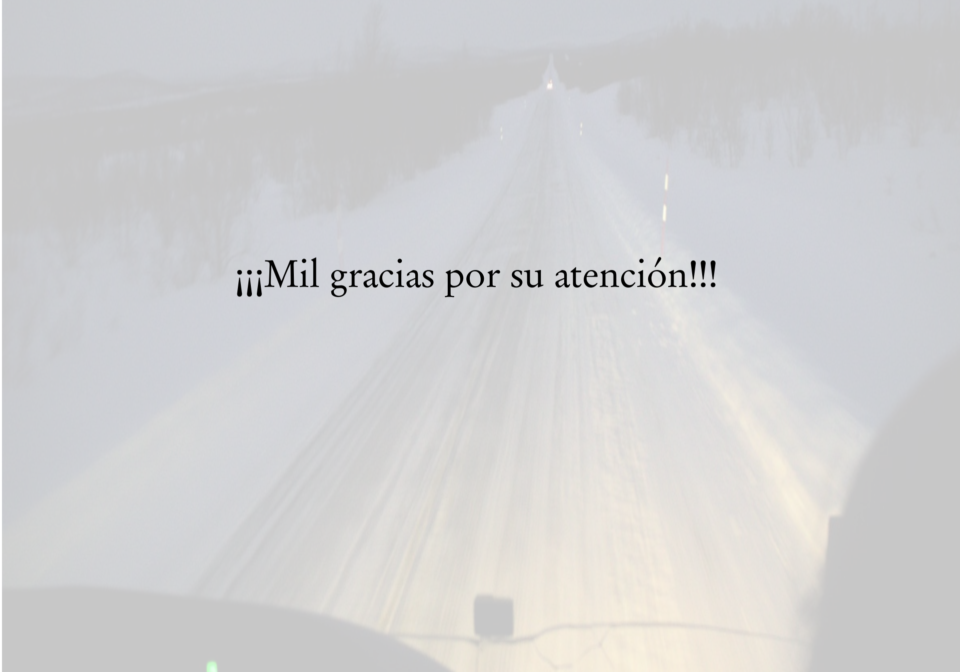
-Proyección paralela a L sobre M del punto (sol, si).

Desarrollo: El Software se realizará en las plataformas Godot y Jira, Jira es una plataforma creada por Google donde se puede programar de forma colaborativa, escogimos esta herramienta ya que podemos realizar el proyecto en tiempo real estando cada persona en su lugar de estudio. para la programación escogimos Godot el cual es software libre y código abierto, este nos facilita herramientas graficas, Inputs y funciones para trabajar por partes y atraves del tiempo.

A lo largo de nuestro desarrollo se subirán a esta plataforma las versiones de nuestro software con el fin de que las personas interesadas lo usen y realicen una retroalimentación de nuestro programa.

https://godotengine.org


0,7 1,7 2,7 3,7 4,7 5,7 6,7 7,7
0,6 1,6 2,6 3,6 4,6 5,6 6,6 7,6
0,5 1,5 2,5 3,5 4,5 5,5 6,5 7,5
0,4 1,4 2,4 3,4 4,4 5,4 6,4 7,4
0,3 1,3 2,3 3,3 4,3 5,3 6,3 7,3
0,2 1,2 2,2 3,2 4,2 5,2 6,2 7,2
0,1 1,1 2,1 3,1 4,1 5,1 6,1 7,1
0,0 1,0 2,0 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0



¡¡¡Mil gracias por su atención!!!