La lógica interna de una clase elemental abstracta

Andrés Villaveces Niño
Univ. Nacional de Colombia
Bogotá - 2021

?

$\mathcal{K}$

$\mathbb{L}$

$\mathbb{L}^{aec}_{\mathcal{K}}$

XI SIMPOSIO NORORIENTAL DE MATEMÁTICAS

Universidad Industrial de Santander UIS

⓪ Axiomatizar lo no axiomatizado
(Y estudiar limitaciones a las axiomatiz.)

① Clases elementales abstractas — ¿ por qué tan buena teoría de modelos ?

② Axiomatizar AECs : intentos anteriores y nuevos
- Shelah, V.
- Leung.

③ La lógica interna de una AEC.

⓪ Axiomatizar lo **no** axiomatizado

(Y estudiar limitaciones a las axiomatiz.)

LÓGICA | ESTRUCTURAS

$T, \sigma \xrightarrow{\text{Mod}} \mathcal{K}$

$\mathcal{K} \ni \mathfrak{A}$

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \xleftarrow{\mathrm{Th}} \mathfrak{A}$

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\text{Mod}} \dots$

¿ $\longleftarrow$ buen orden

⋮

$\mathcal{K}$ ↗ Axiomatizable (. . - -)

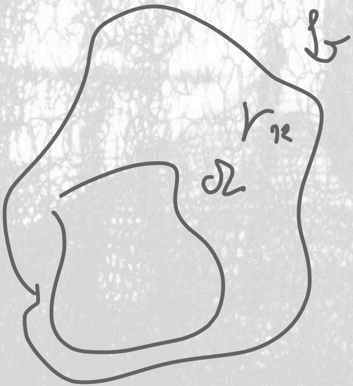
↘ No axiomatizable (buen orden)

limitación intrínseca (compacidad)

productiva de modelos interesantes

① Clases elementales abstractas — ¿por qué tan buena teoría de modelos?

En AECs, cambiamos inicialmente el énfasis brutal en φ, T, compacidad por nociones más semánticas:



$\prec_{\mathcal{K}}$, f morfismo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$

φ

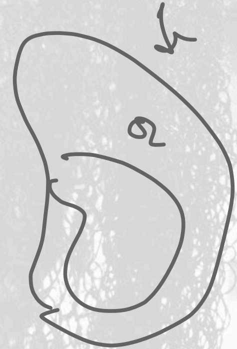
T

$T_0 \subseteq_{fin} T$

$\vdots$

inversión de énfasis

(hacia 1980)



En lugar de extraer $\prec$, f ... de T, φ, ¡hacemos de $\prec$, f ... las nociones primitivas!

subgrupo
subanillo
subgrupo puro
subestr. "elemental"

$\mathfrak{A} \prec_{\mathcal{K}} \mathfrak{B}$

extensión "perfecta"
alg. cerrada, ...

Axiomas de AECs.

Fijamos τ vocabulario. Una clase de τ-estructuras $\mathcal{K}$, y una relación binaria $\prec_{\mathcal{K}}$ son AEC si:

Axiomas de AECs.

Fijamos τ vocabulario. Una clase de τ-estructuras $\mathcal{K}$, y una relación binaria $\prec_{\mathcal{K}}$ son AEC si:

- $\prec_{\mathcal{K}}$ ordena $\mathcal{K}$
- $\mathcal{K}$, $\prec_{\mathcal{K}}$ son cerrados bajo isom.
- $\prec_{\mathcal{K}}$ refina $\subseteq$
-
-
-

Axiomas de AECs.

Fijamos τ vocabulario. Una clase de τ-estructuras $\mathcal{K}$, y una relación binaria $\prec_{\mathcal{K}}$ son AEC si:

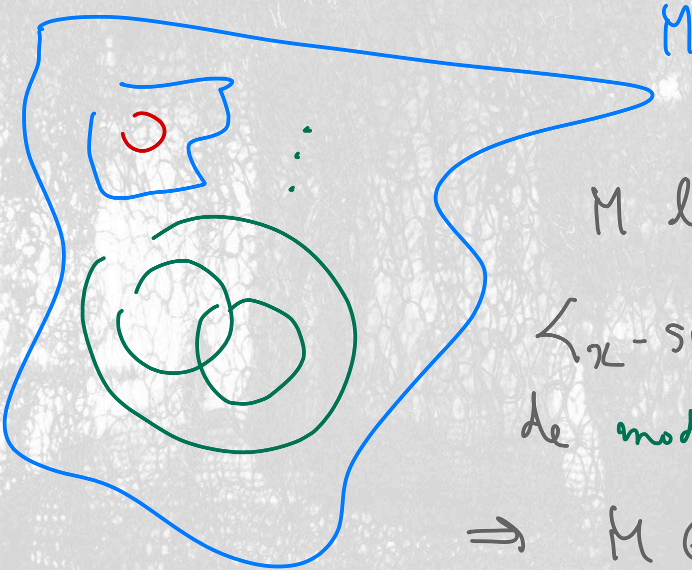
- $\prec_{\mathcal{K}}$ ordena $\mathcal{K}$
- $\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}$ son cerrados bajo isom.
- $\prec_{\mathcal{K}}$ refina $\subseteq$
- $\left.\begin{array}{l} M \subseteq N \prec_{\mathcal{K}} \tilde{N} \\ M \prec_{\mathcal{K}} \tilde{N} \end{array}\right\} \Rightarrow M \prec_{\mathcal{K}} N$
- Existe $LS(\mathcal{K})$ t.q. $\forall M \in \mathcal{K}$ si $A \subset |M|$ $\exists N \in \mathcal{K}$, $N \prec_{\mathcal{K}} M$, $|N| \leq |A| + LS(\mathcal{K})$
- $\mathcal{K}$ es cerrada bajo uniones

$$M_0 \prec_{\mathcal{K}} M_1 \prec_{\mathcal{K}} \cdots \prec_{\mathcal{K}} M_i \prec_{\mathcal{K}} M_{i+1} \prec \cdots$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i<\delta} M_i \in \mathcal{K}$$

$$\bigcup_{i<\delta} M_i \succ_{\mathcal{K}} M_0$$

$$N \succeq_{\mathcal{K}} M_i \quad \forall i<\delta \quad \Rightarrow N \succeq_{\mathcal{K}} \bigcup M_i$$



M límite de

$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$-sist. dirigido

de modelos en $\mathcal{K}$

$\Rightarrow \quad M \in \mathcal{K}$

¡Esto será **importante** más adelante!

pero...

¿por qué tan buena teoría de modelos?

↳ (tanta)

ejj. $(\mathrm{Mod}(T), \prec)$ T primer orden

$(\mathrm{Mod}(\psi), \underset{\prec}{\subseteq})$, $\psi \in L_{\omega_1\omega}$

$(\mathbb{C}^{zilb}, \prec_f)$ $\mathbb{C}^{zilb}$ el "cuerpo de Zilber"

$(\mathrm{Mod}(\psi), \prec_F)$ $\psi \in L_{\kappa\omega}$

(módulos noetherianos, $\prec_{pure}$) (Mazari-Armida)

⋮ ⋮

$(Mod(T), \prec)$ T primer orden

$(Mod(\psi), \underset{\prec}{\subseteq})$, $\psi \in L_{\omega,\omega}$

$(\mathbb{C}^{zilb}, \prec_f)$ $\mathbb{C}^{zilb}$ el "cuerpo de Zilber"

$(Mod(\psi), \prec_f)$ $\psi \in L_{\kappa\omega}$

(módulos noetherianos, $\prec_{pure}$) (Mazari-Armida)

$\vdots$ $\vdots$

(Grupos loc. fin, $\leq$)

$(\langle e^{i\hbar\, d/dt}, e^{i\hbar t} \rangle, \prec_f)$

álg. de operadores no acotados

$\vdots$

Categoricidad (Shelah, Makkai, Kolman, Grossberg, VanDieren)

Superestabilidad (Shelah, V., Grossberg, Van Dieren, Vasey, ...)

Estabilidad, ↓ (¿la Kim-Pillay)

(2) Axiomatizar AECs: intentos anteriores y nuevos $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ Shelah, V.} \\ \cdot \text{ Leung.} \end{array} \right.$

Fijamos $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ una AEC con

$\kappa = LS(\mathcal{K})$.

Axiomatizaciones (result. anteriores)

(2) Axiomatizar AECs: intentos anteriores y nuevos $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ Shelah, V.} \\ \cdot \text{ Leung.} \end{array} \right.$

Fijamos $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ una L-AEC con $\kappa = LS(\mathcal{K})$.

Axiomatizaciones (result. anteriores)

- Teorema de Presentación de Shelah

$\mathcal{K}$ es $PC_{\kappa, 2^\kappa}$

$\exists\, L' \supseteq L \quad |L'| \leq 2^\kappa, \quad \mathcal{K} = \{ M \restriction_L : M \models \psi \}$

ψ una

problema: ¡muy grande!

- Baldwin - Boney (2016)

$\mathcal{K}$ es clase de reductos de modelos de $L_{(2^\kappa)^+, \kappa^+}$ - teoría

- Teorema de Presentación de Shelah

$\mathcal{K}$ es $PC_{\kappa, 2^\kappa}$

$\exists\, L' \supseteq L \quad |L'| \leq 2^\kappa, \quad \mathcal{K} = \{ M \upharpoonright L : M \models \psi \}$

ψ una

problema: ¡muy grande!

- Baldwin - Boney (2016)

$\mathcal{K}$ es clase de reductos de modelos de $L_{(2^\kappa)^+, \kappa^+}$ - teoría

- Shelah - Vasey $\quad \mathcal{K}$ con $LS(\mathcal{K}) = \aleph_0$, $\aleph_0$-stable, $\aleph_0$-AP

$I(\aleph_0, \mathcal{K}) \leq \aleph_0 \implies \mathcal{K}$ es $PC_{\aleph_0}$

- Kueker: $\mathcal{K}$ cerrada bajo $\equiv_{\infty, \omega_1}$ - eq. elt.

  $+$ L ctble $\qquad \mathcal{K} = Mod(\psi)$, $\psi \in L_{\infty, \omega_1}$

- En 2020, 2021 surgieron dos nuevas axiomatizaciones:

2020

Shelah-V.

$$K = \mathrm{Mod}(\psi_\kappa)$$

$$\psi_\kappa \in L_{\beth_2(\kappa)^{+3},\, \kappa^+}$$

en vocabulario L

2021

Leung

$$K = \mathrm{Mod}(\psi_L)$$

$$\psi_L \in L_{(2^\kappa)^+,\, \kappa^+}(\omega \cdot \omega)$$

en L

Cuantificador de juego EF long. $\omega \cdot \omega$

2020

2021

Shelah - V.

$K = \mathrm{Mod}(\psi_K)$

$\psi_K \in \mathbb{L}_{\beth_2(\kappa)^{+3}, \kappa^+}$

en vocabulario L

!

Leung

$K = \mathrm{Mod}(\psi_L)$

$\psi_L \in \mathbb{L}_{(2^\kappa)^+, \kappa^+}(\omega \cdot \omega)$

en L

Cuantificador de juego EF long. $\omega \cdot \omega$

mejor cota: $(2^\kappa)^+$

$\wedge, \vee$

$\forall x_0 \exists y_0 \ldots \forall x_i \exists y_i \ldots$

$i < \omega \cdot \omega$

mejor lógica

2021 (noviembre): redujimos a $\mathbb{L}_{(2^\kappa)^+, \kappa^+}$

2020 2021

Shelah-V.

$\mathbb{K} = \mathrm{Mod}(\psi_\kappa)$

$\psi_\kappa \in L_{\beth_2(\kappa)^{+3},\, \kappa^+}$

en vocabulario L !

mejor lógica

2021 (noviembre): redujimos a $L_{(2^\kappa)^+,\, \kappa^+}$

PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 150, Number 1, January 2022, Pages 371–380
https://doi.org/10.1090/proc/15688
Article electronically published on October 19, 2021

INFINITARY LOGICS AND ABSTRACT ELEMENTARY CLASSES

SAHARON SHELAH AND ANDRÉS VILLAVECES

(Communicated by Heike Mildenberger)

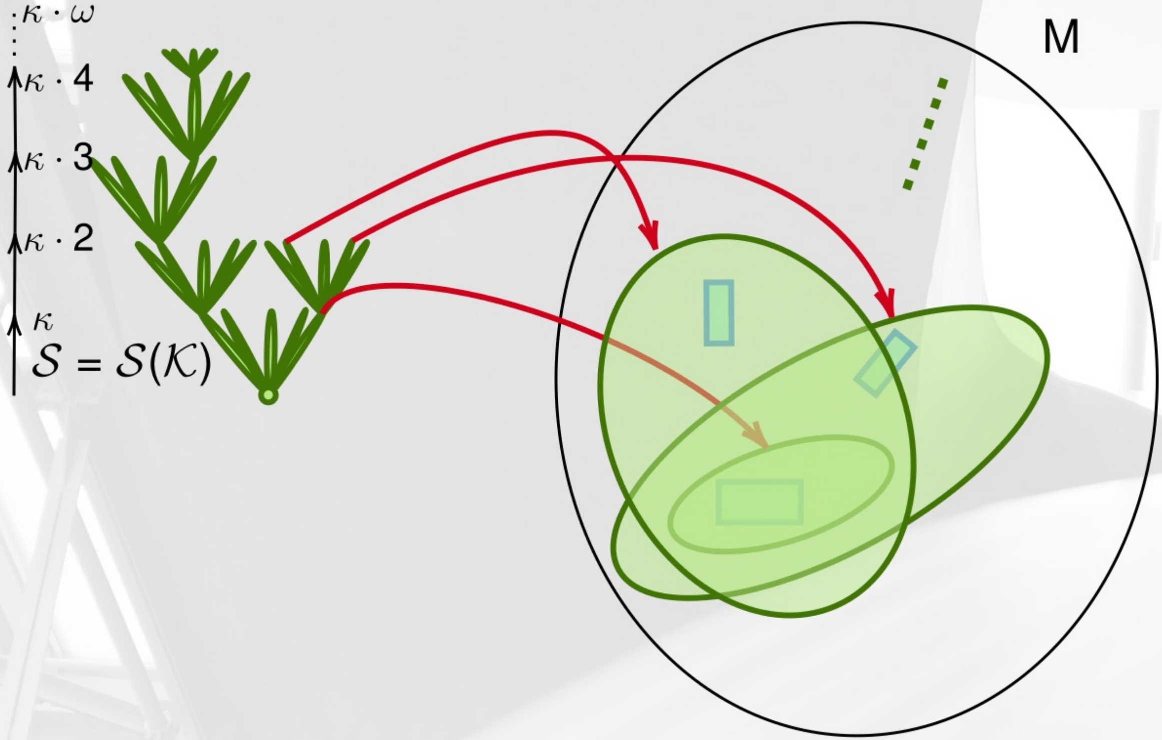
Abstract. We prove that every abstract elementary class (a.e.c.) with Löwenheim–Skolem–Tarski (LST) number κ and vocabulary τ of cardinality $\leq \kappa$ can be axiomatized in the logic $\mathbb{L}_{\beth_2(\kappa)^{+++},\kappa^+}(\tau)$. An a.e.c. $\mathcal{K}$ in vocabulary τ is therefore an EC class in this logic, rather than merely a PC class. This constitutes a major improvement on the level of definability previously given by the Presentation Theorem. As part of our proof, we define the *canonical tree* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ of an a.e.c. $\mathcal{K}$. This turns out to be an interesting combinatorial object of the class, beyond the aim of our theorem. Furthermore, we study a connection between the sentences defining an a.e.c. and the relatively new infinitary logic L^1_λ.

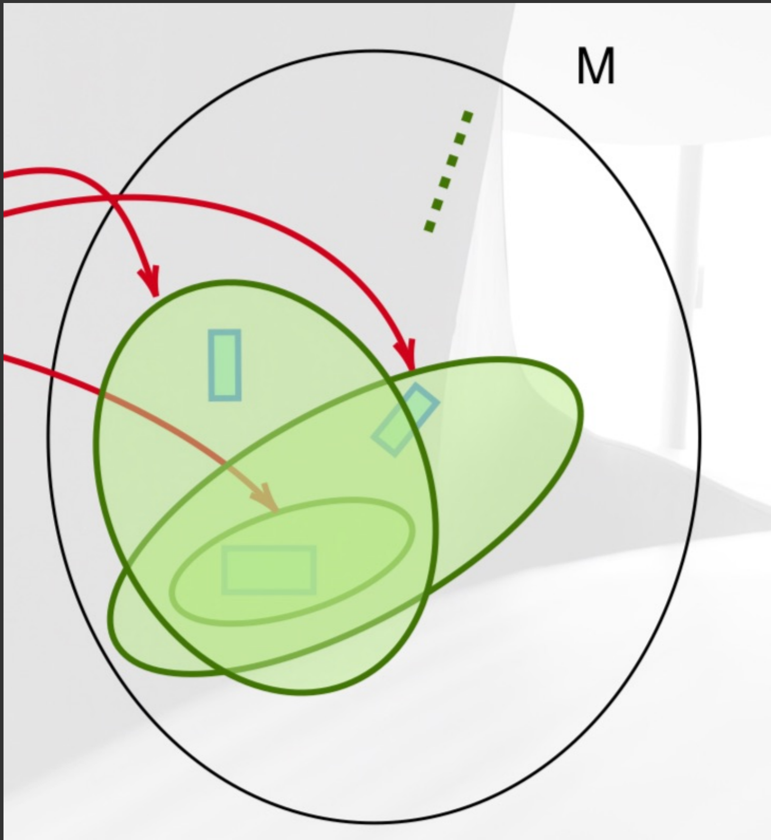
Introduction

Given an abstract elementary class (a.e.c.) $\mathcal{K}$, in vocabulary τ of size $\leq \kappa = LST(\mathcal{K})$, we prove the two following results:

- We provide an infinitary sentence *in the same vocabulary* τ of the a.e.c.

The mezcal test - Does $\mathsf{M} \in \mathcal{K}$?





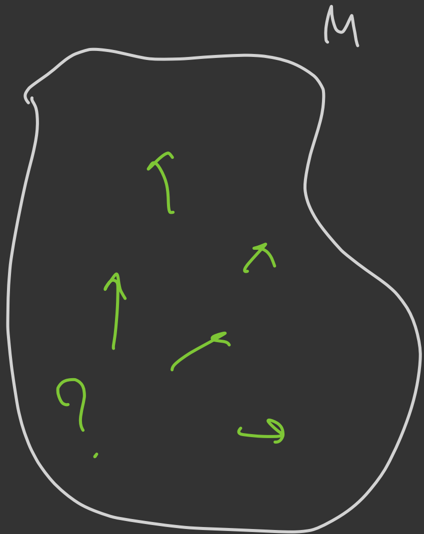
Idea de la axiomatización (nuestra):

Sea M L-estructura.

¿Cómo lograr ver a M como un límite dirigido de modelos N en $\mathcal{K}$

$|N| = \kappa = LS(\mathcal{K})$

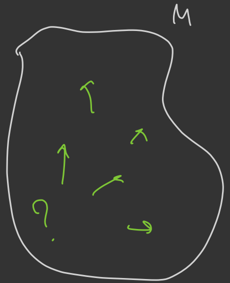
?



Usamos el "árbol canónico" de $\mathcal{K}$: modelos de tamaño $\kappa = LS(\mathcal{K})$, con dominios (universos)

$$\kappa, \quad \kappa+\kappa, \quad \kappa+\kappa+\kappa, \quad \dots$$

y todo el sistema de inmersiones "L_κ-elementales":

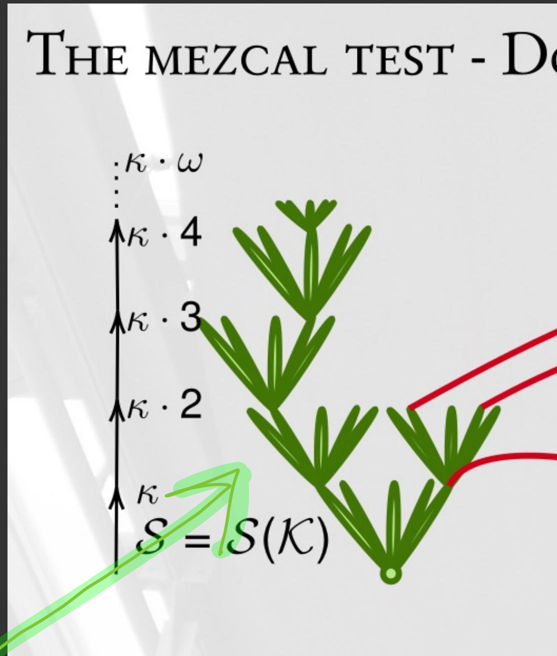


Usamos el "árbol canónico" de $\mathcal{K}$: modelos de tamaño $\kappa = LS(\mathcal{K})$, con dominios (universos)

$\kappa, \quad \kappa+\kappa, \quad \kappa+\kappa+\kappa, \quad \ldots$

y todo el sistema de inmersiones "$\prec_{\mathcal{K}}$-elementales":

$\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$: el árbol canónico de $\mathcal{K}$



(En $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$, $\quad N_1 \trianglelefteq N_2 \iff N_1 \prec_{\mathcal{K}} N_2$)

Ahora usamos la

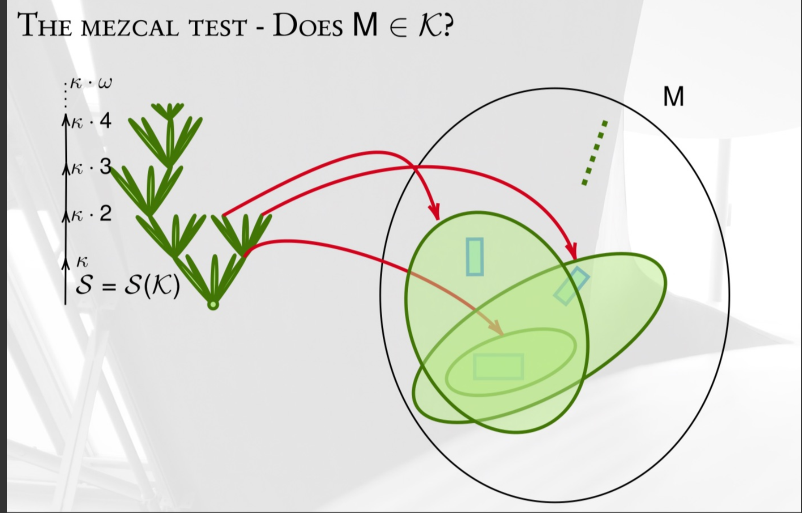
sintaxis lógica

para "someter a examen"

el modelo M —

en realidad, para

lograr $M \in \mathcal{K}$, M debe "pasar



$\beth_2(\kappa)^{++}+2$ / $\alpha < (2^{\kappa})^{+}$ exámenes"

(2020) (2021)

$I_2(\kappa)^{++}+2$ (2020) / $\alpha < (2^\kappa)^+$ (2021)

sentencias,

"aproximaciones" a $\mathcal{K}$:

$\varphi_{0,0} = \top$

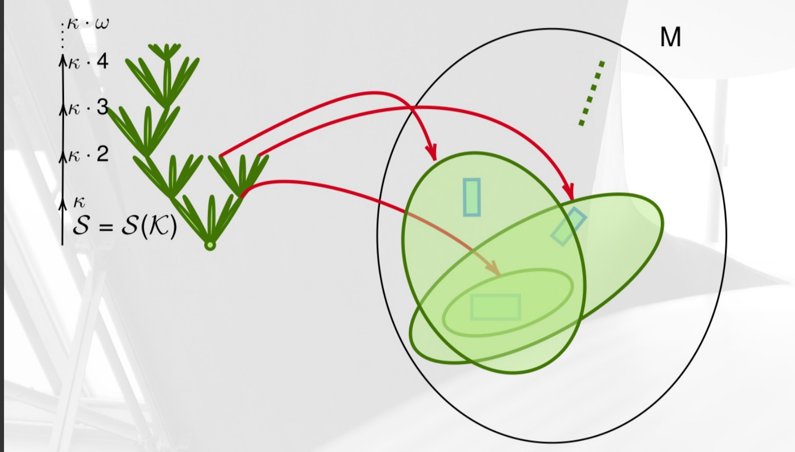
$\varphi_{1,0}$ iterar el "test" del árbol $\mathcal{S}_\kappa$

$\vdots$

$\varphi_{\alpha,0}$

$\vdots$

The mezcal test - Does $M \in \mathcal{K}$?



Formulas $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$

For M in the canonical tree $\mathcal{S}$ at level n, a formula with $\kappa \cdot n$ free variables, defined by induction on γ.

- $\gamma = 0$: $\varphi_{0,0} = \top$ ("truth"). If $n > 0$,

$$\varphi_{M,0,n} := \bigwedge \mathrm{Diag}^n_\kappa(M),$$

the atomic diagram of M in $\kappa \cdot n$ variables.

- γ limit: Then

$$\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n) := \bigwedge_{\beta<\gamma} \varphi_{M,\beta,n}(\bar{x}_n).$$

- $\gamma = \beta + 1$: Then $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$ is the $L_{\lambda^+,\kappa^+}(\tau)$ formula

$$\forall \bar{z}_{[\kappa]} \bigvee_{\substack{N \succ_{\mathcal{K}} M \\ N \in \mathcal{S}_{n+1}}} \exists \bar{x}_{=n} \left[\varphi_{N,\beta,n+1}(\bar{x}_{n+1}) \wedge \bigwedge_{\alpha<\alpha_n[N]} \bigvee_{\delta \in S[N]} z_\alpha = x_\delta \right]$$

Formulas $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$

For M in the canonical tree $\mathcal{S}$ at level n, a formula with $\kappa \cdot n$ free variables, defined by induction on γ.

- $\gamma = 0$: $\varphi_{0,0} = \top$ ("truth"). If $n > 0$,

$$\varphi_{M,0,n} := \bigwedge \mathrm{Diag}^n_\kappa(M),$$

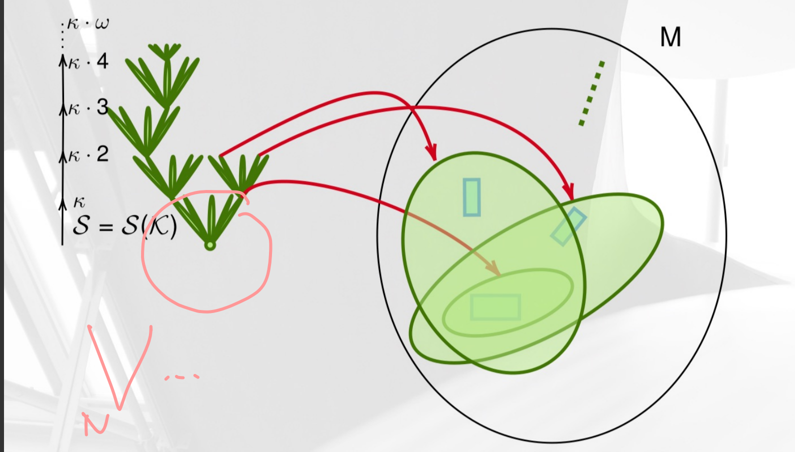
  the atomic diagram of M in $\kappa \cdot n$ variables.
- γ limit: Then

$$\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n) := \bigwedge_{\beta<\gamma} \varphi_{M,\beta,n}(\bar{x}_n).$$

- $\gamma = \beta + 1$: Then $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$ is the $L_{\lambda^+,\kappa^+}(\tau)$ formula

$$\forall \bar{z}_{[\kappa]} \bigvee_{\substack{N \succ_{\mathcal{K}} M \\ N \in \mathcal{S}_{n+1}}} \exists \bar{x}_{=n} \left[\varphi_{N,\beta,n+1}(\bar{x}_{n+1}) \wedge \bigwedge_{\alpha<\alpha_n[N]} \bigvee_{\delta \in S[N]} z_\alpha = x_\delta \right]$$

The mezcal test - Does $M \in \mathcal{K}$?



$$\varphi_{1,0} : \forall z \bigvee_{N \in \mathcal{S}_1} \left[\underbrace{\varphi_{N,0,1}(\bar{x}_1)}_{} \wedge \underbrace{\bigwedge_{\alpha<\kappa} \bigvee_{\delta<\kappa} z_\alpha = x_\delta}_{} \right]$$

tamaño κ

hay copia de N

la copia cubre z

Formulas $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$

For M in the canonical tree $\mathcal{S}$ at level n, a formula with $\kappa \cdot n$ free variables, defined by induction on γ.

- $\gamma = 0$: $\varphi_{0,0} = \top$ ("truth"). If $n > 0$,

$$\varphi_{M,0,n} := \bigwedge \mathrm{Diag}^n_\kappa(M),$$

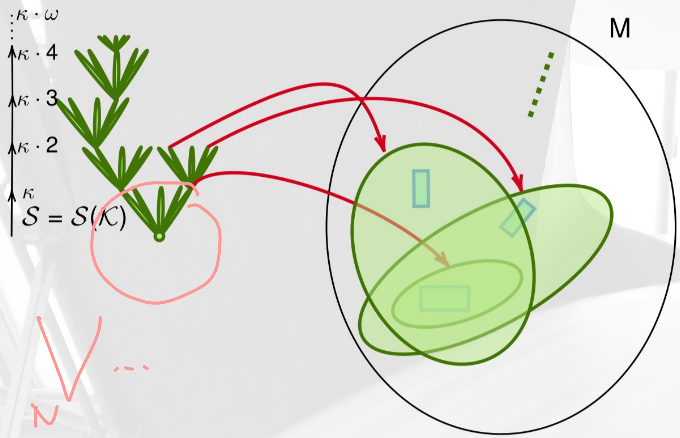
  the atomic diagram of M in $\kappa \cdot n$ variables.
- γ limit: Then

$$\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n) := \bigwedge_{\beta<\gamma} \varphi_{M,\beta,n}(\bar{x}_n).$$

- $\gamma = \beta + 1$: Then $\varphi_{M,\gamma,n}(\bar{x}_n)$ is the $L_{\lambda^+,\kappa^+}(\tau)$ formula

$$\forall \bar{z}_{[\kappa]} \bigvee_{\substack{N \succ_{\mathcal{K}} M \\ N \in \mathcal{S}_{n+1}}} \exists \bar{x}_{=n} \left[\varphi_{N,\beta,n+1}(\bar{x}_{n+1}) \wedge \bigwedge_{\alpha<\alpha_n[N]} \bigvee_{\delta \in S[N]} z_\alpha = x_\delta \right]$$

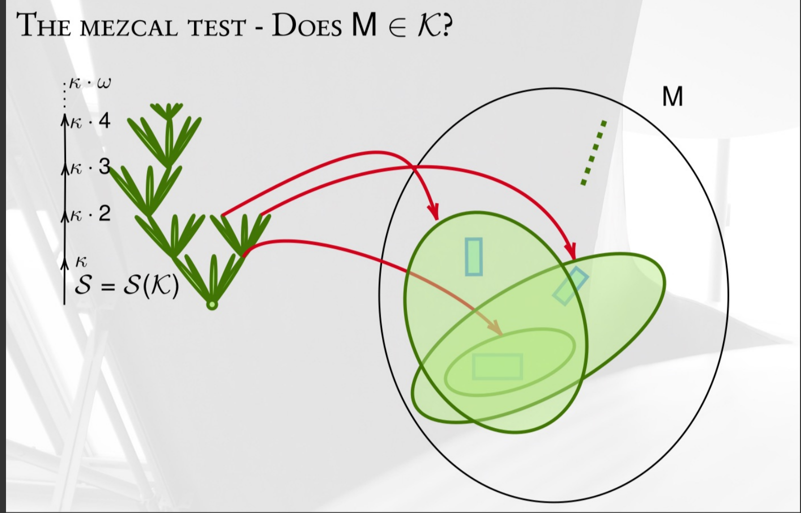
The mezcal test - Does $M \in \mathcal{K}$?



$$\varphi_{1,0} : \forall \underbrace{z}_{\text{tamaño } \kappa} \bigvee_{N \in \mathcal{S}_1} \left[\underbrace{\varphi_{N,0,1}(\bar{x}_1)}_{\text{hay copia de } N} \wedge \underbrace{\bigwedge_{\alpha<\kappa} \bigvee_{\delta<\kappa} z_\alpha = x_\delta}_{\text{la copia cubre } z} \right]$$

$M \models \varphi_{1,0}$ si "puede ser recubierto por $N \in \mathcal{K}$, de tamaño κ"

$$\varphi_{1,0}: \forall \underset{\text{tamaño } \kappa}{z} \bigvee_{N\in\mathcal{S}_1} \Big[\underbrace{\varphi_{N,0,1}(\bar{x}_1)}_{\text{hay copia de } N} \wedge \underbrace{\bigwedge_{\alpha<\kappa}\bigvee_{\delta<\kappa} z_\alpha = x_\delta}_{\text{la copia cubre } z} \Big]$$

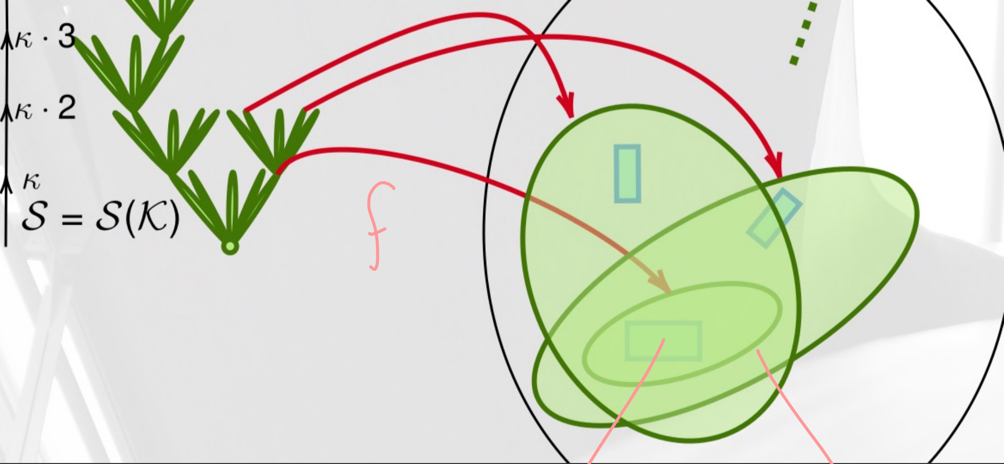


" $\mathcal{S}_1$ cubre M "

$$M \models \varphi_{2,0} = \forall \underset{\kappa}{z} \bigvee_{N\in\mathcal{S}_1} \Big[\underbrace{\varphi_{N,1,2}(\bar{x}_2)}_{?} \wedge \text{“}z \subseteq \bar{x}_2\text{”} \Big]$$

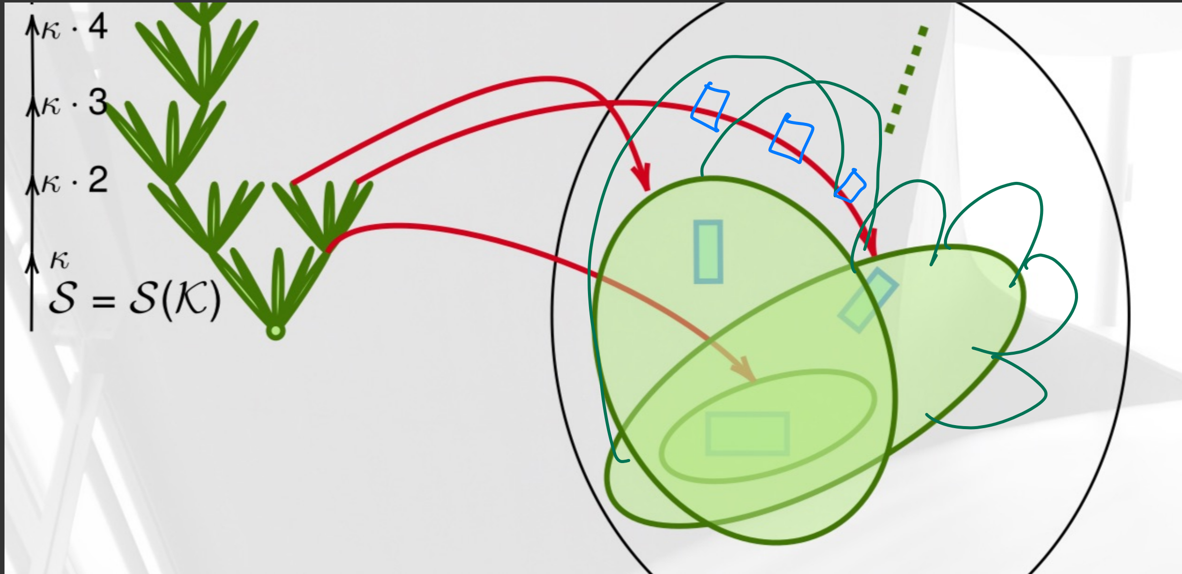
"cubre y cubre"

$$\forall z \bigvee_{N\in\mathcal{S}_1} \Big[\forall z' \bigvee_{\substack{N'>N \\ N'\in\mathcal{S}_2}} \big((\bar{x}_2 \frown \bar{x}_\kappa) \wedge z' \subset \bar{x}_2 \frown \bar{x}_\kappa \big) \wedge z \subset \bar{x}_2 \Big]$$



nociones de cubrimiento que se van refinando

$$\varphi_{2,0} \left[\begin{array}{l} \forall Z \text{ algún } N \in \mathcal{S}_1 \text{ cubre } Z \text{ (mediante } f) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{y} \\ \forall Z' \text{ algún } N' \in \mathcal{S}_2 \quad N' \geq_{\kappa} N \quad \text{cubre } Z' \end{array} \right.$$



$\varphi_{3,0}$: mejor recubrimiento aún

Problema: ¡M es grande!

Puede ser insuficiente recubrir así ...

iteramos en transfinito

$M \models \varphi_{\omega+1,0}$:

$\forall N \bigvee_{N \in \ell_1}$ cubre N pero $M \models \varphi_{\omega,N,1}(\dots) \rightarrow$ trae info de profund. ω

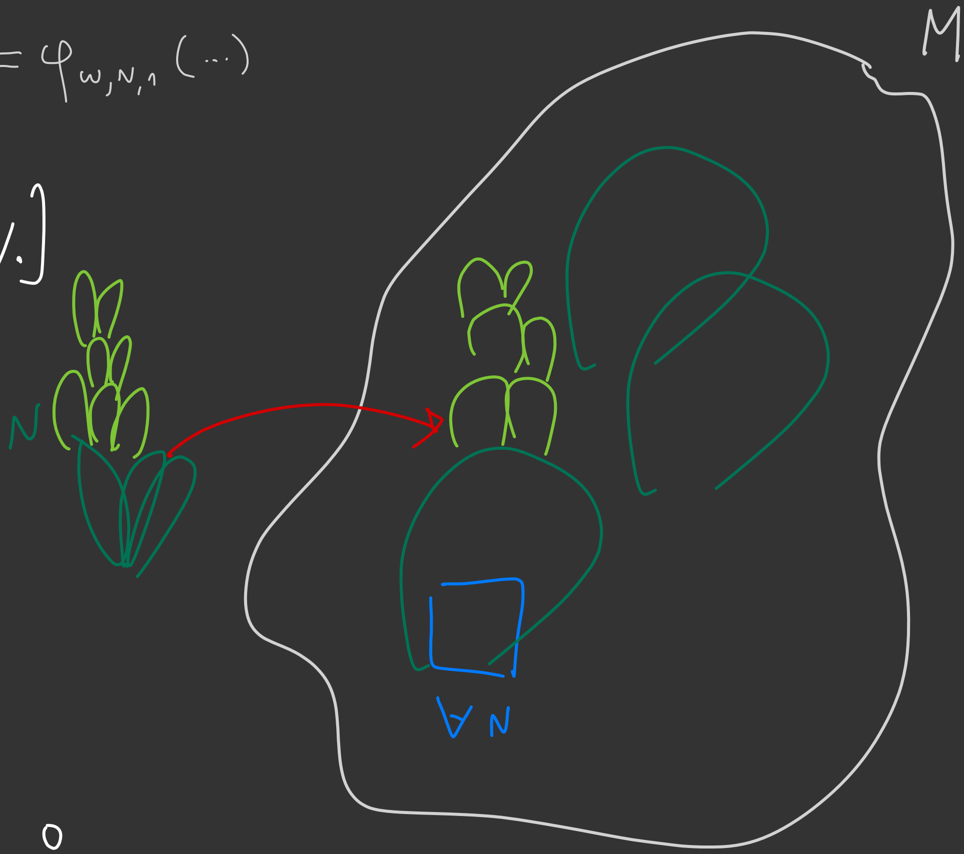
$\forall N \bigvee_{N \in \mathcal{I}_1}$ cubre N pero $M \models \varphi_{\omega, N, 1}(\dots)$

Teorema. [Shelah, V.]

$$M \in \mathcal{K}$$

$$\Updownarrow$$

$$M \models \varphi_{\beth_2(\kappa)^+ + 2,\, 0}$$

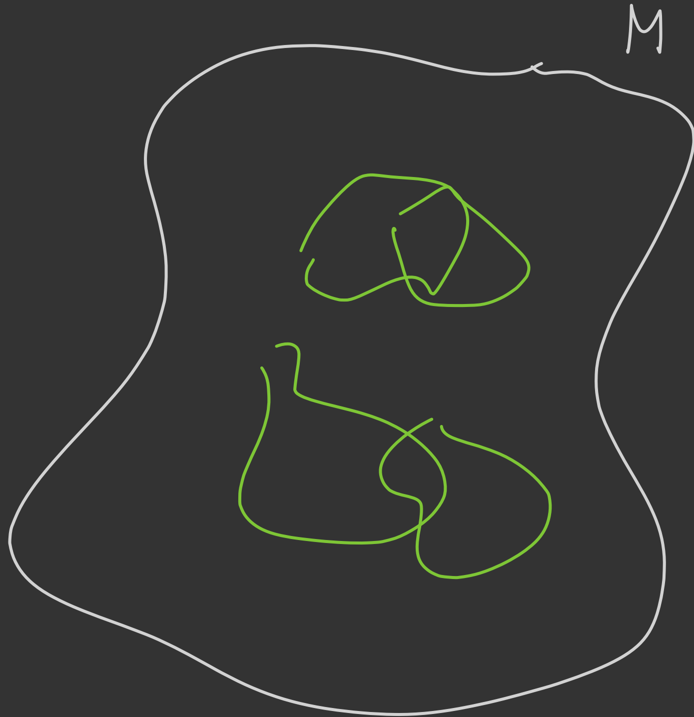


Idea clave:

Dentro de M hay "densos" modelos contables de $\mathcal{K}$.

Estos forman un $\subseteq$-sistema dirigido.

Esto es MUY insuficiente para garantizar $M \in \mathcal{K}$

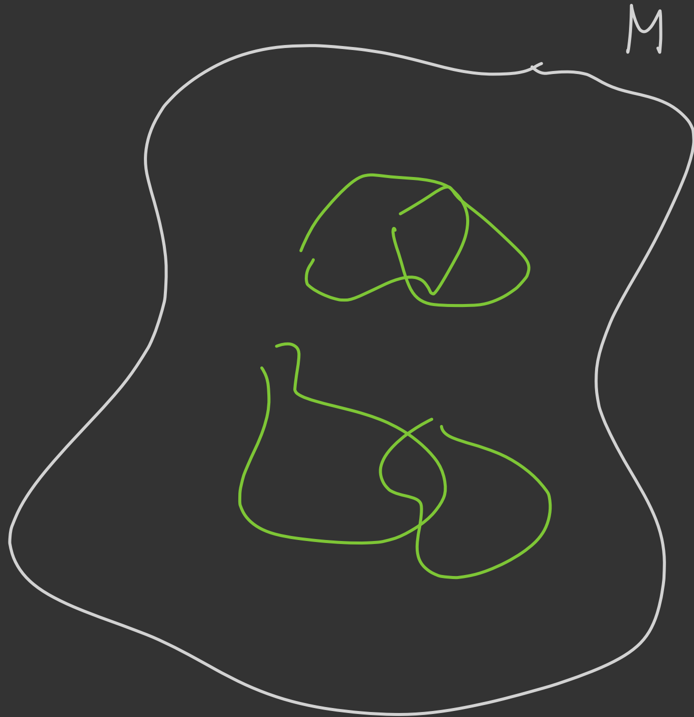


Idea clave:

Dentro de M hay "densos" modelos contables de $\mathcal{K}$.

Estos forman un $\subseteq$-sistema dirigido.

Esto es MUY insuficiente para garantizar $M \in \mathcal{K}$

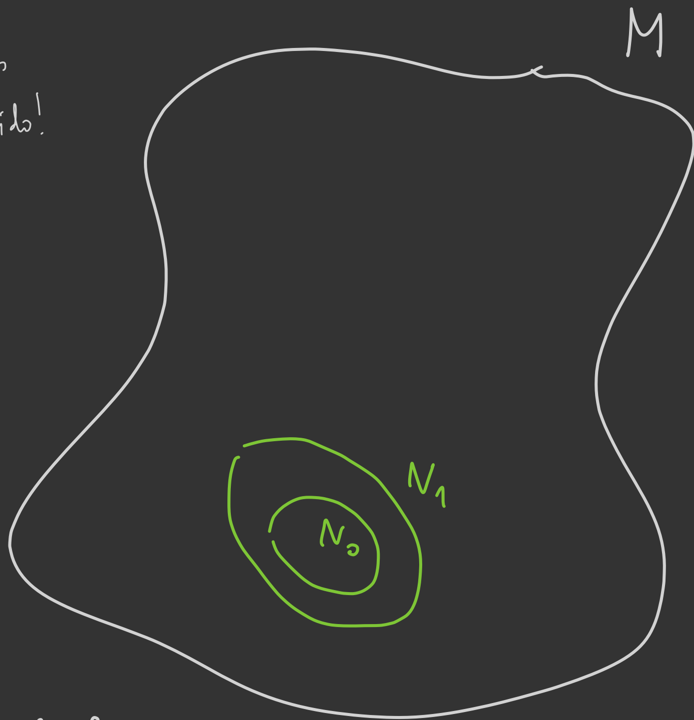


Pero... como $M \models \varphi_{\beth_2(\kappa)^+ + 2, 0}$

... ¡este sistema es $\prec_{\mathcal{K}}$-dirigido!

Pero... como $M \models \varphi_{\beth_2(\kappa)^+ + 2, 0}$ ... ¡este sistema es $<_{\kappa}$-dirigido!

¿por qué?



2 argumentos comb.

2020: rel. de part. para árboles bien fund.

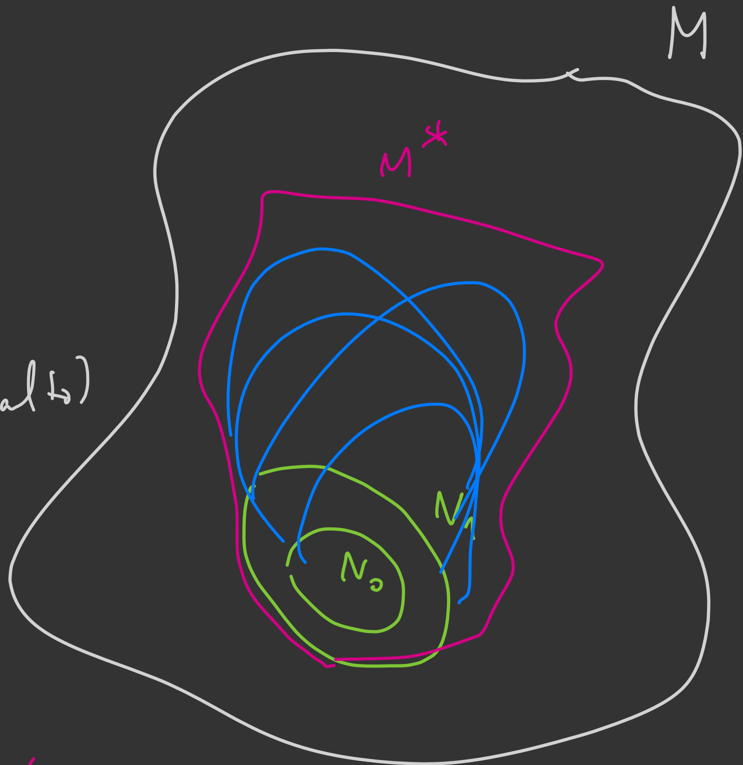
2021: redujimos complejidad

si $N_0 \not\prec_{\mathcal{K}} N_1$

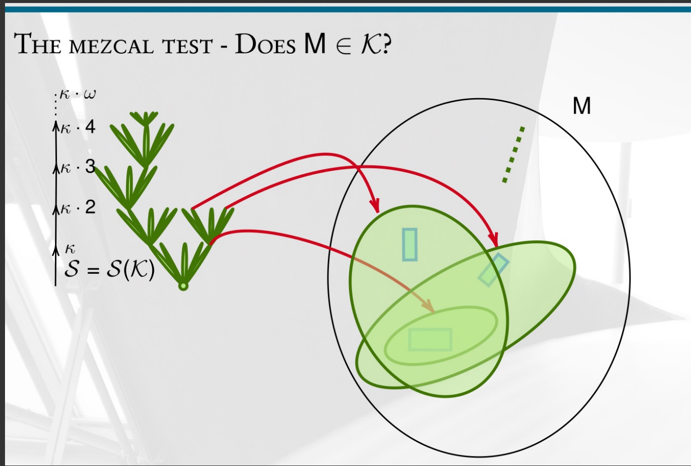
usando $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ y

$M \models \varphi_{\alpha,0}$ (α suf. alto)

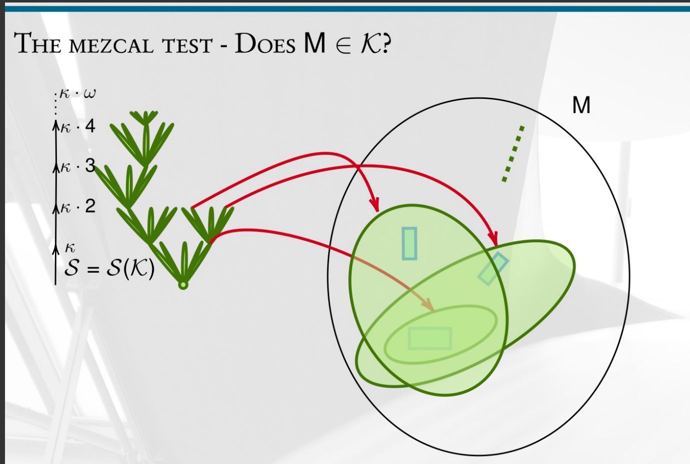
Construimos árboles de modelos que "convergen" a un mismo modelo $M^* \in \mathcal{K}$ por axs. de AECs, ¡ $N_0 \prec_{\mathcal{K}} N_1$!



Pasos:

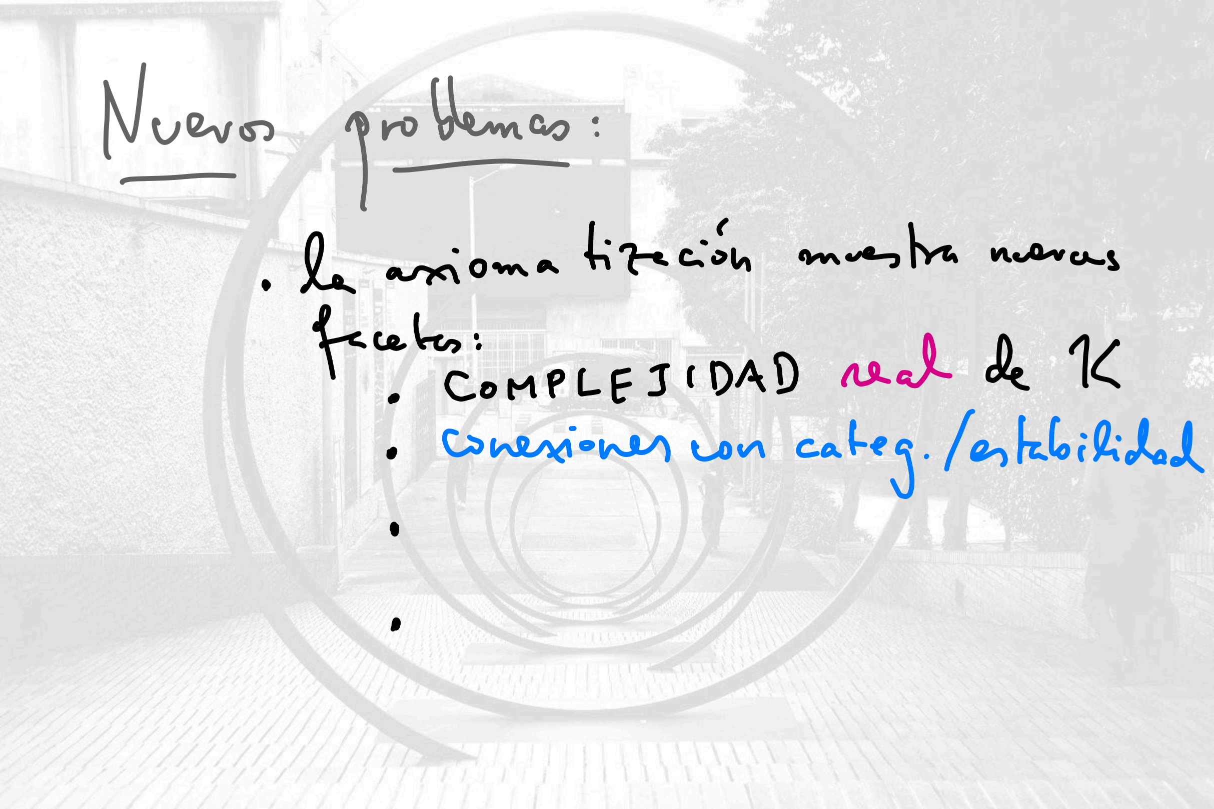


- Árbol $\mathcal{S}_\kappa$ (ω niveles en $\kappa \cdot n$, $n < \omega$)
- Armar sentencias $\varphi_{0,0}, \varphi_{1,0}, \dots, \varphi_{\alpha,0}, \dots$ que capturen más y más "historia" de inmersiones
- $M \models \varphi_{\alpha,0}$ (α alto) $\overset{\text{COMB.}}{\underset{\text{difícil}}{\Longrightarrow}}$ $M = \varinjlim_{N \in \mathcal{K}} N$



Estrategia de Leung: similar pero directamente con juego

$\forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_i \exists y_i \dots$ de long. $\omega + \omega$.



Nuevos problemas:

- la axiomatización muestra nuevas facetas:
  - COMPLEJIDAD real de K
  - conexiones con categ./estabilidad
  -
  -

Nuevos problemas:

- la axiomatización muestra nuevas facetas:
  - COMPLEJIDAD real de K
  - conexiones con categ./estabilidad
  - vecindad lógica de T_K
  - comport. de $\prod_{i\in I} a_i/\mathcal{U}$ en térm. lógicos
  - biinterpretabilidad

③ La lógica interna de una AEC.

$$\mathbb{L}^{1,aec}_{\kappa} < \mathbb{L}^{2,aec}_{\kappa}$$

interpretabilidad segundo orden de κ

fragmento de $\mathbb{L}_{(2^\kappa)^+,\kappa}$ que contiene a κ

$\ni$

Υ_κ (Sh-Vi)

$\underline{\mathbb{L}^{1,\mathrm{aec}}_{\kappa}}$: · cerramos $\mathbb{L}_{(2^\kappa)^+,\omega}$

bajo $\forall x$, $\exists x$, $\bigwedge_{i<2^\kappa} \varphi_i$, $\neg$

y $\forall_\kappa$

· Esto puede muy fácilmente definir buen orden

$\neg$ (los "no buenos órdenes" son una AEC, de bajísima complejidad)

Para ciertos $\mathcal{K}$, la complejidad es altísima: ¿una AEC puede simular juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé de complejidad arbitrariamente alta?

- ¿quitar $\neg$ de $\mathbb{L}^{1,aec}_{\mathcal{K}}$?
- ¿comparar con $\mathbb{L}^{1}_{\mathcal{K}}$?

- ¿quitar $\neg$ de $\mathbb{L}^{1,\mathrm{aer}}_{\kappa}$?
- ¿comparar con $\mathbb{L}^{1}_{\kappa}$?
- → desarrollar estab./t. mod. en $\mathbb{L}^{1,\mathrm{aer}}_{\kappa}$
  → devolver estab./WIP de t. mod. a $\mathbb{L}^{1}_{\kappa}$
- Omisión de tipos.

¡gracias!