Teoría homotópica de tipos en el contexto de la geometría de Cartan

Sergio David Lara González

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2022

Teoría homotópica de tipos en el contexto de la geometría de Cartan

Sergio David Lara González

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Matemático

Director:

Andrés Villaveces Niño, Ph.D.

Línea de Investigación:

Lógicas no Clásicas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2022

Contenido

Introducción

El interés para escribir el presente trabajo parte de tres preguntas principales que son: ¿Cómo internalizar lógicas, similarmente a como aparece una lógica interna en un topos, a otras categorías?, ¿Cómo aparecen las modalidades en diferentes contextos de las matemáticas? y ¿De qué manera pueden hacerse matemáticas constructivas?. El presente trabajo tiene respuestas parciales para las anteriores preguntas por medio de la teoría homotópica de tipos.

La teoría homotópica de tipos es un nuevo intento para la fundamentación de las matemáticas en donde los objetos más elementales, los tipos, se construyen a partir de ciertas reglas, es decir, no hay axiomas que describan qué es un tipo. Por otra parte, los tipos suelen ser interpretados como proposiciones donde la veracidad de un tipo depende de si tiene o no elementos. Esto acarrea cuestionamientos puesto que la lógica resultante de tomar a todos los tipos como proposiciones es intuicionista mas no clásica.

En los capítulos 2 y 3 se introducen las construcciones y aspectos fundamentales de la teoría homotópica de tipos, en el capítulo 4 se da una discusión sobre el rol de las modalidades en la teoría homotópica de tipos así como una breve introducción a estas. En el capítulo 5, se usan las construcciones antes dadas para estudiar algunas definiciones y resultados de contexto geométrico por medio de la teoría homotópica de tipos guiados por la tesis de doctorado de Felix Wellen [Wel17].

1 Preliminares

1.1. Teoría de Categorías

Las siguientes definiciones y demostraciones se encuentran en [ML13] y [MM12].

Definición 1.1.1. *Dadas dos categorías* $\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{D}$ *decimos que el funtor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *es adjunto a izquierda del funtor* $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *(*$F \dashv G$*) si hay una biyección natural entre morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}[FX, Y] \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}[X, GY]$ *para todos los objetos* X *de* $\mathfrak{C}$ *y* Y *de* $\mathfrak{D}$*, la naturalidad se expresa en el siguiente diagrama*

$$\frac{X' \xrightarrow{\xi} X \xrightarrow{f} GA \xrightarrow{G\alpha} GA'}{FX' \xrightarrow{F\xi} FX \xrightarrow{h} A \xrightarrow{\alpha} A'}$$

Donde para morfismos ξ, α *cualesquiera, la asignación* $f \mapsto h$ *respeta las composiciones.*

Una manera equivalente de definir las adjunciones es por medio de la *unidad* y la *counidad* las cuales son respectivamente el morfismo asignado a la identidad 1_{FX} y el morfismo asignado a la identidad 1_{GY}, es decir, la unidad es un morfismo $\eta_X : X \to GFX$ y la counidad un morfismo $\epsilon_Y : Y \to FGY$.

Definición 1.1.2. *Una mónada en una categoría* $\mathfrak{C}$ *consiste en una tripla* (T, η, μ) *donde* T *es un endofuntor* $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ η, μ *son dos transformaciones naturales* $\mu : T^2 \to T$ *y* $\eta : I \to T$ *tal que los siguientes diagramas conmutan:*

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
IT \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & TI \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

Una adjunción $F \dashv G$ siempre determina una mónada $(GF, \eta_{\_}, \mu_{\_})$ donde η_X es la unidad de la adjunción en X, y $\mu_C = G_{\epsilon_{FC}} : GFGFC \to GFC$ para C un objeto de $\mathfrak{C}$.

Definición 1.1.3. *Dada una categoría $\mathfrak{C}$, una subcategoría $\mathfrak{A}$ se dice **reflexiva** si el funtor inclusión $i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ tiene adjunto a izquierda ($F \dashv i$). Al adjunto izquierdo F se le llama el reflector.*

1.2. Lógica modal

Para los lenguajes modales tomamos los mismos símbolos de la lógica clásica agregándo un operados unitario $\Box$ donde $\Box\phi$ se interpreta como: ϕ es **necesario**, adicionalmente tenemos el símbolo de **posibilidad** dado por

$$\Diamond\phi = \neg\Box\neg\phi.$$

La lógica modal más básica se constituye axiomáticamente por el conjunto de axiomas de la lógica proposicional clásica más el axioma

$$\mathbf{k}\text{: } \Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi)$$

Y la regla de necesidad:

$$\text{Si} \vdash \phi \text{ entonces} \vdash \Box\phi.$$

De esta manera contruimos el sistema $\mathbf{K} : \mathbf{CPC} + \mathbf{k}$.

Los siguientes son sistemas utilizados en la lógica modal que agregan otras condiciones sobre las modalidades:

- **T** : **K** $+ \Box\phi \to \phi$ (o equivalentemente $\phi \to \Diamond\phi$)
- **K4** : **K** $+ \Box\phi \to \Box\Box\phi$
- **S4** : **T** $+ \Box\phi \to \Box\Box\phi$
- **B** : **T** $+ \phi \to \Box\Diamond\phi$
- **KD** : **K** $+ \Box\phi \to \Diamond\phi$
- **S5** : **S4** $+ \Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$
- **K4.3** : **K** $+ (\Box\phi \to \Box\Box\phi) + (\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond(\phi \wedge \Diamond\psi) \vee \Diamond(\phi \wedge \psi) \vee \Diamond(\Diamond\phi \wedge \psi))$
- **S4.3** : **S4** $+ \Diamond\phi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond(\phi \wedge \Diamond\psi) \vee \Diamond(\phi \wedge \psi) \vee \Diamond(\Diamond\phi \wedge \psi)$
- **KL** : **K** $+ \Box(\Box\phi \to \phi) \to \Box\phi$

Definición 1.2.1. *Un marco de Kripke es una pareja* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *tal que*

- W *es un conjunto no vacío*
- R *es una relación binaria en* W

Un modelo de Kripke es una pareja $\mathfrak{M}=(\mathfrak{F}, V)$*, donde* $\mathfrak{F}$ *es un marco para el lenguaje modal básico, y* V *es una función* $V : \mathsf{LP} \to \wp(W)$ *llamada valuación.*
Notemos ahora que las valuaciones que estamos considerando no asignan (como en el caso de la lógica clásica) un valor de verdad a cada letra proposicional, sino que asignan un valor de verdad en ***cada mundo*** *a cada letra proposicional, eso quiere decir que* $V(p)$ *es en realidad todos los mundos donde* p *es válida.*

Para más sobre lógica modal, ver [Che80] y [FM12], y para un tratamiento algebraico ver [DH01].

K Es la clase de todos lo marcos.

K4 Es la clase de los marcos transitivos.

T Es la clase de los marcos reflexivos.

S4 Es la clase de los marcos reflexivos y transitivos.

B Es la clase de los marcos simétricos.

KD Es la clase de los marcos tal que $\forall x \exists y : (x, y) \in R$.

S5 Es la clase de los marcos cuya relación es de equivalencia.

K4.3 Es la clase de los marcos transitivos tal que

$$\forall x \forall y \forall z (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \to ((y, z) \in R \vee y = z \vee (z, y) \in R))$$

S4.3 Es la clase de los marcos reflexivos tal que

$$\forall x \forall y \forall z (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \to ((y, z) \in R \vee y = z \vee (z, y) \in R))$$

1.3. Topología algebraica

La presente sección se puede encontrar en detalle en [Hat05] y [Ark11].

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio topológico, una homotopía entre caminos en X es una familia de funciones continuas $f_t : I \to X$, con $0 \leqslant t \leqslant 1$ tal que*

1. *Los puntos iniciales $f_t(0) = x_0$ y finales $f_t(1) = x_1$ son independientes de t.*
2. *La función asociada $F : I \times I \to X$ definida como $F(s, t) = f_t(s)$ es continua.*

Cuando se tiene lo anterior, decimos que f_0 y f_1 son homotópicos, se escribe $f_0 \cong f_1$.

Definición 1.3.2. *El grupo fundamental de un espacio X en un punto x_0, escrito $\pi(X, x_0)$ es el conjunto de caminos con puntos iniciales y finales x_0 partidos por la relación $\cong$.*

Definición 1.3.3. *Dados espacios topológicos* X *y* Y*, y funciones* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to X$*,* f *y* g *se dicen* ***homotópicamente equivalentes*** *si* $f \circ g \cong 1_Y$ *y* $g \circ f \cong 1_X$*.*

Proposición 1.3.4. *El grupo fundamental de* $\mathbb{S}^1$ *es* $\mathbb{Z}$*.*

2 Teoría de tipos

En el presente capítulo se dará una introducción a la teoría de tipos dependientes de Per Martin-Löf y se definirán los tipos más elementales como: el tipo de funciones, los tipos productos y los tipos Σ y Π entre otros. Todo esto con el fin de presentar algunos contrastes (como axiomática y definiciones) con la teoría de conjuntos y poder establecer correctamente en el próximo capítulo el intento para fundamentación de las matemáticas; la teoría homotópica de tipos. Las contrucciones de este y el próximo capítulo pueden encontrarse en [Pro13].

2.1. Construcciones y motivaciones

La teoría de tipos tiene sus orígenes en los trabajos de Bertrand Rusell, [Rus20] en donde se propone como una solución al problema que significan las paradojas encontradas en la teoría de conjuntos de Frege. Se formula a la teoría de tipos como una teoría netamente constructiva en donde los objetos (los tipos) no aparecen axiomáticamente, si no por medio de construcciones dadas por reglas, así como sus "elementos" y las interacciones con otros tipos.

"Al mismo tiempo, buscaba enfoques para el problema de la acumulación de errores en trabajos de matemáticas puras. Me fue claro que la única solución era la creación de un lenguaje en el cual los humanos puedan escribir demostraciones de forma que permita verificarlas por computadora. (...) En gran parte, esta sensación fue el resultado de una establecida, y muy común entre los matemáti-

cos, opinión de que las matemáticas abstractas no se pueden formalizar de una manera sensata y al mismo tiempo tan precisa para que las "entienda" una computadora.
(...) Informalmente este problema se puede enunciar como cuál es la formalización de la intuición de que los objetos matemáticos "idénticos" tienen propiedades iguales. Los argumentos que usan este principio se emplean con mucha frecuencia en las demostraciones matemáticas modernas; sin embargo, los fundamentos existentes de las matemáticas como la teoría de conjuntos de Zermelo-Frenkel, son totalmente inadecuados para la formalización de este tipo de argumentos."
-Vladimir Voevodsky (https://www.math.cinvestav.mx/ mostovoy/Papers/voevodsky.html)

En teoría de tipos aparece una lógica interna dada por tipos como proposiciones y sus valores de verdad se determinan por tener (o no) puntos[1]. En otras palabras, se interpreta a un tipo A como una proposición y decimos que es verdadera si existe algún $a : A$ que atestigue la veracidad de A. De esta manera, lo que constituye una prueba es algún testigo de que el tipo está *habitado*[2]. En los capítulos 2 y 3 veremos que no es la única lógica que aparece en la teoría de tipos y el aspecto que hace de la que acabamos de presentar, una lógica **no clásica**.

Las reglas por medio de las cuales se introducen nuevos tipos en la teoría de tipos son las siguientes:

1. **Reglas de formación**: En donde se mencionan los componentes necesarios para formar un tipo de dicha clase.

2. **Reglas de introducción**: En donde se menciona cómo construir elementos de dicho tipo.

[1]Puesto que los tipos no son un conjunto o una categoría, no mencionamos los *habitantes* de estos como elementos u objetos, sin embargo, es usual el uso de la palabra *punto* o *elemento* para referirse a ellos

[2]En teoría de tipos no se define una relación de pertenencia, de manera que nos referimos a un tipo *habitado* como un tipo al cual le podemos encontrar un punto

3. **Reglas de eliminación**: Explican cómo "utilizar" los elementos de dicho tipo.

4. **Reglas de cómputo**: Dicen cómo la regla de eliminación actúa en la regla de introducción.

Ejemplo 2.1.1. *Tipos de funciones:*

- ***Regla de formación***: *Dados* A *y* B *tipos, tenemos el tipo de funciones entre* A *y* B*,* $A \to B$.

- ***Regla de introducción***: *Podemos definir funciones de* A *a* B *definiendo la imagen en cada punto, lo que en notación de teoría de tipos se escribe* $f(x) :\equiv \lambda x.\phi(x)$ *(*f *le asigna a* x *un* $\phi(x)$*) donde* $\phi(x)$ *es un término que involucra a* x*, por ejemplo,* $ax^2 + bx + c$ *ó* e^x.

- ***Regla de eliminación***: *La regla de eliminación para tipos de funciones dice que dada una función* $f : A \to B$ *y un elemento* $a : A$*, podemos aplicar la función como* $f(a) : B$.

- ***Regla de cómputo***: *La regla de cómputo para tipos de funciones dice que dada* $f(x) :\equiv \lambda x.\phi(x)$ *y* $a : A$*,* $f(a)$ *consiste en reemplazar todas las ocurrencias de* x *en* $\phi(x)$ *por* a.

Ejemplo 2.1.2. *Tipos producto:*

- ***Regla de formación***: *Dados* A, B *tipos, podemos formar el tipo* $A \times B$.

- ***Regla de introducción***: *Dados puntos* $a : A$ *y* $b : B$ *podemos darnos el punto* $(a, b) : A \times B$.

- ***Regla de eliminación***: *Dice que dado un tipo* C *las funciones* $f : A \times B \to C$ *pueden ser vistas como funciones* $g : A \to (B \to C)$.

- ***Regla de cómputo***: *Se trata sencillamente de la ecuación* $f((a, b)) :\equiv g(a)(b)$.

Una diferencia notable en la manera en que se definen los tipos y la manera en la que aparecen los conjuntos es el caso del tipo producto, en teoría de conjuntos definimos al producto cartesiano $A \times B$ como todas las parejas ordenadas con primera componente elementos de A y segunda componente elementos de B. En cambio, en teoría de tipos la regla de introducción afirma que tales parejas ordenadas son puntos de ese tipo mas no que todos los puntos del tipo son de esa forma, esa es una afirmación que se llega a **demostrar**.

Esta situación, como muchas que podemos evidenciar en la teoría de tipos viene de la nueva consideración que le damos a la igualdad. Si pensamos en lenguaje natural, la igualdad definicional nos da la manera de introducir el objeto en el lenguaje, como sería el caso de definir un color. Por ejemplo si queremos decir "algo es verde esmeralda" tendremos que tener cuidado con el significado que tiene ese 'es' ya que por un lado puede ser lo que define el color verde esmeralda "el color de las esmeraldas verdes es el verde esmeralda", así como puede enunciar algo que cabe dentro de la descripción que da el color verde esmeralda "esta camisa es verde esmeralda". En matemáticas es normal que se aborden problemas de diversas maneras en [Shu17] Michael Schulman explica una dualidad usual: la manera semántica y la manera sintáctica. Tomemos como ejemplo la proposición $k^g h^g = (kh)^g$, que dice que la conjugación por g ($k^g := g^{-1}kg$) es un homomorfismo de grupos para un grupo G y elementos $g, h, k \in G$ esta proposición es verdadera y se puede demostrar **sintácticamente** deduciendo de la definición de grupo que esto se tiene (por ejemplo tomando un grupo arbitrario y demostrándolo en él) o bien **semánticamente** tomando el grupo libre generado por los elementos $\{g, h\}$, demostrándolo en él y luego extendiendo mediante propiedades universales este hecho a todos los grupos.

Ahora queremos preguntarnos cómo está formada la lógica en la teoría de tipos, pues bien, como ya hemos mencionado antes, se entienden a los tipos como proposiciones y a un punto en el tipo como una prueba de dicha proposición. Veamos entonces cómo podemos formar los conectivos lógicos con los tipos que hemos formado.

Tomando a los tipos como proposiciones, si tenemos tipos A, B y una función $f : A \to B$ lo que está haciendo es llevar pruebas de A a pruebas de B de manera que se interpreta al tipo de funciones como una implicación.

De manera similar, cuando tenemos un punto $(x, y) : A \times B$, tenemos a a una prueba de A y a b una prueba de B con lo que podemos interpretar al tipo producto como una conjunción.

2.2. Tipos dependientes

Para hablar de tipos dependientes es necesario mencionar los universos en la teoría de tipos los cuales son tipos que contienen todos los tipos "simples", por convención utilizaremos un universo $\mathcal{U}$ sin referirnos específicamente a cuál, asumiendo que contiene a todos los tipos simples (que no son universos).

Hablamos de tipos dependientes para referirnos a tipos que dentro de su definición involucra familias de tipos, lo que en teoría de conjuntos son familias indexadas, en teoría de tipos son funciones con dominio un tipo A (por medio del cual se indexa) y codominio un universo $\mathcal{U}$ (cuyos elementos son otros tipos).

Definición 2.2.1. *Sea A un tipo y $\mathcal{U}$ un universo, una familia de tipos es una función $B : A \to \mathcal{U}$.*

Introducimos el tipo Σ de la siguiente manera: tomando un tipo $A : \mathcal{U}$ y $B : A \to \mathcal{U}$ una familia de tipos, podemos formar el tipo $\sum_{x:A} B(x)$ (regla de formación). Dado $a : A$ y $b : B(a)$ podemos afirmar que $(a, b) : \sum_{x:A} B(x))$ (regla de introducción).
En la interpretación de tipos como proposiciones, podemos ver a B como una propiedad que para algunos $a : A$ se cumple y para otros no, esto se traduce en la existencia o no de elementos en

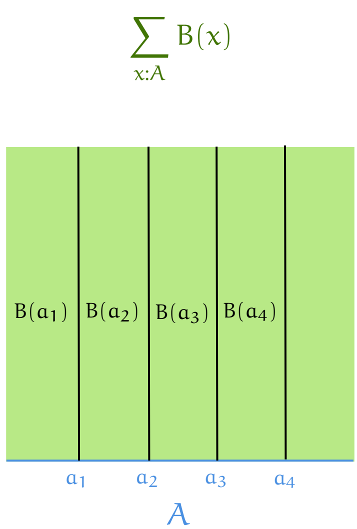
$B(a)$ en ello encontramos una similaridad con el cuantificador existencial $\exists$ de la lógica clásica pues tener un elemento $(a, b) : \sum_{x:A} B(x)$ indica que hay al menos un $a : A$ para el cual hay un $b : B(a)$ (la propiedad se cumple para a).

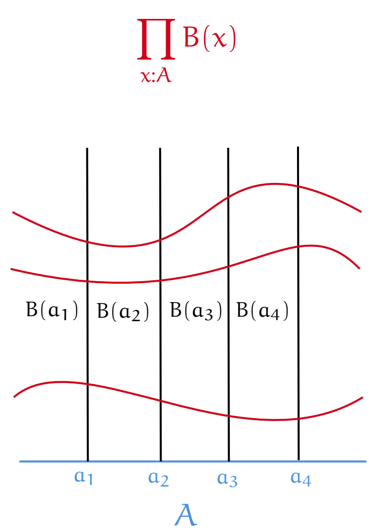
Por otra parte, si tomamos a $B : A \to \mathcal{U}$ una familia constante, los elementos de $\sum_{a:A} B$ resultan ser parejas ordenadas (a, b) donde $a : A$ y $b : B$, es decir $\sum_{a:A} B \equiv A \times B$.

Para el caso del tipo 'producto dependiente', la regla de formación es la misma, consideramos $A : \mathcal{U}$ y $B : A \to \mathcal{U}$ pero ahora los elementos son funciones $f : \prod_{x:A} B(x)$ que asignan a cada elemento $a : A$ un elemento en $B(a)$.

Si interpretamos a los tipos como proposiciones, podemos ver que tener un punto $f : \prod_{x:A} B(x)$ es tener una función que a cada punto $a : A$ le asigna un testigo de $B(a)$ de manera que la propiedad B se tiene **para todos** los puntos $a : A$; ahí su similaridad con el cuantificador universal $\forall$. Nuevamente, si consideramos a $B : A \to \mathcal{U}$ como una familia constante lo que tenemos al construir $\prod_{x:A} B(x)$ son funciones de dominio A y rango B es decir, obtenemos el tipo de funciones $A \to B$.

De manera que los tipos producto y los tipos de funciones son casos particulares de los tipos Σ y Π.





Podemos comprender la regla de elmininación de un tipo por medio de otros dos principios los cuales son: el **principio de recursión** y el **principio de inducción**. El principio de recursión de un tipo A nos dice cómo formar funciones a otro tipo, es decir, nos da elementos $f : A \to C$. El principio de inducción es la versión dependiente del principio de recursión, es decir, nos dice cómo formar funciones dependientes en familias de la forma $B : A \to \mathcal{U}$, obtenemos elementos de la forma $f : \prod_{x:A} B(x)$.

Desde el punto de vista de la lógica, los principios de recursión y de inducción nos ofrecen iniciativas semánticas pues a partir de un tipo podemos obtener deducciones del tipo que podrían formar una valuación y a partir de esto la construcción de modelos.

Ejemplo 2.2.2. *(Coproductos)*

Dados dos tipos A *y* B *formamos el coproducto como* $A+B$. *Podemos formar elementos del coproducto de dos maneras:* $\mathsf{in}_i(a) : A + B$ *para un* $a : A$ *y* $\mathsf{in}_d(b) : A + B$ *para un* $b : B$ *donde "*in*" viene de la palabra inyección.*

El principio de recursión dice que dado un tipo C, *para formar una función (no dependiente)* $f : A + B \to C$ *necesitamos una función* $f_i : A \to C$ *y una función* $f_d : B \to C$ *y obtenemos la función* $f : A + B \to$ *dada por las ecuaciones*

$$f(\mathsf{in}_i(a)) :\equiv f_i(a)$$

$$f(\mathsf{in}_d(b)) :\equiv f_d(b)$$

Por otra parte, el principio de inducción dice que dada una familia $C : A+B \to \mathcal{U}$ *podemos darnos una función dependiente* $g : \prod_{x:A+B} C(x)$ *con un par de funciones dependientes* $g_i : \prod_{a:A} C(\mathsf{in}_i(a))$ *y* $g_d : \prod_{b:B} C(\mathsf{in}_d(b))$ *que describen* g *por medio de las ecuaciones*

$$g(\mathsf{in}_i(a)) :\equiv g_i(a)$$

$$g(\mathsf{in}_d(b)) :\equiv g_d(b)$$

Desde la perspectiva de tipos como proposiciones podemos observar que tener una prueba de $A + B$ significa tener una prueba de A o tener una prueba de B, de manera que podemos identificar al coproducto con la disyunción proposicional.

Símbolos lógica		
Conjunción	$p \wedge q$	$p \times q$
Disyunción	$p \vee q$	$p + q$
Negación	$\neg p$	$p \to 0$
Implicación	$p \to q$	$p \to q$
Cuantificador universal	$\forall_x P(x)$	$\prod_{x:A} P(x)$
Cuantificador existencial	$\exists_x P(x)$	$\sum_{x:A} P(x)$

2.3. Inducción de caminos y tipos identidad

Ahora veremos el tipo identidad, que será fundamental para adentrarnos en teoría **homotópica** de tipos. Como ya mencionamos antes, en teoría de tipos existe una distinción entre la igualdad definicional y la igualdad proposicional, hasta ahora sólo hemos involucrado la igualdad definicional, lo primero que hay que saber sobre la igualdad proposicional es la interpretación que va a tener en la teoría homotópica de tipos donde cada tipo está visto como un **espacio**, los elementos en el tipo son **puntos** en el espacio y las igualdades entre elementos de cada tipo son **caminos**.

A lo largo del trabajo iremos mencionando algunos conceptos que se definen en teoría de homotopía y que llevan el mismo nombre en teoría homotópica de tipos. Por el momento recordemos la definición de camino en topología:

Definición 2.3.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sean* $x, y \in X$. *Un camino entre* x *y* y *es una función continua* $p_{x,y} : [0, 1] \to X$ *tal que* $p_{x,y}(0) = x$ *y* $p_{x,y}(1) = y$.

La regla de formación para tipos identidad dice que dado un tipo A y puntos $x, y : A$ podemos formar el tipo identidad escrito $\mathtt{id}_A(x, y)$ o $x =_A y$, un camino es un elemento del tipo identidad, es decir, una prueba de que tales elementos son (proposicionalmente) iguales.

La regla de formación es la función $\mathtt{refl} : \prod_{a:A} a =_A a$, dice que para cada punto $a : A$ hay un camino $\mathtt{refl}_a : a =_A a$ que atestigua que a es igual a a.

La regla de formación en este caso marca una pauta importante a la hora de entender la manera como se constituyen los tipos, puesto que en los casos anteriores, a pesar de que la regla de formación no indica que todos los elementos de ese tipo son de la forma que indica la regla, sí resulta ser así y se demuestra con los principios de recursión. Sin embargo, el caso de los tipos identidad es muy diferente porque la regla de formación sólo nos indica elementos “canónicos” de los tipos identidad cuando en muchos casos (y será así para ciertas clases de tipos) hay muchos más diferentes.

A continuación se presenta una regla de eliminación para tipos identidad que es el principio de inducción para tipos identidad, comunmente llamado **inducción de caminos**.

La inducción de caminos dice que para formar una función dependiente de los tipos identidad sobre un tipo A, es decir un elemento de tipo $\prod_{x,y:A} x =_A y$, dada una familia de la forma $C : \prod_{x,y:A}(x =_A y) \to \mathcal{U}$ se necesita una función $c : \prod_{x:A} C(x, x, \mathsf{refl}_x)$.

Podemos entender esta función c como seleccionar un punto en el tipo $C(x, x, \mathsf{refl}_x) : \mathcal{U}$ para el camino reflexivo.

3 Teoría homotópica de tipos

3.1. Los tipos son grupoides de orden superior

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice grupoide si todos los morfismos son isomorfismos. En teoría homotópica de tipos, se ven a los tipos como categorías donde sus objetos son los elementos o puntos del tipo y los morfismos son caminos entre tales elementos. Como la clase de morfismos entre objetos en este caso también resulta ser un tipo, tenemos entonces estructura de 2-categoría, en realidad, de ∞-categoría (pues el tipo identidad de dos tipos identidad también es un tipo y así sucesivamente). Veamos ahora que los tipos son en realidad ∞-grupoides.

Proposición 3.1.1. *(Reflexividad en los tipos identidad) Sean* $A : \mathbb{U}$ *un tipo,* $a, b : A$*. Existe una función* $f : (a =_A b) \to (b =_A a)$.

Demostración. Queremos aplicar el principio de inducción para tipos inductivos, consideremos entonces el caso $a \equiv b$ y $p = \mathtt{refl}_a$. Basta asignarle a $\mathtt{refl}_a$ un elemento de tipo $a = a$, el cual sencillamente podemos tomar como $\mathtt{refl}_a$. □

Proposición 3.1.2. *(Transitividad en los tipos identidad) Para todo tipo* A *y elementos* $x, y, z : A$ *existe una función*

$$(x = y) \to (y = z) \to (x = z)$$

Demostración. Para $p : x = y$, estamos buscando una función de tipo $\prod_{z:A} \prod_{q:y=z} x = z$, por inducción de caminos, tomemos el caso $z \equiv y$, $q = \mathsf{refl}_z$. Como $z \equiv y$ entonces $p : x = z$ y hemos encontrado la función deseada. Al camino $x = y$ dado por la inducción que acabamos de mostrar le llamamos $p \cdot q$. □

3.2. Funtorialidad en la teoría homotópica de tipos

Veremos ahora que las funciones preservan caminos, en teoría de conjuntos, al tener sólo la igualdad convencional, esto viene dentro de la definición de función puesto que a un mismo elemento (o dos elementos iguales) le corresponde una única imagen, este es un buen ejemplo de cómo aplicar la inducción en caminos.

Lema 3.2.1. *Sean* A, B *tipos y* $f : A \to B$ *una función, entonces existe un operador* $\mathsf{ap}_f : (a =_A b) \to (f(a) =_B f(b))$.

Demostración. Aplicando la inducción de caminos tenemos que el tipo $C(x, y, p)$ es $f(x) =_B f(y)$ de manera que basta con definir la función $c : \prod_{x:A} C(x, x, \mathsf{refl}_x) \equiv \prod_{x:A} f(x) =_B f(x)$, la manera más sencilla de definirla es precisamente definiendo $c(x) :\equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$ y por inducción en caminos obtenemos la función $\mathsf{ap}_f : \prod_{x,y:A} \prod_{p:x=_A y} C(x, y, p) :\equiv \prod_{x,y:A} \prod_{p:x=_A y} f(x) =_B f(y)$, escrito de otra manera $\mathsf{ap}_f : \prod_{x,y:A}(x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$. □

Lo que acabamos de hacer es, entendiendo a los caminos como morfismos, mostrar que las funciones tienen comportamiento funtorial. Esto nos da otra información adicional, puesto que en teoría homotópica de tipos las pruebas de una proposición son distinguibles, vale la pena observar que las funciones no distinguen pruebas iguales.

Otra pregunta que podríamos plantearnos es cómo se comportan las igualdades proposicionales en familias de tipos y tipos dependientes, es decir, si tenemos un tipo A, una familia $B : A \to \mathcal{U}$,

$x, y : A$ y $p : x =_A y$ ¿qué relación hay entre $B(x)$ y $B(y)$?, la respuesta la da el lema de transporte:

Lema 3.2.2. *(Transporte)*

Sean A *un tipo,* $x, y : A$, $q : x =_A y$ *un camino y* $P : A \to \mathcal{U}$ *una familia, existe una función*

$$\mathsf{transporte}^P(q, -) : P(x) \to P(y).$$

$$\begin{tikzcd}
P(a) \arrow[rr, dashed, "\mathsf{transporte}^P(q,-)"'] & & P(b) \\
& q : a = b \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Corolario 3.2.3. *Si* $p \equiv \mathsf{refl}_x$ *entonces* $\mathsf{transporte}^P(p, a) = a$.

Corolario 3.2.4. *Considere las familias* $A : X \to \mathcal{U}$, $B : X \to \mathcal{U}$ *y* $A \to B : X \to \mathcal{U}$ *dada por* $A \to B(x) \equiv A(x) \to B(x)$. *Entonces se tiene que*

$$\mathsf{transporte}^{A \to B}(p, -) = (x \mapsto \mathsf{transporte}^B(p, -(\mathsf{transporte}^A(p^{-1}, x)))).$$

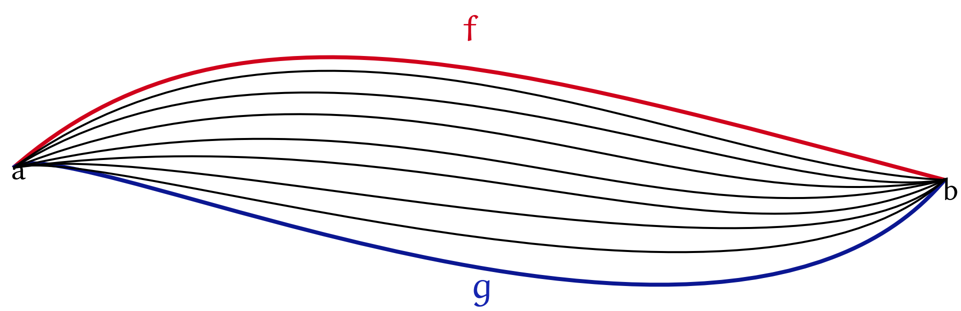
Como acabamos de ver, por medio de la función ap_f tenemos que podemos llevar caminos de un tipo a caminos de otro por medio de una función (**encontramos un camino** en el codominio). Por otra parte el lema del transporte nos dice que podemos **encontrar una función** entre dos tipos ($P(a), P(b)$) dados por un tipo dependiente (P) por medio de un camino entre sus "puntos base" (a, b). El siguiente lema combina estos dos movimientos:

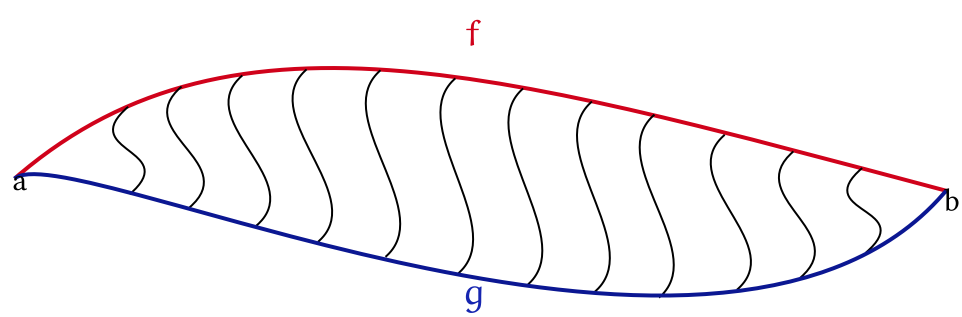
Lema 3.2.5. *Funciones dependientes*

Dada una función dependiente $f : \prod_{x:A} P(x)$, *tenemos una función* $\mathsf{apd}_f : \prod_{p:x=y}(\mathsf{transporte}^P(p, f(x)) =_{P(y)} f(y))$.

3.3. Equivalencias y axioma de univalencia

En topología, una homotopía es un camino entre dos funciones que se comporta bien en cada punto. Además de representar bien la noción de homotopía, esta definición nos de un antecedente importante para establecer equivalencias lógicas en teoría homotópica de tipos puesto que al tener una lógica con cierta relevancia en las pruebas, queremos de una equivalencia no sólo una "implicación bilateral" si no además que esta implicación tenga cierta naturalidad o buen comportamiento en las pruebas de cada tipo, como detallaremos más adelante. Dicho de otra manera, no queremos sólo un par de funciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ si no que además sea la una "inversa" (o quasi-inversa/ adjunta) de la otra.





Definición 3.3.1. *Dados tipos* A *y* B *llamamos equivalencia a un par de funciones* $f : A \to B$ *y* $g : B \to A$ *si existen homotopías* $\epsilon : g \circ f \sim id_A$ *y* $\eta : f \circ g \sim id_B$ *tales que existe una homotopía* $\tau : \prod_{x:A} f(\eta(x)) = \epsilon(f(x))$.
Escribimos $A \simeq B$

Lema 3.3.2. *[Wel17] Si* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *son equivalencias y* $h : A \to B$ *una función, se cumple:*

1. $f \circ g$ *es una equivalencia.*
2. *Si* $f \sim h$ *entonces* h *es una equivalencia.*
3. *Si* $x, y : A$*, entonces hay una equivalencia inducida* $x = y \to h(x) = h(y)$.

Ahora estamos listos para definir el axioma de extensionalidad (también conocido como extensionalidad de funciones) este expresa que dos funciones son iguales si y solamente si son iguales punto a punto.

Dados tipos $A, B : \mathcal{U}$ y funciones $f, g : A \to B$, definimos la función dependiente $\mathsf{happly} : (f = g) \to \prod_{x:A}(f(x) = g(x))$ por inducción de caminos puesto que $f(x) \equiv f(x)$ definicionalmente. El axioma de extensionalidad dice que happly es una equivalencia.

Axioma 3.3.3. *Extensionalidad de funciones*
Dados tipos $A, B : \mathcal{U}$ *y funciones* $f, g : A \to B$*, hay una equivalencia* $(f = g) \simeq (f \sim g)$ *determinada por* happly.

Una versión más general del axioma de extensionalidad es el axioma de univalencia, el cuál fue propuesto por Vladimir Voevodsky y es un pilar fundamental para las contrucciones que se establecen en teoría homotópica de tipos que permiten hacer de esta una fundamentación de las matemáticas.

Axioma 3.3.4. *Axioma de univalencia*

Dados tipos $A, B : \mathcal{U}$*, hay una equivalencia* $(A \simeq B) \simeq (A =_{\mathcal{U}} B)$.

3.4. Axioma de elección y doble negación

Memoria iluminada, galería donde vaga la sombra de lo que espero.

No es verdad que vendrá. No es verdad que no vendrá.

-Alejandra Pizarnik

Teorema 3.4.1. *No es el caso que* $\prod_{A:\mathcal{U}} \neg\neg A \to A$.

Demostración. Nuestro objetivo es dar un tipo A tal que $\neg\neg A \to A$ no se tenga, es decir, constsruír un elemento de 0 a partir de un elemento de $\neg\neg A \to A$.

Consideremos la equivalencia $e : 2 \simeq 2$ dada por $e(0_2) \equiv 1_2$ y $e(1_2) \equiv (0_2)$. Por axioma de univalencia a esta equivalencia le corresponde un camino $p : 2 =_{\mathcal{U}} 2$. De manera que, dado un elemento $f : \prod_{A:\mathcal{U}} \neg\neg A \to A$ y tomando $P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ como $P(A) \equiv (\neg\neg A \to A)$, tenemos

$$\mathsf{apd}_f : (\mathsf{transporte}^P(p, f(2)) = f(2)).$$

Y aplicando la función happly (que dice que si dos funciones son iguales, entonces son iguales punto a punto) en un punto $u : \neg\neg 2$ tenemos

$$\mathsf{happly}(\mathsf{apd}_f, u) : (\mathsf{transporte}^P(p, f(2)) = f(2)(u))$$

Por otra parte, del corolario 3.2.4 tenemos

$$\mathsf{transporte}^P(p, f(2)) = (x \mapsto \mathsf{transporte}^{A \mapsto A}(p, f(2)(\mathsf{transporte}^{A \mapsto \neg\neg A}(p^{-1}, x)))).$$

Además dado que dos puntos $u, v \ :\neq\neq\ 2$ siempre son iguales por extensionalidad, puesto que si tenemos $u, v \ :\neq\ 2 \to 0$, $u(x) = v(x)$ ya que $x : 2 \to 0$ da elementos del 0 y por principio de recursión del tipo 0 (*ex falso quodlibet*) se puede concluír cualquier cosa, en particular, $u(x) = v(x)$. Por lo tanto tenemos que $v = \mathtt{transporte}^{P}(p^{-1}, u) = u$. Por medio del camino $\mathtt{happly}(\mathtt{apd}_f(p), u)$ obtenemos la igualdad

$$\mathtt{tansporte}^{A \mapsto A}(p, f(2)(u)) = f(2)(u).$$

Por último, transportar por medio del camino dado por la equivalencia e por medio de univalencia ($p \equiv \mathtt{ua}(e)$) es lo mismo a aplicar la equivalencia e, de lo que se obtiene $\mathtt{transporte}^{A \mapsto A}(p, f(2)(u)) = e(f(2)(u))$ con lo cual

$$e(f(2)(u)) = f(2)(u)$$

Pero esto no puede ser puesto que $e(x) \neg x$ para todo $x : 2$ (basta evaluar en 0_2 y 1_2). Escrito de otra manera:

$$\prod_{x:2} \neq (e(x) = x)$$

Con lo cual tomando $x = f(2)(u)$ obtenemos un elemento de 0, que es lo que buscábamos al tomar un elemento $f : \neg\neg A \to A$. □

El anterior teorema nos muestra que la lógica dada por tipos como proposiciones no es una lógica clásica puesto que no cumple con la ley de la doble negación. Estamos interesados en establecer un *truncamiento* a los tipos de tal manera que la lógica resultante de tomar los tipos truncados como proposiciones sea la lógica clásica.

Definición 3.4.2. *(Meras proposiciones)*

Un tipo A *se dice una* ***mera proposición*** *si para todos* $x, y : A$ *se tiene que* $x = y$.

La propiedad de ser una mera proposición desvirtúa la relevancia de las pruebas en la lógica que hemos expuesto de la teoría de tipos puesto que todas las demostraciones resultan ser proposicionalmente iguales. Es fácil ver que si A es una mera proposición que tiene puntos entonces $A \simeq \mathbf{1}$, en otras palabras, todas las proposiciones “verdaderas” son teoremas (equivalentes a la verdad).

Dado un tipo $A : \mathcal{U}$ introducimos ahora el tipo $|A|$ que llamamos el truncamiento a una mera proposición de A,

Recordemos que el axioma de elección en teoría de conjuntos dice que para todo sistema de conjuntos existe una función de elección que toma un elemento de cada conjunto. Traducido al lenguaje de teoría de tipos podemos tomar un sistema de conjuntos como una familia de tipos $A : X \to \mathcal{U}$ y traducir $g(A) \in A$ como una proposición $P(x, g(x))$ que quiere decir “$g(x)$ pertenece al conjunto dado por x”, en realidad $P(x, g(x))$ y el axioma de elección resulta ser un caso particular de $\left(\sum_{g:\prod_{x:X} A(x)} \prod_{x:X} P(x, g(x)))\right)$ que se lee: “Existe una función dependiente $g : \prod_{x:X} A(x)$ (que toma índices y les asigna un elemento en su respectivo conjunto $A(x)$) tal que para todo índice $x : X$, se tiene que $P(x, g(x))$.

Teorema 3.4.3. $\left(\prod_{x:X} \sum_{a:A(x)} P(x, a)\right) \to \left(\sum_{g:\prod_{x:X} A(x)} \prod_{x:X} P(x, g(x))\right)$

Nos adentramos ahora en la lógica interna en la teoría de tipos, resulta ser que al tomar a todos los tipos como proposiciones, no sólo llegamos a ambigüedades lingüísticas (como decir que $\mathbb{N}$ es “verdadero”) si no que no se tiene el principio del tercio excluido lo cual implica que no estamos ante la lógica clásica si no ante una lógica intuicionista.

3.5. Tipos inductivos

MORADAS

En la mano crispada de un muerto,

en la memoria de un loco,

en la tristeza de un niño,

en la mano que busca el vaso,

en el vaso inalcanzable,

en la sed de siempre.

-Alejandra Pizarnik

En este capítulo introducimos una manera de crear tipos que serán importantes en topología y teoría de conjuntos. También la introducción de tipos inductivos nos dará paso a establecer la jerarquía de n-tipos en donde las meras proposiciones son uno de los escalones.

Los tipos inductivos son tipos que son generados *libremente* por algunos constructores, los cuales pueden ser elementos o elementos con otros tipos como parámetro. También aparecen los tipos inductivos de orden superior que son tipos en donde los constructores tienen como parámetros caminos de orden superior.

Ejemplo 3.5.1. *El tipo* $\mathbf{1}$ *que conocemos en teoría de conjuntos como el conjunto que contiene un sólo elemento* $\{\varnothing\}$ *es un tipo inductivo que está construido por un único constructor* $* : \mathbf{1}$. *Para construir una función, ya sea dependiente o no dependiente, bastará con tomar un elemento del tipo al que se quiere construir dicha función es decir el principio de recusrsión y el principio de inducción dicen que dado* $a : A$ *podemos construír* $f : \mathbf{1} \to A$ *con la regla de cómputo* $f(*) \equiv a$.

El tipo $\mathbf{2}$ *es un poco más complejo, en este caso tenemos los constructores* $0_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$ *y* $1_{\mathbf{2}} : \mathbf{2}$.

Necesitamos ahora, tomar casos para las funciones debido a que tenemos más de un elemento (les necesario definir la función en todos los valores), si tomamos un enunciado $\mathsf{E} : \mathbf{2} \to \mathcal{U}$ *hay que saber definir* E *en todos los constructures, de manera que el principio de inducción lo que dice es que tomando un elemento* $e_0 : \mathsf{E}(0_{\mathbf{2}})$ *y un elemento* $e_1 : \mathsf{E}(1_{\mathbf{2}})$ *tenemos la prueba* $\mathsf{ind}_{\mathbf{2}}(\mathsf{E}, e_0, e_1) : \prod_{b:\mathbf{2}} \mathsf{E}(b)$ *con las reglas* $\mathsf{ind}_{(}\mathsf{E}, e_0, e_1)(0_{\mathbf{2}}) \equiv e_0$ *y* $\mathsf{ind}_{(}\mathsf{E}, e_0, e_1)(1_{\mathbf{2}}) \equiv e_1$.

Esto puede parecer muy simple, pues solo estamos enunciando que al tener un testigo en cada tipo correspondiente, tenemos una función condicional como la acabamos de ver (un para todo) pero ilustra cómo siempre hacemos uso de las construcciones para las pruebas también en tipos inductivos.

Ejemplo 3.5.2. *Ahora consideremos los números naturales como tipos inductivos. En este caso hacemos uso de dos contructores* $0 : \mathbb{N}$ *y* $\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ahora podemos ver un caso en el que no todos los puntos son enunciados explícitamente como contructores y en el que no todos los constructores son elementos del tipo, para poder, efectivamente, construir los naturales tal y como los conocemos.*

Con estos constructores necesitamos de unos principios de inducción y recursión que nos den las propiedades que necesitamos (de otro modo succ *podría ser por ejemplo la función constante* $\mathsf{succ}(n) = 0$*). Para el principio de inducción tomamos precisamente el principio de inducción de los naturales que conocemos clásicamente de manera que para un enunciado* $\mathsf{E} : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$ *si tenemos* $e_z : \mathsf{E}(0)$ *y* $e_s : \prod_{n:\mathbb{N}} \mathsf{E}(n) \to \mathsf{E}(n+1)$ *entonces tenemos la prueba* $\mathsf{ind}_{\mathbb{N}} : \prod_{n:\mathbb{N}} \mathsf{E}(n)$.

Este último es sencillamente el principio de inducción para los naturales en teoría de conjuntos; tomamos una prueba en un punto base, el 0*, luego una prueba que indique que la propiedad se transmite por sucesores y por ende tenemos una prueba de que la propiedad se tiene para todos los naturales.*

Ejemplo 3.5.3. *Construimos ahora el círculo unitario* $\mathbb{S}^1$ *tomando como contructores un punto* $\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$ *y un camino* $\mathsf{loop} : \mathsf{base} = \mathsf{base}$*. Las construcciones inductivas resultan ser libres,* *es decir, no estamos anteponiendo que* $\mathtt{loop} = \mathtt{loop} \cdot \mathtt{loop}$ *o aún peor* $\mathtt{loop} = \mathtt{refl}_{\mathtt{base}}$*, si no que en realidad* $\mathtt{loop}$ *nos genera una familia de caminos* $\mathtt{loop}^n = \mathtt{loop} \cdot \ldots \cdot \mathtt{loop}$*, a esto nos referimos con construcción libre.*

El principio de inducción nos dice que para construír una función dependiente de $\mathbb{S}^1$ *a una familia* $P : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{U}$ *basta con tomar un punto* $b : P(\mathtt{base})$ *y un camino* $l : b = b$ *y tenemos la función* $\prod_{x:\mathbb{S}^1} P(x)$*. Del principio de inducción se puede demostrar que efectivamente* $\mathtt{loop} \neq \mathtt{refl}_{\mathtt{base}}$

Note además que la construcción se basa en que ya conocemos el grupo fundamental del círculo, (proposición 1.3.4) y en base a ello podemos "generar" el espacio de caminos en $\mathbb{S}^1$ *como una construcción libre generada por un elemento (en analogía* $\mathbb{Z}$*). De este modo se puede ver cómo las construcciones en teoría homotópica de tipos parten de lo ya conocido, puesto que sus objetos esenciales, los tipos, buscan referir a construcciones matemáticas (en muchos casos bastante más sofisticadas).*

3.6. Tipos inductivos de orden superior

Hemos visto cómo definir ciertos tipos estableciendo ciertos puntos "base" y caminos entre puntos del tipo. Estamos interesados en definir tipos que conocemos su estructura de n-grupoide, es decir, que sabemos cómo son los caminos entre $(k-1)$-caminos. Para esto necesitamos definiciones inductivas que involucren caminos de tal orden, no obstante, existe el inconveniente de que al aparecer una función dependiente, dos puntos iguales no necesariamente son llevados al mismo tipo, de manera que tenemos que hacer uso de caminos dependientes, es decir, la función $\mathtt{apd}_f$ del Lema 3.2.5 y el lema del transporte (Lema 3.2.2).

3.6.1. n-cículos

En búsqueda de definir ahora los tipos $\mathbb{S}^n$, queremos involucrar información de sus grupos de homotopía de orden superior. Es un hecho conocido (corolario 4.9 [Hat05]) que $\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$ para $n < k$ sabemos entonces que hay que definir inductivamente a $\mathbb{S}^n$ a partir de sus n-caminos (caminos entre los $n-1$-caminos donde los 0-caminos son los puntos del tipo).

En orden de definir estos tipos, démonos primero la presentación del espacio de caminos como tipos basados y luego veamos cómo *suspender* un tipo en orden de acceder a su estructura superior.

Ejemplo 3.6.1. *Definimos el tipo $\mathbb{S}^2$ inductivamente con los constructores*

- *Un punto* $\mathsf{base} : \mathbb{S}^2$
- *Un camino 2-dimensinal* $\mathsf{surf} : \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$

Como principio de recursión tenemos que dado B *con* $b : B$ *y* $s : \mathsf{refl}_b = \mathsf{refl}_b$*, tenemos una función* $f : \mathbb{S}^2 \to B$ *con* $f(\mathsf{base}) \equiv b$ *y* $\mathsf{ap}^2_f(\mathsf{surf}) = s$*. Donde* ap^2_f *es una extensión a* 2*-caminos de la función* ap_f*, es decir, por medio de una función* f*, dos caminos* $p, q : x = y$ *y un camino entre* p *y* q, $r : p = q$ *obtenemos un camino entre caminos en la imagen de* f *dada por* $\mathsf{ap}^2_f : f(p) = f(q)$.

Definición 3.6.2. *Un tipo basado o tipo puntuado es un tipo* (A, a) *con* $A : \mathcal{U}$ *un tipo y un punto* $a : A$ *llamado su punto base. Escribimos* $\mathcal{U}_\cdot$ *como el tipo de todos los tipos basados en el universo* $\mathcal{U}$.

Definición 3.6.3. *Dado un tipo basado* (A, a)*, definimos el espacio de lazos o bucles de* (A, a) *como el siguiente tipo basado:*

$$\Omega(A, a) :\equiv ((a =_A a), \mathsf{refl}_a).$$

Un elemento de él es llamado un bucle en a*. Se define el espacio de* n*-bucles recursivamente como:*

$$\Omega^0(A, a) :\equiv (A, a)$$
$$\Omega^{n+1}(A, a) :\equiv \Omega^n(\Omega(A, a)).$$

Definición 3.6.4. *La suspensión de un tipo* A *llamada* ΣA *es volver a los puntos de* A *caminos de manera universal, está generada por los siguientes constructores:*

- *Un punto* $N : \Sigma A$
- *Un punto* $S : \Sigma A$
- *Una función* $\mathsf{merid} : A \to (N =_{\Sigma A} S)$

El principio de recursión dice que dados puntos $n, s : B$ *y una función* $m : A \to (n = s)$ *tenemos una función* $f : \Sigma A \to B$ *que respeta los constructores. El principio de inducción dice que dada una familia* $P : \Sigma A \to \mathcal{U}$ *con puntos* $n : P(N)$, $s : P(S)$ *y para cada* $a : A$ *un camino* $m(a) : n =^{P}_{\mathsf{merid}(a)} s$ *entonces existe una función dependiente* $f : \prod_{x:\Sigma A} P(x)$ *tal que* $f(N) \equiv n$, $f(S) \equiv s$ *y para todo* $a : A$ *se tiene* $\mathsf{spd}_f(\mathsf{merid}(a)) = m(a)$.

Lema 3.6.5. $\Sigma 2 \simeq \mathbb{S}^1$

El anterior lema muestra como efectivamente estamos elevando la dimensión del tipo en el sentido de que lleva la frontera del segmento de recta a la frontera de la bola unitaria. Aspectos como este son escenciales para establecer el n*-esqueleto de un CW-complejo en topología algebraica. Con esto nos damos paso a definir la* n*-esfera:*

Definición 3.6.6. *Recursivamente se define* $\mathbb{S}^n$ *como*

- $\mathbb{S}^0 :\equiv 2$
- $\mathbb{S}^{n+1} :\equiv \Sigma \mathbb{S}^n$

3.6.2. n-tipos

Como hemos mencionado anteriormente, los tipos están vistos como ∞-grupoides, los n-tipos consisten en tipos cuya estructura de k-grupoide (para $k \geqslant n+1$) es trivial. En esta sección definimos la jerarquía de n-tipos y los truncamientos a dichos niveles los cuales serán nuestro primer ejemplo de modalidad.

Definición 3.6.7. *Se define* $\mathsf{is}-\mathsf{n}-\mathsf{type} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *como:*

$$\mathsf{is}-\mathsf{n}-\mathsf{type}(X) :\equiv \begin{cases} \mathsf{isContr}(X) & \mathsf{si} \quad n = -2 \\ \prod_{x,y:X} \mathsf{is}-n'-\mathsf{type}(x =_X y) & \mathsf{si} \quad n' = n+1 \end{cases}$$

Teorema 3.6.8. *Para todo* $n \geqslant -2$ *y todo tipo* X*,* $\mathsf{is}-n-\mathsf{type}(X) \to \mathsf{is}-n+1-\mathsf{type}(X)$

3.7. Truncamientos

Definición 3.7.1. *Dado un tipo* A*, definimos el tipo* $\|A\|_n$ *inductivamente por:*

- *Una función* $|-|_n : A \to \|A\|_n$
- *Para cada función* $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$ *un punto* $h(r) : \|A\|_n$
- *Para cada* $r : \mathbb{S}^{n+1} \to \|A\|_n$ *y cada* $x : \mathbb{S}^n + 1$ *un camino* $s_r(x) : r(x) = h(r)$.

Lema 3.7.2. $\|A\|_n$ *es un* n*-tipo.*

4 Lógica modal y modalidades

La lógica modal es la lógica intuicionista mencionada anteriormente con unos operadores modales los cuales representan comunmente la *posibilidad* y la *necesidad* de una proposición, a tales modalidades se les denomina modalidades aléticas. Como operadores modales nos referimos a propiedades dadas a un determinado enunciado, se puede entender a su vez como la consideración del enunciado en un *contexto* o *mundo*, la consideración de estas abre una amplia consideración de los operadores modales, algunos ejemplos son: qué podrá/tiene que suceder en algún futuro (temporal), qué podemos/qué es necesario saber (epistémica) o qué puede/tiene que ser de cierta manera (deóntica).

4.1. Modalidades como mónadas

En el presente capítulo daremos una introducción a las modalidades como mónadas. Como veremos, las modalidades guardan una estrecha relación con los cuantificadores, en particular cierta forma de modalidad que definiremos acá también lo hará. Es también sabido que aparece cierto comportamiento adjunto entre los cuantificadores de la lógica clásica de primer orden (no es directamente una adjunción entre ellos), también, en el lenguaje de Mitchell-Bénabou en teoría de topos estas adjunciones aparecen y son mucho más visibles [MM12].

Partamos de un ejemplo tomado de [Cor20] sobre modalidades aléticas. El ejemplo consiste en considerar un tipo $\textsc{Perros}$ de todos los perros y un tipo $\textsc{Personas}$ de todas las personas y supongamos que todos los perros tienen un único dueño, tenemos la función

$$\mathit{due\tilde{n}o} : \textsc{Perros} \to \textsc{Personas}$$

Esta función permite un transporte de propiedades

$$\mathit{due\tilde{n}o}^* : 2^{\textsc{Personas}} \to 2^{\textsc{Perros}}$$

Tomar el tipo 2^A puede entenderse como las propiedades de A diciendo que un elemento cumple una propiedad si pertenece a determinada clase[1]. Un ejemplo de cómo se determina la función *dueño** es el caso de que "ser francés" le asigna a un perro la propiedad de "perro cuyo dueño es francés".

Está claro que una persona puede tener más de un perro, lo cual no nos permite invertir la función *dueño* pues no tendría comportamiento funcional. Esto presenta complicaciones para devolver propiedades de $\textsc{Perros}$ a propiedades de $\textsc{Personas}$ puesto que si intentamos simplemente la asignación $P(x) \mapsto$ *dueño de* ***algún***$P(x)$ para una propiedad P de perros, al volver por *dueño** no obtenemos que el perro tenga la propiedad P, en cambio que su dueño tiene un perro con la propiedad P, a este intento lo llamamos $\sum_{\mathit{due\tilde{n}o}}$.

Por otra parte, podemos intentar también la asignación $P(x) \mapsto$ *dueño de* ***solamente***$P(x)$, que denominamos $\prod_{\mathit{due\tilde{n}o}}$. Nótese que $\sum_{\mathit{due\tilde{n}o}}$ nos da la posibilidad de que x sea P, en cambio $\prod_{\mathit{due\tilde{n}o}}$ nos quita la posibilidad de que no lo sea, o lo que es lo mismo, hace necesario que sea P.

[1] La expresión "2^A" es un abuso de notación, puesto que no hemos definidos exponenciales en teoría de tipos. Nos estamos refiriendo en realidad al tipo $2 \to A$, que en teoría de conjuntos está identificado también como la clase de subconjuntos de A

Lo anterior forma un trio adjunto $\sum_{dueño} \dashv dueño^* \dashv \prod_{dueño}$, similarmente, en el lenguaje de Michell-Bénabou se tiene el trio adjunto:

$$\begin{tikzcd} X^{\Omega} \arrow[r, shift left=6, "\forall_x"] \arrow[r, shift right=6, "\exists_x"'] & \Omega \arrow[l, "P(x)"'] \end{tikzcd}$$

4.2. Modalidades en Teoría Homotópica de Tipos

Definición 4.2.1. *Un subuniverso reflexivo es un predicado* $P : \mathcal{U} \to \mathsf{Prop}$ *tal que para todo* $A : \mathcal{U}$ *existe un tipo* $\bigcirc A$ *tal que* $P(\bigcirc A)$ *está habitado y una función* $\eta_A : A \to \bigcirc A$ *con la propiedad de que para todo* $B : \mathcal{U}$ *con* $P(B)$*, la siguiente función es una equivalencia:*

$$\begin{cases} (\bigcirc A) \to (A \to B) \\ \qquad f \mapsto f \circ \eta_A \end{cases}$$

Definición 4.2.2. *Una **modalidad** es un operador* $\bigcirc : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *con las siguientes propiedades:*

(I) Hay funciones $\eta_A^{\bigcirc} : A \to \bigcirc A$ *para todo tipo* A.

(II) Para todo $A : \mathcal{U}$ *y toda familia de tipos* $B : \bigcirc(A) \to \mathcal{U}$*, una función*

$$\mathrm{ind}_{\bigcirc} : \prod_{a:A} \bigcirc(B(\eta_A^{\bigcirc}(a))) \to \prod_{z:\bigcirc(A)} \bigcirc(B(z))$$

(III) Para todos $z, z' : \bigcirc(A)$*, la función* $\eta_{z=z'}^{\bigcirc} : (z = z') \to \bigcirc(z = z')$ *es una equivalencia.*

Si la función $\eta_A^{\bigcirc}$ *es una equivalencia, se dice que* A *es modal para la modalidad* $\bigcirc$

A partir de ahora vamos a trabajar con la modalidad "correducción" $\mathfrak{I}$ con la función dada por los axiomas $\iota_A : A \to \mathfrak{I}A$. La modalidad correducción viene de las ideas de Lawvere de cohesión en [Law86] y [Law94] como la composición $p_* \circ p^*$ de dos funtores $p^* : S \to E$ y $p_* : E \to S$ ente dos topos E y S. Intuitivamente se puede interpretar a E como un espacio y a S como la categoría de conjuntos donde p^* colecciona a todos los puntos de E como un conjunto y p_* le asigna a cada conjunto su espacio discreto.

Definición 4.2.3. *[Wel17]*

(I) Sea A un tipo y B un tipo coreducido. Entonces tenemos la función:

$$\mathfrak{I} - \mathrm{recursión} : (A \to B) \to (\mathfrak{I}A \to B)$$

que es aplicar el principio de inducción al caso no dependiente.

(II) Para una función $f : A \to B$ entre tipos arbitrarios se tiene una función $\mathfrak{I}f : \mathfrak{I}A \to \mathfrak{I}B$ dada por $\mathfrak{I} - \mathrm{recursión}(\iota_B \circ f)$.

(III) Para una función $f : A \to B$ entre tipos arbitrarios, tenemos una homotopía llamada $\mathfrak{I}$-natrualidad(f) en el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{I}A \arrow[d, "\mathfrak{I}f"] \\ B \arrow[r, "\iota_B"'] & \mathfrak{I}B \end{tikzcd}$$

Proposición 4.2.4. *Si f es una equivalencia, entonces $\mathfrak{f}$ es una equivalencia.*

Demostración. Si $f : A \to B$ es una equivalencia, entonces existe una inversa $g : B \to A$ de manera que considerando $\mathfrak{I}$-recursión como una función entre tipos, levantando caminos nos podemos formar las homotopías apropiadas para $\mathrm{IsEquiv}(\mathfrak{I}f, \mathfrak{I}g)$. □

4.3. Semántica categórica para HoTT

Como hemos visto, en teoría homotópica de tipos, los tipos resultan una ∞-categoría, en realidad un ∞-grupoide. Adicionalmente, con el objetivo de adentrarnos en la vista categórica y ver semánticamente las modalidades (una semántica categórica) de la teoría de tipos, veremos cómo están planteados los tipos como una sintaxis para categorías que son localmente cartesianamente cerradas y eventualmente un ∞-topos. La presentación de esta formalización de la teoría homotópica de tipos se encuentra en el capítulo 2 de [Sch13], también se presenta una visualización categórica en [Shu18].

Definición 4.3.1. *En una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, se define la cateigoría partida $\mathcal{C}_{/X}$ de la siguiente manera:*

- *Los objetos de $\mathcal{C}_{/X}$ son morfismos con codominio X, es decir, $f : A \to X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{/X})$ para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*
- *Un morfismo de $f : A \to X$ a $f' : B \to X$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tal que $f \circ g = f'$ como se representa en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Definición 4.3.2. *Una categoría $\mathcal{C}$ se dice* ***localmente cartesianamente cerrada*** *si para todo objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, la categoría partida $\mathcal{C}_{/X}$ es cartesianamente cerrada.*

Proposición 4.3.3. *Si $\mathcal{C}$ es localmente cartesianamente cerrada, entonces para todo $f : X \to Y$, existe un trío adjunto de funtores $(f! \dashv f^* \dashv f_*)$ entre las categorías partidas $\mathcal{C}_{/X}$ y $\mathcal{C}_{/X}$ llamados funtores de cambio de base.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{/X} \arrow[r, shift left=6, "f_!"] \arrow[r, shift right=6, "f_*"'] & \mathcal{C}_{/Y} \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Definición 4.3.4. *Dada una categoría localmente cartesianamente cerrada $\mathcal{C}$, se dice que su lógica interna es una teoría dependiente de tipos o que provee una semántica categórica para tipos dependientes de la siguiente manera:*

- *Los objetos de $\mathcal{C}$ son los tipos.*
- *Los objetos en la categoría partida $\mathcal{C}_{/\Gamma}$ son tipos dependientes de Γ, denotados*

$$\Gamma \vdash X : \mathrm{Type}$$

- *Un morfismo $* \to X$ (donde $*$ es el objeto terminal) en una categoría $\mathcal{C}_{/\Gamma}$ es llamado un término de tipo X dependiente de Γ y se escribe*

$$a : \Gamma \vdash x(a) : X(a)$$

- *Dado un morfismo $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ en $\mathcal{C}$ con las adjunciones inducidas entre categorías partidas*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{/\Gamma_1} \arrow[r, shift left=6, "f_!"] \arrow[r, shift right=6, "f_*"'] & \mathcal{C}_{/\Gamma_2} \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

  - *Dado un morfismo $(* \to X)$ en $\mathcal{C}_{/\Gamma_2}$, su pullback por el morfismo f^* es llamado sustitución de variables*

$$a : \Gamma_1 \vdash (f(a)) : X(f(a))$$

- *Dado un objeto* X *de* $\mathcal{C}_{\Gamma_1}$*, su imágen* $f_!(X) \in \mathrm{Ob}(\Gamma)$ *es llamada la* ***suma dependiente*** *de* X *por medio de* f *y se denota*

$$\Gamma_2 \vdash \sum_f X : \mathrm{Type}$$

- *Dado un objeto* X *de* $\mathcal{C}_{\Gamma_1}$*, su imágen* $f_*(X) \in \mathrm{Ob}(\Gamma)$ *es llamado el* ***producto dependiente*** *de* X *por medio de* f *y se denota*

$$\Gamma_2 \vdash \prod_f X : \mathrm{Type}$$

Las propiedades universales de los adjuntos $(f_! \vdash f^* \vdash f_*)$ *son las reglas de introducción y eliminación.*

4.4. Ejemplos

Ejemplo 4.4.1. *(Doble negación)*

Considere la modalidad $\neg\neg : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *Veamos que cumple con los axiomas de modalidad:*

(I) *Considere* $\eta_A^{\neg\neg} A \to \neg\neg A$ *que funciona de la siguiente manera: debe ser una función* $A \to (\neg A \to 0)$, *es decir, una función* $A \to ((A \to 0) \to 0)$ *de manera que dado* $a : A$ *construye* $(A \to 0) \to 0$ *como la función* $0 \to 0$ *dada por el principio de recursión de* 0 *puesto que si* $a : A$ *entonces* $A \to 0 = 0$, *en caso de que* $A = 0$ *sucede que* $0 \to 0 \neq 0$ *con lo cual* $\neg\neg 0 = 0$ *y por lo tanto tenemos la función dada por el principio de recursión de* 0. *Ahora bien, hemos visto que existe siempre la fuinción* $\eta_A^{\neg\neg}$ *para todo* $A : \mathcal{U}$.

(II) *Como vimos en* I), *en realidad los tipos* $\neg\neg A$ *son contraíbles, es decir que tienen tan solo un punto. Definimos entonces* $\mathtt{ind}_{\neg\neg} : \prod_{a:A} \neg\neg(B(\eta_A^{\neg\neg}(a))) \to \prod_{z:\neg\neg A} \neg\neg(B(z))$ *como simplemente la segunda proyección* $\pi_2(a, x) \mapsto (z \mapsto x)$ *puesto que* $\neg\neg(B(\eta_A^{\neg\neg}(a)) = \neg\neg(B(z))$ *(por medio del camino reflexivo).*

(III) *Puesto que* $\neg\neg A$ *es contraíble, también lo es* $z = z'$ *para* $z, z' : \neg\neg A$. *Así pues es fácil construir la inversa de* $\eta_{z=z'}^{\neg\neg}$ *como simplemente* $x \mapsto \mathtt{refl}_z$.

Ejemplo 4.4.2. *(Modalidad abierta)*

Sea P *una mera proposición. La función* $\bigcirc :\equiv X \mapsto P \to X$ *es una modalidad:*

(I) *Sea* A *un tipo, considere la función* $f : A \to (P \to A)$ *definida como* $f :\equiv x \mapsto f_x$ *tal que* $f_x(c) = x$, *para todo* $x : A$ *y* $c : P$, *como* P *es una mera proposición, basta definir cada función* $f : P \to A$ *en un punto, con lo cual la función está bien definida.*

(II) *Para este caso tenemos que aclarar que* $1 \to A \simeq A$ *dada por la equivalencia dada por el principio de recursión* $\mathtt{rec}_1 : \prod_{C:\mathcal{U}} C \to 1 \to C$ *computada por* $\mathtt{rec}_1(C, *, c) :\equiv c$ *consiguiendo la inversa tomando* $(1 \to C) \to 1 \to (1 \to C)$ *la cual resulta ser la misma función*

$f : (1 \to A) \to A$. *Ahora bien podemos reemplazar cada aparición de* $\bigcirc X$ *por* X *vía la equivalencia, de manera que una función* $\mathrm{ind}_{\bigcirc} : \prod_{a:A} \bigcirc(B(\eta_A^{\bigcirc}(a))) \to \prod_{z:\bigcirc A} \bigcirc(B(z))$ *consiste en una función de tipo* $h : \prod_{a:A} B(\eta_A^{\bigcirc}(a)) \to \prod_{z:\bigcirc A}(B(z))$ *que definimos por medio de la equivalencia* f *pues todo* $z : \bigcirc A$ *es de la forma* f_a.

(III) Del análisis anterior, queda claro que f *es una equivalencia en cualquier caso.*

5 Construcciones geométricas

En la presente sección se dan algunas definiciones que son análogas a objetos conocidos en contextos geométricos. No se va a profundizar en geometría de Cartan, sin embargo sigue a [Wel17] en esa búsqueda, sin llegar a abarcar todas las construcciones.

Una breve introducción a la geometría de Cartan es que generaliza la geometría de Riemann en el sentido de la geometría de Klein y viceversa, como se muestra en el siguiente cuadro:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Geometría Euclidiana} \arrow[r, "\textit{Generalización}"] \arrow[d, "\textit{Generalización}"'] & \textbf{Geometrías de Klein} \arrow[d, "\textit{Generalización}"] \\
\textbf{Geometría Riemanniana} \arrow[r, "\textit{Generalización}"'] & \textbf{Geometrías de Cartan}
\end{tikzcd}$$

En la geometría de Klein aparecen los grupos de Lie, los cuales son grupos topológicos que son una variedad. Los H-espacios son espacios topológicos con una estructura de monoide interna, este será el acercammiento a la geometría de Klein que aparece en la formalización de Wellen.

5.1. H-espacios y discos formales

Definición 5.1.1. *H-espacios invertibles por izquierda*

Sea X *un tipo. Una estructura de H-espacio definible por izquierda sobre* X *consiste en la siguiente información:*

(I) *Una unidad* $e : X$

(II) *Una función multiplicación* $\mu : X \times X \to X$

(III) *Una prueba de que la unidad es unidad a izquierda y a derecha:*

$$\prod_{x:X} \mu(e, x) = x; \prod_{x:X} \mu(x, e) = x.$$

(IV) *Una prueba de que para todo* $a : X$ *la translación por izquierda* $x \mapsto \mu(x, a)$ *es una equivalencia:*

$$\sigma : \prod_{a:X} \mathsf{Isequiv}(x \mapsto \mu(x, a))$$

La noción de modalidad que tenemos es una composición de adjunciones en un topos que a cada espacio lo lleva a a su conjunto de puntos y luego lo lleva a un espacio discreto. Las adjunciones que estamos considerando tienen ese comportamiento mas no necesariamente son exactamente lo que acabamos de describir, en realidad lo que queremos son funtores que satisfagan los axiomas de cohesión de Lawvere [Law94]. Sin embargo, considerando algo *similar* a esa trivialización del espacio, obtenemos, por medio del ir y venir de la modalidad, un conjunto de puntos que son "indistinguibles" bajo dicha trivialización. De manera que resulta definir los puntos de un tipo con una idea de cercanía si pertenecen a la misma fibra de la función ι de la modalidad.

Definición 5.1.2. *Sea* X *un* H*-espacio invertible por izquierda y* $a : X$

(I) *Se define la translación por izquierda como:*

$$- * a :\equiv x \to \mu(x, a).$$

(II) *Si* $f_a : X \to X$ *es una inversa de* $- * a$*, definimos:*

$$- * a^{-1} :\equiv f_a$$

Proposición 5.1.3. *Sea* X *un* H*-espacio inveritble por izquierda*

1. *La función* $(\pi_2, \mu) : X \times X \to X \times X$ *es una equivalencia.*

2. *Si* $\varphi : X \times X \to X$ *admite el triángulo conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "(\pi_2, \mu)"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X \times X \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Entonces φ *es homotópica a* $\delta : X \times X \to X$ *definida como* $\delta(a, b) :\equiv b * a^{-1}$.

Dado un tipo A, dos puntos $x, y : A$ se dicen infinetismalmente cercanos si $\iota_A(x) = \iota_A(y)$.

Proposición 5.1.4. *[Wel17] Si* $A : \mathcal{U}$ *y* $x, y : A$ *son puntos infinitesimalmente cercanos, entonces para toda función* $A \to B$ *los puntos* $f(x)$ *y* $f(y)$ *son infinitesimalmente cercanos.*

Demostración. Que x y y sean infinitesimalmente cerrados es que existe un camino $p : \iota_A(x) = \iota_A(y)$, De la definiciíon 4.2.3 obtenemos una función $\Im A \to \Im B$, ahora bien levantando el camino p por medio de la función $\Im f : \Im A \to \Im B$ (es decir aplicando el lema 3.2.1) obtenemos un camino $ap_{\Im f}(p) : \Im f(\iota_B(x)) \to \Im f(\iota_B(y))$. Por la definición 4.2.3 tenemos el cuadrado naturalidad

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "f"'] & \Im A \arrow[d, "\Im f"] \\ B \arrow[r, "\iota_B"'] & \Im B \end{tikzcd}$$

Es decir, da la homotopía se consiguen caminos en cada punto $\eta : \Im f(\iota(x)) = \iota_B(f(x))$ y $\xi : \Im f(\iota_A(y)) = \iota_B(f(y))$. Componiendo los caminos obtenemos $\eta^{-}1 \cdot ap_{\Im f}(p) \cdot \xi : \iota_B(f(x)) = \iota_B(f(y))$. $\square$

Definición 5.1.5. *Sea* A *un tipo y* $a : A$*. El tipo* $\mathbb{D}_a$ *definido de las siguientes maneras equivalentes, es el* ***disco formal*** *en* a.

(I) $\mathbb{D}_a$ *es la suma de todos los puntos infinitesimalmente cercanos a* a*, es decir:*

$$\mathbb{D}_a :\equiv \sum_{x:A} \iota_A(x) = \iota_A(a).$$

(II) $\mathbb{D}_a$ *es la fibra de* ι_A *en* $\iota_A(a)$.

(III) $\mathbb{D}_a$ *se define como el siguiente pullback:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_a \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & 1 \arrow[d, "* \mapsto \iota_A(a)"] \\
A \arrow[r, "\iota_A"'] & \Im A
\end{tikzcd}$$

Proposición 5.1.6. *Si* $f : A \to B$ *es un tipo y* $a : A$*, tenemos la función:*

$$d(f) : \prod_{a:A} \mathbb{D}_a \to \mathbb{D}_{f(a)}$$

Demostración. De la demostración de la proposición 5.1.3 obtuvimos el camino $\eta^{-1} \cdot ap_{\Im f}(p) \cdot \xi : \iota_B(f(x)) \to \iota_B(f(y))$, podemos definir a $d(f)(a) :\equiv (x, \gamma) \mapsto (f(x), \eta^{-1} \cdot ap_{\Im f}(\gamma) \cdot \xi)$. □

Definición 5.1.7. *Sea* A *un tipo. El tipo* $T_\infty A$ *definido de las siguientes maneras equivalentes es el* ***haz de disco formal*** *de* A.

(I) $T_\infty A$ *es la suma de todos los discos formales en* A*:*

$$T_\infty A :\equiv \sum_{a:A} \mathbb{D}_a.$$

(II) $T_\infty A$ *se define por el siguiente pullback:*

$$\begin{tikzcd} T_\infty A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & A \arrow[d, "\iota_A"] \\ A \arrow[r, "\iota_A"'] & \Im A \end{tikzcd}$$

Lema 5.1.8. *1. Si* $f : A \to B$ *es una equivalencia, también lo es la función inducida*

$$d(f)(a) : \mathbb{D}_a \to \mathbb{D}_{f(a)}$$

para todo $a : A$.

2. Sea A *cualquier tipo y* $x, y : A$ *dos puntos. Para todo camino* $\gamma : x = y$ *tenemos una equivalencia* $\mathbb{D}_x \simeq \mathbb{D}_y$.

Demostración. 1. Del lema 3.3.3 tenemos una equivalencia $\iota_A(x) = \iota_A(y) \to \Im f \circ \iota_A(x) = \Im f \circ \iota_A(y)$, además, por la naturalidad de la modalidad $\Im$, se tiene la homotopía

$$H : \prod_{x:A} (\Im f \circ \iota_A(x) = \iota_B \circ f(x))$$

luego concardenando caminos se obtiene la homotopía

$$H' : \prod_{x,y:A} ((\Im f \circ \iota_A(x) = \Im f \circ \iota_A(y)) =_{\Im B} (\iota_B \circ f(x) = \iota_B \circ f(y)))$$

Lo que quiere decir que la función $\iota_A(x) \to \iota_A(y) \to \iota_B(f(x)) = \iota_B(f(y))$ dada por la composición es una equivalencia. Ahora bien, si fijamos un punto $a : A$, obtenemos las familias dependientes $\iota_A(a) = \iota_A(x)$ y $\iota_B(f(a)) = \iota_B(f(x))$ de ahí una suma de equivalencias $\sum_{x:A} \iota_A(a) \to \iota_A(x) \to \iota_B(f(a)) = \iota_B(f(x))$ que resulta ser una equivalencia entre las sumas que por definición es $d(f)$.

2. Transportar el camino γ por medio de $x \mapsto \mathbb{D}_x$ es una equivalencia.

□

Teorema 5.1.9. *(Trivialidad en H-espacios) Sea V un H-espacio y $\mathbb{D}_e$ el disco formal en su unidad. Entonces se tiene lo siguiente:*

1. *Para todo $x : V$ existe una equivalencia*

$$\psi_x : \mathbb{D}_x \to \mathbb{D}_e$$

2. *$T_\infty V$ es un haz trivial con fibra $\mathbb{D}_e$, es decir, tenemos una equivalencia $T_\infty V \to V \times \mathbb{D}_e$ y el triángulo conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} T_\infty V \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & V \times \mathbb{D}_e \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Demostración. 1. De la proposición 5.1.3 se concluye que la translación por derecha es una equivalencia, y del lema 5.1.9 que la función inducida $\psi'_x : \mathbb{D}_e \to \mathbb{D}_{e*x}$ también lo es. Como tomamos a e como el módulo de $*$, tenemos un camino $x = e * x$ y, otra vez, por el lema 5.1.9, una equivalencia $\psi''_x \mathbb{D}_{e*x} \to \mathbb{D}_x$. De manera que podemos componer para obtener la equivalencia $\psi_x :\equiv (\psi'_x)^{-1} \circ (\psi''_x)^{-1} : \mathbb{D}_x \to \mathbb{D}_e$.

2. Hemos definido

$$T_\infty V :\equiv \textstyle\sum_{x:V} \mathbb{D}_x$$

Definimos la función $\varphi T_\infty V \to V \times \mathbb{D}_e$ por

$$\varphi((x, d_x)) :\equiv (x, \psi_x(d_x))$$

También su inversa tomando la inversa de la función psi_x (pues es una equivalencia), concardenando caminos caminos obtenemos las igualdades que hacen al triángulo conmutativo:

$$(x, d_x) = \varphi^{-1}(\varphi(x, d_x)) = (x, \psi^{-1}(d_x))$$
$$(x, d_x) = \varphi(\varphi^{-1}(x, d_e)) = (x, \psi^{-1}(d_e)).$$

□

5.2. Topos suaves y espacio tangente

En la siguiente sección se dará una breve introducción a los topos suaves, esto con el ánimo de detallar en una afirmación que trata Felix Wellen en su tesis de doctorado [Wel17] que dice que el disco formal que hemos definido, concuerda con el espacio tangente en un punto en un topos suave.

La información que acá se expresa es sacada mayoritariamente de n-lab y de [RW78].

Proposición 5.2.1. *[Wel17] En un topos suave con infinitesimales de primer orden, el haz de disco formal en una variedad es el haz tangente a la variedad.*

Para una categoría $\mathfrak{C}$ un objeto K de $\mathfrak{C}$ se dice un **anillo interno a** $\mathfrak{C}$ o objeto anillo, si existen morfismos $\eta_+ : 0_{\mathfrak{C}} \to K$, $\eta_\times : 1_{\mathfrak{C}} \to K$, $\mu_+ : K \oplus K \to K$ y $\mu_\times K \otimes K \to K$ que se comportan como un anillo, de manera que los morfismos η representan los módulos multiplicativo y aditivo, mientras que las funciones μ son las operaciones del anillo. Los objetos $K \oplus K$ y $K \otimes K$ son generalizaciones de los coproductos y los productos, pero podemos pensar en ellos como si fueran los propios coproductos y productos.

La descripción que acabamos de hacer se conoce como internalizar una estructura en una categoría, un ejemplo de esto es el caso de los grupos topológicos que son una internalización de un grupo en la categoría de espacios topológicos Top. Cabe destacar que hablamos de productos y coproductos, así como de objetos inicial y final, de manera que resulta natural establecer una definición así en una categoría con límites finitos como es el caso de un topos.

Definición 5.2.2. *(Topos suave)*

- *Un topos anillado, es un topos con un anillo interno.*
- *Un topos lineado es un topos anillado con un objeto* $\mathsf{R}, +, \cdot$ *que es un álgebra interna sobre* K*, el objeto anillo. Al objeto* $\mathsf{R}, +, \cdot$ *se le conoce como el objeto linea.*
- *Un topos suave es un topos lineado tal que el álgebra* $\mathsf{R}, +, \cdot$ *es un espacio diferenciable con una noción de infinitesimalidad.*

Este trabajo no pretende profundizar en las definiciones que acabamos de dar, sin embargo, nos permite dar una idea del contexto en el cuál está planteada la Proposición 5.2.1.

Por último, veamos la definición de haz tangente en una categoría con objeto anillo (conmutativo) que aparece en [RW78]:

Definición 5.2.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con límites finitos y exponenciales, y K un objeto anillo conmutativo de $\mathfrak{C}$, se define:*

- $D_0 := 1 \hookrightarrow R$
- $D_1 := \{a \in \mathfrak{C} | a^2 = 0\} \hookrightarrow R$

Llamamos a R la línea, y a D_1 un vector tangente o un punto con una vecindad lineal infinitesimal.

Definición 5.2.4. *Se define el haz tangente de variedad M en x como*

$$T_x(M) := M^{D_1}$$

Junto con la proyección canónica

$$\pi : T_x(M) \to M$$

Que envía a cada morfismo f, a su imagen por medio del módulo de la suma $f(0)$.

5.3. Espacios étale formales

Definición 5.3.1. *Sea $f : A \to B$ una función y $\varphi : A \to B \times_{\mathfrak{I}B} \mathfrak{I}A$ el morfismo inducido por la naturalidad de $\mathfrak{I}$:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B \times_{\mathfrak{I}B} \mathfrak{I}A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & \mathfrak{I}A \arrow[d, "\mathfrak{I}f"] \\
& B \arrow[r, "\iota_B"'] & \mathfrak{I}B
\end{tikzcd}$$

- *Decimos que* f *es una función* ***sin ramificar formal****, si* φ *es un* 1*-monomorfismo.*

- *Decimos que* f *es* ***suave formal****, si* φ *es un* 1*-monomorfismo.*

- *Decimos que* f *es* ***étale formal****, si* φ *es una equivalencia.*

Proposición 5.3.2. *Si* $\mathfrak{I}$ *es exacta por izquierda, las funciones étales formales se pueden definir como funciones* $f : A \to B$*, tal que* $d(f)$ *es una equivalencia sobre* f*, es decir*

$$d(f)(a) : \mathbb{D}_a \to \mathbb{D}_{f(a)}$$

Es una equivalencia para todo $a : A$*.*

Lema 5.3.3. 1. *Si* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *son étale formales, su composición* $g \circ f$ *es étale formal. Si la compsición* $g \circ f$ *y* g *son étale formales, entonces* f *es étale formal.*

2. *Las equivalencias son funciones étale formales.*

3. *Funciones entre tipos coreducidos son étale formales.*

Demostración. 1. De la definición de las funciones étale obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\iota_A"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& B \times_{\mathfrak{I}B} \mathfrak{I}A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & \mathfrak{I}A \arrow[d, "\mathfrak{I}f"] \\
& B \arrow[r, "\iota_B"'] & \mathfrak{I}B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\iota_B"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& C \times_{\mathfrak{I}C} \mathfrak{I}B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & \mathfrak{I}B \arrow[d, "\mathfrak{I}g"] \\
& C \arrow[r, "\iota_B"'] & \mathfrak{I}C
\end{tikzcd}$$

Juntando los diagramas obtenemos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "\iota_A"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& B \times_{\mathfrak{I}B} \mathfrak{I}A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr, phantom, "(pb)"] & \mathfrak{I}A \arrow[dd, "\mathfrak{I}f"] \\
& B \arrow[dr, "\iota_B"] \arrow[d, dashed, "\psi"'] \arrow[dd, bend right=60, "g"'] & \\
& C \times_{\mathfrak{I}C} \mathfrak{I}B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & \mathfrak{I}B \arrow[d, "\mathfrak{I}g"] \\
& C \arrow[r, "\iota_C"] & \mathfrak{I}C
\end{tikzcd}$$

Dado que ψ es una equivalencia y las equivalencias deben respetar los límites, podemos reemplazar al producto $C \times_{\mathfrak{I}C} \mathfrak{I}B$ por B, obtenemos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\iota_A"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& B \times_{\mathfrak{I} B} \mathfrak{I}A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(\mathsf{pb})"] & \mathfrak{I}A \arrow[d, "\mathfrak{I}f"] \\
& B \arrow[r, "\iota_B"] \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{I}B \arrow[d, "\mathfrak{I}g"] \\
& C \arrow[r, "\iota_C"] & \mathfrak{I}C
\end{tikzcd}
$$

Donde el cuadrado de abajo está dado por la naturalidad de la modalidad $\mathfrak{I}$. De esta manera al componer $g \circ f$ obtendremos una equivalencia con el producto $C \times_{\mathfrak{I}C} \mathfrak{I}A$ lo que demuestra que $g \circ f$ es una equivalencia.

Basta ver que cuando f es una equivalencia, el cuadrado de naturalidad de la función resulta ser un pullback puesto que dos lados opuestos del cuadrado son equivalencias, de manera que la equivalencia id_A atestigua que f es étale formal.

Si los tipos son coreducidos, entonces las funciones ι_A y ι_B son equivalencias, estamos de nuevo en el caso en que el cuadro de naturalidad tiene equivalencias en lados opuestos.

$\square$

Lema 5.3.4. *Sea $\varphi : A \to B$ étale formal. Hacer el pullback del disco formal en B sobre φ da el siguiente pullback:*

$$\begin{tikzcd}
T_\infty B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(pb)"] & T_\infty B \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\varphi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Definición 5.3.5. *Un tipo A se dice:*

- *Étale formal*
- *Suave formal*
- *Sin ramificar formal*

Si la función $A \to 1$ es del caso correspondiente.

6 Conclusiones

En [Kre77] en los ensayos 1952B, 1955, y 1954E, Brouwer describe una manera de hacer matemáticas que dista del formalismo y se opone a la asimilación lingüística de las matemáticas como único camino. Entre varias características que enuncia sobre las matemáticas intuicionistas se rescatan:

1. No axiomatización
2. No se asume doble negación
3. Matemáticas constructivas

De lo estudiado en este trabajo en teoría homotópica de tipos, se encuentra que estas características aparecen de manera natural, sin embargo, dista mucho de las ideas de Brouwer el hecho de que en Teoría Homotópica de Tipos el lenguaje juega un rol protagónico.

6.1. Reglas

Lo primero que podemos observar de Hott es que es muy diferente introducir un tipo a lo que sería introducir un conjunto en teoría de conjuntos, en teoría de conjuntos, en base a los axiomas se llega a demostrar que algo es, o no es, un conjunto, en HoTT realmente se esto se omite, se pueden establecer tipos siguiendo sencillamente ciertas reglas, la amplitud en ese caso está determinada únicamente por el lenguaje y en principio se puede pensar que el abarcamiento analítico de los tipos resulta imposible del todo.

En virtud del trabajo matemático que se puede hacer en HoTT, la regla de eliminación provee una posible solución a no conocer detalladamente todos los elementos de un tipo, en realidad, cuando se construyen ciertos espacios y se demuestran sus respectivas propiedades, se hace uso de lo que podemos saber externamente del tipo, esto nos da un manejo sintético en vez de analítico. En este sentido, HoTT se asemeja a la teoría de categorías, de manera que por medio de ese paralelismo podemos imaginarnos, en primera instancia, la utilidad que provee HoTT en cuestión de la naturaleza de sus afirmaciones.

Finalmente, el hecho de que los tipos se introduzcan por medio de reglas da la posibilidad de hacer lo que podríamos llamar: fundamentar las matemáticas *sobre la marcha*; es decir, definiendo objetos a partir de lo que ya sabemos de ellos, como es el caso de la definición de $\mathbb{S}^1$. Esta definición sobre la marcha concuerda con ideas de Brouwer que dan la posibilidad de definiciones cambiantes, de alterar la naturaleza de un objeto según el conocimiento del *sujeto creador*. Sin embargo, esto puede ser peligroso si no tenemos una interpretación adecuada, un ejemplo de esto, es $\mathbb{S}^1$ que tiene una definición similar que es $\mathbf{S}^1$ que se comporta similarmente en ciertos aspectos pero que resulta ser radicalmente distinto en su definición.

6.2. Doble Negación

Para incurrir en el sentido que cobra la doble negación, es necesario observar de cerca la demostración de que en HoTT, si tomamos todos los tipos como proposiciones no es cierto que $\prod_{A:\mathcal{U}} \neg\neg A \to A$. En una observación detallada se hace evidente la necesidad de que aparezca, lo que sería un topos booleano, es decir, un clasificador que pueda observar todas las pruebas como una misma, lo cual termina siendo el truncamiento proposicional.

6.3. Constructividad

Al inicio de este trabajo, creí percibir una incapacidad en HoTT para capturar fenómenos fascinantes en matemáticas sobre cosas que demostramos que existen pero no construimos (incluso en algunos casos no se pueden construir). Sin embargo cuando cuestioné esa dualidad entre la *mención de lo indescriptible* y la *no posibilidad de ser de lo inabarcable*, caí en cuenta que algunos de los resultados que más me han intrigado, como lo son el teorema de incompletitud de Gödel, el teorema del punto fijo de Banach, el argumento diagonal de Cantor y por supuesto el teorema del punto fijo de Brouwer; son casos particulares del teorema de diagonalización de Lawvere y tienen algo en común: son construcciones.

En base a esta observación, me cuestioné que la capacidad de mencionar lo indescriptible y recoger la imposibilidad de lo inabarcable había sido (según mi observación) estudiado constructivamente en todos esos casos y realmente dependía sobre todo de la *forma* de construir. En las demostraciones que aparecen en este trabajo, es visto que lo que más se hace necesario, es una buena definición de los tipos, una definición suficiente para establecer, de manera parcial, toda la información que nos puede interesar de un objeto matemático desde determinada mirada, en ese sentido, llego a la conclusión de que la rica constructividad de HoTT da un paso adelante para resultados que escenifican la dualidad antes mencionada.

Bibliografía

[Ark11] Martin Arkowitz. *Introduction to homotopy theory.* Springer Science & Business Media, 2011.

[Che80] Brian F Chellas. *Modal logic: an introduction.* Cambridge university press, 1980.

[Cor20] David Corfield. *Modal homotopy type theory: The prospect of a new logic for philosophy.* Oxford University Press, 2020.

[DH01] J Michael Dunn and Gary Hardegree. *Algebraic methods in philosophical logic.* OUP Oxford, 2001.

[FM12] Melvin Fitting and Richard L Mendelsohn. *First-order modal logic*, volume 277. Springer Science & Business Media, 2012.

[Hat05] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* , 2005.

[Kre77] G Kreisel. A. heyting, lej brouwer collected works, volume i, philosophy and foundations of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(1):86–93, 1977.

[Law86] F William Lawvere. Categories of spaces may not be generalized spaces as exemplified by directed graphs. *Revista colombiana de matemáticas*, 20(3-4):179–186, 1986.

[Law94] F William Lawvere. Cohesive toposes and cantor's' lauter einsen'. *Philosophia Mathematica*, 2(1):5–15, 1994.

[ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[MM12] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

[Pro13] The Univalent Foundations Program. Homotopy type theory: univalent foundations of mathematics. *arXiv preprint arXiv:1308.0729*, 2013.

[Rus20] Bertrand Russell. *The principles of mathematics*. Routledge, 2020.

[RW78] Gonzalo E Reyes and Gavin C Wraith. A note on tangent bundles in a category with a ring object. *Mathematica Scandinavica*, 42(1):53–63, 1978.

[Sch13] Urs Schreiber. Differential cohomology in a cohesive infinity-topos. *arXiv preprint arXiv:1310.7930*, 2013.

[Shu17] Michael Shulman. Homotopy type theory: the logic of space. *arXiv preprint arXiv:1703.03007*, 2017.

[Shu18] Michael Shulman. Brouwer's fixed-point theorem in real-cohesive homotopy type theory. *Mathematical Structures in Computer Science*, 28(6):856–941, 2018.

[Wel17] Felix Wellen. *Formalizing Cartan geometry in modal homotopy type theory*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2017.