

Estética / Lógica / Imagen

Un panorama de temas de estética y matemática

Andrés VILLAVECES - *Universidad Nacional de Colombia (Sede Bogotá)*

Cátedra Pensamiento Estético Latinoamericano

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Humanas

25 de octubre de 2023

Etapas de nuestro camino hoy

¿Estética de la matemática? (Auscultar el mundo)

Tiempo, conocimiento (Florenski, Bergson)

¿Lógicas del tiempo? / Dos proyectos latinoamericanos

Dibujo y écfrasis matemática

Categoricidad y Completitud: el giro lógico

Autorreflexión e Infinito

Etapa 1

¿Estética de la matemática? (Auscultar el mundo)

Una conversación en un tranvía (mayo de 2016)

Una conversación en un tranvía (mayo de 2016)

- **Juliette Kennedy:** . . . Está bien, pero de dónde exactamente surge la lógica interna de esas clases de estructuras? ¿Cómo están entrelazadas con la lógica? - Esas clases nos son dadas semánticamente y sin embargo ¡surge de ellas una lógica! ¿De dónde? ¿Cómo exactamente? Y si la lógica es implícita, ¿qué la enmarca? ¿Dónde se proyecta?

Una conversación en un tranvía (mayo de 2016)

- **Juliette Kennedy:** . . . Está bien, pero de dónde exactamente surge la lógica interna de esas clases de estructuras? ¿Cómo están entrelazadas con la lógica? - Esas clases nos son dadas semánticamente y sin embargo ¡surge de ellas una lógica! ¿De dónde? ¿Cómo exactamente? Y si la lógica es implícita, ¿qué la enmarca? ¿Dónde se proyecta?
- **AV:** Pero Juliette, ¿por qué la pregunta a ese nivel de profundidad? ¿Por qué abandonar un área segura? ¿Por qué la insistencia?

Una conversación en un tranvía (mayo de 2016)

- **Juliette Kennedy:** . . . Está bien, pero de dónde exactamente surge la lógica interna de esas clases de estructuras? ¿Cómo están entrelazadas con la lógica? - Esas clases nos son dadas semánticamente y sin embargo ¡surge de ellas una lógica! ¿De dónde? ¿Cómo exactamente? Y si la lógica es implícita, ¿qué la enmarca? ¿Dónde se proyecta?
- **AV:** Pero Juliette, ¿por qué la pregunta a ese nivel de profundidad? ¿Por qué abandonar un área segura? ¿Por qué la insistencia?
- **JK:** Bueno, quisiera saber cuál es nuestro **punto base** al hacer Lógica, al hacer Matemáticas. Ir más allá de las discusiones originales ontológicas. . .

Utrecht, Nueva York, Bogotá, Helsinki, París ...

Symposium

AESTHETICS AND MATHEMATICS

The beauty of mathematics is an objective property on a par with its truth. — Bertrand Russell
9 - 10 November 2007
Location: LOUIS HARTHOOP COMPLEX, Utrecht
(Rooms 0, Tolsteegweg 10)



Getting There and Falling in Love

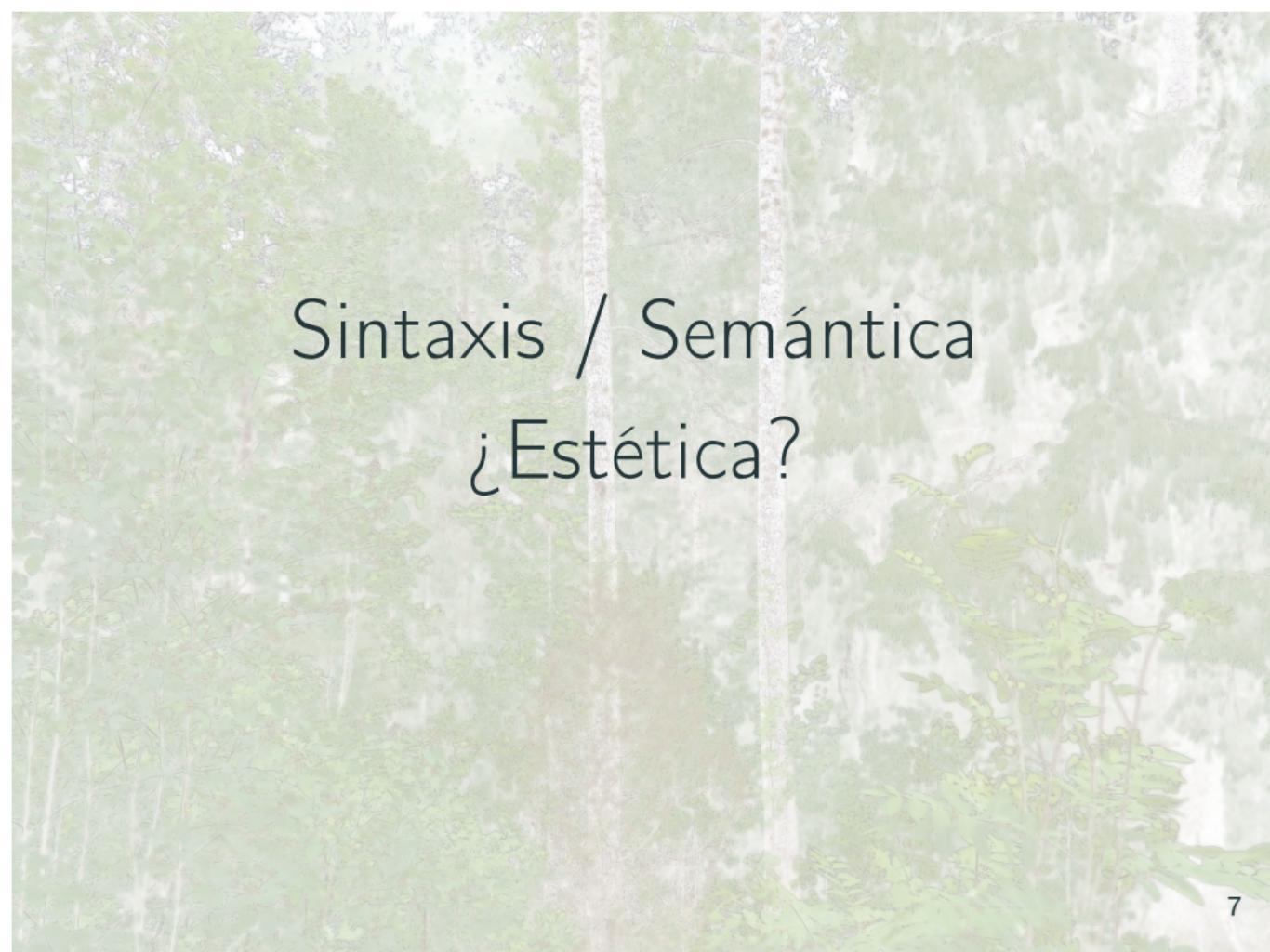
Am Ende
der Welt



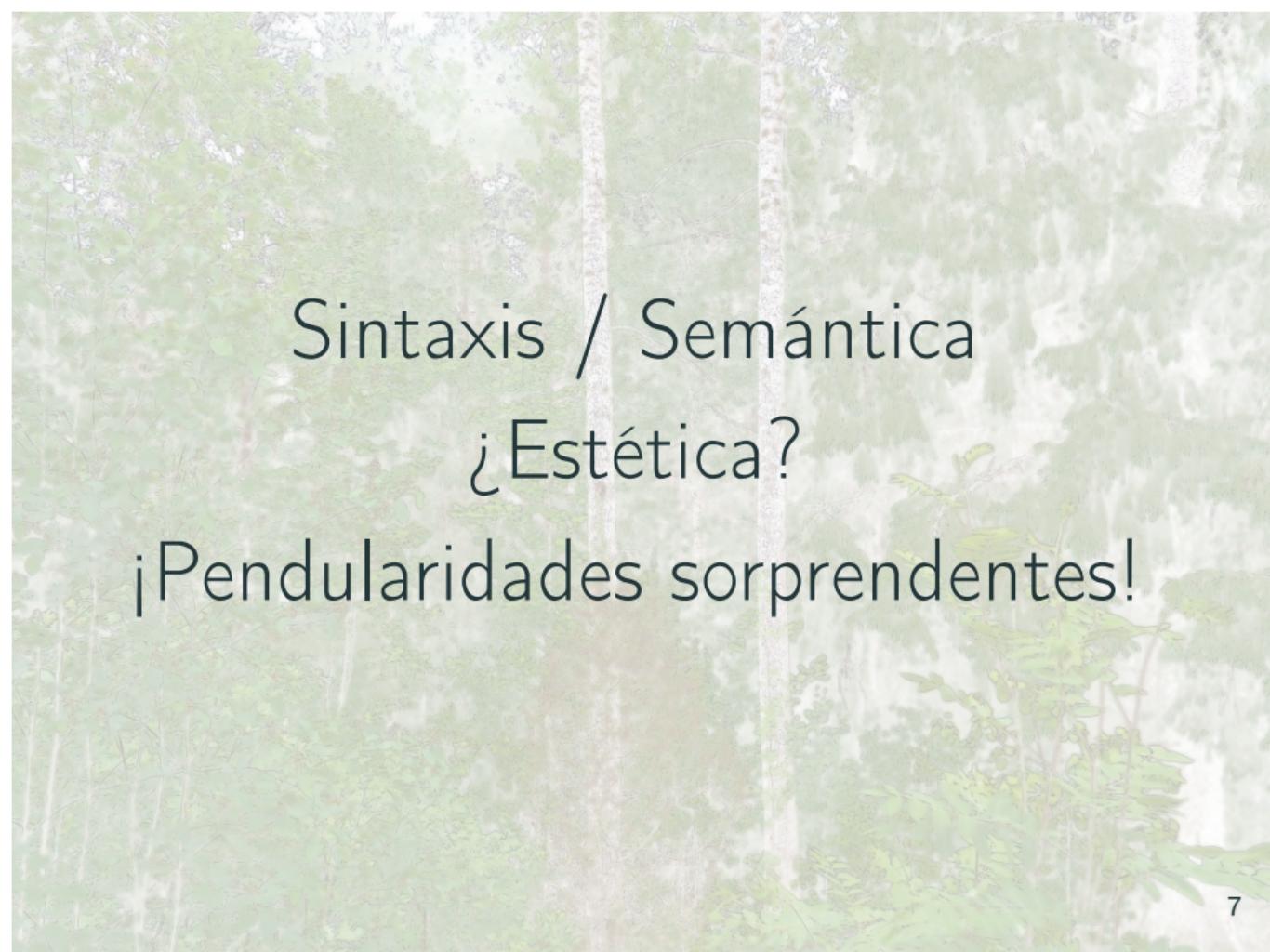




Sintaxis / Semántica

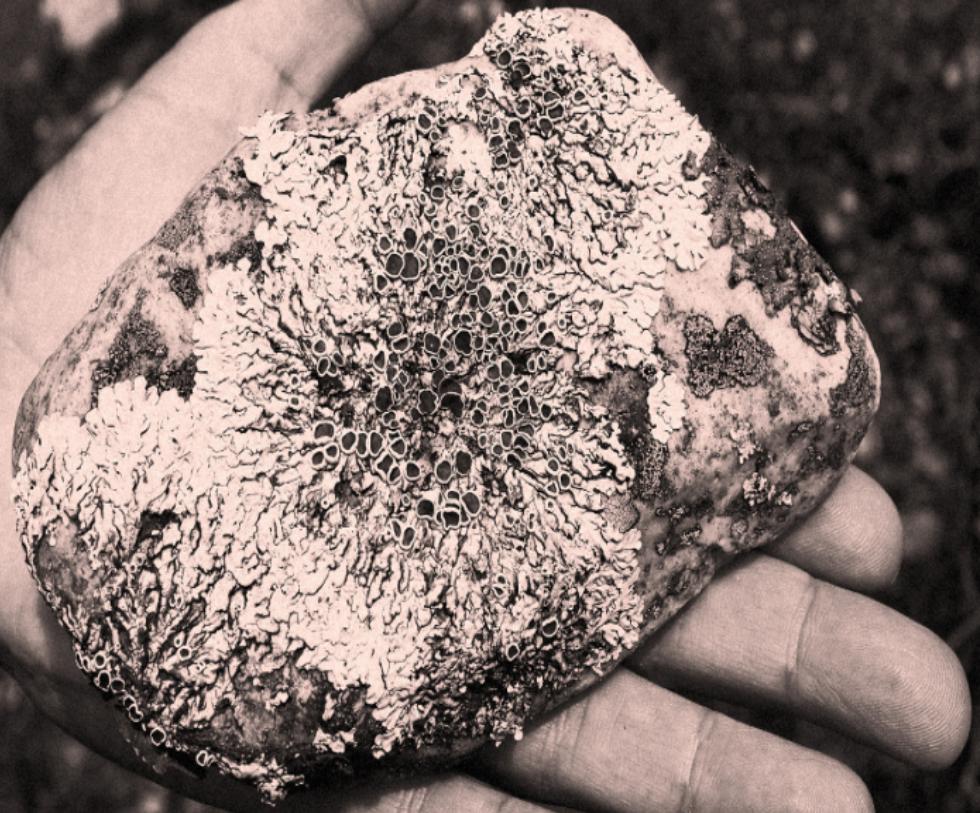


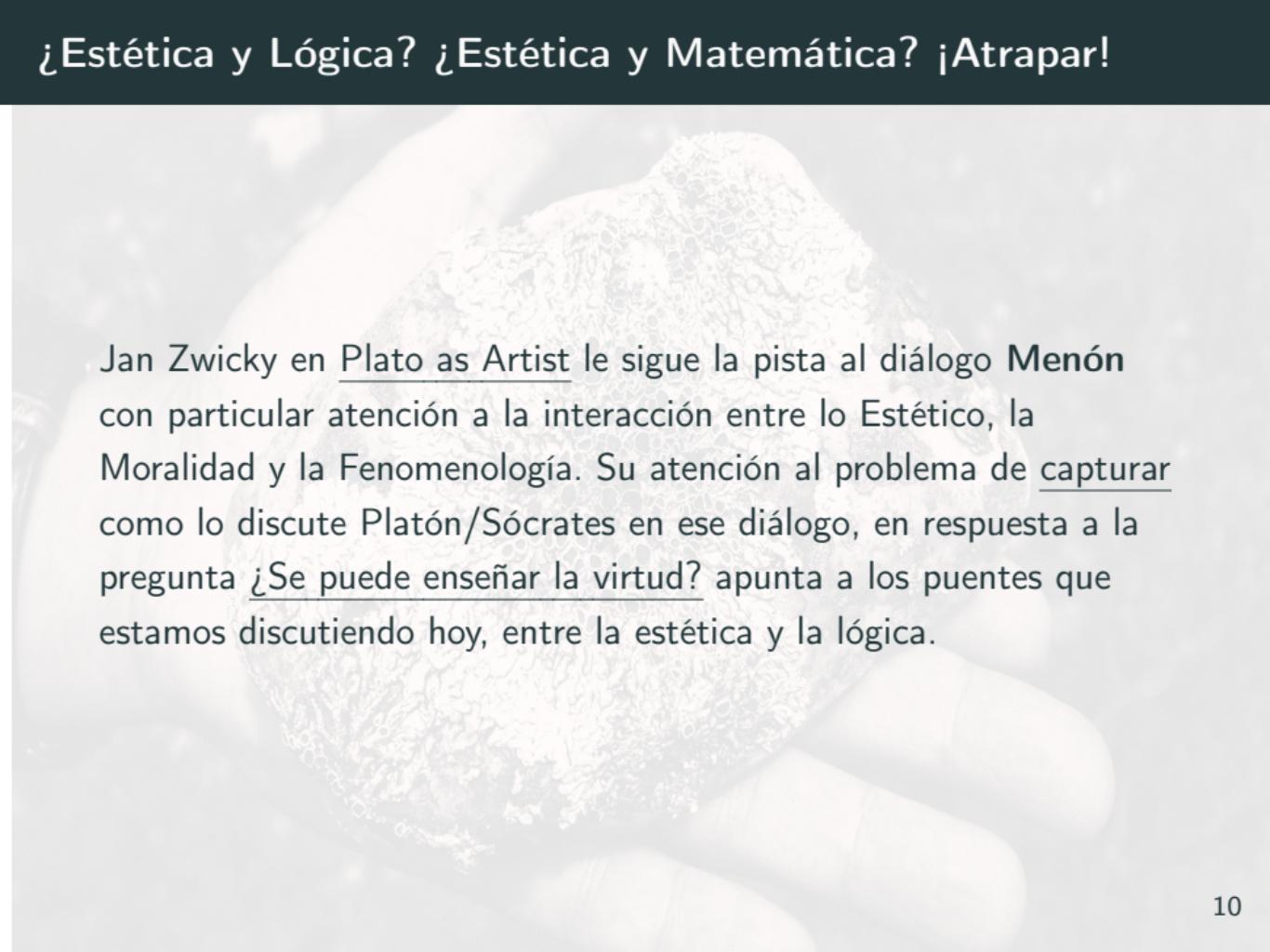
Sintaxis / Semántica
¿Estética?



Sintaxis / Semántica
¿Estética?
¡Pendularidades sorprendentes!

- Kennedy, Magidor, Väänänen: siguiendo a Gödel...
¿cómo extraer significado (armar el universo) a partir de distintas lógicas?
- Clases elementales abstractas (lógica muy contemporánea):
¿extraer lenguaje del significado (robusto)? (trabajos de Nájar, V., Shelah)





Jan Zwicky en Plato as Artist le sigue la pista al diálogo **Menón** con particular atención a la interacción entre lo Estético, la Moralidad y la Fenomenología. Su atención al problema de capturar como lo discute Platón/Sócrates en ese diálogo, en respuesta a la pregunta ¿Se puede enseñar la virtud? apunta a los puentes que estamos discutiendo hoy, entre la estética y la lógica.

Menón: ¿Se puede enseñar la virtud (o cualquier otra cosa)?

¿O se puede contar? ¿Definir? En ese caso, ¿dónde? ¿Cómo?

Menón: ¿Se puede enseñar la virtud (o cualquier otra cosa)?

¿O se puede contar? ¿Definir? En ese caso, ¿dónde? ¿Cómo?

Del diccionario (OED):

*El origen de la palabra **estética** es aisthe, $\alpha\text{-}\alpha\text{i}\sigma\theta\eta\tau\iota\kappa\text{-}\circ\varsigma$ / $\alpha\text{i}\sigma\theta\eta\tau\acute{a}$, las cosas perceptibles por los sentidos, de la raíz $\alpha\text{i}\sigma\theta\epsilon$ - 'sentir, aprehender mediante los sentidos'.*

Menón: ¿Se puede enseñar la virtud (o cualquier otra cosa)?

¿O se puede contar? ¿Definir? En ese caso, ¿dónde? ¿Cómo?

Del diccionario (OED):

*El origen de la palabra **estética** es aisthe, $\alpha\text{-}\alpha\dot{\iota}\sigma\theta\eta\tau\iota\kappa\text{-}\acute{\o}\varsigma$ / $\alpha\dot{\iota}\sigma\theta\eta\tau\acute{\alpha}$, las cosas perceptibles por los sentidos, de la raíz $\alpha\dot{\iota}\sigma\theta\acute{\epsilon}$ - 'sentir, aprehender mediante los sentidos'.*

Agarrar

“Mirar” lógico y “actuar”
geométrico



Podemos “hacer preguntas” a las estructuras:

- ¿Se puede ver la torre detrás de uno en un cuadro renacentista?
- ¿Se puede resolver su sonata en do mayor si empieza en re menor y es período clásico?
- ¿Se puede devolver el tiempo a ayer en física? ¿Y en ese caso, cómo?

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos -
estiramos - recortamos - ...
nuestras estructuras.

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos -
estiramos - recortamos - ...
nuestras estructuras.

La teoría de modelos es la teoría matemática que estudia en plena generalidad estas posibilidades - está naturalmente anclada en la lógica, en la posibilidad de hacer preguntas a una estructura, en el lenguaje implícito que sostiene.

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos -
estiramos - recortamos - ...
nuestras estructuras.

La teoría de modelos es la teoría matemática que estudia en plena generalidad estas posibilidades - está naturalmente anclada en la lógica, en la posibilidad de hacer preguntas a una estructura, en el lenguaje implícito que sostiene.

La teoría de modelos provee los ladrillos básicos, los “colores primarios” de las estructuras

Así

comparamos - aumentamos - disminuimos -
estiramos - recortamos - ...
nuestras estructuras.

La teoría de modelos es la teoría matemática que estudia en plena generalidad estas posibilidades - está naturalmente anclada en la lógica, en la posibilidad de hacer preguntas a una estructura, en el lenguaje implícito que sostiene.

La teoría de modelos provee los ladrillos básicos, los “colores primarios” de las estructuras y luego revuelve todo eso, ayudando a producir todos los “colores posibles”, todas las estructuras posibles, y

...

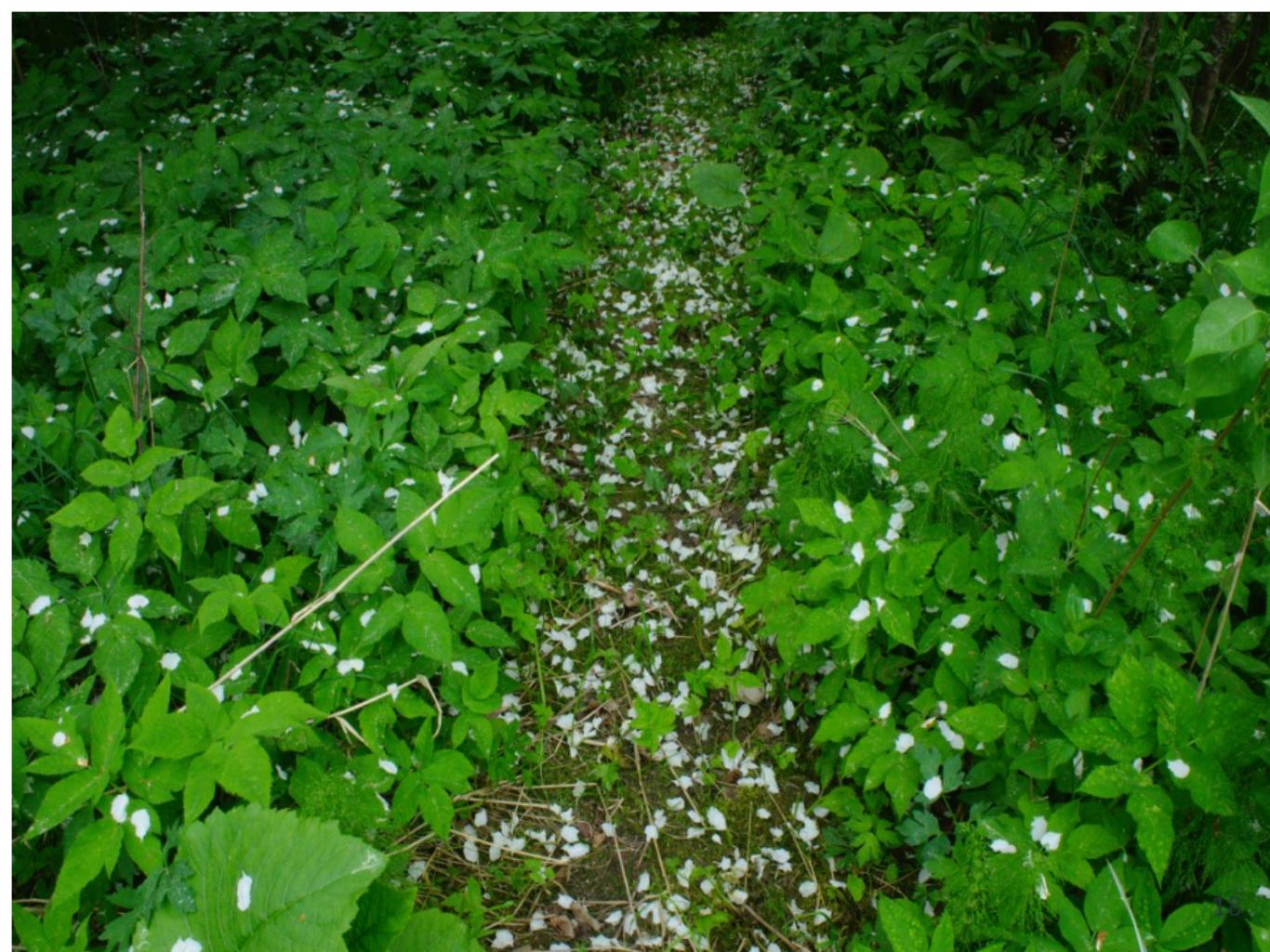
Aún así, sorprendentemente

en años recientes - después de que la Teoría de Modelos hubiera afilado su propio anclaje (mirar) lógico hasta el punto de proveer una clasificación de todas teorías (de primer orden) posibles y líneas divisorias asintóticas (el llamado Main Gap), se embarcó en un “segundo zarpar”, hacia el lado de la “acción”, de la geometría, ¡aparentemente apartándose de la lógica!

Aislar el momento del segundo zarpar...

“Tenemos en mente principalmente a aquellos interesados en teoría de modelos algebraically-minded (llevada, conducida por el álgebra), es decir, en modelos genéricos, la clase de los modelos existencialmente cerrados y universales-homogéneos en lugar de las clases elementales...”

Saharon Shelah, 1975.

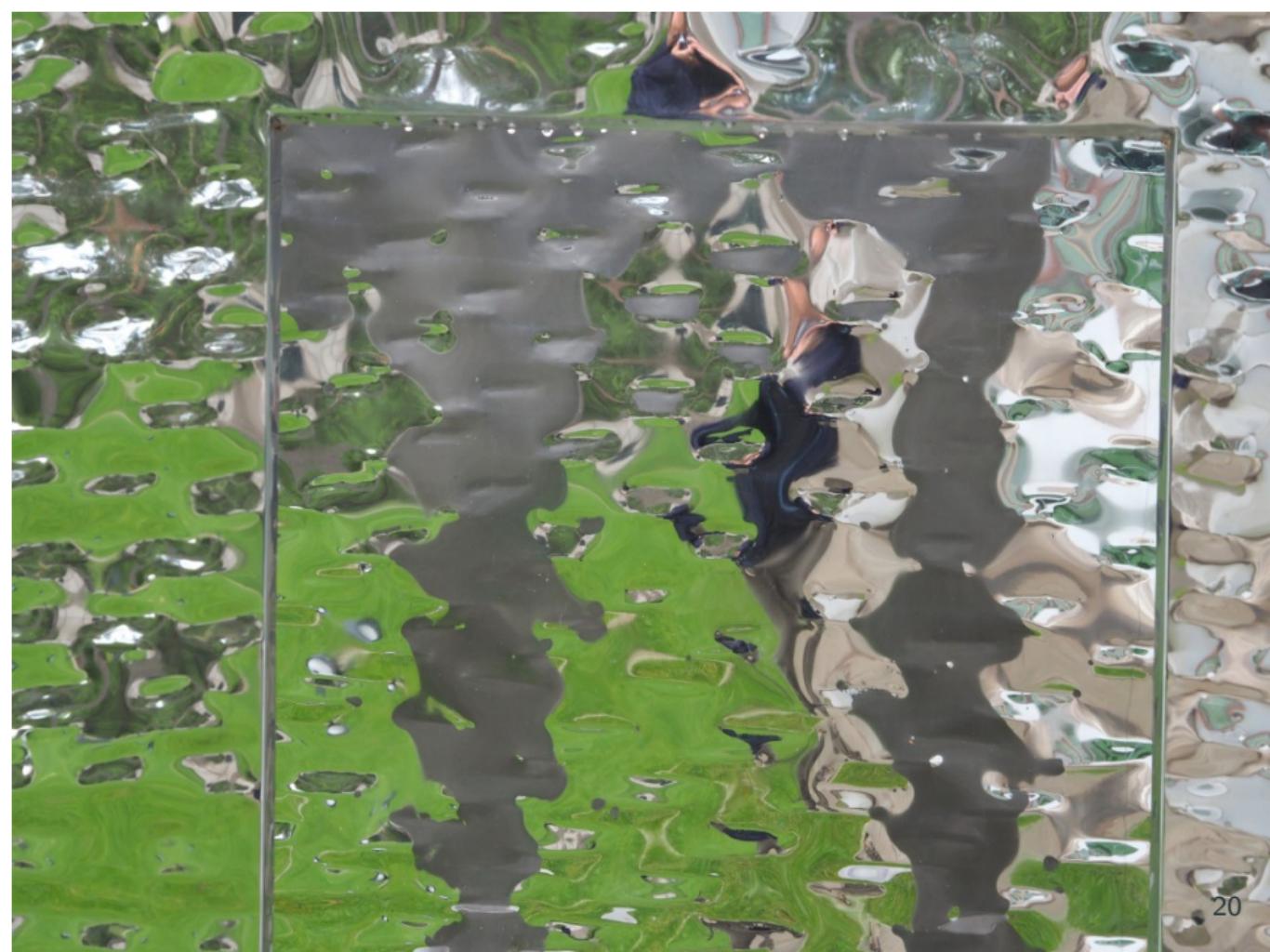


Lógicas distintas - Significado diferente - KABUKI



Emerge **libertad de formalismo** en la obra de Kennedy, Magidor, Väänänen...

¡Un universo (en realidad, muchos universos) para la teoría de conjuntos, armados a punta de tomar/calibrar lo definible en muchas lógicas distintas!



¿Un segundo zarpar para la t. de modelos? De λόγος a ἀρμόττον

De vuelta a la estética: un concepto mejor adaptado (Patočka) a la estética que la “belleza” (τὸ καλὸς),

τὸ ἀρμόττον.

¿Un segundo zarpar para la t. de modelos? De λόγος a ἀρμόττον

De vuelta a la estética: un concepto mejor adaptado (Patočka) a la estética que la “belleza” (τὸ καλὸς),

τὸ ἀρμόττον.

Raíz: la misma mejor conocida como ἀρμονία, armonía, que significa belleza en el sentido de “cuadrar bien”, “encajar”.

¿Un segundo zarpar para la t. de modelos? De λόγος a ἀρμόττον

De vuelta a la estética: un concepto mejor adaptado (Patočka) a la estética que la “belleza” (τὸ καλὸς),

τὸ ἀρμόττον.

Raíz: la misma mejor conocida como ἀρμονία, armonía, que significa belleza en el sentido de “cuadrar bien”, “encajar”.

Esta categoría inicialmente parecería muy distinta de la definida por τὸ λόγος, la frase, la fórmula, el discurso - la descripción que normalmente asociamos a la lógica.

Esculpir estructuras y lenguaje: las Clases “Elementales” Abs-tractas



¿Cómo “cuadrar”, “encajar”? ($\alpha\mu\otimes\tau\tau\sigma$)

¿Qué diferencia hay entre describir, decir
explícitamente, axiomatizar y...

¿Cómo “cuadrar”, “encajar”? ($\alpha\mu\otimes\tau\tau\sigma$)

¿Qué diferencia hay entre describir, decir
explícitamente, axiomatizar y...

mirar cómo distintas variantes de una estructura
“cuadran” entre sí, cómo se “reflejan” propiedades de
lo grande en lo pequeño?

Cambio de foco: de fórmulas a encajes

φ, T, \dots	\preceq_K
fórmulas, teorías	encajes, inmersiones, ...

Un mundo de puros fenómenos...

..... sin descripciones precisas, aparentemente, pero con una noción fuerte de cómo cuadran las piezas entre sí—ἀρμόττον

En teoría de modelos contemporáneo eso se llama “extensión fuerte”, $M \prec_{\mathcal{K}} N$.

La idea (cruda) es que todas las configuraciones/problems de M que tengan “solución” en N también tienen alguna solución en M .

El Teorema de Presentación - ¿El retorno de la sintaxis?

Pero aquí de nuevo el lenguaje, la lógica, reaparece:

Dado cualquier sistema coherente, cerrado y bien controlado de modelos (clase elemental abstracta) $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ en L ,

Así, $\prec_{\mathcal{K}}$ a pesar de estar originalmente dada como puro contenido, ¡resulta controlada por un lenguaje!

Pero aquí de nuevo el lenguaje, la lógica, reaparece:

Dado cualquier sistema coherente, cerrado y bien controlado de modelos (clase elemental abstracta) $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ en L ,

existe un lenguaje más grande $L' \supset L$ en el cual se puede escribir una fórmula (¡regreso de la lógica!) infinitaria $\psi_{\mathcal{K}}$ que axiomatiza toda la clase \mathcal{K} . En dialecto matemático,

$$\mathcal{K} = PC(L, \psi_{\mathcal{K}})$$

Así, $\prec_{\mathcal{K}}$ a pesar de estar originalmente dada como puro contenido, ¡resulta controlada por un lenguaje!

¿Fenómenos puros sin logos? Tal vez no...

- El segundo zarpar...
- ¿Anclaje dónde?
- ¿Rol para una estética generalizada?
- Anclaje LOCAL: trabajos de Nájar en su doctorado...
- OJO: hay dos niveles de lenguaje, el nuestro (básico, limitado) y el de L' , mucho más fuerte, que no vemos...



Nos devolvemos a la pregunta de Kennedy:

¿Cuál es nuestra base al hacer **lógica**? ¿De dónde proviene la (increíble) libertad de formalismo de la práctica matemática?

Nos devolvemos a la pregunta de Kennedy:

¿Cuál es nuestra base al hacer lógica? ¿De dónde proviene la (increíble) libertad de formalismo de la práctica matemática?

τὸ ἀρμόττον

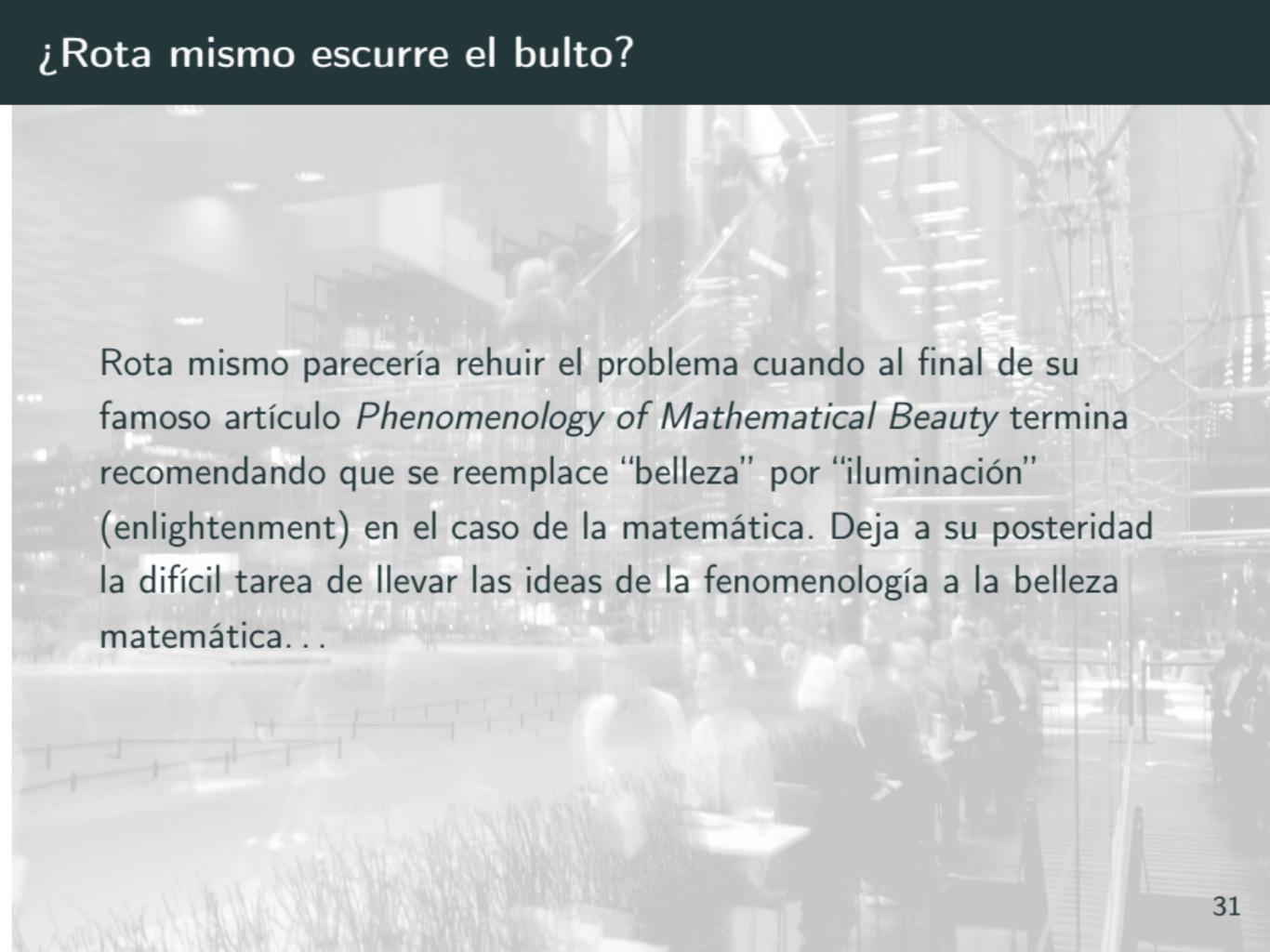


Gian-Carlo Rota: la belleza en matemática, cuando se confronta con las herramientas de la fenomenología, es un concepto escurridizo.



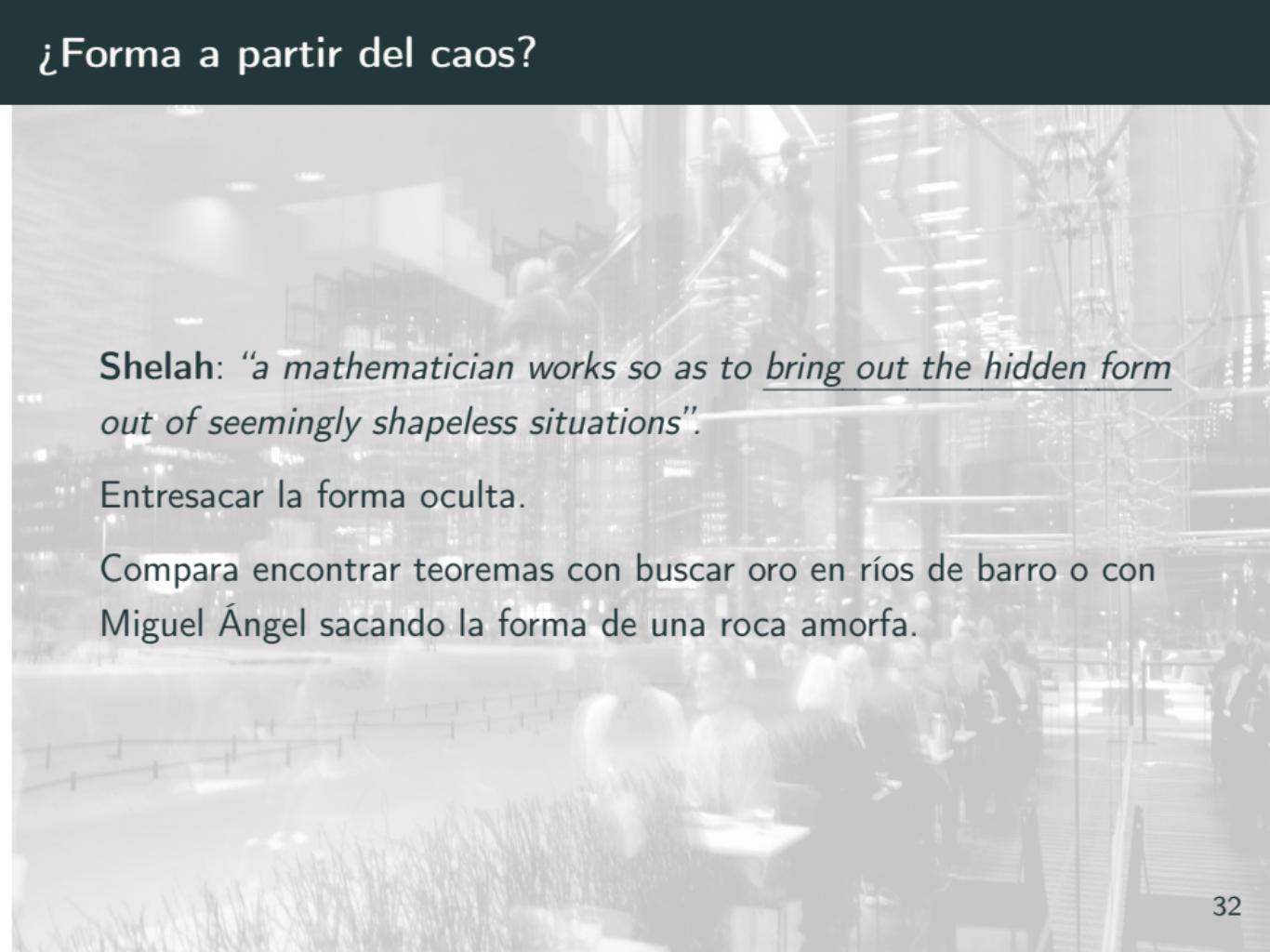
Gian-Carlo Rota: la belleza en matemática, cuando se confronta con las herramientas de la fenomenología, es un concepto escurridizo. En matemáticas discutimos la belleza de teoremas, de demostraciones, incluso de construcciones, pero le “escurrimos el bulto” a las verdaderas discusiones sobre el rol de la belleza en matemática. La belleza matemática, cuando se compara con categorías como la verdad matemática, la demostración matemática, incluso el poder matemático, es un tema difícil de sacar de mesas de café de los institutos de matemática.

¿Rota mismo escurre el bulto?



Rota mismo parecería rehuir el problema cuando al final de su famoso artículo *Phenomenology of Mathematical Beauty* termina recomendando que se reemplace “belleza” por “iluminación” (enlightenment) en el caso de la matemática. Deja a su posteridad la difícil tarea de llevar las ideas de la fenomenología a la belleza matemática...

¿Forma a partir del caos?



Shelah: “*a mathematician works so as to bring out the hidden form out of seemingly shapeless situations*”.

Entresacar la forma oculta.

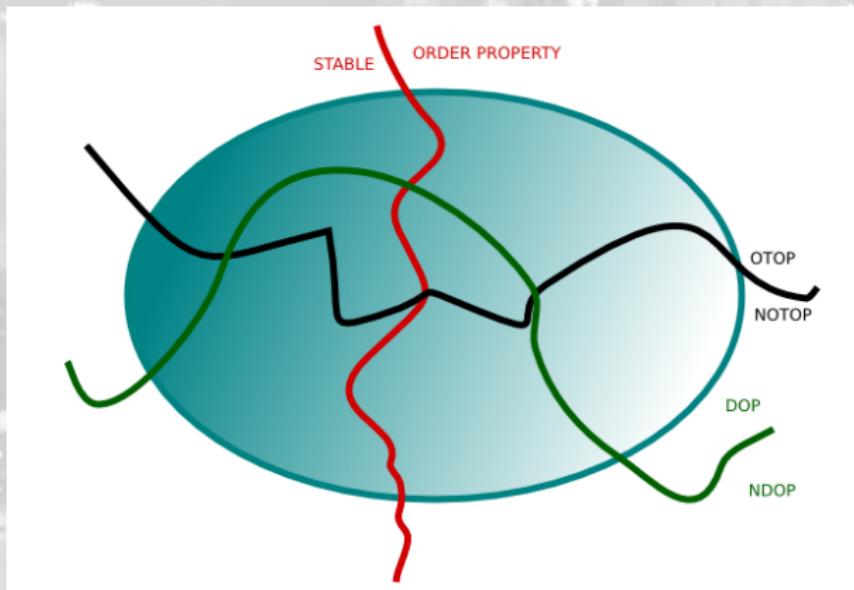
Compara encontrar teoremas con buscar oro en ríos de barro o con Miguel Ángel sacando la forma de una roca amorfa.

Transparencia y forma - Irma Laukkanen



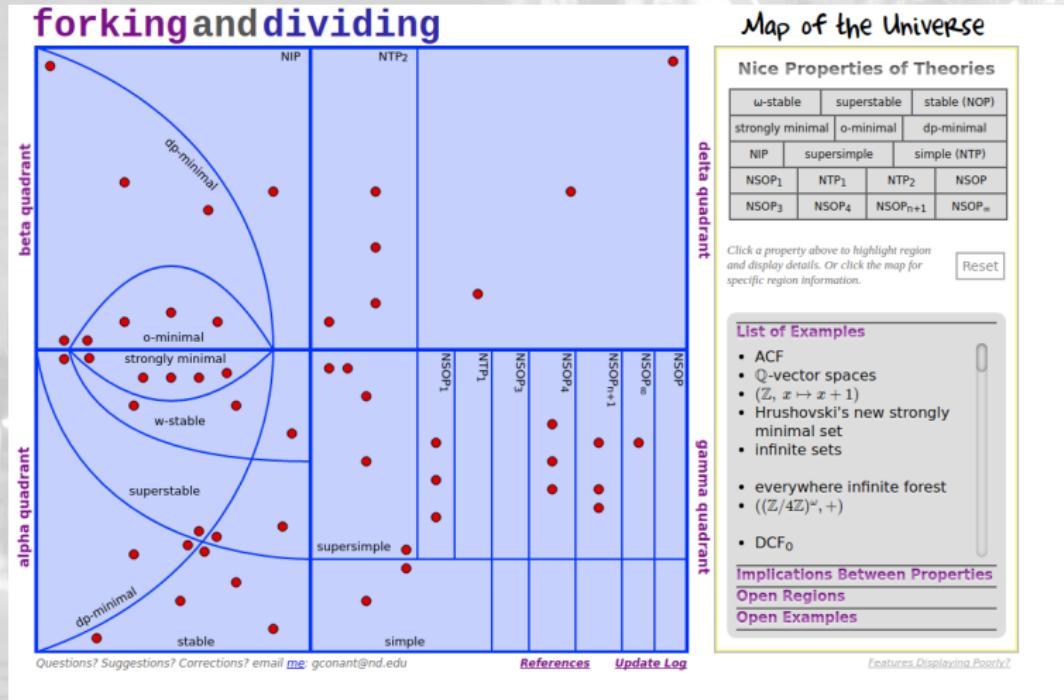
Irma Laukkanen - *Maisema Sisätilassa* - Paisaje

Shelah arma “taxonomías” matemáticas



Una “taxonomía” de clases de estructuras matemáticas.

La misma taxonomía - “Mapa del universo”

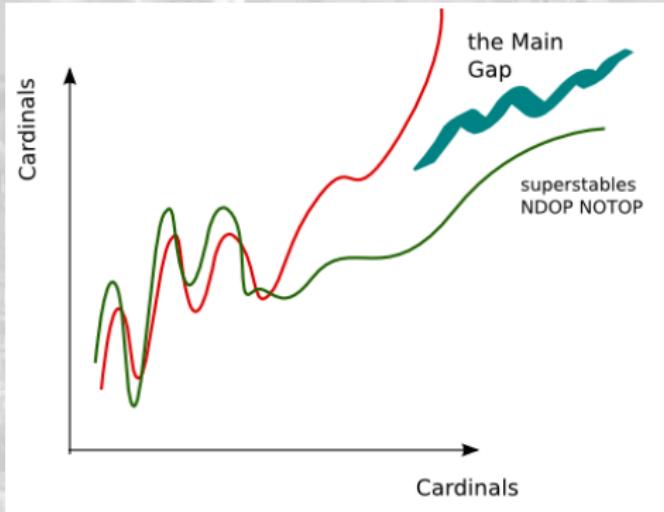


“jerarquía de estabilidad”.

El Main Gap (teoría de modelos)

Dada una teoría contable T , solo hay “dos tipos” de función “espectro” (conteo de modelos posibles): o muy acotada, o muy exponencial.

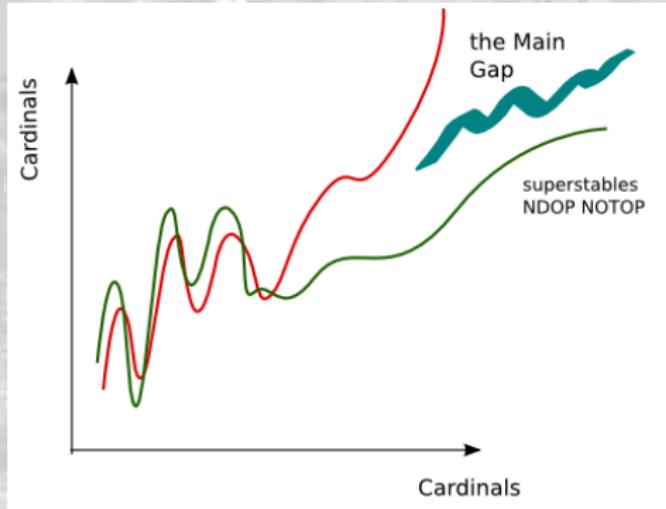
$$I(T, \aleph_\alpha) < \beth_{\omega_1}(|\omega + \alpha|)$$



El Main Gap (teoría de modelos)

Dada una teoría contable T , solo hay “dos tipos” de función “espectro” (conteo de modelos posibles): o muy acotada, o muy exponencial.

$$I(T, \aleph_\alpha) < \beth_{\omega_1}(|\omega + \alpha|)$$



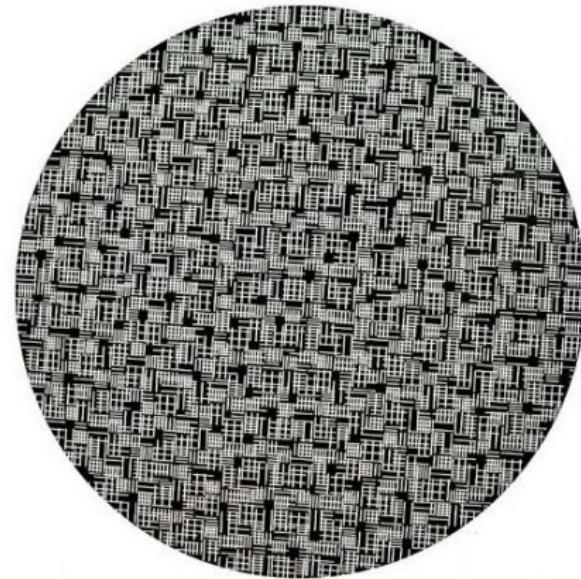
¡Todas las teorías se ubican en dos espectros posibles: muy «caóticas» o muy «clasificables»!

El abismo



Doris Salcedo - *Shibboleth* (2007, Tate Modern - ahora queda la cicatriz)

Amalgamas



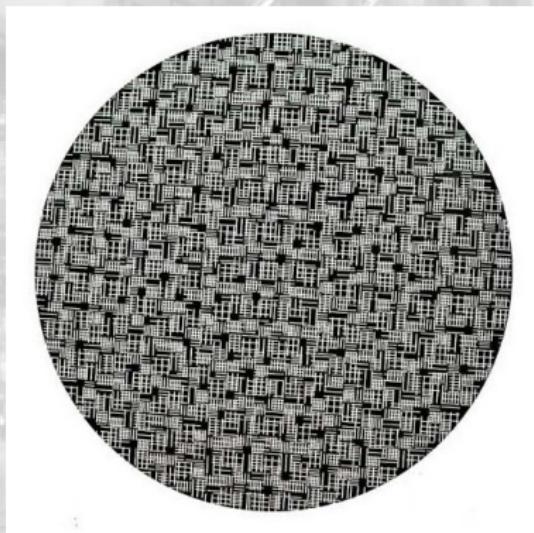
Matti Kujasalo - s.t. 1997

Imágenes... ¿imágenes?

La analogía pictórica ha sido central tradicionalmente al discutir la estética de la matemática.



Incluso para la abstracción

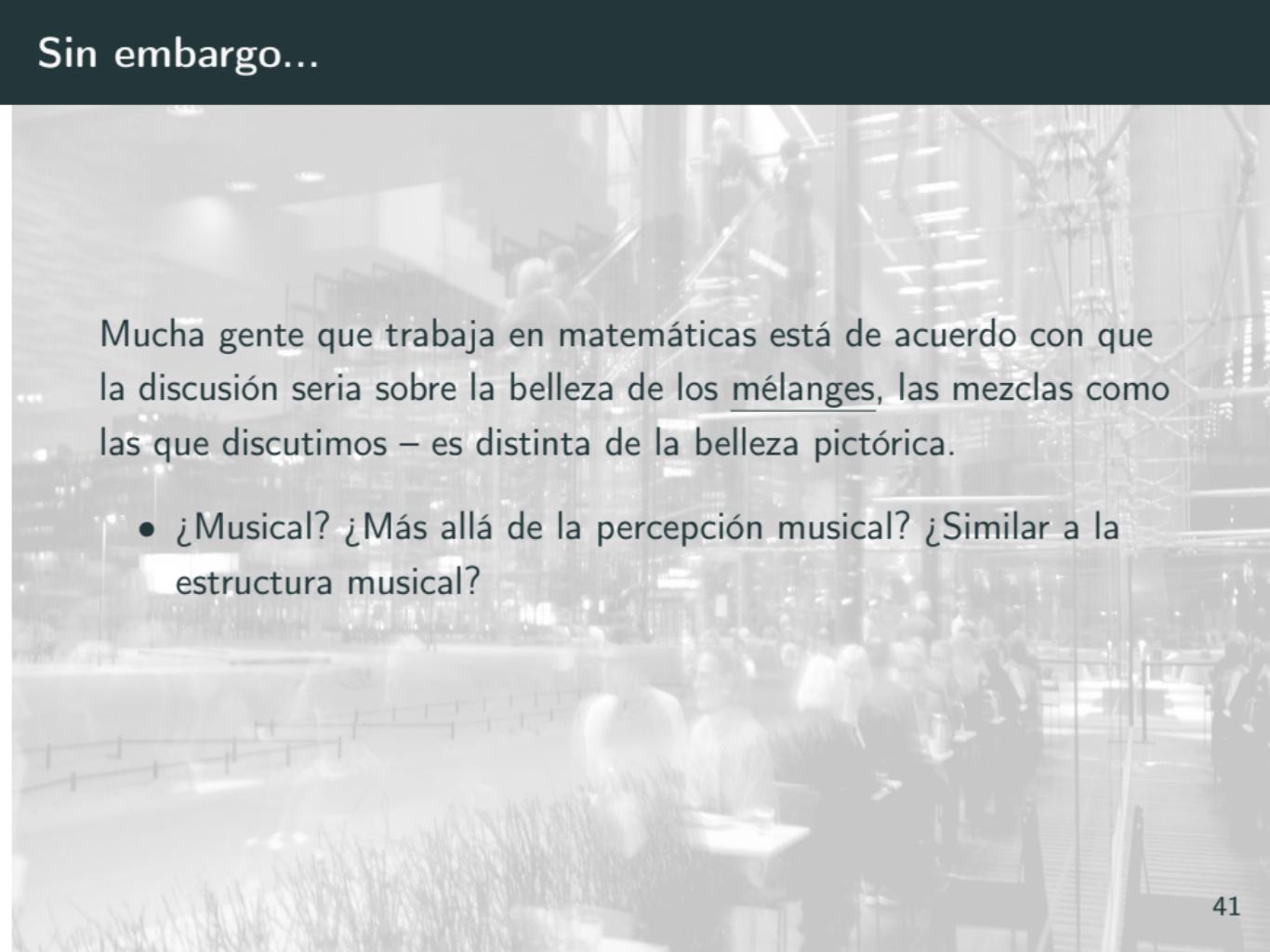


Sin embargo...



Mucha gente que trabaja en matemáticas está de acuerdo con que la discusión sería sobre la belleza de los mélanges, las mezclas como las que discutimos – es distinta de la belleza pictórica.

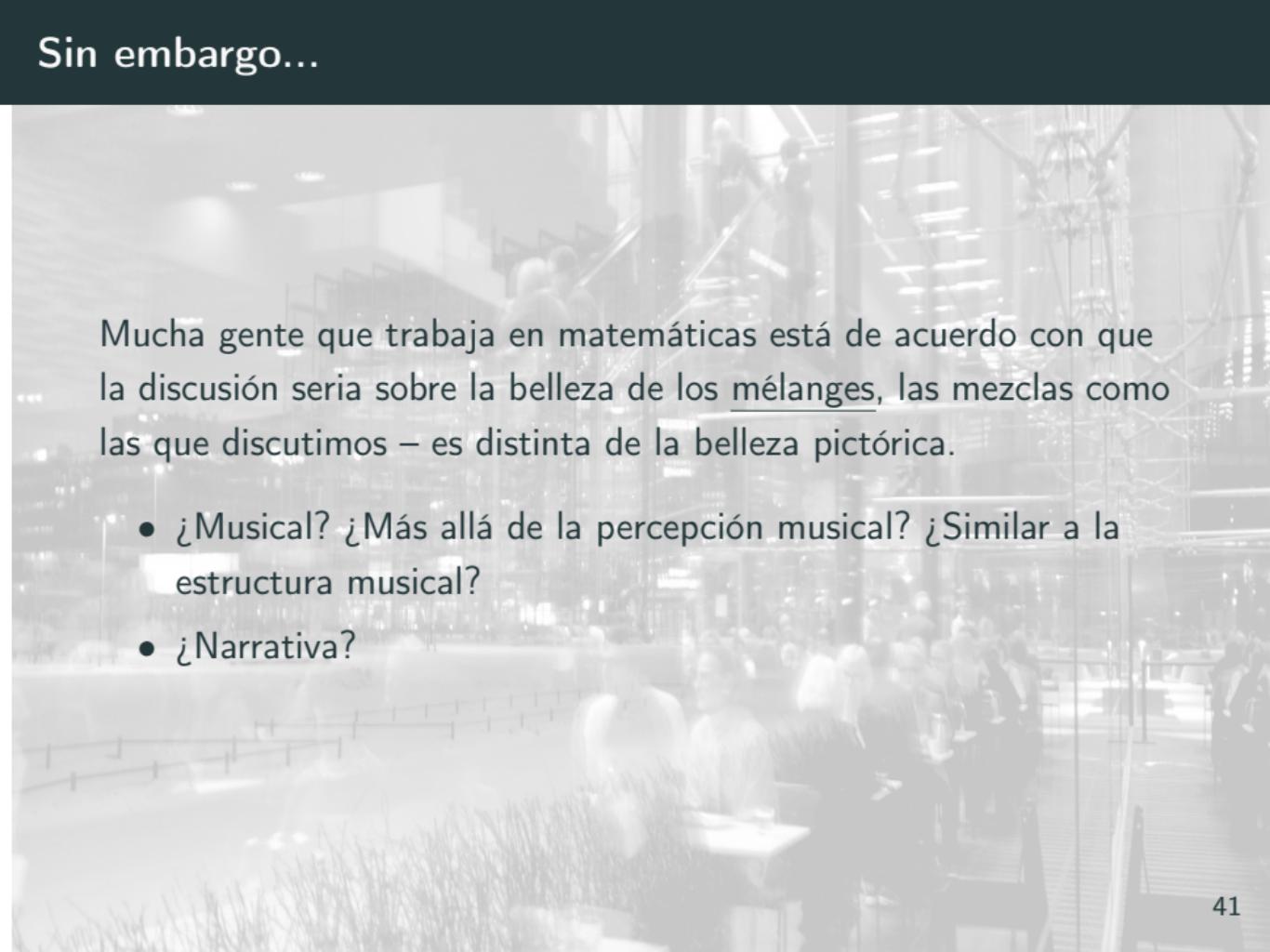
Sin embargo...



Mucha gente que trabaja en matemáticas está de acuerdo con que la discusión sería sobre la belleza de los mélanges, las mezclas como las que discutimos – es distinta de la belleza pictórica.

- ¿Musical? ¿Más allá de la percepción musical? ¿Similar a la estructura musical?

Sin embargo...



Mucha gente que trabaja en matemáticas está de acuerdo con que la discusión sería sobre la belleza de los mélanges, las mezclas como las que discutimos – es distinta de la belleza pictórica.

- ¿Musical? ¿Más allá de la percepción musical? ¿Similar a la estructura musical?
- ¿Narrativa?

Al final de su famoso artículo, Rota propone reemplazar la fenomenología de la belleza matemática por la fenomenología de la *iluminación* (enlightenment) matemática.

- ¿Por qué este retroceso súbito? ¿Miedo a caja de Pandora?
- La fenomenología de la música tiene un constante vaivén entre la superficialidad y la profundidad (Dahlhaus, Lewin).

Al final de su famoso artículo, Rota propone reemplazar la fenomenología de la belleza matemática por la fenomenología de la *iluminación* (enlightenment) matemática.

- ¿Por qué este retroceso súbito? ¿Miedo a caja de Pandora?
- La fenomenología de la música tiene un constante vaivén entre la superficialidad y la profundidad (Dahlhaus, Lewin).
- ¿Una fenomenología de la superficialidad y la profundidad en matemática?



Etapa 2

**Tiempo, conocimiento (Florenski,
Bergson)**

Moscú, años 1910: Pável Florenski

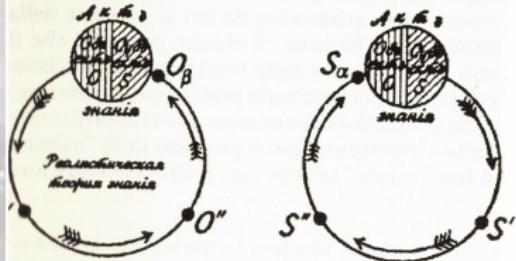
Clases de Pável Florenski en otoño de 1908 en Moscú: teoría del conocimiento. Conocimiento como sistema de actos y distinciones, juicio sobre la realidad y el momento religioso-metafísico del conocimiento. Caminos ciegos: realismo e idealismo.



Crítica a la dualidad

Tercer camino: la verdad viva.
Bipolaridad sujeto/objeto del acto
cognoscitivo. ¿Cómo unificarlos?

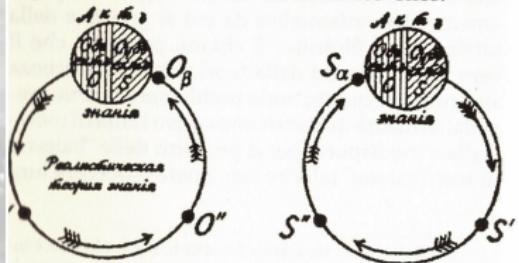
re una via per la trasformazione della realtà, non la
si può ritenere solo di carattere teorico-etico.



16

Crítica a la dualidad

re una via per la trasformazione della realtà, non la si può ritenere solo di carattere teorico-etico.



16

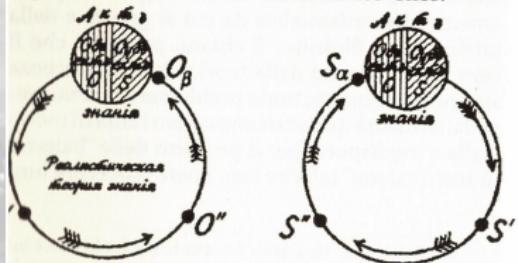
Tercer camino: la verdad viva. Bipolaridad sujeto/objeto del acto cognoscitivo. ¿Cómo unificarlos? 1: el objeto O es conocido inmediatamente. Se transforma (O' , O'' , etc.).

$$O \rightarrow O' \rightarrow \dots \rightarrow O_\beta = S$$

El sujeto se deducirá del objeto.
Sensismo, fenomenismo, realismo,
empiriocriticismo, inmanentismo,
intuicionismo.

Crítica a la dualidad

re una via per la trasformazione della realtà, non la si può ritenere solo di carattere teorico-etico.



16

Tercer camino: la verdad viva.
Bipolaridad sujeto/objeto del acto cognoscitivo. ¿Cómo unificarlos? 1: el objeto O es conocido inmediatamente. Se transforma (O' , O'' , etc.).

$$O \rightarrow O' \rightarrow \dots \rightarrow O_\beta = S$$

El sujeto se deducirá del objeto.
Sensismo, fenomenismo, realismo, empiriocriticismo, inmanentismo, intuicionismo.

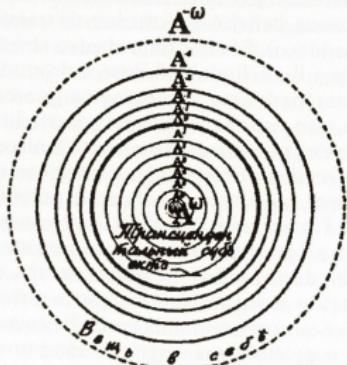
Recorrido dual: del sujeto S al objeto O :

$$S \rightarrow S' \rightarrow \dots \rightarrow S_\alpha = O$$

Idealismo, racionalismo, panlogismo, hegelismo, ...

El sistema

cacemente dal seguente schema:

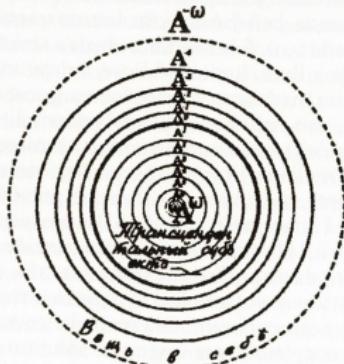


48

Conocimiento como acto de conciencia de no ser no-conocimiento. Distinción = conocimiento. Distinguir lo conocido del resto.

El sistema

icamente dal seguente schema:



48

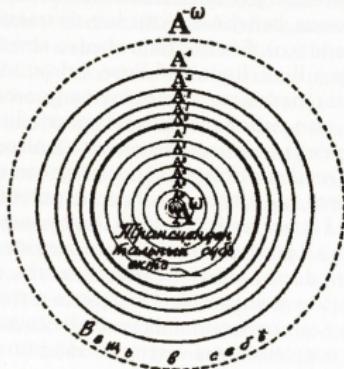
- Mero conocimiento (A_1), conocimiento de conocimiento (A_2).
- Se puede iterar: conocimiento de tercer nivel (A_3), cuarto nivel A_4 , y así sucesivamente ad infinitum.

$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$

- A como operador: $A_1 = A^1 = A(1)$. 1 es el símbolo del objeto, A el acto de aislarlo de todo el resto
- $A_2 = A(A_1) = A(A^1) = A(A)$,
 $A_3 = \dots = A[A(A)]$, ...,
 $A_n = \dots = A(A(\dots(A\dots)))$ (n veces)

El sistema

acemente dal seguente schema:



48

- como comparar los actos:

$$\dots = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} = \dots = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_1}{1}$$

- la incógnita: $1 = A_0 - A_0 = A^0$ y $A^0 \equiv 1$.
La «cosa»: conocimiento de potencia nula, A_0 .
- ¿qué indican los símbolos siguientes?

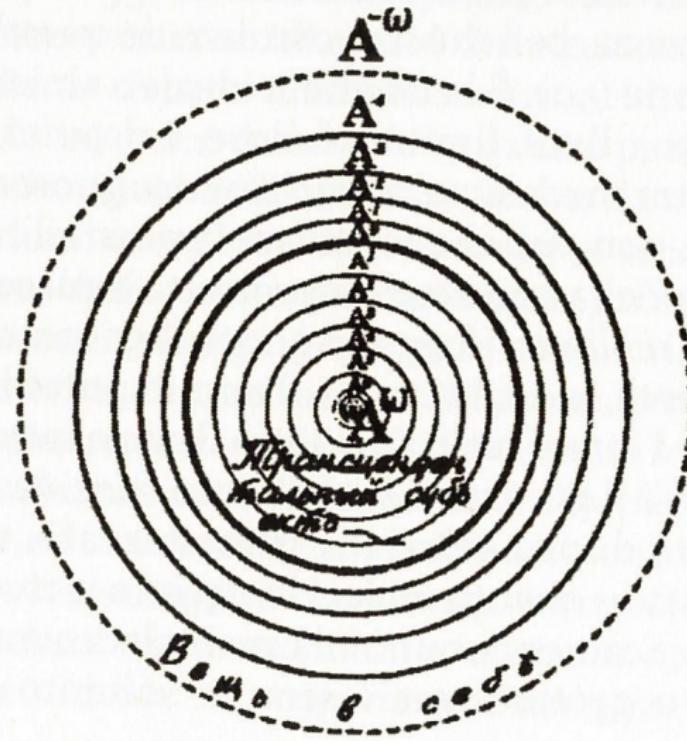
$$A^{-1}, A^{-2}, \dots, A^{-n}, A^{-n-1}, \dots$$

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{A^2}, \frac{1}{A^3}, \dots, \frac{1}{A^n}, \dots$$

- potencias negativas de la conciencia: aquellas a las que se debe aplicar la operación de distinción A más veces para obtener cierto grado de conciencia...

A^ω , $A^{-\omega}$

cacemente dal seguente schema:



- las cosas “más cosas” que las cosas mismas, quam res reales,...
- nueva comprensión del conocimiento (estructura global): actos de reflexión infinita a derecha o a izquierda (reflexión/inflexión):

$$\dots, A^{-n-1}, A^{-n}, \dots, A^{-1}, A^0, A^1, \dots, A^n, A^{n+1}, \dots$$

Los límites $A^{-\omega}$ (nicosofía), A^{ω} (filosofía), no pertenecen a la serie

- A es un acto de filosofía, A^{-1} es un acto de nicosofía.
- La operación A^{-1} : anular el juicio, fusión, confluencia, olvido, etc... Para A^n cognoscible, lo aprendible directamente es tan solo A^{n-1} ...
 $\dots A^{n-2}, A^{n-1}, A^n \dots$: «infra-cognoscibles»; A^{n+1}, A^{n+2}, \dots : «ultra-cognoscibles». Unas ya no son conocidas, las otras aún no lo son: **olvido del pasado, vaguedad del futuro**.
- La alternación consecutiva de las potencias de conocimiento **produce la idea de tiempo**. El movimiento hacia la parte positiva de la serie representa el paso del pasado al futuro; el movimiento hacia la parte opuesta el del futura hacia el pasado.

- Así, la conciencia de los moribundos, de quien se ahoga, de quien cae de lo alto, etc. cuando el organismo está inconsciente genera una secuencia temporal que viene del pasado hacia el presente. Y por el contrario el acto creativo del conocer atrae hacia el futuro, da una anticipación al futuro, lo profetiza.
- Presente: A^n . Pasado: sistema de potencias $\{A^i\} i < n$.
Futuro: sistema de potencias $\{A^i\} i > n$. La cosa en sí es un presente absoluto; el sujeto trascendental es un futuro absoluto. Serie de potencias: **fuera del tiempo**. Fuerza “cronogénica”.

Tiempo

- cada acto cognoscitivo A^n incluye un conjunto entero de actos de conocimiento infinito en ambas direcciones, en su pasado y en su futuro... Cada acto cognoscitivo incluye la res olvidada en sí incluso del sujeto trascendental ya no presente a la mente.
- Memoria del pasado: paramnesia, alucinación con respecto al pasado, sueños referentes al pasado. Memoria del presente: clarividencia y clariaudiencia (sin imágenes concretas), alucinación (con imágenes concretas). Memoria del futuro: presentimiento (sin imágenes), sueños premonitorios, creaciones artísticas, alucinaciones referentes al futuro, anticipación de ideas científicas.

La temporalidad es entonces de carácter pulsativo, pero hay un elemento nuevo sumamente interesante: el sistema de conocimiento asociado al tiempo, el rol **epistémico** de este.

Tiempo-duración - los tres niveles de Bergson (Deleuze)



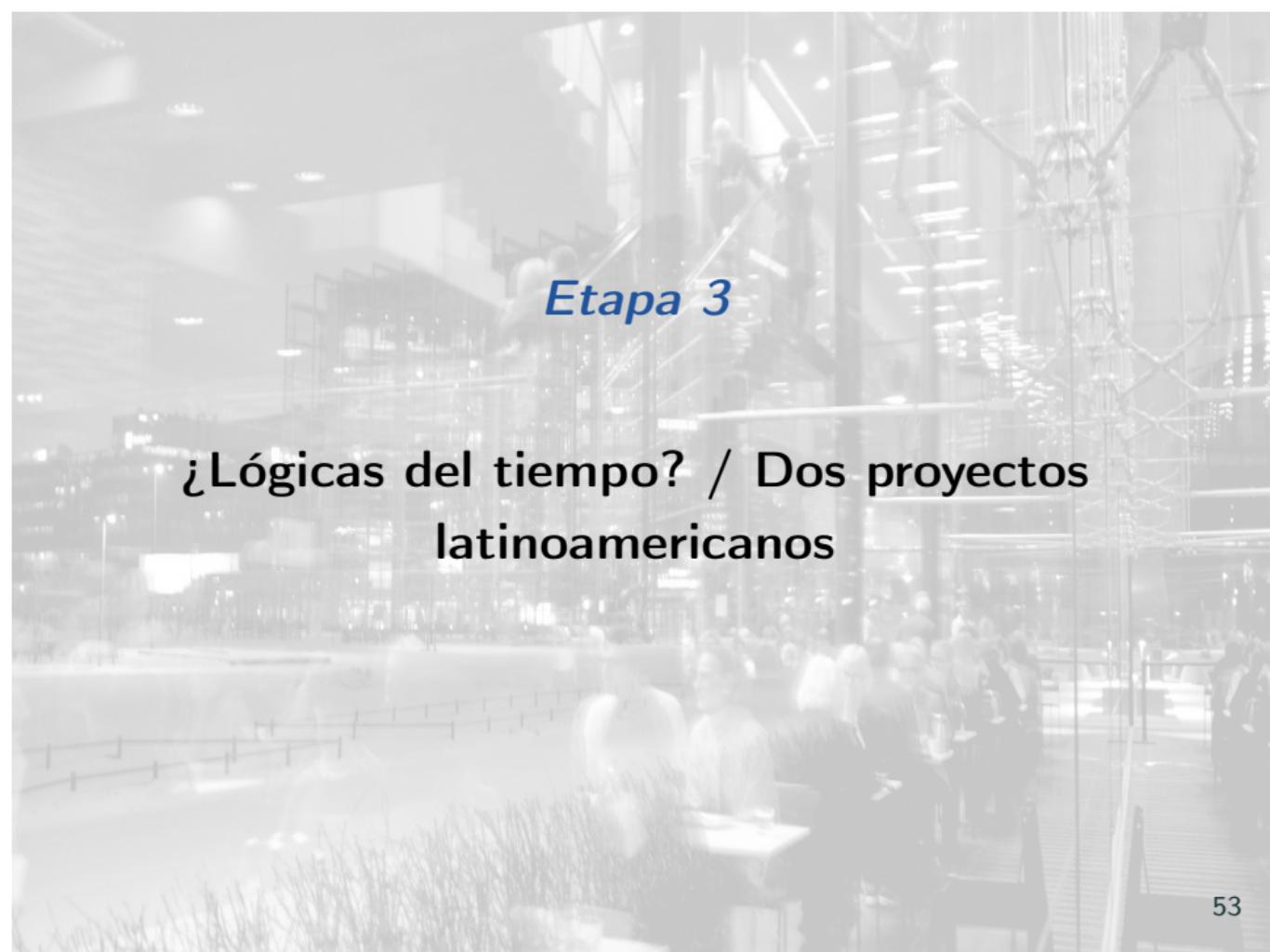
Henri Bergson, 1878

Deleuze en su Image-Mouvement (L'image cinéma) analiza la revolución bergsoniana de la percepción del tiempo y el movimiento. En 1896 Bergson daría una versión del tiempo anclada tanto en su cultura de ámbito judío como en su formación inicial dirigida hacia las matemáticas.

Bergson presenta TRES tesis sobre el movimiento



- Matière et mémoire (1896): el invento / descubrimiento de la imagen-movimiento es prodigioso!
- Primera tesis: « movimiento real → duración concreta » - « cortes inmóviles + tiempo abstracto »
- Segunda tesis: al menos **dos** ilusiones muy diferentes. El error: reconstituir el movimiento con instantes o poses. Instantes télos, acmè privilegiados (Antigüedad), arbitrarios (Modernidad).
- Tercera tesis: no solo el instante es un corte inmóvil del movimiento, sino el movimiento es un corte móvil de la duración
- (1) no solo hay imágenes instantáneas (cortes inmóviles); (2) hay imágenes-movimiento que son cortes móviles de la duración; (3) hay finalmente imágenes-tiempo (imágenes-duración, ...)



Etapa 3

**¿Lógicas del tiempo? / Dos proyectos
latinoamericanos**

Fenomenología:



“el estudio de aquello que permanece invariante bajo cambio de modo de realidad”.

simulación / sueño / ...

Fenomenología:



“el estudio de aquello que permanece invariante bajo cambio de modo de realidad”.

simulación / sueño / ...

Fenomenología:



“el estudio de aquello que permanece invariante bajo cambio de modo de realidad”.

simulación / sueño / ...

Azul



la experiencia de la percepción del ser azul y en particular su anclaje en lo espacial es invariante bajo cambio de modo de realidad

Dependencia/Fundierung

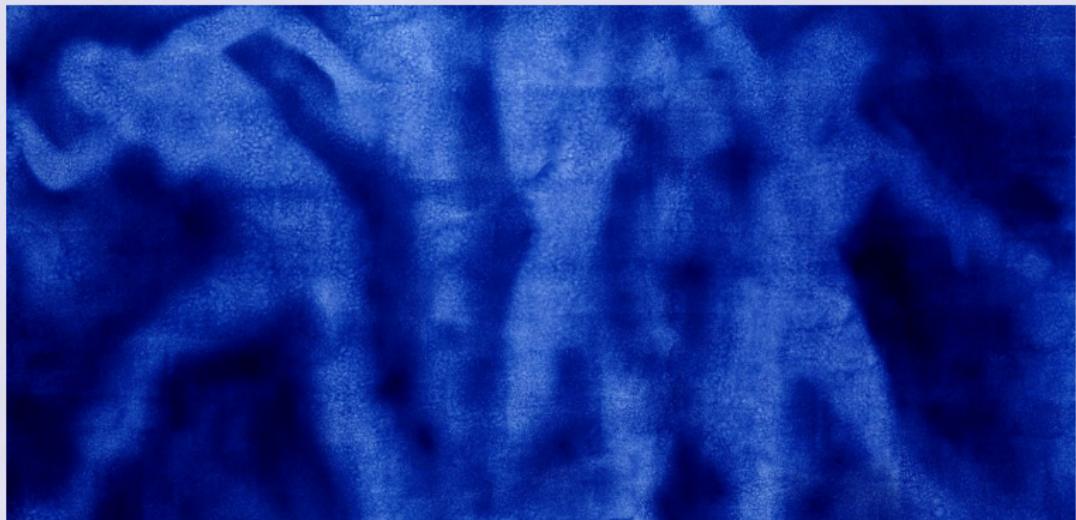
El «azul» *depende* de la **espacialidad**

Dependencia/Fundierung

El «azul» *depende* de la **espacialidad**

Azul	→	Espacialidad
Vida	→	C+O+N...
Consciencia	→	Sinapsis

Azul



Azul

↔

Espacialidad

Azul



Azul

↔

Espacialidad

Más variaciones sobre el Fundierung



Los movimientos de los ojos, las activaciones neuronales que suceden cuando leemos, el desglose de las palabras letra por letra, el comprender cada palabra individualmente, etc. claramente **no son suficientes** para “determinar inequívocamente que una persona está leyendo.”

Wittgenstein / Rota

La gran pregunta

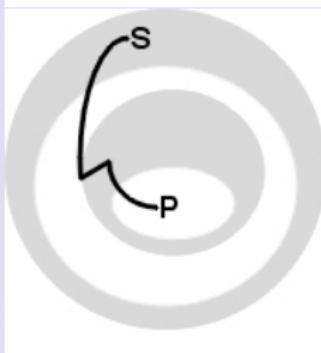
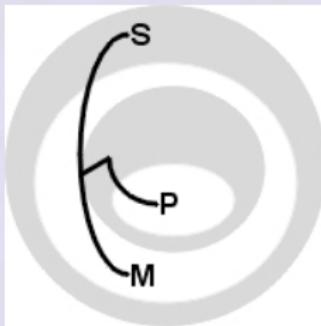
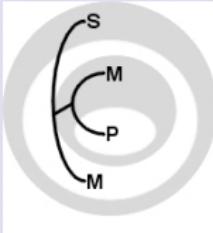
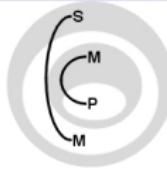
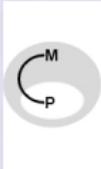
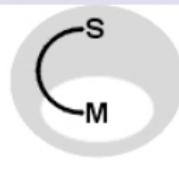
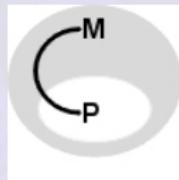
Husserl... en palabras de Gian-Carlo Rota:

La gran pregunta

Husserl... en palabras de Gian-Carlo Rota:

¿Qué lógica gobierna la relación de Fundierung?

Hace milenios... Cálculo Proposicional



(Gráficas de John F. Sowa en su comentario al MS514 de Peirce)

No tomar el mundo como algo dado



no tomar como algo dado, como algo obvio, el “mundo” para lograr hace milenios ese primer paso en el sentido de develar el carácter estructural de ese tipo de enunciados.

¿Dónde? $\mathcal{L} \models ?$

- ¿Teoría de modelos?
- ¿Teoría homotópica de tipos?
- ¿Teoría de topos?



A partir de esos dos elementos, Husserl arma un entramado de descomposición del tiempo en un continuo de anticipaciones e interpolaciones, de protenciones e intencionalidades, sumamente refinado e irreducible a una descripción meramente analítica.

Anclar de manera común todas las posibles experiencias de conocimiento del mundo.

Husserl construye básicamente dos niveles de lógica:

Anclar de manera común todas las posibles experiencias de conocimiento del mundo.

Husserl construye básicamente dos niveles de lógica:

lógica formal y lógica trascendental.

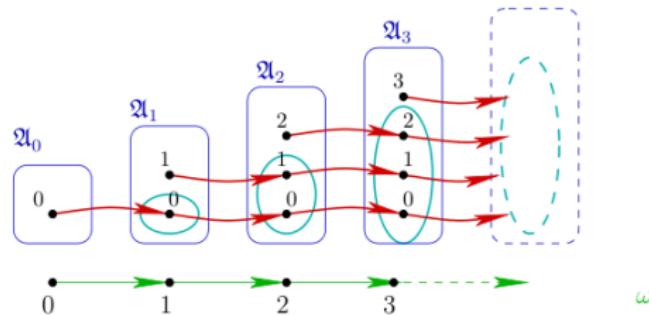
Lógica de la Consistencia, Lógica de la Verdad y finalmente Lógica de la Trascendencia. So pena de hacer una reducción extrema, de alguna manera hay ecos peirceanos muy fuertes en este análisis a posteriori de la lógica de Husserl.

THK (Zalamea): el ascenso

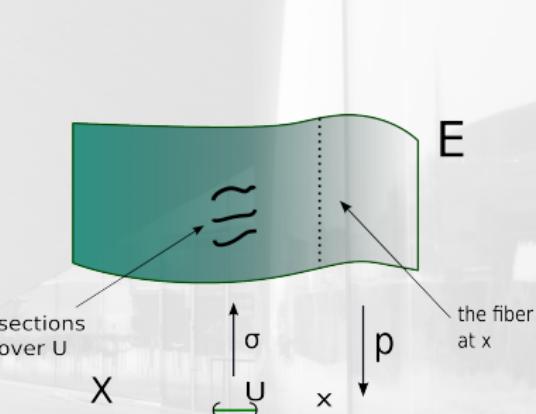
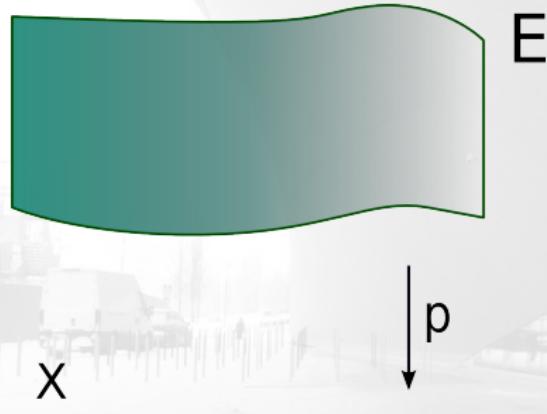


- Nivel “base” **K** (Kripke): inicio de “temporalidad” (aún a un nivel mucho más primitivo que en Husserl, pero ya más complejo que en la semántica de Tarski),
- Nivel “intermedio” **H** (Haces): coherencia y pegamento - inicio del sustrato sintético en Husserl (intencionalidad),
- Nivel “superior” **T** (Topos): la emergencia de la lógica del topos - el punto en que se puede dar arranque a la lógica trascendente (etapa I).

Nivel temporal inicial - modelos de Kripke - estructuras variables - primera flexibilización - **temporalidad**



Nivel intermedio de **haces**: coherencia y pegamento (continuo) -
lugar de las obstrucciones - **espacialidad I**



Nivel superior (“topos”): lugares “similares a universos conjuntísticos” pero con la flexibilidad de los dos niveles inferiores - **espacialidad II**



Y pegándolo todo: r (Riemann) - trasvases - superficies (caso emblemático en R O M A de Cuarón)



Dos respuestas que han tenido cierto impacto

Husserl: manifold - multiplicidad Tarski: $M \models \varphi \dots$

\models

Sokolowski propone identificar “modelo” en el sentido de Tarski y el “manifold” husserliano.

El teorema de **completitud** de Gödel efectivamente filtra la noción de modelo y la hace “manifold”. Pero...

Conexión bogotana: Fernando Zalamea Traba (Mat, UNAL)



Limitaciones de esas propuestas:

- No hay en los modelos tarskianos la posibilidad de incorporar la percepción del tiempo en el sentido refinadísimo de Husserl.
- Compacidad: análoga al pegamento en los haces (sistema local/global) pero en la mayoría de sistemas lógicos hay versiones muy débiles de compacidad.
- ¡No hay aun teorías de simbiosis!
- Será necesario incorporar la pléyade de ideas de Grothendieck (no solo los topos, sino aún las herramientas que han permitido entender de forma “arquetípica integral” —según la apropiada expresión de Zalamea— las obstrucciones a categoricidad dadas por las “cohomologías generalizadas” en los motivos) a la construcción de las lógicas trascendentales.
- Finalmente, será crucial adoptar una perspectiva muy flexible de vaivén entre Grothendieck y Shelah, entre los motivos y el forcing propio, entre la geometría y la teoría de modelos contemporánea como “ultrageometría”.

Conclusión pesimista...

- La riqueza de las preguntas de Husserl sobre el anclaje trascendental del mundo no ha sido hasta ahora alcanzada por las matematizaciones de la lógica.
- No hay verdadera lógica matemática trascendente aún.
- La pregunta de Rota aún no ha sido respondida verdaderamente.

Por otro lado, la riqueza de las construcciones matemáticas de Grothendieck y Shelah y sus dos escuelas paralelas (que deberán entrelazarse cada vez más) aún casi no había sido retomada/estudiada por los filósofos como objeto de su estudio... aún no lo había sido de manera radical hasta la llegada de obras como **Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas** (Zalamea, 2008).) No hay muchos más análisis de carácter filosófico, a nivel mundial de estas construcciones en sus niveles más sofisticados y avanzados, al menos no de manera sintética global.

...ma non troppo!

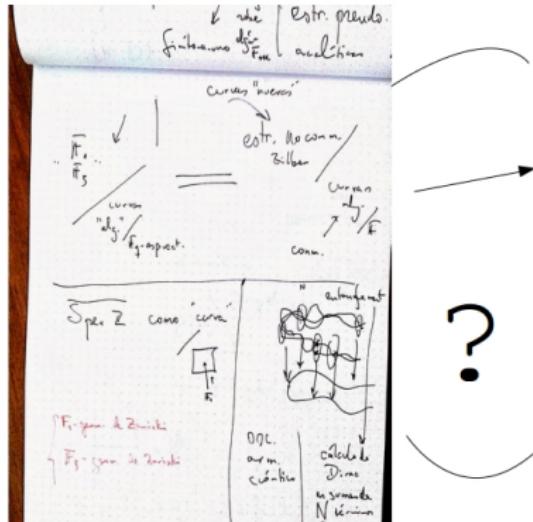
Por otro lado, la riqueza de las construcciones matemáticas de Grothendieck y Shelah y sus dos escuelas paralelas (que deberán entrelazarse cada vez más) aún casi no había sido retomada/estudiada por los filósofos como objeto de su estudio... aún no lo había sido de manera radical hasta la llegada de obras como **Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas** (Zalamea, 2008).) No hay muchos más análisis de carácter filosófico, a nivel mundial de estas construcciones en sus niveles más sofisticados y avanzados, al menos no de manera sintética global.

y sí, ma non troppo:

en el trabajo de Zalamea en (r)THK está ya el inicio de un camino que será muy largo, para lograr en algún momento dar respuesta a la pregunta de Rota, dar una lógica para el Fundierung.

Interludio: Project Topoi

Proyecto **moving topoi**

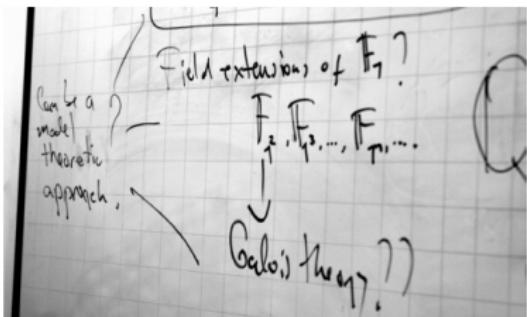
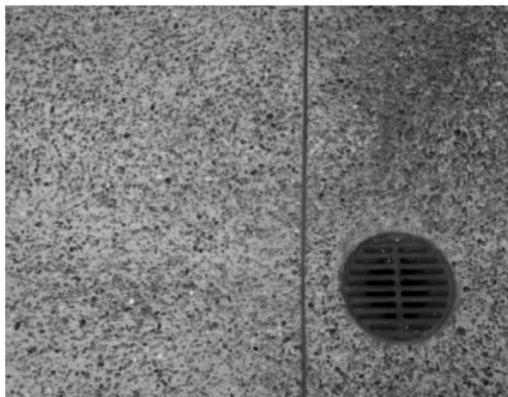


ART

MAT

¿Un diálogo imposible?

- Creación de mundos
- Percepción del mundo
- Atrapar movimiento
- Desarrollar estructura
- Sueño/vigilia
- ...



Barreras fuertes de
Comunicación...

Cuentos de Tono : Moriyama



Matemática
de los
últimos
50 años

FEN (FIL)

Samuel TODES : el
mundo de percepción
está hecho de campos
dentro de campos...



topoi



Project Topoi



Capturar espacio

/

Explorar
paralelismos
y dicotomías

¿topoi matemáticos
y
artísticos?

Project Topoi

María Clara **Cortés**, Wanda **Kossak**,
Roman **Kossak**, Andrés **Villaveces**

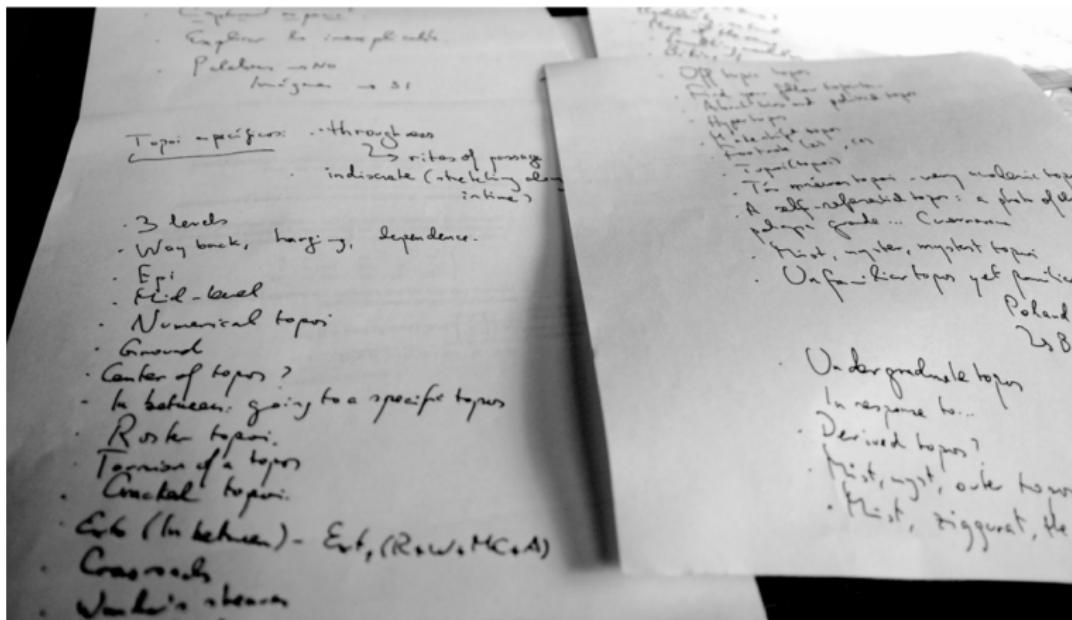


Dicotomías – $(2 \cdot 2)^n$



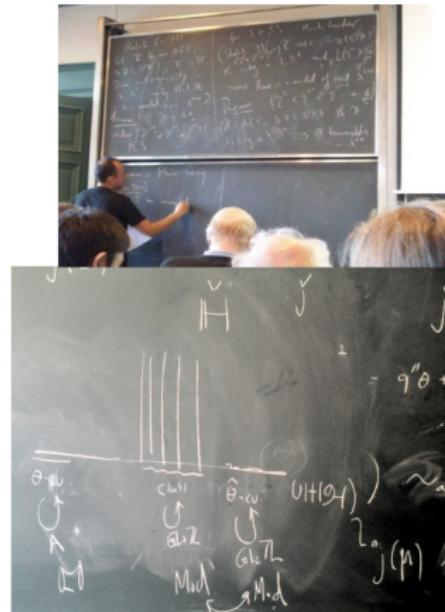
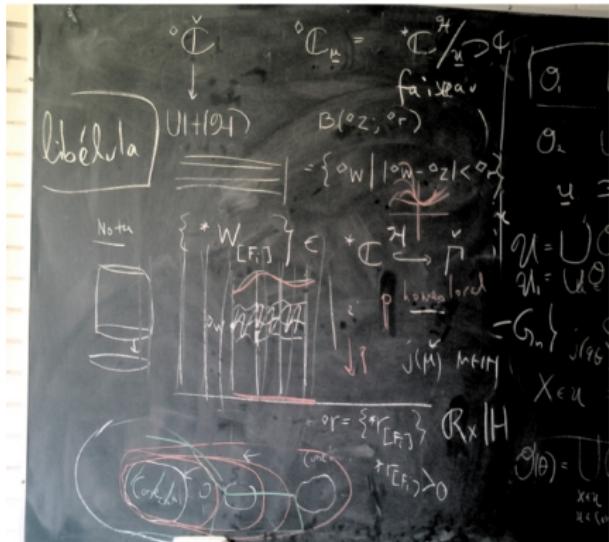
Project Topoi

Entre agosto y noviembre de 2013 : 440 imágenes, casi sin texto. Aprox. 40 **topoi**



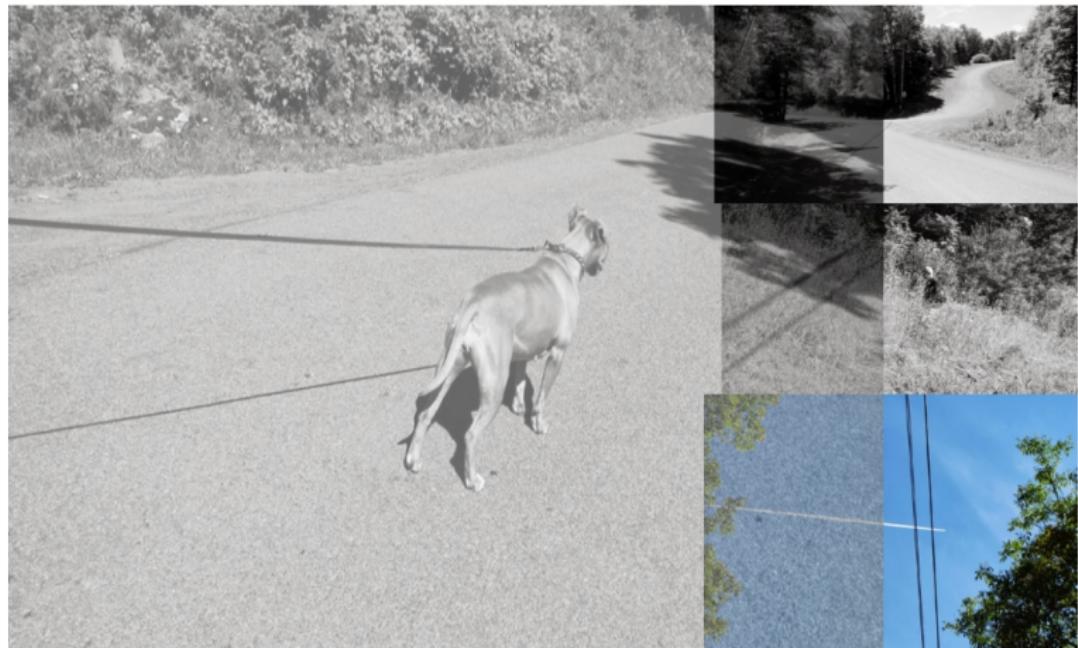
Project Topoi

local/global - topoi, sheaves, space (A)



Project Topoi

"There" (W, in response to A)



Project Topoi

"Around" (response to A and W) - R



Project Topoi

(in response to R, W and A) in between - MC



R : academic topoi I



Project Topoi

A : (part of) mist, myster, mystest **topos**



Project Topoi

MC : tés mnémés topoi - (very academic)



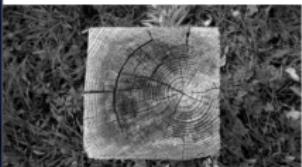
Project Topoi

A : Blur topoi (in response to W)



Project Topoi

In response to A (W's sheaves)

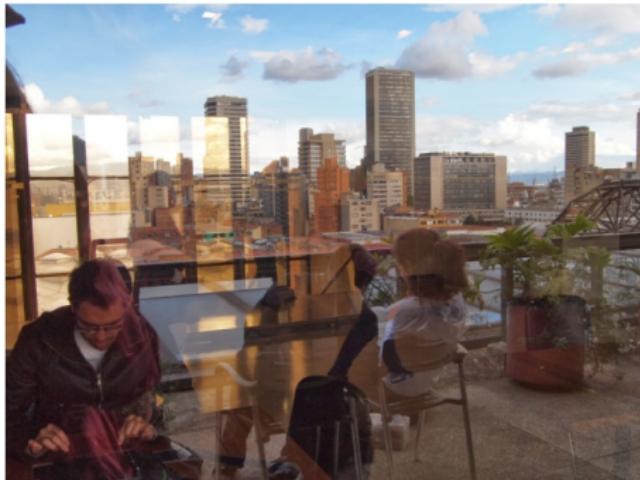


R : Undergraduate topos



Project Topoi

MC : indiscrete – double topoi



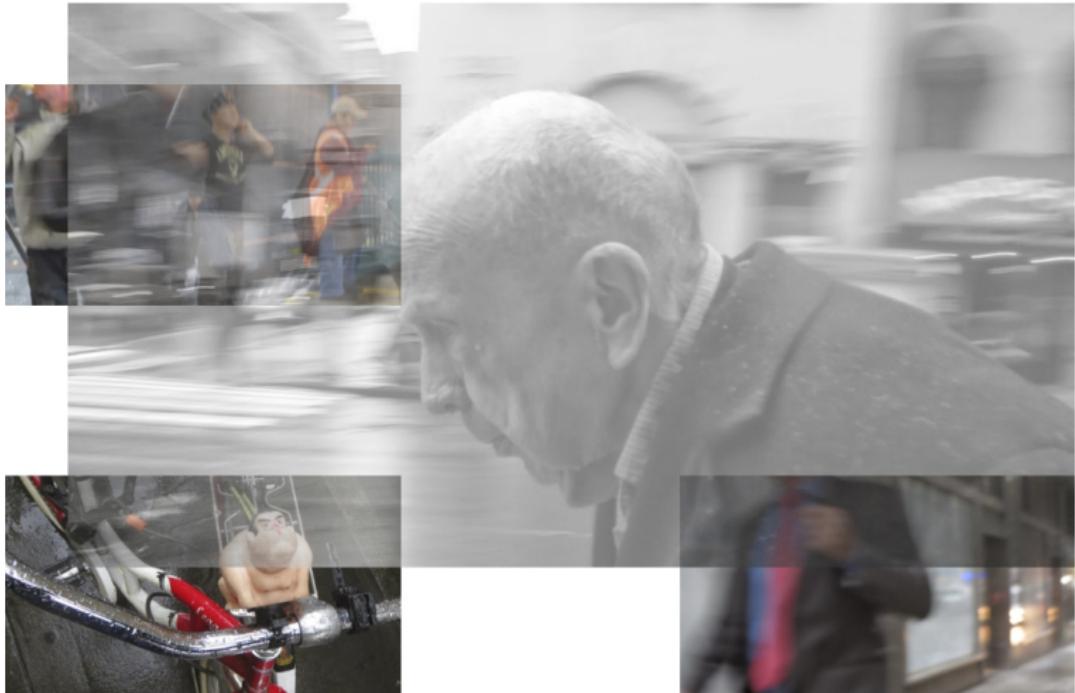
Project Topoi

- A – Throughness **topoi** (rites of passage)
- in response to MC's Cracked Topoi, and to Wanda's responses...

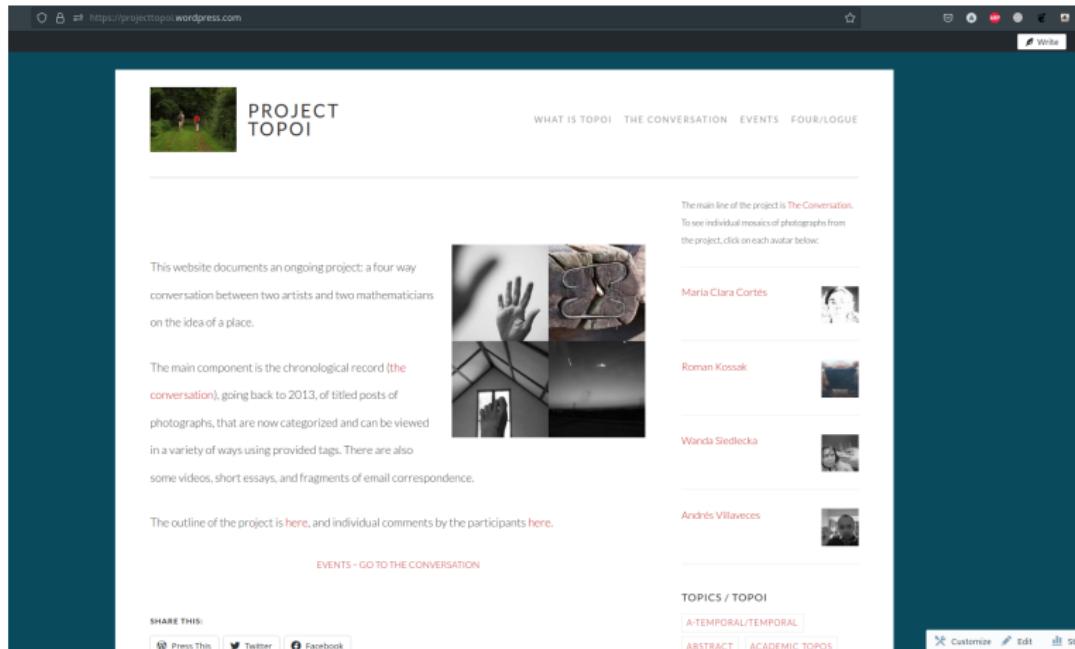


Project Topoi

W - Response to A: Throughness topoi (rites of passage)



Project Topoi (<https://projecttopoi.wordpress.com/>)



The screenshot shows the homepage of the Project Topoi website. At the top, there is a header with a logo featuring a landscape image and the text "PROJECT TOPOI". Below the header, a main content area contains text about the project, images, and participant profiles. The footer includes social sharing buttons and a navigation menu.

WHAT IS TOPOI THE CONVERSATION EVENTS FOUR/LOGUE

This website documents an ongoing project: a four way conversation between two artists and two mathematicians on the idea of a place.

The main component is the chronological record ([the conversation](#)), going back to 2013, of titled posts of photographs, that are now categorized and can be viewed in a variety of ways using provided tags. There are also some videos, short essays, and fragments of email correspondence.

The outline of the project is [here](#), and individual comments by the participants [here](#).

EVENTS - GO TO THE CONVERSATION

SHARE THIS:

WHAT IS TOPOI THE CONVERSATION EVENTS FOUR/LOGUE

Maria Clara Cortés

Roman Kosak

Wanda Siedlecka

Andrés Villaveces

A-TEMPORAL/TEMPORAL

ABSTRACT ACADEMIC TOPOS

Customize Edit

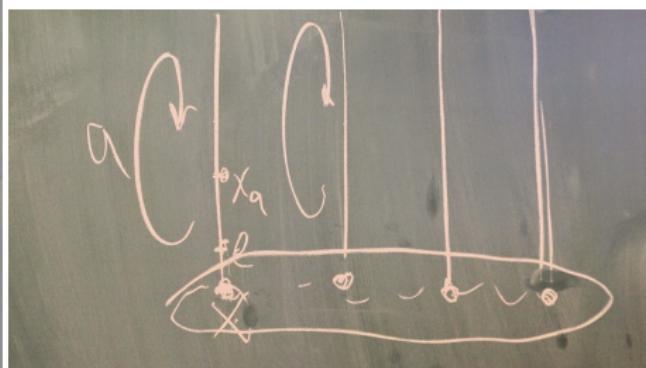
Etapa 4

Dibujo y ecfrasis matemática

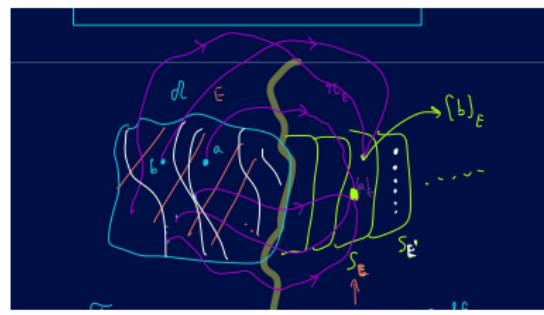
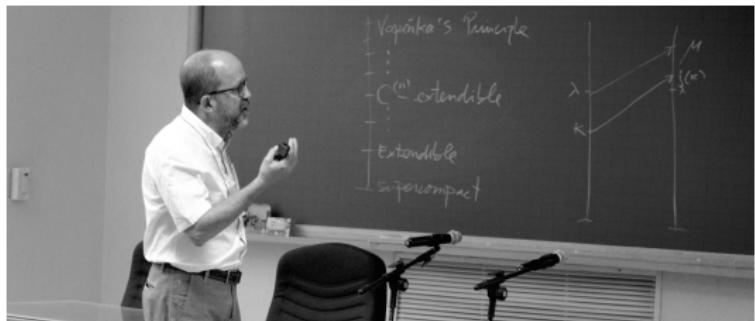
Fred Sandback en Helsinki (9 de junio de 2023 - Foto: AV)



Mini-galería: Hilten / Zilber



Mini-galería: Bagaria / AV



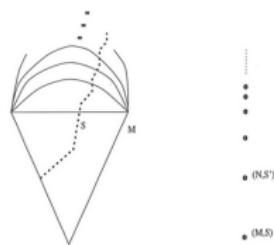
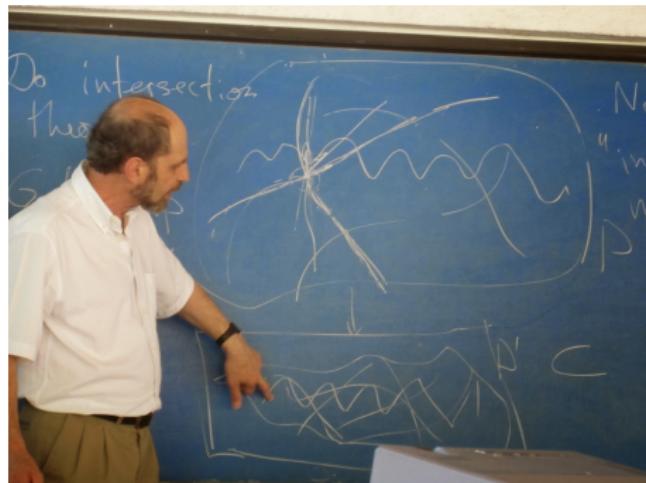


Figure 3: Unfoldables and Chains in $(\mathcal{E}_{(\mathcal{R}(\kappa), \mathcal{E}, S)}, \prec_e)$

The parameter S in the definition of unfoldable cardinals is crucial for them to be of any interest: as Enayat points out in [6], given any model M of ZF such

29



Mini-galería: Lartigue / Cerro Azul



Dos raíces de draw: deslizar, seguir (y cortar)

- **DRAW**: Proto-IE: *dhreg'- Origen del inglés *draw*, significado original: «deslizar». La forma antigua *dhreg- da lugar a *drink* - *drench* - *drown*
- **diSEÑO, deSIGN**: *sekw-no-, de la raíz *sekw- (1) «seguir». De Vaan la enlaza con el PIE *sekh-no- «cortar», de la raíz PIE *sek- "cortar", *sakin* (Hebr., Aram.)

deslizar / cortar / seguir



Nadia Lartigue - Extracto de *Grises* (UNAM, CDMX, 2022)

Enmarcar la mimesis

Auerbach inicia su Mimesis (escrito durante su exilio en Estambul durante la Segunda Guerra Mundial) con una comparación entre la Odisea y el pasaje de Abraham e Isaac en el libro de Génesis.

Mientras que en la Odisea las descripciones de lugares, tiempos, comidas servidas en banquetes, motivaciones y detalles (e.g., la herida antigua de Odiseo, reconocida por la anciana que trabajaba para su familia cuando él regresa, aún sin anunciararse) están contadas en detalle, en el Génesis la historia de Abraham que lleva a su hijo Isaac al sacrificio es dejada al desnudo:

Auerbach inicia su Mimesis (escrito durante su exilio en Estambul durante la Segunda Guerra Mundial) con una comparación entre la Odisea y el pasaje de Abraham e Isaac en el libro de Génesis.

Mientras que en la Odisea las descripciones de lugares, tiempos, comidas servidas en banquetes, motivaciones y detalles (e.g., la herida antigua de Odiseo, reconocida por la anciana que trabajaba para su familia cuando él regresa, aún sin anunciararse) están contadas en detalle, en el Génesis la historia de Abraham que lleva a su hijo Isaac al sacrificio es dejada al desnudo:

¿De dónde vienen? ¿De Beersheva? No sabemos. ¿Dónde está el monte Moriah? ¿Cerca de Jerusalén? ¡No sabemos! Caminan durante tres días, salen al amanecer. No hay detalles de sus comidas, de lo que dice Isaac, de lo que piensa Abraham.

Enmarcar la mimesis (solidaridad)

Sin embargo, dice Auerbach, por el poder de su desnudez, de su crudeza, la historia evoca de manera extremada poderosa un LUGAR, un LUGAR psicológico, un lugar en nuestra memoria colectiva que aún hoy tiene repercusiones en desarrollo. . .

Enmarcar la mimesis (solidaridad)

Sin embargo, dice Auerbach, por el poder de su desnudez, de su crudeza, la historia evoca de manera extremada poderosa un LUGAR, un LUGAR psicológico, un lugar en nuestra memoria colectiva que aún hoy tiene repercusiones en desarrollo...

La realidad se vuelve más poderosa al ser vaciada, desnudada.



Enmarcar la mimesis (solidaridad)

Sin embargo, dice Auerbach, por el poder de su desnudez, de su crudeza, la historia evoca de manera extremada poderosa un LUGAR, un LUGAR psicológico, un lugar en nuestra memoria colectiva que aún hoy tiene repercusiones en desarrollo...

La realidad se vuelve más poderosa al ser vaciada, desnudada.



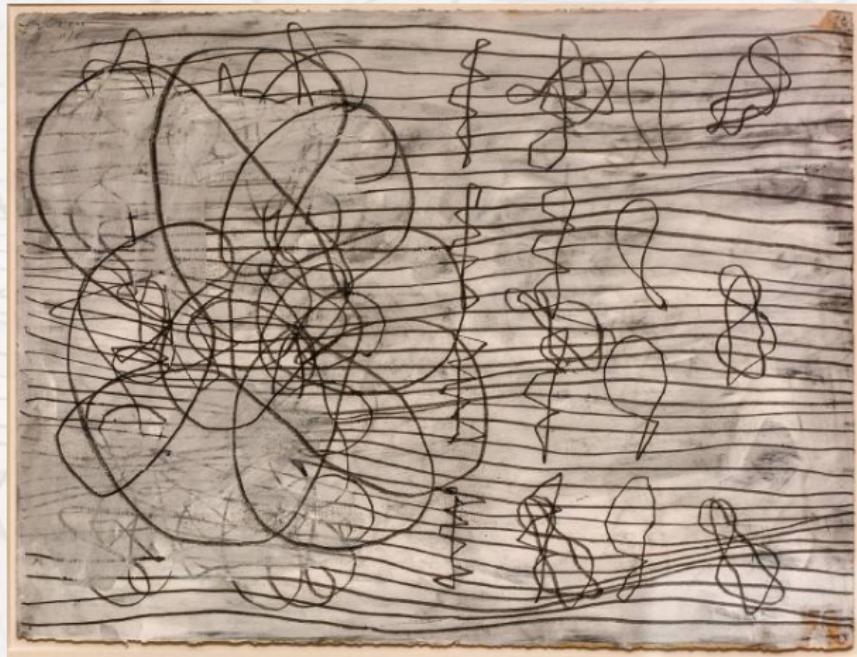
(Al igual que en los dibujos matemáticos...)



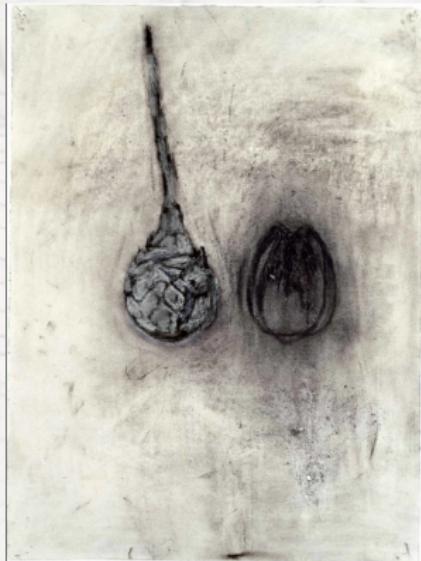
¿Pero qué ocurre entre la poesía
y el dibujo?

¿Entre la matemática y el
dibujo?

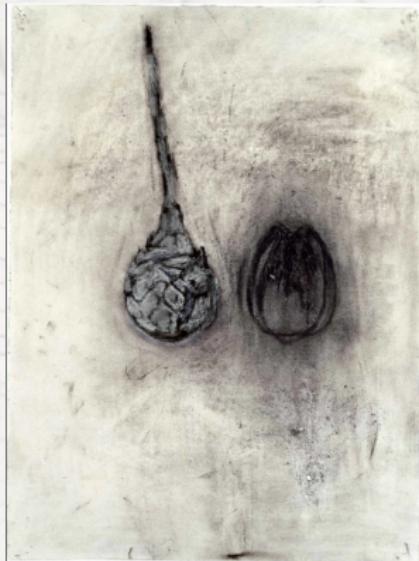
Peter Cole entresaca sus poemas de los dibujos de Winters



"They seem like knots, or a strange music's notes on a staff, in a whorl, like petals opening, to be heard. Something scored. Scars or sores. A soaring. Drawing words. It is the immediacy of ekphrasis that draws me. The contact. I realize it's odd to turn to another medium for a sense of immediacy. And yet, as with translation, that palpable sense of relation compels (completes?). And that's what I'm after — to speak into or through the drawings. To be dyed by their material qualities, as I feel them coming through me, or bringing me into their matrix. To take on their tinge."



"The smudged sounds give rise to lines, a syntax like synapses. Grappa in its capillary action. The narrow descent paradoxically widens out and lifts along a spectrum of endless adjacencies, in every direction, and every inflection,' as Levi Yitzhak of Berditchev sang, in his gentle Yiddish, 'Still You. However You. Only You. Every You"



“You, the viewer? The reader? Whoever you are, and where . . . Drawing really does — draw us in (to the object rendered and the time taken) and out (of ourselves to further seeing and other surfaces, even souls, or simple tensility sensed).”

Peter Cole - On Being Drawn

Incompletitud esencial + No querer mostrar: ¿dos axiomas?

- Los dibujos en matemáticas avanzadas son esencialmente incompletos
- En matemáticas solemos evitar ver nuestros dibujos como «pasos finales» (yo incluso admitirlos!) - Klein sobre Riemann...

Algunas problemáticas - de vuelta a las preguntas

Peter Cole evoca la cercanía de la muerte con el acto de traducir, y la hace parte esencial del dibujar.

Syntax like synapses de verdad parece ir al corazón del acto de dibujar.

Capillary action (¿matemática capilar?). El estrecho descenso (¿de qué? ¿de linfa? ¿algún fluido vital? ¿información?) y las adyacencias, en cada dirección, en cada inflexión (¡Leibniz!)

El **tú** de Levi Yitzhak de Berditchev, posiblemente quien mira, quien lee, quien hace matemáticas y escucha la explicación de una demostración.

De vuelta al problema - Coda

Y el dibujar nos dibuja (draws us in and out), hacia el objeto representado, el tiempo.

Y hacia nosotros.

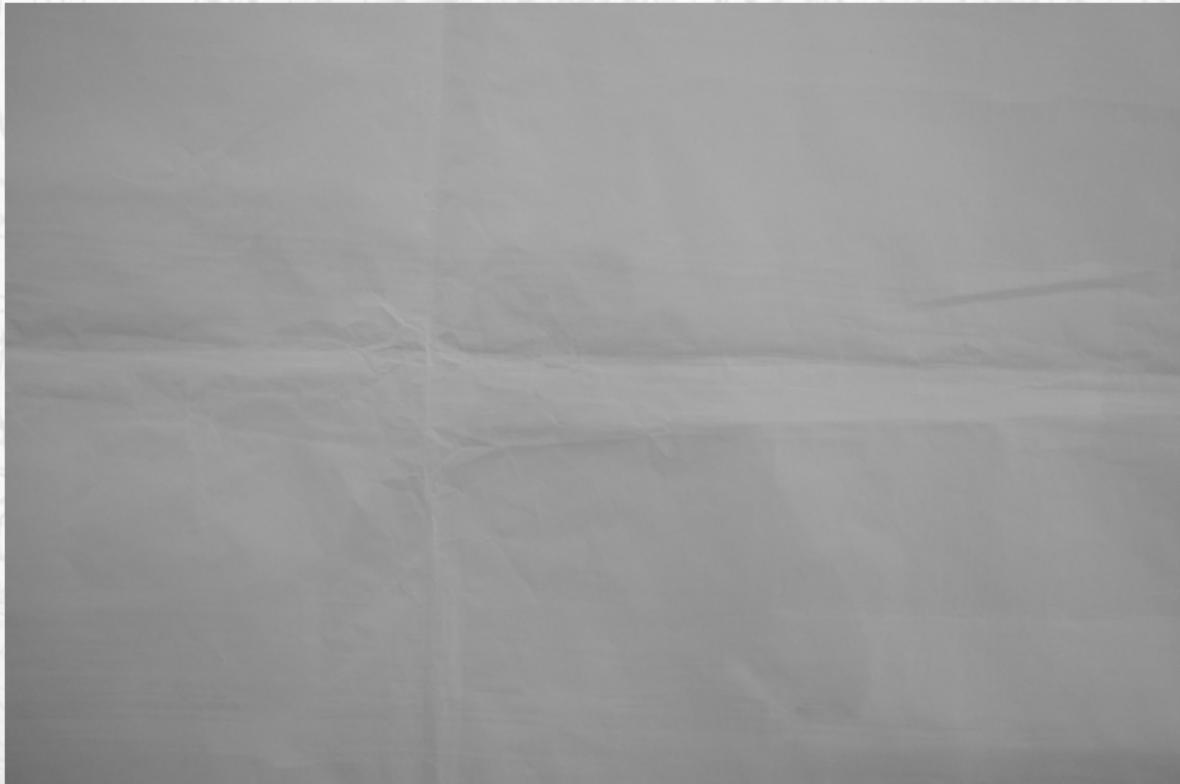
Dibujar y desdibujar, dibujar y borrar constantemente, la acción capilar. ¿Cuántas veces en matemáticas dibujamos/redibujamos/desdibujamos/redibujamos una demostración hasta lograr verla? ¿Hasta lograr ser llevados (drawn...) hacia la prueba/objeto y el tiempo tomado, hasta ser llevadas a otras superficies? ¿Qué es la tensilidad en matemáticas? ¿Y qué es capilaridad?

Écfrasis?

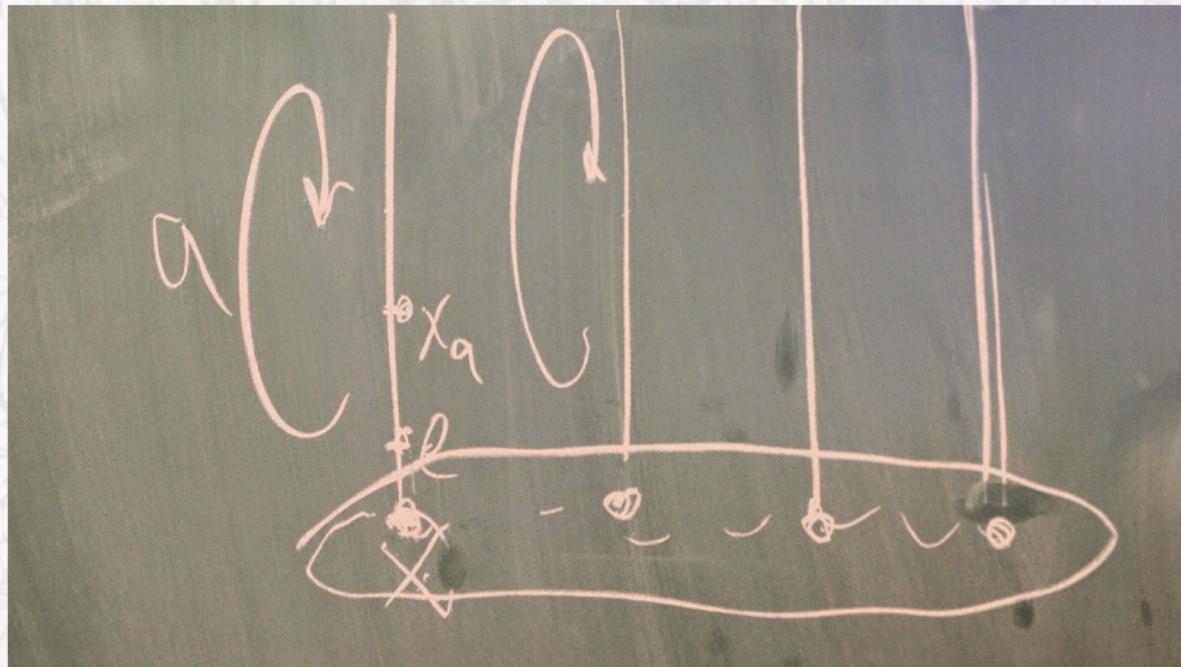
¿Es incluso posible la écfrasis matemática?

¿Cómo funciona el anclaje entre las matemáticas y sus dibujos?

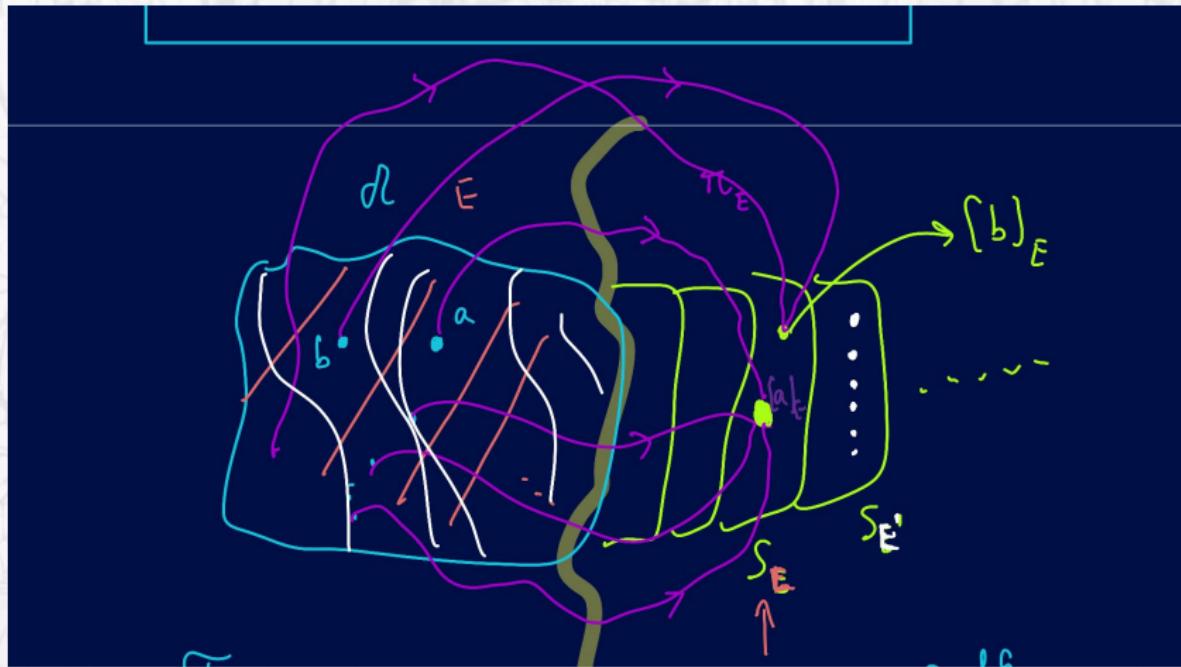
De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



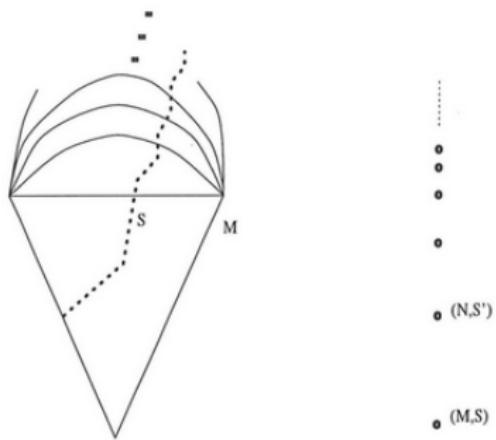
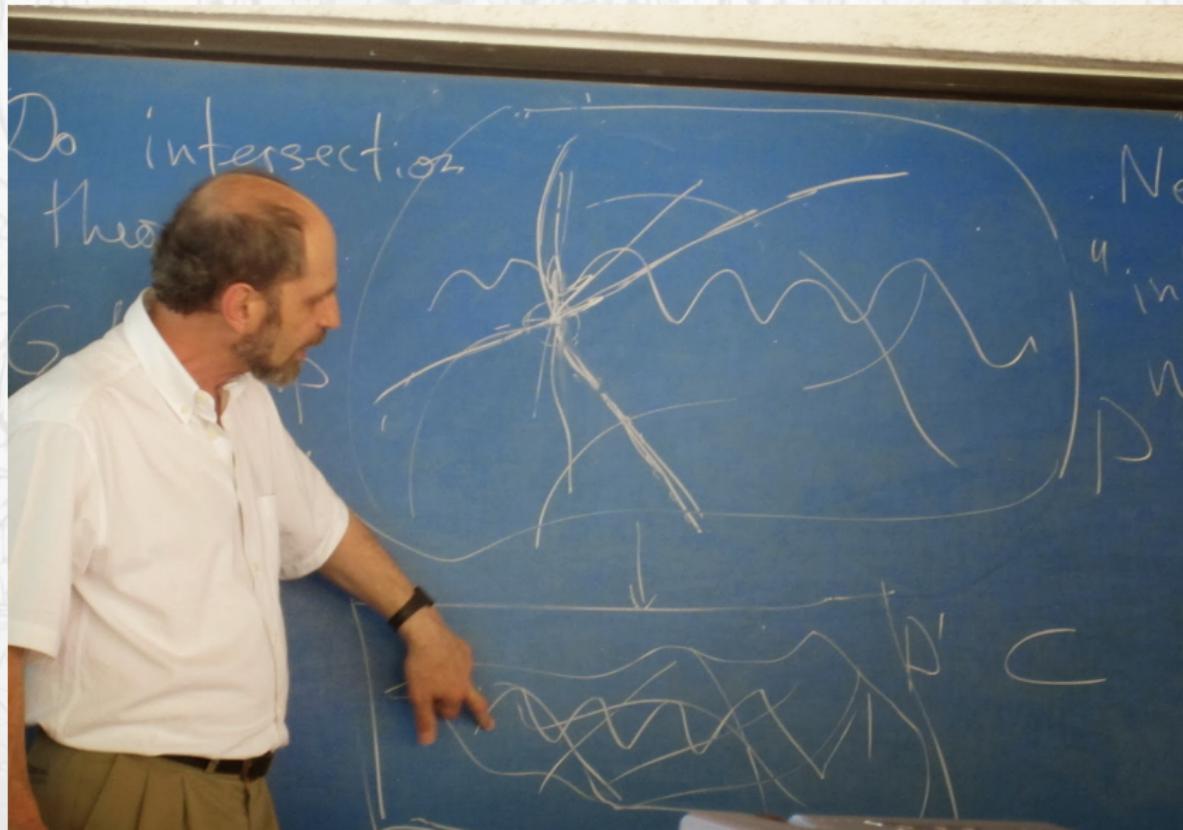


Figure 3: Unfoldables and Chains in $(\mathcal{E}_{(\mathcal{R}(\kappa), \epsilon, S)}, \prec_e)$

The parameter S in the definition of unfoldable cardinals is crucial for them to be of any interest: as Enayat points out in [6], given any model M of ZF such

De vuelta a nuestra mini-galería



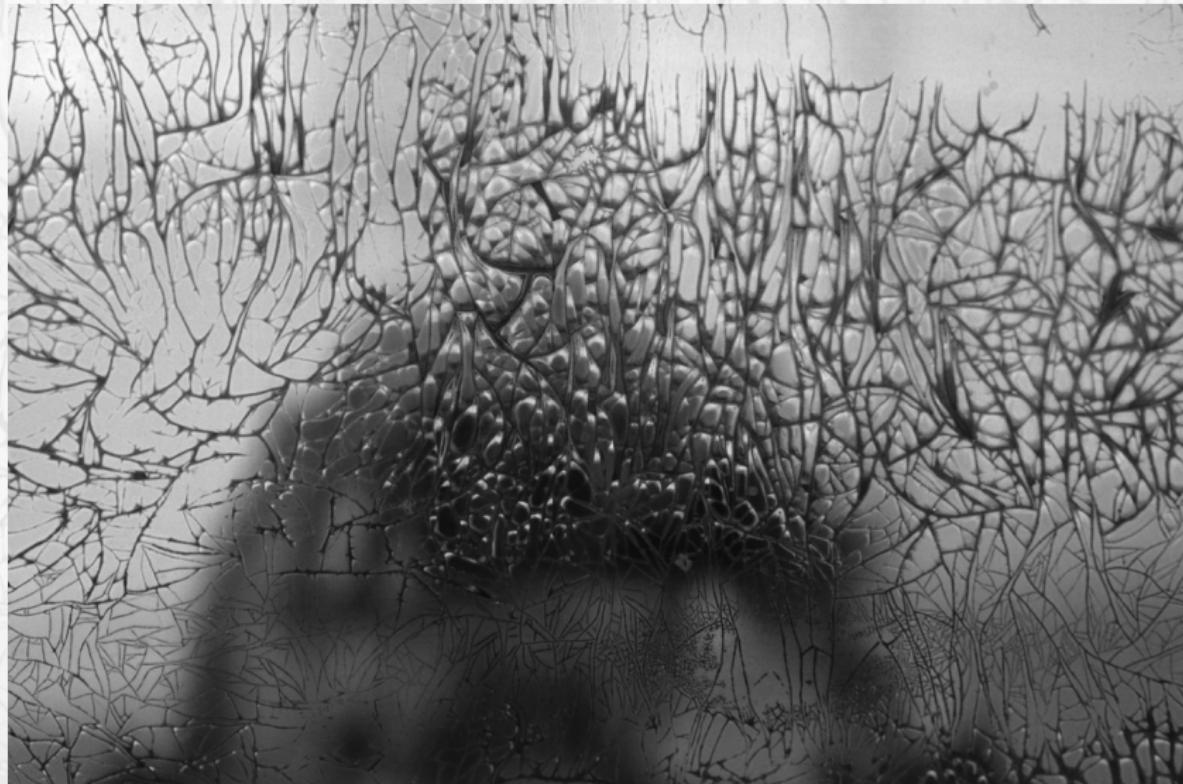
De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



De vuelta a nuestra mini-galería



Etapa 5

Categoricidad y Completitud: el giro lógico

Más que un solo camino, tenemos espirales matemáticas

Tenemos en realidad un **vaivén** pendular entre simplicidad y complejidad que usa la una para llegar a su opuesta:

Más que un solo camino, tenemos espirales matemáticas

Tenemos en realidad un **vaivén** pendular entre simplicidad y complejidad que usa la una para llegar a su opuesta:

- De pregunta simple a

Más que un solo camino, tenemos espirales matemáticas

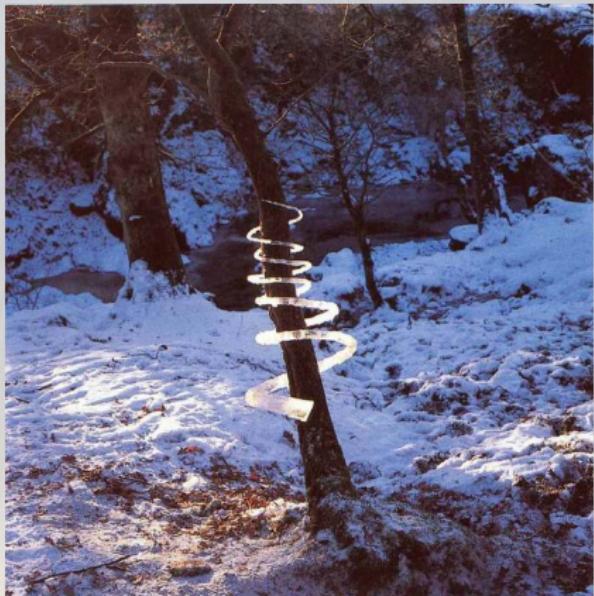
Tenemos en realidad un **vaivén** pendular entre simplicidad y complejidad que usa la una para llegar a su opuesta:

- De pregunta simple a
- **Definición, construcción o demostración** complejas... a

Más que un solo camino, tenemos espirales matemáticas

Tenemos en realidad un **vaivén** pendular entre simplicidad y complejidad que usa la una para llegar a su opuesta:

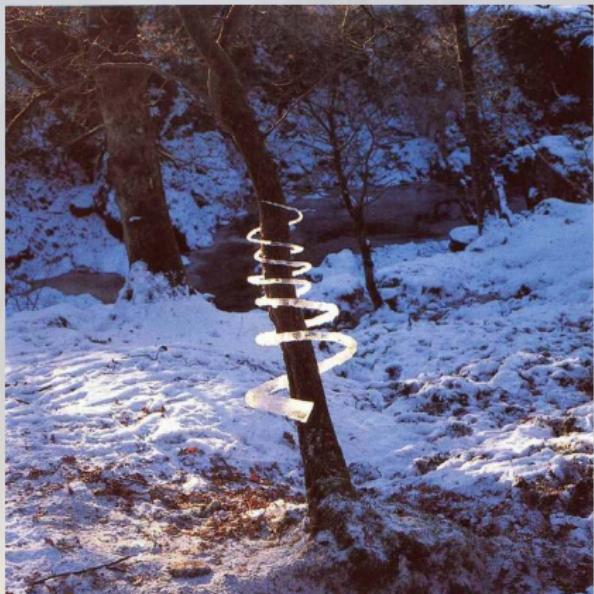
- De pregunta simple a
- **Definición, construcción o demostración** complejas... a
- Simplificación de la demostración (o capturar mejor la definición, o...) por autores posteriores, o



Más que un solo camino, tenemos espirales matemáticas

Tenemos en realidad un **vaivén** pendular entre simplicidad y complejidad que usa la una para llegar a su opuesta:

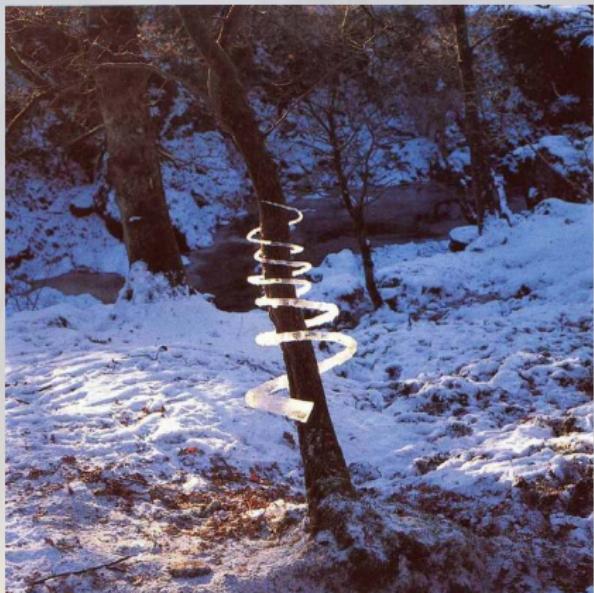
- De pregunta simple a
- **Definición, construcción o demostración** complejas... a
- Simplificación de la demostración (o capturar mejor la definición, o...) por autores posteriores, o
- Generalización, nuevas complejidades y



Más que un solo camino, tenemos espirales matemáticas

Tenemos en realidad un **vaivén** pendular entre simplicidad y complejidad que usa la una para llegar a su opuesta:

- De pregunta simple a
- **Definición, construcción o demostración** complejas... a
- Simplificación de la demostración (o capturar mejor la definición, o...) por autores posteriores, o
- Generalización, nuevas complejidades y
- Nuevas preguntas simples ...



The motion

Ilustraré esto con UN ejemplo matemático muy famoso de los años 30. Hay ejemplos acaso más contundentes (años 1990, 2013) pero me limito a este.

Óscar Muñoz: volverse aire (¡empecemos!)



Una visión no ortodoxa

La visión más usual del rol del teorema de Gödel dice básicamente que este asestó un golpe mortal al programa de Hilbert.

Normalmente se ve el teorema de Completitud (anterior al de Incompletitud) como un paso “anterior”, “menos complejo” que el teorema de Incompletitud.

La visión más usual del rol del teorema de Gödel dice básicamente que este asestó un golpe mortal al programa de Hilbert.

Normalmente se ve el teorema de Completitud (anterior al de Incompletitud) como un paso “anterior”, “menos complejo” que el teorema de Incompletitud.

Sin embargo (siguiendo ideas de Väänänen), una manera distinta de verlo es la siguiente: el teorema de Incompletitud es esencialmente anterior al teorema de Completitud.

Completitud: ¿terapéutica?

El teorema de Completitud en cierto sentido “subsana” problemas que señala el teorema de Incompletitud. El camino entonces es más bien

Completitud: ¿terapéutica?

El teorema de Completitud en cierto sentido “subsana” problemas que señala el teorema de Incompletitud. El camino entonces es más bien

HILBert → INCompl. Gödel → COMPL. Gödel

Ahora bien, cabe aclarar que no fue así la aparición cronológica de los teoremas de Gödel: el teorema de Completitud apareció un año antes del de Incompletitud. Sin embargo, un año en la mente activa de un matemático suele tener un revuelto enorme de cosas, y es bastante difícil sostener que Gödel haya empezado a pensar en Incompletitud solo después de lograr Completitud. Es mucho más sensato afirmar que probablemente estaba pensando más o menos simultáneamente en ambas, ensayando una u otra posible solución que nunca vio la luz, y simplemente escribió Completitud primero e Incompletitud después...

Tres teoremas importantes y arrasadores

- **Indefinibilidad de la definibilidad** - Tarski: no es posible definir (aritméticamente) de manera general los conjuntos definibles.

Tres teoremas importantes y arrasadores

- **Indefinibilidad de la definibilidad - Tarski:** no es posible definir (aritméticamente) de manera general los conjuntos definibles.
- **Indefinibilidad de la verdad - Tarski:** El conjunto de (códigos de Gödel) de todas las verdades no es definible.

Tres teoremas importantes y arrasadores

- **Indefinibilidad de la definibilidad - Tarski:** no es posible definir (aritméticamente) de manera general los conjuntos definibles.
- **Indefinibilidad de la verdad - Tarski:** El conjunto de (códigos de Gödel) de todas las verdades no es definible.
- **Incompletitud - Gödel:** Si un sistema axiomático \mathcal{A} es válido y recursivo, entonces existe una sentencia $\varphi_{\text{gödel}}^{\mathcal{A}}$ verdadera pero no \mathcal{A} -teorema.

Un contexto sorprendente: la revolución romántica

Isaiah Berlin: la revolución romántica consistió en el primer ataque a los tres principios, «tres piernas sobre las cuales descansaba toda la tradición occidental»:

Un contexto sorprendente: la revolución romántica

Isaiah Berlin: la revolución romántica consistió en el primer ataque a los tres principios, «tres piernas sobre las cuales descansaba toda la tradición occidental»:

- toda pregunta real debe poder ser respondida (y si no tenemos respuesta la razón es probablemente nuestra ignorancia) o si algo no se puede responder, no es una pregunta,
- todo concepto real se puede transmitir, se puede enseñar (contrariamente a creencias de otras culturas según las cuales hay conceptos que no pueden ser transmitidos, o enseñados, a menos que uno sea un «iluminado», bendito o «escogido»)
- que todas las respuestas deben ser compatibles las unas con las otras

¿Más allá? (Serra: “Tilted Arc”)



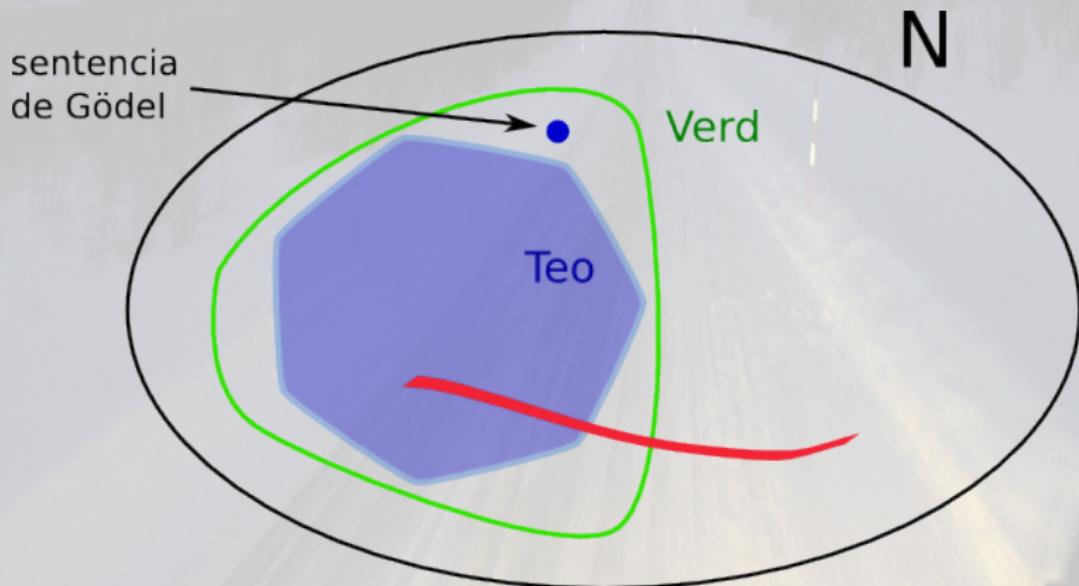
Bloqueos y desbloqueos...

Sentencias de Gödel - Epiménides

Lo clave en los tres teoremas anteriores es la construcción (idea de Gödel) de una sentencia de Gödel $\varphi_{\text{gödel}}^A$ que no puede estar ni en A ni por fuera de $Verd = \{\Gamma \varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\} \subset \mathbb{N}$.

La sentencia de Gödel es una generalización supremamente sofisticada de la “paradoja del mentiroso”, y aprovecha el poder enorme de **codificación** de la estructura $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ (la estructura inductiva de las fórmulas se puede reflejar en la estructura inductiva de los naturales).

Ruptura dicotómica



El rol de la completitud

Aunque históricamente es anterior al de Incompletitud, el Teorema de Completitud de Gödel es casi contemporáneo, y se puede leer como una “solución” al problema que plantea el Teorema de Incompletitud¹.

[Teorema de Completitud de Gödel - versión 1] Dada una teoría T y una sentencia φ del lenguaje de T , φ es un T -teorema si y solo si φ vale en todos los modelos de T .

$$T \vdash \varphi \iff T \models \varphi.$$

¹Ojo: esta no es la visión más usual de estos teoremas - nuestro libro **Lenguaje, Teorías y Modelos** (Jouko Väänänen, Andrés Villaveces - Eudeba 2022) sigue este camino.

Muchos mundos posibles

Una posible lectura de los dos teoremas es la siguiente: insistir en evaluar las sentencias en “un solo mundo” es necesariamente restrictivo. Aunque la teoría *PA* se puede ver como un instrumento para analizar el modelo estándar $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$, si uno pretende tener una equivalencia entre la sintaxis y la semántica está obligado a mirar todos los modelos posibles de la aritmética, en una especie de reivindicación tardía de las ideas de Leibniz.

Muchos mundos posibles

Una posible lectura de los dos teoremas es la siguiente: insistir en evaluar las sentencias en “un solo mundo” es necesariamente restrictivo. Aunque la teoría *PA* se puede ver como un instrumento para analizar el modelo estándar ($\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <$), si uno pretende tener una equivalencia entre la sintaxis y la semántica está obligado a mirar todos los modelos posibles de la aritmética, en una especie de reivindicación tardía de las ideas de Leibniz.

Solo mirando simultáneamente muchos mundos se atrapa la teoría - restringirse a un **ÚNICO** mundo necesariamente da incompletitud.

Muchos mundos posibles



Paisaje, Irma Laukkanen

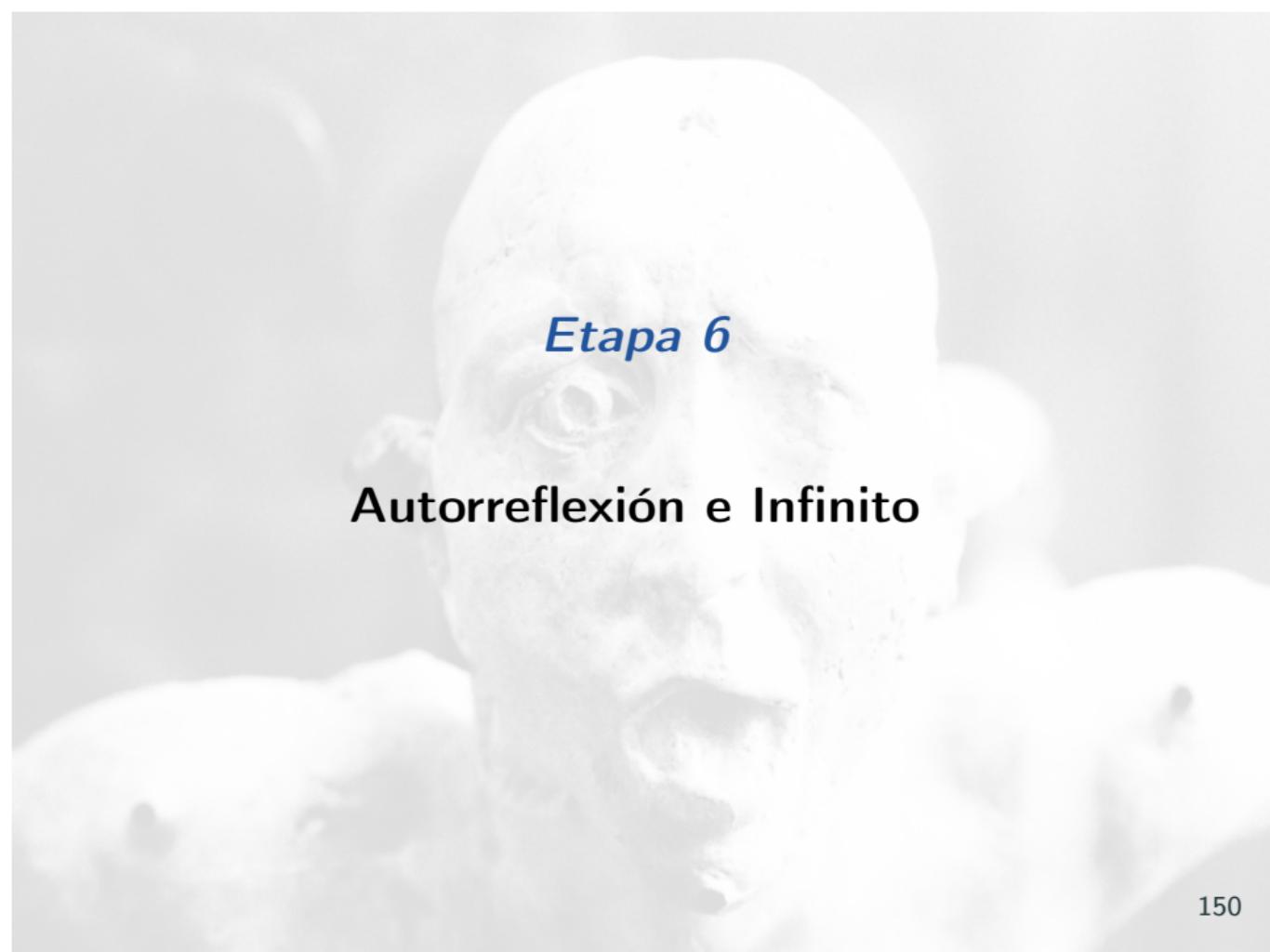
Completitud: ¿terapéutica?

El teorema de Completitud en cierto sentido “subsana” problemas que señala el teorema de Incompletitud. El camino entonces es más bien

Completitud: ¿terapéutica?

El teorema de Completitud en cierto sentido “subsana” problemas que señala el teorema de Incompletitud. El camino entonces es más bien

HILBert → INCompl. Gödel → COMPL. Gödel



Etapa 6

Autorreflexión e Infinito

Car ce que nous croyons notre amour, notre jalousie, n'est pas une même passion, continue, indivisible. Ils se composent d'une infinité d'amours successifs, de jalousies différentes et qui sont éphémères, mais par leur multitude ininterrompue donnent l'impression de la continuité, l'illusion de l'unité. La vie de l'amour de Swann, la fidélité de sa jalousie, étaient faites de la mort, de l'infidélité, d'innombrables désirs, d'innombrables doutes...

Proust - Un amour de Swann

¿Imposible de controlar?



- Proust, al describir la lujuria, los celos, la sensación de pérdida, de Swann ... usa metáforas del infinito.

¿Imposible de controlar?



- Proust, al describir la lujuria, los celos, la sensación de pérdida, de Swann ... usa metáforas del infinito.
- Ola incontenible de lujuria, de celos, de amor no reciprocado...

¿Imposible de controlar?



- Proust, al describir la lujuria, los celos, la sensación de pérdida, de Swann ... usa metáforas del infinito.
- Ola incontenible de lujuria, de celos, de amor no reciprocado...
- El infinito irrumppe en la vida humana tan fuera de control como la descripción proustiana del amor y los celos en Swann.

Emerge, no suavemente / erupción

El infinito se abre camino - a
pesar de nosotros

De-FINI-r el In-FINI-to?

Una tarea natural, tal vez ingenua: definir el infinito.

La entrada del diccionario Glossa para finito es

De-FINI-r el In-FINI-to?

Una tarea natural, tal vez ingenua: definir el infinito.

La entrada del diccionario Glossa para finito es

- borde, frontera, y por lo tanto territorio, tierra, país encerrado dentro de fronteras

De-FINI-r el In-FINI-to?

Una tarea natural, tal vez ingenua: definir el infinito.

La entrada del diccionario Glossa para finito es

- borde, frontera, y por lo tanto territorio, tierra, país encerrado dentro de fronteras
- un límite

De-FINI-r el In-FINI-to?

Una tarea natural, tal vez ingenua: definir el infinito.

La entrada del diccionario Glossa para finito es

- borde, frontera, y por lo tanto territorio, tierra, país encerrado dentro de fronteras
- un límite
- un fin, un propósito, un objetivo

¿Negación o énfasis?

Definición	Infinito
Énfasis en Límites	Negación de Límites

Otra manera de empezar



Definición de Infinito?

Otra manera de empezar



Definición de Infinito - Mejor: examinar, auscultar el infinito.

No es coincidencia: está al inicio de la matemática, de la filosofía y de la estética.

Así, Jan Patočka:

... los griegos ... no sólo fueron los primeros en descubrir el formato del inquirir deductivo sistemático. También fueron los primeros que no tomar el mundo como algo dado...

*fueron los primeros que se preguntaron explícitamente por el todo que lo incluye todo, también a nosotros, y confrontan por consiguiente la maravilla sencilla de todas las maravillas: que todo esto es y que el ser de esta **totalidad** no es algo obvio como las particularidades de la vida...*





... Nuestra relación con esa maravilla solo se puede comparar con aquellas relaciones en que pasamos de un modo acostumbrado a otro modo, distinto, de vida; a la transición de un sueño al descubrimiento que todo había sido distinto, a sospechas de repente levantadas por algo que hasta ahora no nos había preocupado: una extrañeza, una maravilla, un terror, el thauma, thaumazein, del cual, nos dice Platón, surge la sabiduría.

J. Patočka - Introd. a la Fenomenología de Husserl

Una pregunta difícil

¿Quién eres?



Primera respuesta: Éxodo 3:14 (a Moisés):

Primera respuesta: Éxodo 3:14 (a Moisés):

אהיה אשר אהיה ...

Primera respuesta: Éxodo 3:14 (a Moisés):

אהיה אשר אהיה
...
...
...
...
...

O sea, SUM qui SUM, o...

Indefinibilidad

Autorreferencia Primordial

“No puedo ser definido/nombrado - como nombrarías a tu hermano Aarón”

Indefinibilidad

Autorreferencia Primordial

"No puedo ser definido/nombrado - como nombrarías a tu hermano Aarón"

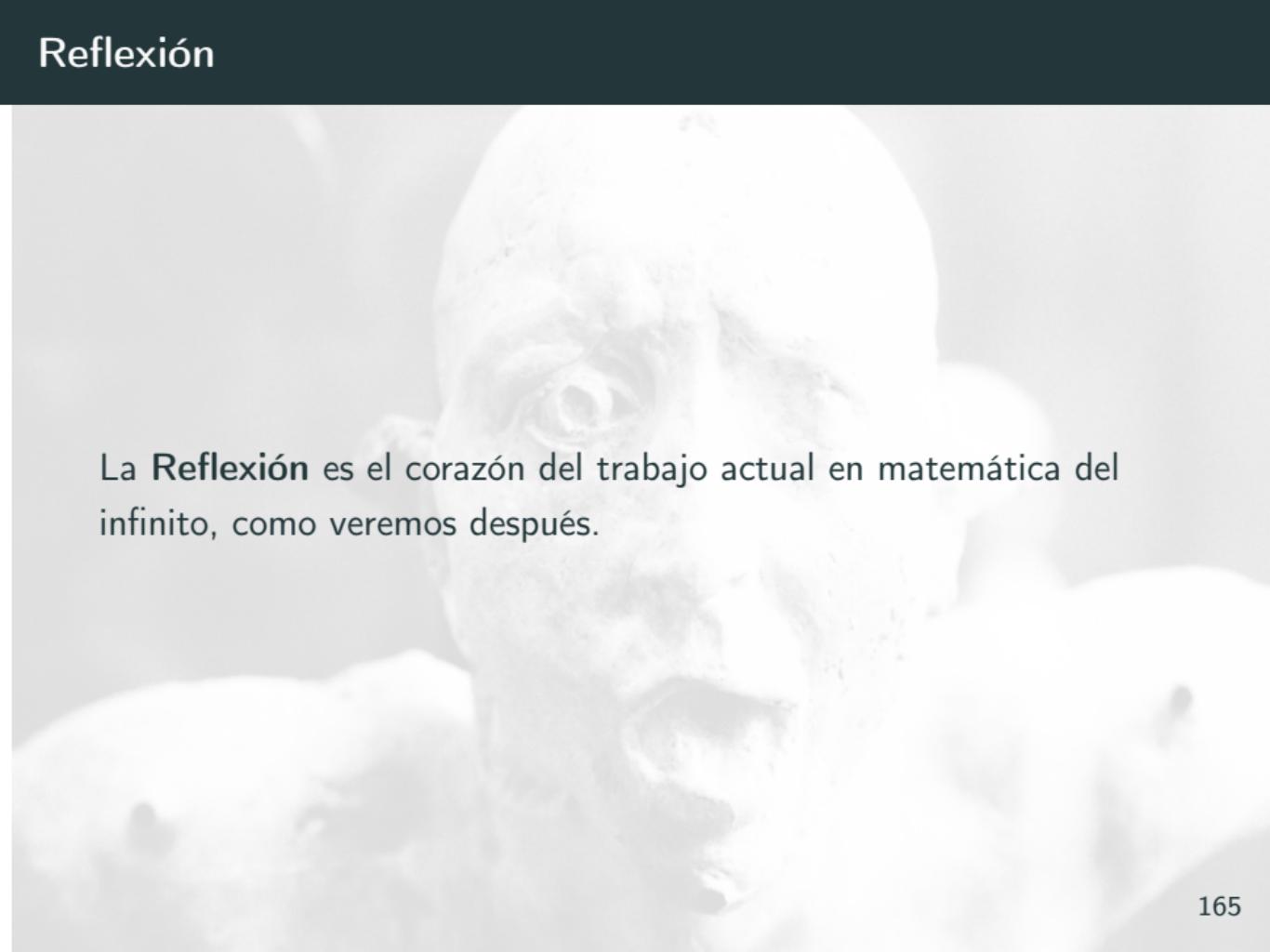
Reflejo en sí mismo











La **Reflexión** es el corazón del trabajo actual en matemática del infinito, como veremos después.

Otra respuesta (a la misma pregunta)

... él venció a un ... monstruo que mató a sus huéspedes y los devoró crudos... a él el viajero dijo estas famosas líneas:

"*mi nombre es outis. Mi padre y mi madre me llaman outis, al igual que todos mis compañeros*"

... el anfitrión gigante bebió, cayó dormido pronto después de emitir su promesa– o su amenaza. Entonces los hombres, unidos por una causa común, extrajeron el ojo de su captor con una estaca ardiente... el anfitrión antes indomable pidió ayuda gritando. Sus vecinos, alarmados, preguntaron quién...

Outis, en boca del cíclope se convierte en oú tis, "no persona",
NADIE

D. Heller-Roazen - No One's Ways - An Essay on Infinity Naming

La negación como generadora de infinitud

¡Aquí no es tanto la auto-referencia como la negación!

Lo no-humano, lo no-acotado, lo no-restringido — infinito.

Odiseo salva su vida convirtiendo No-Persona en la negación de la especificación. Es una forma muy radical.



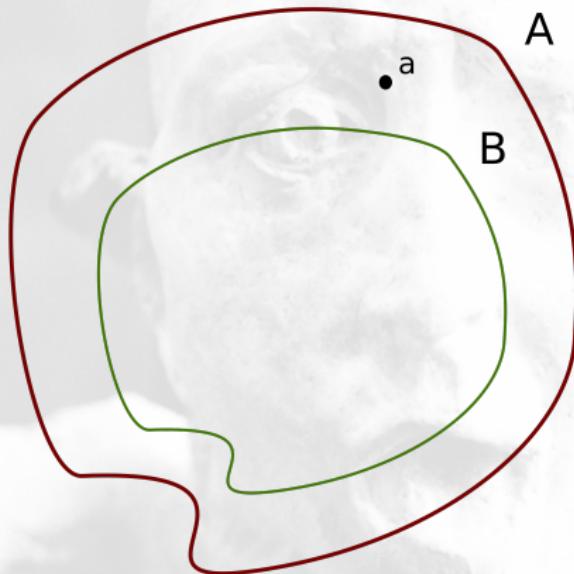
El punto clave en esta etapa de nuestro camino es que podemos leer la historia de muchos aspectos del infinito, la historia de su emergencia/incepción, como un desarrollo de aquellas dos respuestas diferentes a la misma pregunta.

La reflexión (auto-referencia) y la negación de la especificación.

La lógica matemática de los últimos 125 años ha sido capaz de sacarle mucho jugo a estas dos respuestas.

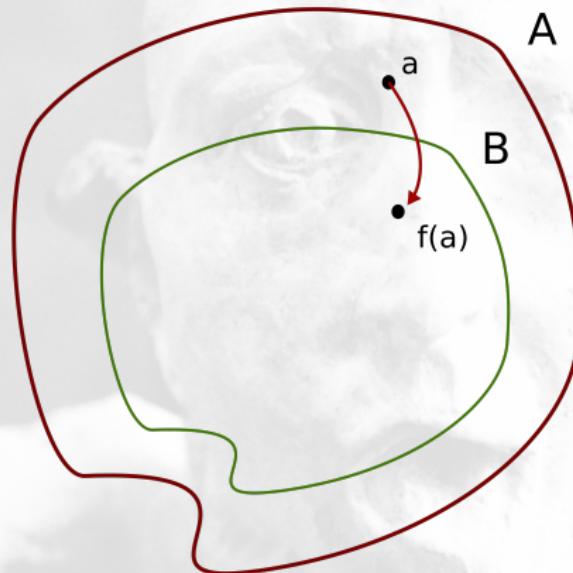
Un diagrama básico de reflexión

$f:A \rightarrow B$ "bijective": different points go to different points, every point is mapped to some point, every point is "a target"



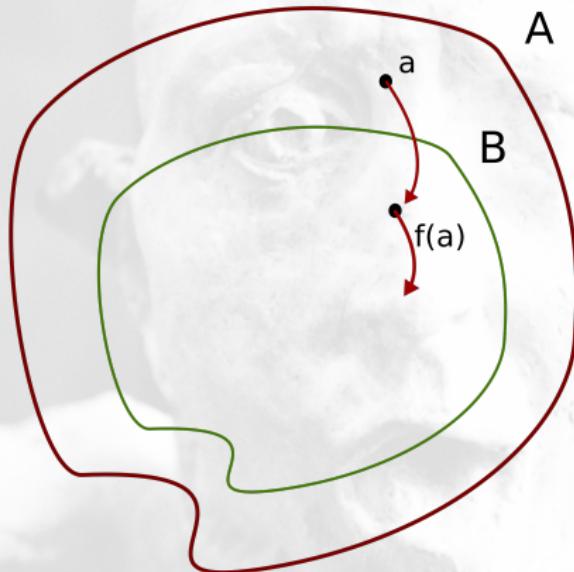
Un diagrama básico de reflexión

$f:A \rightarrow B$ "bijective": different points go to different points, every point is mapped to some point, every point is "a target"



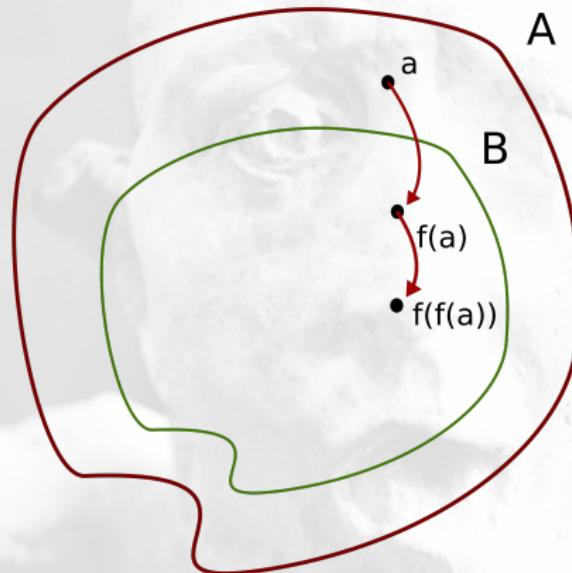
Un diagrama básico de reflexión

$f:A \rightarrow B$ "bijective": different points go to different points, every point is mapped to some point, every point is "a target"



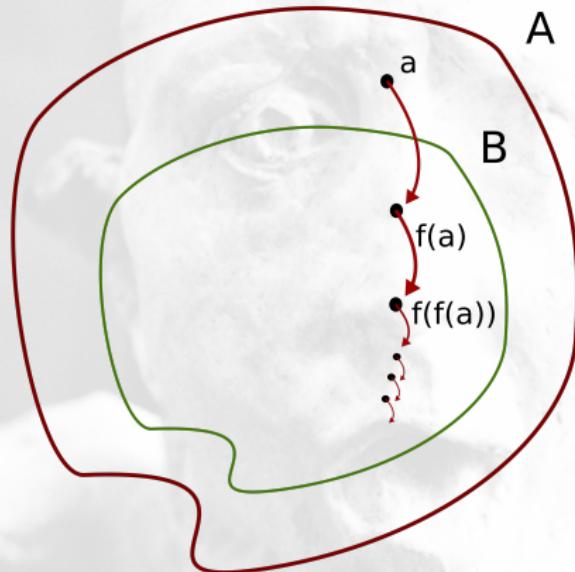
Un diagrama básico de reflexión

$f:A \rightarrow B$ "bijective": different points go to different points, every point is mapped to some point, every point is "a target"



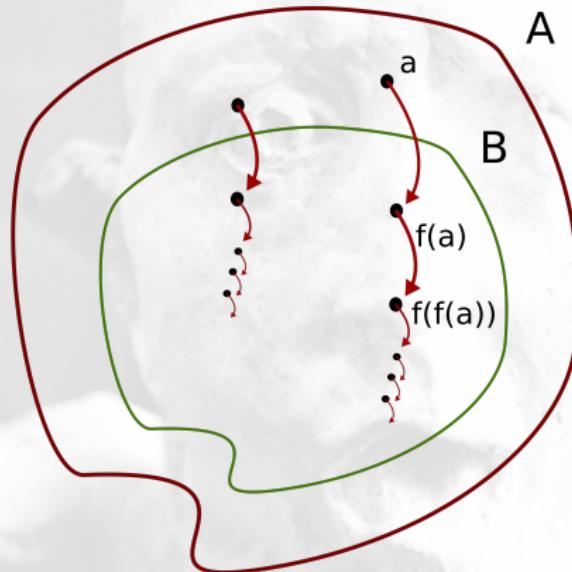
Un diagrama básico de reflexión

$f:A \rightarrow B$ "bijective": different points go to different points, every point is mapped to some point, every point is "a target"



Un diagrama básico de reflexión

$f:A \rightarrow B$ "bijective": different points go to different points, every point is mapped to some point, every point is "a target"



¿Definición inicial?

Esta puede ser vista como nuestra primera definición del infinito
(¿actual? ¿potencial?)

Desde el final del siglo XIX la matemática no solo ha tomado este como el primer paso posible para adentrarse en el infinito: junto con otros axiomas de la teoría de conjuntos ha constuido una teoría de no solo uno sino MUCHOS infinitos distintos.

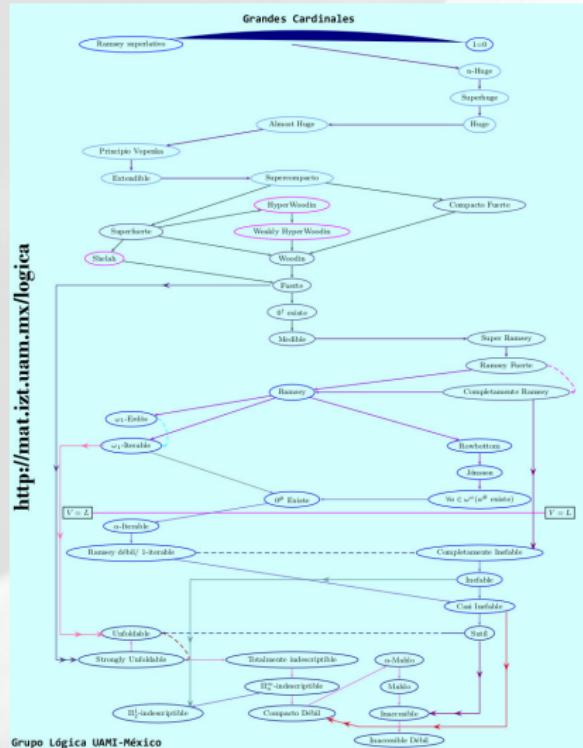
Cantor, hace 150 años: el infinito de la recta real debe ser estrictamente mayor que el primer infinito (del conteo, de los naturales):

Desde el final del siglo XIX la matemática no solo ha tomado este como el primer paso posible para adentrarse en el infinito: junto con otros axiomas de la teoría de conjuntos ha constuido una teoría de no solo uno sino MUCHOS infinitos distintos.

Cantor, hace 150 años: el infinito de la recta real debe ser estrictamente mayor que el primer infinito (del conteo, de los naturales):

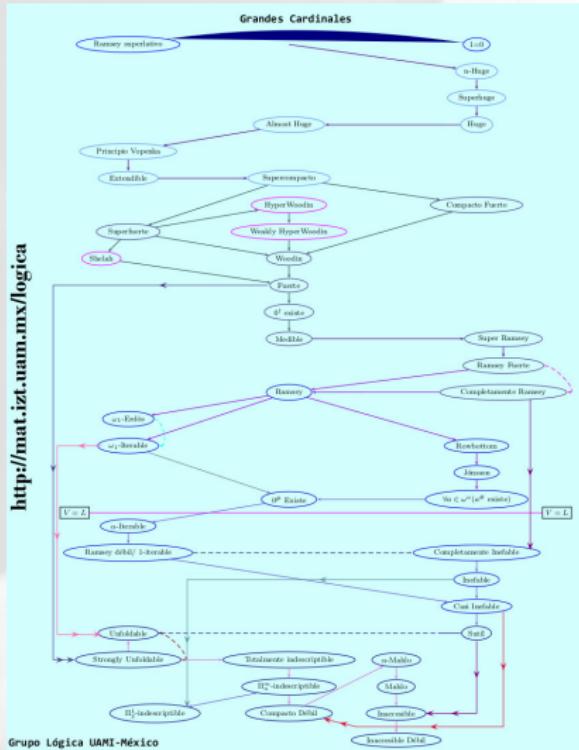
$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

La “catedral” de los grandes cardinales



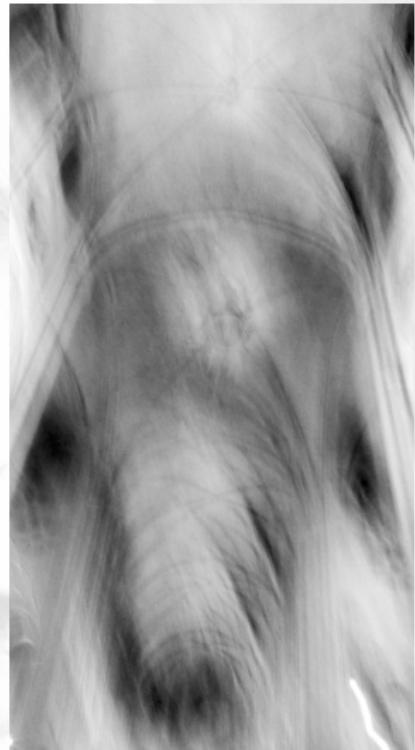
La “catedral” de los grandes cardinales

<http://mat.izt.uam.mx/logica>



Grupo Lógica UAMI-Méjico

Los infinitos matemáticos / gradación de la reflexión



Grados de
reflexión /
simetría del
universo





Nos devolvemos / Perspectiva /
Puntos de vista

Florensky - perspectiva generalizada

Pavel Florensky

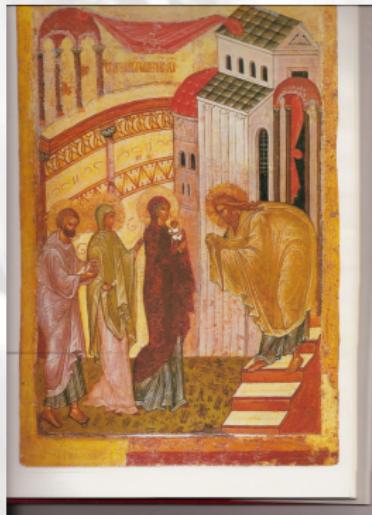
- Florensky estudió matemáticas en Moscú en la década de 1910, y luego se convirtió en místico religioso... ¡en la URSS!



Florensky - perspectiva generalizada

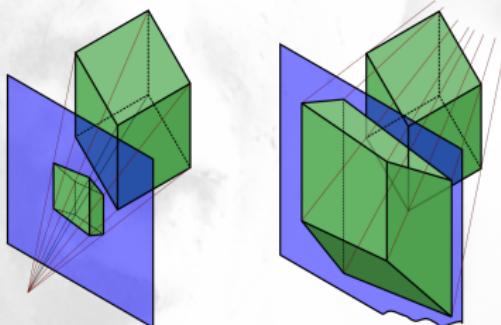
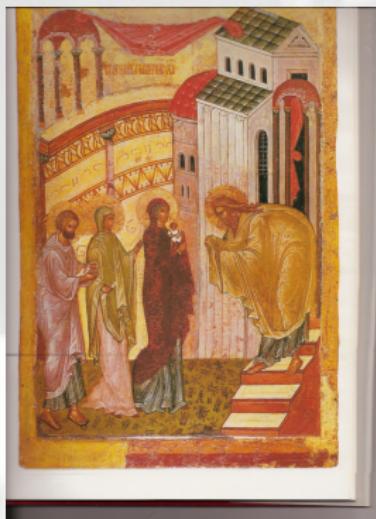
Pavel Florensky

- Florensky estudió matemáticas en Moscú en la década de 1910, y luego se convirtió en místico religioso... jen la URSS!
- El infinito, Cantor y la representación del mundo.



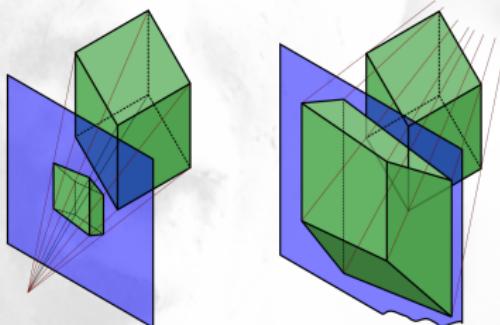
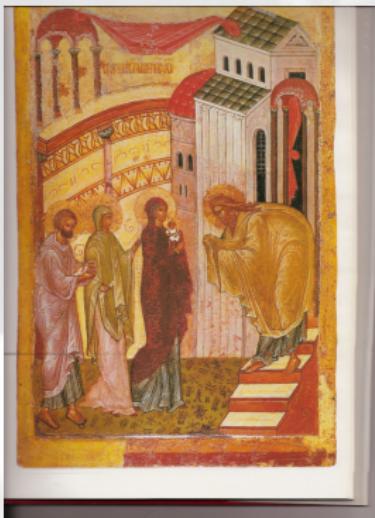
Perspectiva Invertida - Íconos

- DE una descripción de la perspectiva invertida en íconos

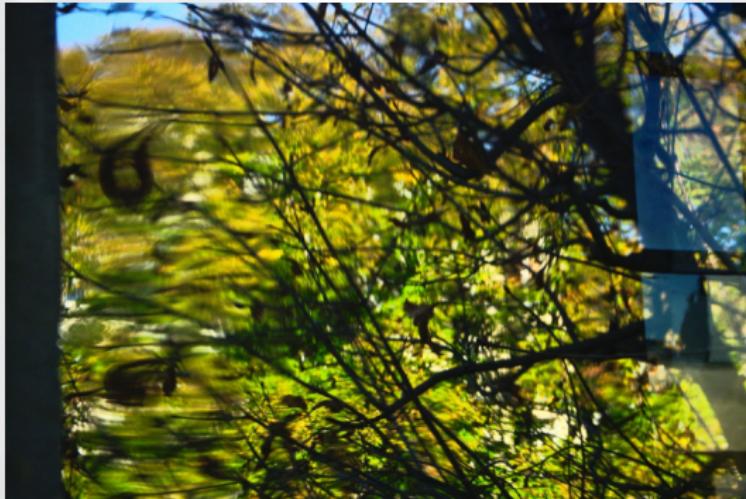


Perspectiva Invertida - Íconos

- DE una descripción de la perspectiva invertida en íconos
- A una manera completamente LIBRE de entender la perspectiva - ja partir de cualquier biyección entre el espacio tridimensional y el plano!



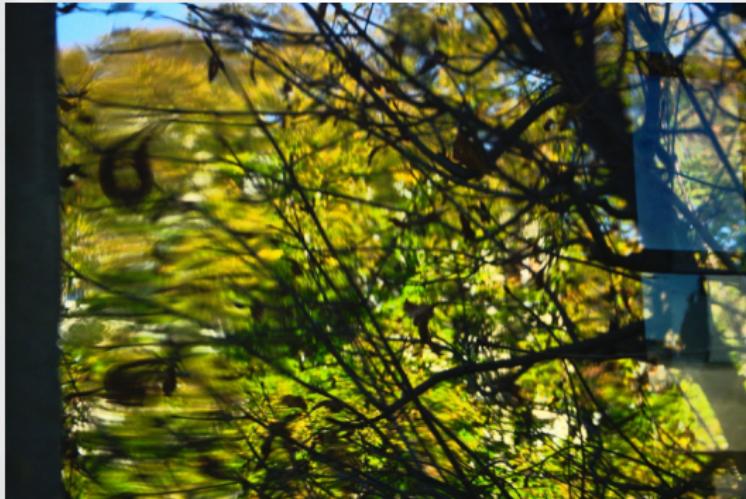
Perspectiva(s) libre(s)



La existencia de biyecciones y proyecciones entre el espacio tridimensional y el plano hace posible la representación del mundo a través de la perspectiva.

- Perspectiva en Grecia y en Renacimiento (muchos siglos)

Perspectiva(s) libre(s)



La existencia de biyecciones y proyecciones entre el espacio tridimensional y el plano hace posible la representación del mundo a través de la perspectiva.

- Perspectiva en Grecia y en Renacimiento (muchos siglos)
- Perspectiva en íconos rusos

Perspectiva(s) libre(s)



La existencia de biyecciones y proyecciones entre el espacio tridimensional y el plano hace posible la representación del mundo a través de la perspectiva.

- Perspectiva en Grecia y en Renacimiento (muchos siglos)
- Perspectiva en íconos rusos
- Perspectiva Libre: **¿Pérdida de la forma?**

Otras perspectivas: Regina Silveira (¡Brasil!)



Fin (por hoy...)

¡Mil gracias por su atención!