Lógica y geometría/física:

un vaivén natural

Andrés VILLAVECES NIÑO
Universidad Nacional de Colombia - Bogotá

26° Encuentro de Geometría y Aplicaciones

Universidad Pedagógica Nacional - Bogotá - Junio de 2024

El camino

Lógica y geometría: el problema del espacio

Lógicas para procesos estocásticos, física, etc.

Tres décadas de AECs

Algunas interacciones recientes / geometría y teoría de modelos

Etapa 1

Lógica y geometría: el problema del espacio

Valéry, sobre el espacio y la lógica

Le raisonnement peut être considéré comme propiétés de l'espace, aperçues dans le temps.
L'exploration successive du permanent, comme une rotation revenant sur elle-même.
L'exploration d'un corps solide par un animal qui consiste à établir une relation entre une continuité d'attention, une suite discrète de sensations, à construire enfin une sorte d'idée totale, indépendante de chaque démarche faite, — à construire en somme une unité nouvelle capable d'une infinité de constatations, au moyen d'un n[ombre] fini de touchers..

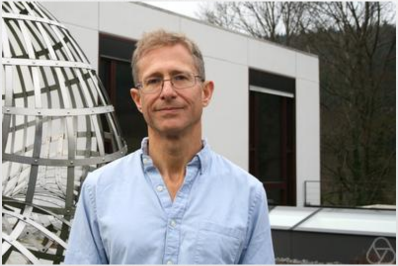
Paul Valéry - Cahiers

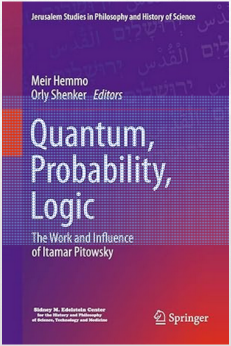
Traducción:

El **razonamiento** puede ser considerado como **propiedades del espacio**, percibidas en el tiempo.
La **exploración** sucesiva de lo **permanente**, como una rotación que volvería sobre sí misma.
La exploración de un **cuerpo sólido** por un animal que consiste en establecer una **relación** entre una continuidad de atención, una sucesión discreta de sensaciones; finalmente, en construir una especie de idea total, independiente de cada paso logrado, — en construir en definitiva una **nueva unidad** capaz de una **infinidad** de constataciones, por medio de una cantidad **finita** de tactos. . .

Hrushovski: un diálogo en estilo Galileo

En 2015 el lógico matemático Ehud Hrushovski escribió un artículo en homenaje a Itamar Pitowsky, físico israelí que se preocupó por cuestiones fundamentales de la cuántica, un camino que lo llevó a indagar en conexiones con la lógica: teoría de conjuntos (Axioma de Martin, Hipótesis del Continuo, etc.) y teoría de modelos.





El diálogo imaginario entre un **lógico**, un **filósofo de la ciencia** y una (muy brillante) **estudiante de doctorado** sucede en el campus de la Universidad Hebrea de Jerusalén, y es clara alusión al diálogo de Galileo que inaugura muchos temas que nos interesan en matemáticas y en física.

El artículo se llama **On the Descriptive Power of Probability Logic**, y explora muchos temas que nos atañen hoy.

Algunos temas del diálogo de Hrushovski

- El poder expresivo de la lógica de primer orden surge al pasar a **dos** variables. En una variable, la lógica es descriptiva (Aristóteles); al usar al menos dos variables, y **cuantificación**, la lógica se vuelve predictiva (ejemplo: Postulado de las Paralelas, definición ε/δ de la **continuidad**). La lógica puede entonces abrir conceptos nuevos.
- La lógica de la probabilidad (etapa 1 - veremos después que en Colombia se ayudó a formar una etapa 2) es muy expresiva pero **carece de poder predictivo**, según el profesor de lógica del diálogo imaginario.

Algunos temas del diálogo de Hrushovski

- Hay un énfasis enorme en el rol de lo unario y su diferencia con lo monádico: lo monádico requiere en teoría de modelos moderna lo que Hrushovski llama *corrección relativista galileana:* marco de referencia. En teoría de modelos los llamamos «eliminación de imaginarios». Todo el énfasis desde Galois depende de ésto.
- La lógica **en el fondo** más que preocuparse por problemas «lingüísticos» (qué captura, qué no captura, el lenguaje) está preocupada por **el problema del espacio**. Es nuestra manera (desde la negación $\neg$ primigenia) de abordar el problema del espacio. La dualidad con la topología, mucho más tardía, no es más que una expresión de eso.

Etapa 2

Lógicas para procesos estocásticos, física, etc.

Lógica de la probabilidad, lógica continua

- Con Chang, años 60: **lógica continua**. Valores de verdad en $[0, 1]$, conectivos cualquier función continua $c : [0, 1]^n \to [0, 1]$, cuantificadores $\sup, \inf$. Lógica adecuada para aproximación, análisis funcional, etc.
- Años 80: **lógica de la probabilidad**. Permite cuantificar el valor esperado de una variable: 80 % de colombianos tienen información adecuada sobre su sistema de salud. . .

Lógica de la probabilidad, lógica continua

- Con Chang, años 60: **lógica continua**. Valores de verdad en $[0,1]$, conectivos cualquier función continua $c : [0,1]^n \to [0,1]$, cuantificadores $\sup, \text{ínf}$. Lógica adecuada para aproximación, análisis funcional, etc.
- Años 80: **lógica de la probabilidad**. Permite cuantificar el valor esperado de una variable: 80 % de colombianos tienen información adecuada sobre su sistema de salud. . .

En el siglo XXI, la lógica continua tuvo una explosión modelo-teórica.

Fajardo-Keisler: teoría de modelos para procesos estocásticos

Entre la época de su tesis de doctorado con Keisler (1979-1984) y su salida de la matemática hacia la política (hacia 2000), Fajardo realizó múltiples trabajos, casi todos con Keisler o con estudiantes de maestría, en **teoría de modelos de procesos estocásticos**: una extensión de la lógica de la probabilidad de Keisler a sistemas dinámicos, donde el valor esperado E y la integral sobre un espacio de medida $\int \alpha dt$ son cuantificadores. Keisler y Fajardo capturan muchas nociones de probabilidad y procesos estocásticos usando la **saturación** de los modelos (noción modelo-teórica que permite manejar la existencia de soluciones con holgura).

Fajardo-Keisler: teoría de modelos para procesos estocásticos

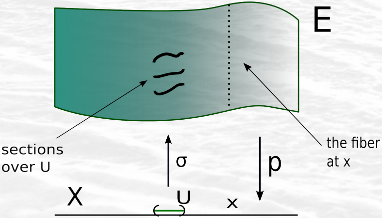
Aunque el poder expresivo aumentó, no hubo desarrollos modelo-teóricos entre 2000 y la actualidad.

Entre la época de su tesis de doctorado con Keisler (1979-1984) y su salida de la matemática hacia la política (hacia 2000), Fajardo realizó múltiples trabajos, casi todos con Keisler o con estudiantes de maestría, en **teoría de modelos de procesos estocásticos**: una extensión de la lógica de la probabilidad de Keisler a sistemas dinámicos, donde el valor esperado E y la integral sobre un espacio de medida $\int \alpha dt$ son cuantificadores. Keisler y Fajardo capturan muchas nociones de probabilidad y procesos estocásticos usando la **saturación** de los modelos (noción modelo-teórica que permite manejar la existencia de soluciones con holgura).

Lógica de haces

- Orígenes remotos en trabajos de Macintyre y Comer (c. 1970).
- Xavier Caicedo expande sus modelos sobre haces a espacios topológicos arbitrarios (años 80), y demuestra un Teorema del Modelo Genérico, que permite calcular un 'límite modelo-teórico de un haz de estructuras'; da algunas aplicaciones a teoría de modelos.
- Con Ochoa, extendimos esos resultados a lógica continua, para lograr aplicaciones a cuántica.

Lógica de haces



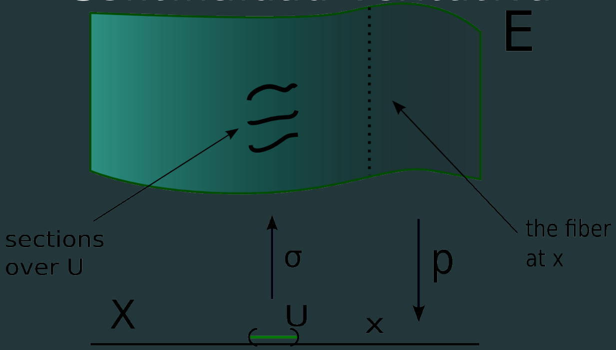
Horizontal: topología.

Vertical: lógica

- Orígenes remotos en trabajos de Macintyre y Comer (c. 1970).
- Xavier Caicedo expande sus modelos sobre haces a espacios topológicos arbitrarios (años 80), y demuestra un Teorema del Modelo Genérico, que permite calcular un 'límite modelo-teórico de un haz de estructuras'; da algunas aplicaciones a teoría de modelos.
- Con Ochoa, extendimos esos resultados a lógica continua, para lograr aplicaciones a cuántica.

El paradigma de la lógica de haces:

Continuidad veritativa



Variantes (Cano, Zambrano): diferenciabilidad veritativa en geometría diferencial (conexiones). . .

Lógicas para la física

En trabajos con mi estudiante de doctorado, el físico Gustavo Cipagauta, estamos continuando dos de las líneas anteriores:

- Teoría de modelos estocásticos de Fajardo-Keisler, mezclada con
- Estabilidad en lógica continua.

Cipagauta está adaptando la «interpretación» estocástica de la cuántica a la luz de estas variantes de teoría de modelos.

En su conferencia del Seminario **Mundo/Lógica/Modelos** de la Universidad Nacional están disponibles sus primeros resultados dentro del marco de la tesis.

Etapa 3

Tres décadas de AECs

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),
- Clases de **amalgamation** (Fraïssé, Jónsson)

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),
- Clases de **amalgamation** (Fraïssé, Jónsson)
- (<u>Clases elementales abstractas</u> [AECs] - la descripción muy rápida y cruda (pero muy atinada) de Baldwin en un email reciente al geómetra A. Libgober:

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),
- Clases de **amalgamation** (Fraïssé, Jónsson)
- (Clases elementales abstractas [AECs] - la descripción muy rápida y cruda (pero muy atinada) de Baldwin en un email reciente al geómetra A. Libgober:

  "Anatoly: For what's worth AEC are a style of model theory that approaches mathematics is a more familiar fashion. Instead of syntax and semantic, one investigates class of structures that satisfy certain properties (like closure under limits) - indeed there is a purely category theory definition.)"

Las <u>clases elementales abstractas</u> son clases de modelos suavemente cerradas por límites inductivos, generativas y acumulativas/coherentes.

Clases elementales abstractas

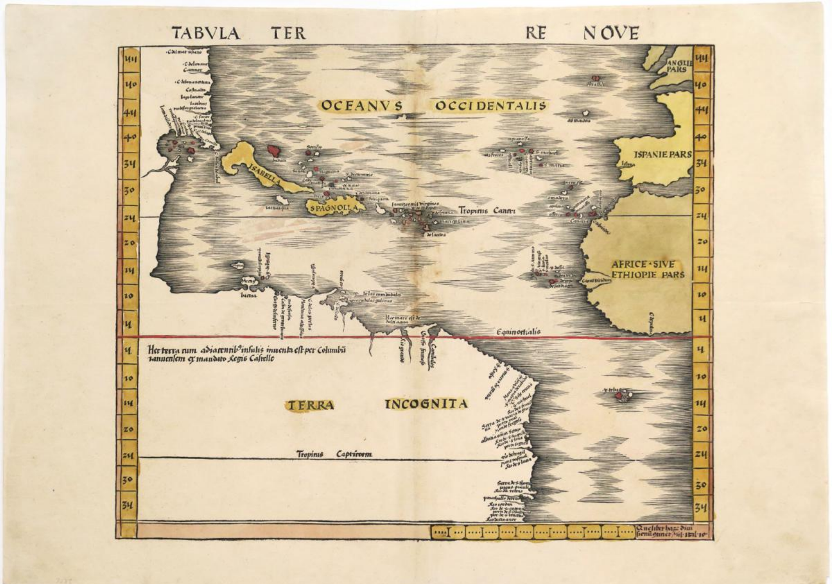
Las clases elementales abstractas son clases de modelos suavemente cerradas por límites inductivos, generativas y acumulativas/coherentes.

- Además de la clase de modelos $\mathcal{K}$, hay una noción de inmersión fuerte $\prec_{\mathcal{K}}$, que ordena la clase $\mathcal{K}$ y refina la noción algebraica de extensión,
- cerrada bajo límites directos,
- dotada de un esquema efectiva de generación de submodelos,
- con comportamiento acumulativo/coherente con respecto a la existencia de «soluciones».

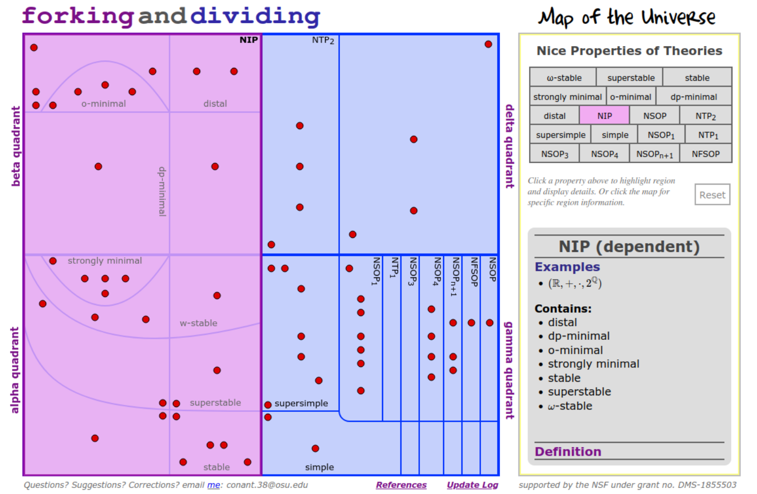
Siglo XX: inicio lento

- Trabajos de Shelah en la década de 1980, muy abstractos (pero como se vería a posteriori, muy atinados): inicio de estabilidad, casi siempre con hipótesis conjuntísticas muy fuertes
- Makkai-Shelah: estudiaron la categoricidad (y la saturación) bajo hipótesis fuertes de grandes cardinales
- Luego se fueron rebajando estas hipótesis, con resultados más débiles pero gradualmente mejor adaptados a aplicaciones (años 90: Kolman, V., Shelah, Grossberg, Lessmann),
- En esa época, mapa aún muy desdibujado por fuera de primer orden...

Terra Incognita enorme hasta el siglo XXI

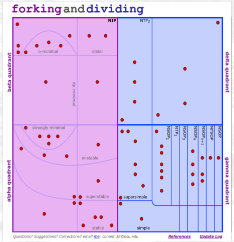


El «mapa oficial» en primer orden

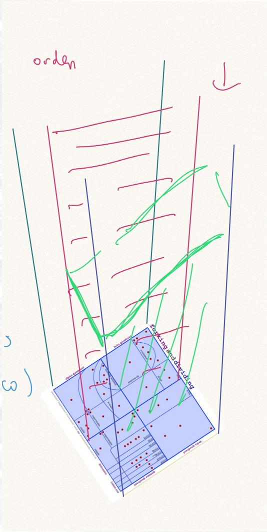


Mapa de Conant - forkinganddividing.com

Y las conquistas de las últimas tres décadas, por fuera. . .



Realmente agregan dimensión adicional al mapa de Conant



Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstability from categoricity (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extracting structural features from categoricity,

Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstability from categoricity (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extracting structural features from categoricity,
- Canonicity of Forking in Stable AECs: Boney-Grossberg-Vasey 2016,

Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

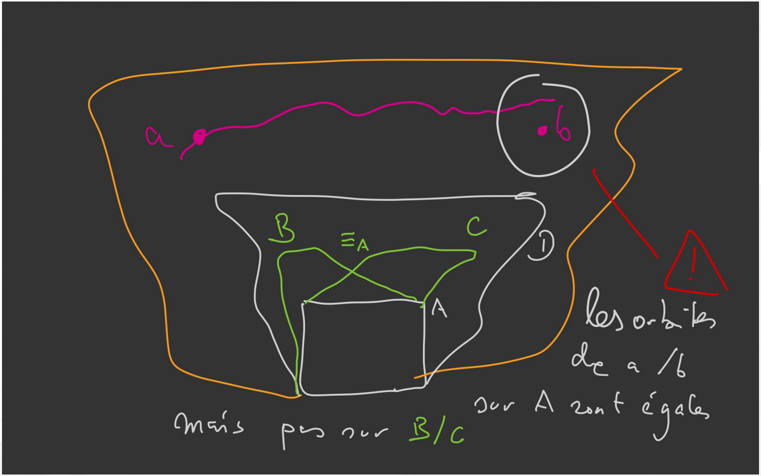
- Superstability from categoricity (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extracting structural features from categoricity,
- Canonicity of Forking in Stable AECs: Boney-Grossberg-Vasey 2016,
- Superstability and Limit Models - the role of splitting (Grossberg-VanDieren-V. 2010, Vasey, Boney, VanDieren, later),

Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstability from categoricity (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extracting structural features from categoricity,
- Canonicity of Forking in Stable AECs: Boney-Grossberg-Vasey 2016,
- Superstability and Limit Models - the role of splitting (Grossberg-VanDieren-V. 2010, Vasey, Boney, VanDieren, later),
- Simple AECs started (Hirvonen-Hyttinen under strong hypotheses, much later studied under tameness hypotheses by Grossberg and Mazari [2020])

Nociones de independencia (splitting/splintering) en AECs



El rol de Shelah

Saharon Shelah (en 2016)

El rol de Shelah es sumamente interesante en esta historia:

- No tiene directamente motivaciones geométricas.
- Sin embargo, sus trabajos en Categoricidad, Estabilidad, etc. desde 1970 han cambiado no solo la faz de la teoría de modelos, sino que se proyectan como generalizaciones muy fuertes de las teorías de Galois más extremas. En la parte 4 veremos algo de lo que está pasando.
- Sus motivaciones parecen ser estructurales/combinatorias. Pero da en el corazón de problemáticas geométrico-aritméticas de maneras muy extrañas.

Etapa 4

Algunas interacciones recientes / geometría y teoría de modelos

Nuevo siglo / nuevas conexiones matemáticas

El nuevo siglo se abrió con conexiones nuevas y sorprendentes entre la teoría de modelos de las AEC y

- geometría aritmética/algebraica

Nuevo siglo / nuevas conexiones matemáticas

El nuevo siglo se abrió con conexiones nuevas y sorprendentes entre la teoría de modelos de las AEC y

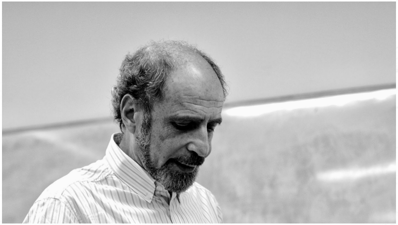
- geometría aritmética/algebraica
- módulos

Nuevo siglo / nuevas conexiones matemáticas

El nuevo siglo se abrió con conexiones nuevas y sorprendentes entre la teoría de modelos de las AEC y

- geometría aritmética/algebraica
- módulos
- posibles conexiones con la simetría espejo de la física y Langlands

Zilber, Harris (en la UNAL)



Visión de Zilber

Categoricidad/ Estabilidad en **primer orden**	Geometría *algebraica*
?	Teoría analítica (compleja)
Categoricidad/ Estabilidad en **AECs**	?
Categoricidad en lenguajes $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}(Q)$ o variantes	Teoría analítica *general*

Nuevas conexiones en el siglo XXI

- 2001 / la escuela de Zilber: geometría aritmética bajo el lente de las AECs (axiomatizadas en $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ y bajo hipótesis de «cuasiminimalidad»: **cubiertas** pseudo-exponenciales, funciones modulares (la más famosa es la función j

$$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C},$$

  que transfiere la estructura de acción de grupo $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ (de grupos fuchsianos, e.g. $\Gamma = SL_2(\mathbb{Q})$) sobre una estructura H (lógicamente equivalente) al semiplano superior $\mathbb{H}$, a la estructura de cuerpo de un modelo de ACF_0 como $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$),
- 2012-2023: La teoría de modelos de cubiertas analíticas. . .

Desde 2001: teoría de modelos de cubiertas

Estos trabajos se han desarrollado en un contexto algebraico/combinatorio dado por

pregeometrías cuasiminimales.

Desde 2001: teoría de modelos de cubiertas

Estos trabajos se han desarrollado en un contexto algebraico/combinatorio dado por

pregeometrías cuasiminimales.

Una noción abstracta de clausura (que generaliza la acl modelo-teórica y algebraica) $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que satisface monotonía, intercambio, idempotencia y en general permite dar definiciones de dimensión, independencia, objetos generados.

Desde 2001: teoría de modelos de cubiertas

Estos trabajos se han desarrollado en un contexto algebraico/combinatorio dado por

pregeometrías cuasiminimales.

Una noción abstracta de clausura (que generaliza la acl modelo-teórica y algebraica) $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que satisface monotonía, intercambio, idempotencia y en general permite dar definiciones de dimensión, independencia, objetos generados.

Las pregeometrías son básicamente matroides. . .

El camino desde la pseudoexponencial y la j (ver [BV23])

	topic	paper	method/context	section
1	Complex exponentiation	[Zil05b]	quasiminimality	§1
2	cov mult group	[Zil06]	quasiminimality	§1
3		[BZ11]	quasiminimality	
4	j-function	[Har14]	background	§4.1
5	Modular/Shimura Curves	[DH17]	quasiminimality	§4
6	Modular/Shimura Curves	[DZ22b]	quasiminimality	
7	finite Morley rank groups	[BGH14]	fmr & notop	§5.1
8	Abelian Varieties	[BHP20]	fmr & notop / qm	§5.3
9	Shimura varieties	[Ete22]	notop	§6
10	Smooth varieties	[Zil22]	o-quasiminimality	§8

El ejemplo prototipo es

$$\mathbb{C}_{\mathsf{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, exp)$$

el lenguaje infinitario $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}(Q)$ permite codificar teoría de números transcendentes (conjetura del período).

La estrucura de cubiertas

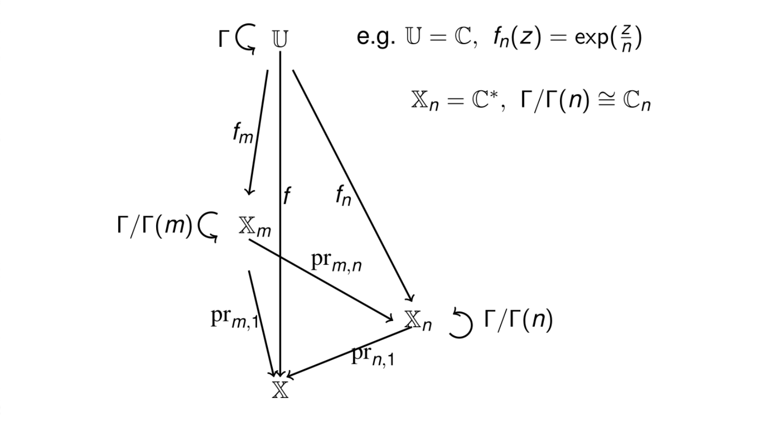
El ejemplo prototipo es

$$\mathbb{C}_{\mathsf{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, exp)$$

el lenguaje infinitario $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}(Q)$ permite codificar teoría de números transcendentes (conjetura del período).

Sin embargo, para estudiar **geometría algebraica compleja** de una variedad $\mathbb{X}$ hay que usar las cubiertas (más básicas, más generales) de subvariedades algebraicas de $\mathbb{X}^n$ (para todo n) que sean definibles

$$\mathbb{U} \to \mathbb{X}.$$



(Imagen tomada de conferencia de Zilber en Seminario Conexión de GALoiS en mayo de 2024)

La estructura de cubiertas (Zilber)

- Esta estructura tiene muchísima información sobre la **topología métrica** de $\mathbb{X}(\mathbb{C})$ y al mismo tiempo es **estable** (esto es, esencialmente, proviene de geometría algebraica),
- Sin la cubierta $\mathbb{U}$ solo tenemos la topología étale de $\mathbb{X}$; esto es, conocemos solo $\mathbb{X}$ módulo automorfismos abstractos de $\mathbb{C}$.

En ese sentido, postular la existencia de cubiertas no triviales es algo bastante fuerte (sobre $\mathbb{X}$).

Teorema(s) de Zilber y su escuela (siglo XXI): la teoría en la lógica infinitaria $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ en muchos casos (*exp*, j, $\mathfrak{p}$) es categórica en cardinales no contables.

Demostrar esto mezcla la teoría de AECs con teoremas aritméticos: versiones (teoremas) de la Conjetura de Mumford-Tate, extensiones de teorías de Galois y Kummer.

Lógica y geometría, de nuevo

Teorema(s) de Zilber y su escuela (siglo XXI): la teoría en la lógica infinitaria $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ en muchos casos (*exp*, j, $\mathfrak{p}$) es categórica en cardinales no contables.

Demostrar esto mezcla la teoría de AECs con teoremas aritméticos: versiones (teoremas) de la Conjetura de Mumford-Tate, extensiones de teorías de Galois y Kummer.

¡La **categoricidad** termina siendo equivalente a hechos profundos de geometría aritmética!

Se obtienen invariantes topológicos completos $\Sigma(\mathbb{X}_a)$ para variedades complejas (Shimura, abelianas) $\mathbb{X}_a$.

Nuevas posibilidades: el “Mirror Map program”

- Seminario **Conexión de GALoiS** (Universidad Nacional de Colombia, University of Illinois at Chicago)
- Alexander Cruz: observando analogías fuertes con otro enfoque modelo-teórico para las funciones tipo j (Freitag-Scanlon, Casale-Freitag-Nagloo y trabajos con Blázquez-Sanz (UNAL-Med)) que usan las **ecuaciones diferenciales** (Schwarzianas) y la regularidad de la acción de grupo asociada a j...

En su artículo Does model theory have something to say about mirror symmetry?, Cruz propone un programa para la simetría espejo de la física (QFT).

MM

Los mirror maps (con origen en las teorías de campos superconformes de la física) enlazan la geometría simpléctica con la geometría compleja, el **Lado A** con el **Lado B** de la geometría.

La simetría espejo predice que las variedades de Calabi-Yau están dadas siempre por pares $(V, \hat{V})$ entrelazadas por un **mirror map** que refleja simetrías tipo teoría de Hodge de V y de $\hat{V}$.

Más acerca del MM+MT-program

Observaciones (Cruz):

- La función j clásica es un mirror map (para curvas elípticas), que satisface la ecuación schwarziana clásica que fue central a un análisis modelo-teórico que usó la teoría DCF (teoría de Galois diferencial à la teoría de modelos).
- Las hipersuperficies en $\mathbb{CP}^3$ dadas por

$$X_s = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + s x_0 x_1 x_2 x_3$$

corresponden a simetría espejo para superficies K3. Un operador diferencial (que anula períodos) dado por

$$\Theta^3 - 8z(1+2\Theta)(1+4\Theta)(3-4\Theta), \text{ con } \Theta = z\frac{d}{dz}$$

termina dando un mirror map $z(q)$ con propiedades de modularidad.

Más acerca del MM+MT-program

- Cruz demostró que el mirror map $z(q)$ para superficies K3 tiene una teoría infinitaria $Th_{\omega_1,\omega}(z) + \mathrm{trdeg}(F) \geq \aleph_0$ con un único modelo módulo isomorfismo en cada cardinal.
- El rol de la modularidad parece mal entendido aún en muchas situaciones. Esto sugiere un enfoque modelo-teórico para **entender la modularidad.**
- Por último, conexiones con Langlands local (Harris) parecen sugerir la necesidad de entender cubiertas **meromorfas** modelo-teóricamente. Esto sugiere teorías de modelos distintas de las actuales (¿Lógica de haces y su teoría de modelos, à la Caicedo, mezclada con la teoría de Zilber y su escuela?)

Diálogo / Cierre (Una pregunta lógico-geométrica de Galileo)

SIMPLICIO: Aristóteles da cien pruebas de ***«el universo es finito, acotado y esférico»****.*

SALVIATI: Y todas éstas luego se redujeron a una sola, y luego a ninguna. Porque si no le concedo que el universo sea móvil, todas sus demostraciones se caen al suelo, puesto que él demuestra que el universo es finito y acotado solo si es movible. (. . .) Pero dime, Simplicio: si Aristóteles hubiera sido compelido por las experiencias más palpables a reordenar en parte este orden y disposición del universo, y a confesarse a sí mismo haber estado errado acerca de una de estas dos proposiciones—esto es, equivocado acerca de poner a la tierra en el centro, o en decir que las esferas celestes giran en torno a tal centro—¿cuál de las dos crees tú que él habría concedido?

Galileo Galilei - *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. . .*

¡Gracias por su atención!

M. Bays, M. Gavrilovich, and M. Hils.
Some definability results in abstract Kummer theory.
International Mathematics Research Notices, 43:3975–4000, 2014.

M. Bays, B. Hart, and A. Pillay.
Universal covers of commutative finite Morley rank groups.
Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 19:767–799, 2020.

M Bays and B Zilber.
Covers of multiplicative groups of algebraically closed fields of arbitrary characteristic.
Bull. Lond. Math. Soc., 43:689–702, 2011.

Christopher Daw and Adam Harris.
Categoricity of modular and Shimura curves.
Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 66:1075–1101, 2017.