Entre teoría de modelos y física /

algunas aperturas caicedianas

Andrés VILLAVECES NIÑO / *Universidad Nacional de Colombia - Bogotá*

Lógica en Perspectiva - Homenaje a Xavier Caicedo

Universidad de los Andes - Bogotá - Diciembre de 2024

El camino

Lógica y geometría: el problema del espacio

Lógicas para procesos estocásticos, física, etc.

Tres décadas de AECs

Algunas interacciones recientes / teoría de modelos, geometría, física

El camino - el gran árbol

Etapa 1

Lógica y geometría: el problema del espacio

Valéry, sobre el espacio y la lógica

Le raisonnement peut être considéré comme propiétés de l'espace, aperçues dans le temps.
L'exploration successive du permanent, comme une rotation revenant sur elle-même.
L'exploration d'un corps solide par un animal qui consiste à établir une relation entre une continuité d'attention, une suite discrète de sensations, à construire enfin une sorte d'idée totale, indépendante de chaque démarche faite, — à construire en somme une unité nouvelle capable d'une infinité de constatations, au moyen d'un n[ombre] fini de touchers..

Paul Valéry - Cahiers

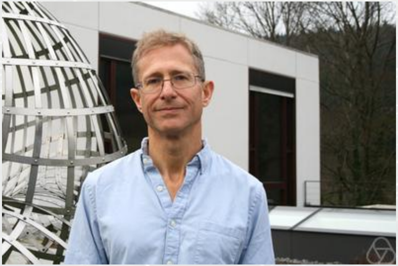
Valéry: razonamiento y espacio - énfasis míos

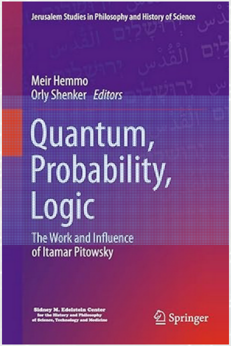
Traducción:

El **razonamiento** puede ser considerado como **propiedades del espacio**, percibidas en el tiempo.
La **exploración** sucesiva de lo **permanente**, como una rotación que volvería sobre sí misma.
La exploración de un **cuerpo sólido** por un animal que consiste en establecer una **relación** entre una continuidad de atención, una sucesión discreta de sensaciones; finalmente, en construir una especie de idea total, independiente de cada paso logrado, — en construir en definitiva una **nueva unidad** capaz de una **infinidad** de constataciones, por medio de una cantidad **finita** de tactos. . .

Hrushovski: un diálogo en estilo Galileo

En 2015 el lógico matemático Ehud Hrushovski escribió un artículo en homenaje a Itamar Pitowsky, físico israelí que se preocupó por cuestiones fundamentales de la cuántica, un camino que lo llevó a indagar en conexiones con la lógica: teoría de conjuntos (Axioma de Martin, Hipótesis del Continuo, etc.) y teoría de modelos.





On the Descriptive Power of Probability Logic

El diálogo imaginario entre un **lógico**, un **filósofo de la ciencia** y una (muy brillante) **estudiante de doctorado** sucede en el campus de la Universidad Hebrea de Jerusalén, y es clara alusión al diálogo de Galileo que inaugura muchos temas que nos interesan en matemáticas y en física.

El artículo se llama **On the Descriptive Power of Probability Logic**, y explora muchos temas que nos atañen hoy.

Algunos temas del diálogo de Hrushovski

- El poder expresivo de la lógica de primer orden surge al pasar a **dos** variables. En una variable, la lógica es descriptiva (Aristóteles); al usar al menos dos variables, y **cuantificación**, la lógica se vuelve predictiva (ejemplo: Postulado de las Paralelas, definición ε/δ de la **continuidad**). La lógica puede entonces abrir conceptos nuevos.
- La lógica de la probabilidad (etapa 1 - veremos después que en Colombia se ayudó a formar una etapa 2) es muy expresiva pero **carece de poder predictivo**, según el profesor de lógica del diálogo imaginario.

Algunos temas del diálogo de Hrushovski

- Hay un énfasis enorme en el rol de lo unario y su diferencia con lo monádico: lo monádico requiere en teoría de modelos moderna lo que Hrushovski llama *corrección relativista galileana:* marco de referencia. En teoría de modelos los llamamos «eliminación de imaginarios». Todo el énfasis desde Galois depende de ésto.
- La lógica **en el fondo** más que preocuparse por problemas «lingüísticos» (qué captura, qué no captura, el lenguaje) está preocupada por **el problema del espacio**. Es nuestra manera (desde la negación $\neg$ primigenia) de abordar el problema del espacio. La dualidad con la topología, mucho más tardía, no es más que una expresión de eso.

Espacialidades lógicas en Bogotá - años 1980

LOGICA DE LOS HACES DE ESTRUCTURAS

por

Xavier Caicedo F.*

Resumen

Caicedo, X.: Lógica de los haces de estructuras. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **19** (74): 569-586, 1995. ISSN 0370-3908.

Se exponen los principios de una lógica de estructuras e individuos variables o extendidos utilizando como modelos naturales los haces fibrados sobre espacios topológicos. La teoría de modelos resultante, caso particular de la lógica de los topoi, revela interesantes conecciones entre lógica y geometría. En este contexto, se presenta una noción de estructura genérica sobre un haz que ilumina las relaciones entre la lógica intuicionista y la clásica, y unifica los resultados fundamentales acerca de la construcción de modelos de la lógica de primer orden, la lógica infinitaria y la teoría de conjuntos.

Abstract

Utilizing sheaves over topological spaces as natural models, we expose the principles of a logic of extended and variable structures. The resulting model theory, particular case of the logic of topoi, reveals interesting connections between logic and geometry. In this context, we present a notion of generic structure over a sheaf which iluminates the relations between intuitionistic and classical logic, and unifies the fundamental results of first order logic, infinitary logic, and set theory on model construction.

Espacialidades lógicas en Bogotá - años 1980

menos a universos más abstractos. En este contexto, los resultados de consistencia e independencia de Cohen en teoría de conjuntos han sido reinterpretados como la construcción de ciertos topos que "colapsan" luego a universos clásicos por medio de operaciones lógico-geométricas. Los modelos booleanos de la teoría de conjuntos y los modelos Heyting-valuados de Fourman y Scott son haces sobre álgebras booleanas y de Heyting, respectivamente. Macintyre y otros han utilizado en forma muy limitada los haces sobre espacios booleanos en la teoría clásica de modelos.

Quizás el abstruso aparato categórico con que se han presentado generalmente estas ideas en la literatura ha hecho que matemáticos y lógicos no les hayan prestado la atención debida, y que sus posibles aplicaciones permanezcan en gran parte inexploradas. Exponemos en este trabajo los fundamentos de la lógica de los haces sobre espacios topológicos sin suponer conocimientos preliminares acerca de teoría de categorías, intentando justificarla desde una perspectiva epistemológica. El caso de los haces topológicos es ya suficientemente rico como para permitir las aplicaciones lógicas y matemáticas más interesantes, y para que el lector pueda adentrarse en posteriores generalizaciones categóricas a los topos de Grothendieck y los topos elementales. Introducimos en este contexto una teoría de modelos genéricos sobre haces que ilumina las conecciones entre lógica intuicionista y lógica clásica, y unifica los resultados fundamentales de la teoría de modelos (completitud, compacidad, omisión de tipos, propiedades de ultraproductos) y las diversas aplicaciones del método de "forcing" dispersas en la literatura (independencia en teoría de conjuntos, forzamiento de Robinson, etc.)

§ 1. Objetos variables y extendidos.

Los objetos y acontecimientos del mundo se presentan extendidos en el tiempo y el espacio. Esta observación es evidente con respecto a los objetos macroscópicos de la experiencia cotidiana, pero vale igualmente para los objetos de las teorías físicas incluyendo las partículas subatómicas cuya vida y dimensiones pueden ser muy cortas pero no reducirse a un solo punto es-

advertido los filósofos de la física que al llevarse a sus ultimas consecuencias esta localización puntual de los fenómenos, las leyes lógicas clásicas pueden perder su validez. Consideremos como ilustración de lo dicho las propiedades de una hoja de papel dividida en dos regiones complementarias, una totalmente blanca y otra totalmente negra, un típico objeto extendido (fig. 1):

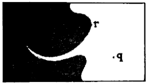


Figura 1

Ante las preguntas: *¿es negra o nó la hoja en el punto p?¿en el punto q? ¿en el punto r?* responderemos sin vacilar que lo es en el punto p interior a la región negra y no lo es en el punto q totalmente externo a la misma, pero no es claro cual será nuestra respuesta para el punto r, acaballado entre las dos regiones. A pesar de que la negritud o ausencia de negritud parece estar totalmente determinada en cada uno de los puntos de nuestro modelo lógico-matemático de la hoja, razones de simetría conceptual nos impiden tomar partido, y no parece valer en este caso el "tercio excluso", una de las leyes fundamentales de la lógica tradicional. El problema se hace más inquietante al preguntarnos si es más negra la hoja en el punto r que en el punto s, o si corresponde a alguna percepción posible que la hoja sea blanca en un punto matemático aislado en medio de la región negra.

La respuesta convencional a las anteriores inquietudes dice que el color de la hoja (o del modelo matemático de la hoja) en los puntos de frontera como r depende de si la región oscura es *cerrada* o no, según las definiciones del Análisis Matemático (vése por ejemplo **Rudin**, 1976). Pero esta solución no tiene correlato per-

tes en grupos, módulos o anillos, a la cohomología de *esquemas* (es decir ciertos *haces*) con coeficientes en *haces* de grupos, módulos o anillos. En este contexto, Grothendieck introdujo los haces sobre *sitios* en lugar de espacios topológicos puntuales, es decir sobre categorías pequeñas dotadas de los que hoy llamamos una *topología de Grothendieck*. El trabajo de este grupo se realizó principalmente en el famoso *Seminarie de Géométrie Algébrique* del I.H.E.S (Instituto de Altos Estudios Científicos de París). La motivación para tal empresa eran las conjeturas de **A. Weil** (1949) sobre la función Zeta asociada al número de soluciones de sistemas de equaciones algebraicas sobre cuerpos finitos. El mismo Weil había observado que las propiedades de tal cohomología podrían llevar a demostrar sus conjeturas, lo cual fue confirmado parcialmente por Grothendieck y luego demostrado plenamente por **P. Deligne** (1974).

Es típico del trabajo matemático del siglo XX que problemas de teoría de números como las conjeturas de Weil fuesen atacados por métodos geométricos, y que los problemas geométricos se atacasen a su vez con una formidable maquinaria abstracta. La teoría creada para tal propósito, obra de Grothendieck principalmente, es uno de los más complejos y hermosos edificios de la matemática. Va mucho más allá de su propósito inicial, y sus posibles consecuencias y aplicaciones no han sido todavía suficientemente exploradas. Lo que más adelante exponemos sobre lógica está inspirado en último término en el espíritu que anima el trabajo de Grothendieck, aunque él nunca llegó a ocuparse explícitamente de asuntos lógicos.

I. Haces. Aunque existen magníficas presentaciones de la teoría de haces, por ejemplo **Godement** (1958), **Tennison** (1975) o **Harsthorne** (1977), entre otros, damos una somera introducción a sus conceptos fundamentales para ponerlos en el contexto lógico que nos interesa. En primera instancia consideraremos a los haces como espacios fibrados más bien que funtores de secciones.

Definición 2.1. Dado un espacio topológico X, un *haz (espace étale, sheaf, sheaf-space) sobre* X es un

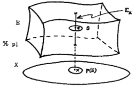


Figura 2

$\mathcal{H}$ sobre X. Una fibra puede ser vacía en caso de que p no sea sobreyectiva. Cada fibra tiene la topología discreta como subespacio de E, pues si $e \in p^{-1}(x)$ y S es una vecindad abierta de e que cumple la condición (ii) de la definición de haz, entonces $p^{-1}(x) \cap S = \{e\}$ por inyectividad de p en S. Podemos visualizar a E como lo unión disyunta de sus fibras, de ahí el nombre de *espacio fibrado* o de *haz* (un haz de fibras). Sin embargo un haz matemático es más que una colección de fibras, pues las vecindades abiertas que aparecen en la definición establecen conecciones continuas "horizontales" entre fibras cercanas. Un haz es pues un haz de fibras "atadas" por ciertos abiertos.

Una *sección* de $\mathcal{H}$ es una función continua σ: U $\to$ E, donde U es algún abierto de X, tal que $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$, es decir una *inversa local a derecha* de p.

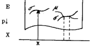


Figura 3

Tesis de maestría (modelos haces para la teoría de conjuntos)

Etapa 2

Lógicas para procesos estocásticos, física, etc.

Otra línea: la probabilidad y los procesos estocásticos

Entrelazada con esos temas, llegó a Bogotá con Fajardo después de su tesis la Lógica de la Probabilidad y la Teoría de Modelos de Procesos Estocásticos. . .

(En la discusión de Hrushovski sobre el poder predictivo de la lógica hay una crítica muy acerada a esa línea, pero en cierto sentido trabajos más recientes que suman la lógica continua a la perspectiva dan razón a Hrushovski pero permiten salvar buena parte de los trabajos de Fajardo y Keisler, con lente contemporáneo. . .)

Lógica de la probabilidad, lógica continua

- Con Chang, años 60: **lógica continua**. Valores de verdad en $[0,1]$, conectivos cualquier función continua $c : [0,1]^n \to [0,1]$, cuantificadores $\sup, \inf$. Lógica adecuada para aproximación, análisis funcional, etc.
- Años 80: **lógica de la probabilidad**. Permite cuantificar el valor esperado de una variable: 80 % de colombianos tienen información adecuada sobre su sistema de salud...

Lógica de la probabilidad, lógica continua

- Con Chang, años 60: **lógica continua**. Valores de verdad en $[0,1]$, conectivos cualquier función continua $c : [0,1]^n \to [0,1]$, cuantificadores $\sup, \inf$. Lógica adecuada para aproximación, análisis funcional, etc.
- Años 80: **lógica de la probabilidad**. Permite cuantificar el valor esperado de una variable: 80 % de colombianos tienen información adecuada sobre su sistema de salud...

En el siglo XXI, la lógica continua tuvo una explosión modelo-teórica.

Fajardo-Keisler: teoría de modelos para procesos estocásticos

Entre la época de su tesis de doctorado con Keisler (1979-1984) y su salida de la matemática hacia la política (hacia 2000), Fajardo realizó múltiples trabajos, casi todos con Keisler o con estudiantes de maestría, en **teoría de modelos de procesos estocásticos**: una extensión de la lógica de la probabilidad de Keisler a sistemas dinámicos, donde el valor esperado E y la integral sobre un espacio de medida $\int \alpha dt$ son cuantificadores. Keisler y Fajardo capturan muchas nociones de probabilidad y procesos estocásticos usando la **saturación** de los modelos (noción modelo-teórica que permite manejar la existencia de soluciones con holgura).

Fajardo-Keisler: teoría de modelos para procesos estocásticos

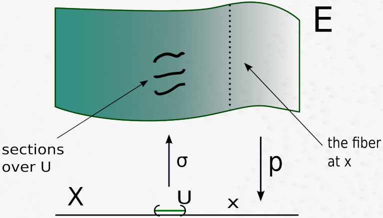
Aunque el poder expresivo aumentó, no hubo desarrollos modelo-teóricos entre 2000 y la actualidad.

Entre la época de su tesis de doctorado con Keisler (1979-1984) y su salida de la matemática hacia la política (hacia 2000), Fajardo realizó múltiples trabajos, casi todos con Keisler o con estudiantes de maestría, en **teoría de modelos de procesos estocásticos**: una extensión de la lógica de la probabilidad de Keisler a sistemas dinámicos, donde el valor esperado E y la integral sobre un espacio de medida $\int \alpha dt$ son cuantificadores. Keisler y Fajardo capturan muchas nociones de probabilidad y procesos estocásticos usando la **saturación** de los modelos (noción modelo-teórica que permite manejar la existencia de soluciones con holgura).

Lógica de haces

- Orígenes remotos en trabajos de Macintyre y Comer (c. 1970).
- Xavier Caicedo expande sus modelos sobre haces a espacios topológicos arbitrarios (años 80), y demuestra un Teorema del Modelo Genérico, que permite calcular un 'límite modelo-teórico de un haz de estructuras'; da algunas aplicaciones a teoría de modelos.
- Con Ochoa, extendimos esos resultados a lógica continua, para lograr aplicaciones a cuántica.

Lógica de haces



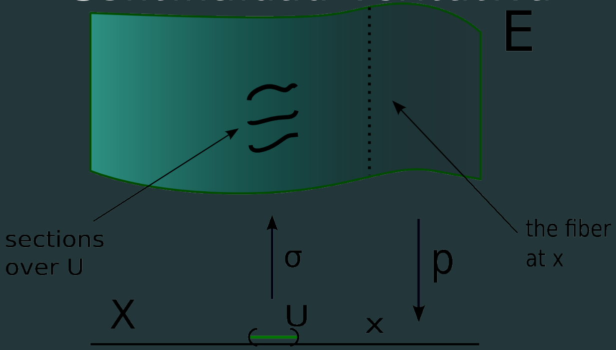
Horizontal: topología.

Vertical: lógica

- Orígenes remotos en trabajos de Macintyre y Comer (c. 1970).
- Xavier Caicedo expande sus modelos sobre haces a espacios topológicos arbitrarios (años 80), y demuestra un Teorema del Modelo Genérico, que permite calcular un ‘límite modelo-teórico de un haz de estructuras’; da algunas aplicaciones a teoría de modelos.
- Con Ochoa, extendimos esos resultados a lógica continua, para lograr aplicaciones a cuántica.

El paradigma de la lógica de haces:

Continuidad veritativa



Variantes (Cano, Zambrano): diferenciabilidad veritativa en geometría diferencial (conexiones). . .

Lógicas para la física

En trabajos con mi estudiante de doctorado, el físico Gustavo Cipagauta, estamos continuando dos de las líneas anteriores:

- Teoría de modelos estocásticos de Fajardo-Keisler, mezclada con
- Estabilidad en lógica continua.

Cipagauta está adaptando la «interpretación» estocástica de la cuántica a la luz de estas variantes de teoría de modelos.

En su conferencia del Seminario **Mundo/Lógica/Modelos** de la Universidad Nacional están disponibles sus primeros resultados dentro del marco de la tesis.

SLALM 1981: algo de la gestación de esos temas

SLALM 1981: Xavier Caicedo, Carlos Di Prisco

Etapa 3

Tres décadas de AECs

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),
- Clases de **amalgamation** (Fraïssé, Jónsson)

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),
- Clases de **amalgamation** (Fraïssé, Jónsson)
- (Clases elementales abstractas [AECs] - la descripción muy rápida y cruda (pero muy atinada) de Baldwin en un email reciente al geómetra A. Libgober:

«Algebraically-minded» model theory? (1975)...

- Motivación remota: c. 1974 ($\mathbb{L}(Q)$, $\mathbb{L}_{\omega_1,\omega}$) y lo que Shelah llamó en ese momento "algebraically-minded model theory", entre otros orígenes),
- Clases de **amalgamation** (Fraïssé, Jónsson)
- (Clases elementales abstractas [AECs] - la descripción muy rápida y cruda (pero muy atinada) de Baldwin en un email reciente al geómetra A. Libgober:

  "Anatoly: For what's worth AEC are a style of model theory that approaches mathematics is a more familiar fashion. Instead of syntax and semantic, one investigates class of structures that satisfy certain properties (like closure under limits) - indeed there is a purely category theory definition.)"

Las <u>clases elementales abstractas</u> son clases de modelos suavemente cerradas por límites inductivos, generativas y acumulativas/coherentes.

Clases elementales abstractas

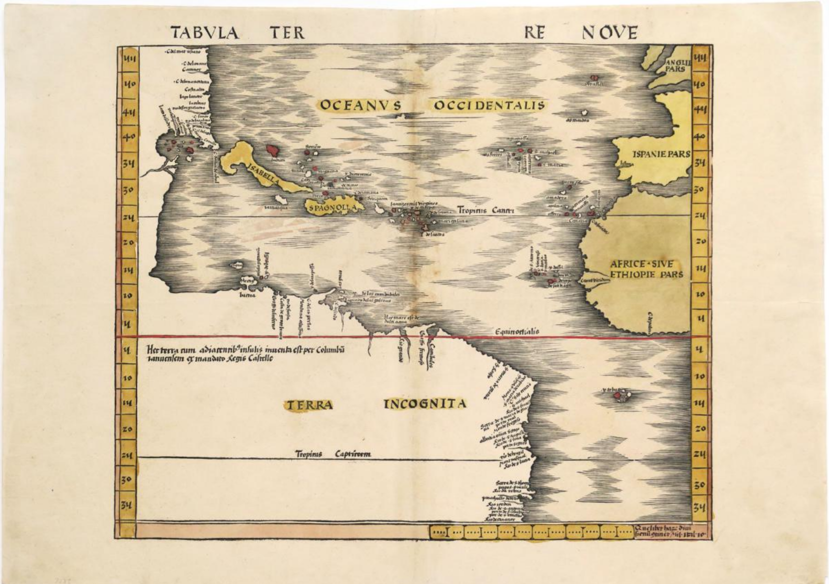
Las clases elementales abstractas son clases de modelos suavemente cerradas por límites inductivos, generativas y acumulativas/coherentes.

- Además de la clase de modelos $\mathcal{K}$, hay una noción de inmersión fuerte $\prec_{\mathcal{K}}$, que ordena la clase $\mathcal{K}$ y refina la noción algebraica de extensión,
- cerrada bajo límites directos,
- dotada de un esquema efectiva de generación de submodelos,
- con comportamiento acumulativo/coherente con respecto a la existencia de «soluciones».

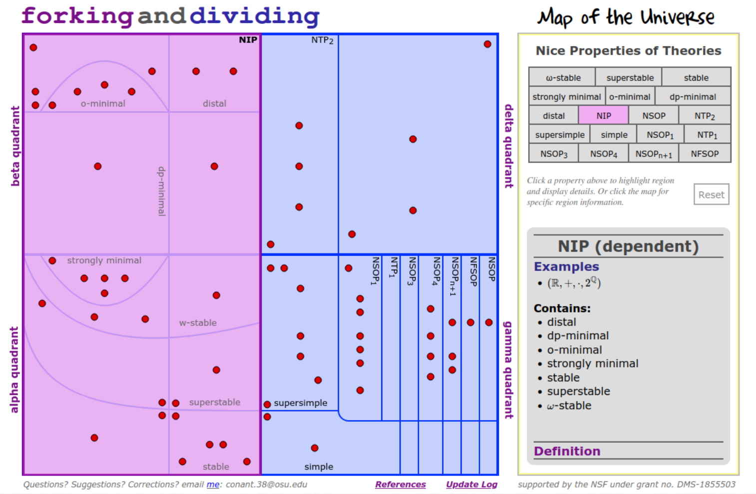
Siglo XX: inicio lento

- Trabajos de Shelah en la década de 1980, muy abstractos (pero como se vería a posteriori, muy atinados): inicio de estabilidad, casi siempre con hipótesis conjuntísticas muy fuertes
- Makkai-Shelah: estudiaron la categoricidad (y la saturación) bajo hipótesis fuertes de grandes cardinales
- Luego se fueron rebajando estas hipótesis, con resultados más débiles pero gradualmente mejor adaptados a aplicaciones (años 90: Kolman, V., Shelah, Grossberg, Lessmann),
- En esa época, mapa aún muy desdibujado por fuera de primer orden...

Terra Incognita enorme hasta el siglo XXI

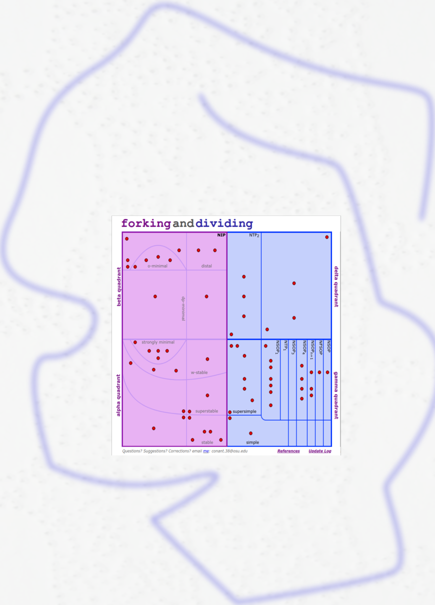


El «mapa oficial» en primer orden

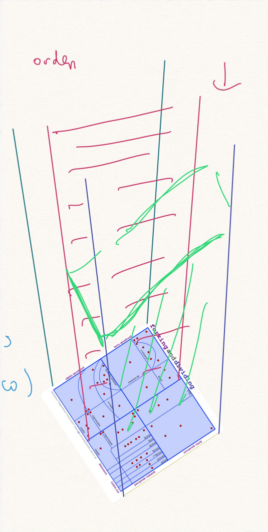


Mapa de Conant - forkinganddividing.com

Y las conquistas de las últimas tres décadas, por fuera. . .



Realmente agregan dimensión adicional al mapa de Conant



Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstabilidad y categoricidad (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extraer superestabilidad, etc. de la categoricidad,

Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstabilidad y categoricidad (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extraer superestabilidad, etc. de la categoricidad,
- Canonicidad de Bifurcación en AECs estables: Boney-Grossberg-Vasey 2016,

Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstabilidad y categoricidad (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extraer superestabilidad, etc. de la categoricidad,
- Canonicidad de Bifurcación en AECs estables: Boney-Grossberg-Vasey 2016,
- Superestabilidad y modelos límite: Grossberg-VanDieren-V. 2010, Vasey, Boney, VanDieren, V.-Zambrano (caso métrico),

Aceleración de temas con el cambio de siglo

Algunos temas de las últimas dos décadas:

- Superstabilidad y categoricidad (Shelah-V. 1999, Lessmann-Grossberg): extraer superestabilidad, etc. de la categoricidad,
- Canonicidad de Bifurcación en AECs estables: Boney-Grossberg-Vasey 2016,
- Superestabilidad y modelos límite: Grossberg-VanDieren-V. 2010, Vasey, Boney, VanDieren, V.-Zambrano (caso métrico),

Contribuciones bogotanas en esta historia...

- (Shelah-V. 1999): un método para usar la categoricidad para extraer superestabilidad (en etapa inicial, con bastante teoría de conjuntos)

Contribuciones bogotanas en esta historia...

- (Shelah-V. 1999): un método para usar la categoricidad para extraer superestabilidad (en etapa inicial, con bastante teoría de conjuntos)
- (Shelah-V. 2016-2020): limitaciones absolutas al teorema de Morley en lógicas $\mathbb{L}_{\lambda^+,\omega}$: el contenido simplicial de los cardinales pequeños

Contribuciones bogotanas en esta historia...

- (Shelah-V. 1999): un método para usar la categoricidad para extraer superestabilidad (en etapa inicial, con bastante teoría de conjuntos)
- (Shelah-V. 2016-2020): limitaciones absolutas al teorema de Morley en lógicas $\mathbb{L}_{\lambda^+,\omega}$: el contenido simplicial de los cardinales pequeños
- (V.-Zambrano 2012): clases elementales abstractas métricas (superestabilidad)

Contribuciones bogotanas en esta historia...

- (Shelah-V. 1999): un método para usar la categoricidad para extraer superestabilidad (en etapa inicial, con bastante teoría de conjuntos)
- (Shelah-V. 2016-2020): limitaciones absolutas al teorema de Morley en lógicas $\mathbb{L}_{\lambda^+,\omega}$: el contenido simplicial de los cardinales pequeños
- (V.-Zambrano 2012): clases elementales abstractas métricas (superestabilidad)
- (V. con Grossberg y VanDieren 2015): la unicidad de modelos límite - hilar fino dos cofinalidades distintas

Contribuciones bogotanas en esta historia...

- (Shelah-V. 1999): un método para usar la categoricidad para extraer superestabilidad (en etapa inicial, con bastante teoría de conjuntos)
- (Shelah-V. 2016-2020): limitaciones absolutas al teorema de Morley en lógicas $\mathbb{L}_{\lambda^+,\omega}$: el contenido simplicial de los cardinales pequeños
- (V.-Zambrano 2012): clases elementales abstractas métricas (superestabilidad)
- (V. con Grossberg y VanDieren 2015): la unicidad de modelos límite - hilar fino dos cofinalidades distintas
- (V.-Shelah y V.-Nájar): desarrollo de AECs <u>dependientes</u> (NIP)

Contribuciones bogotanas en esta historia...

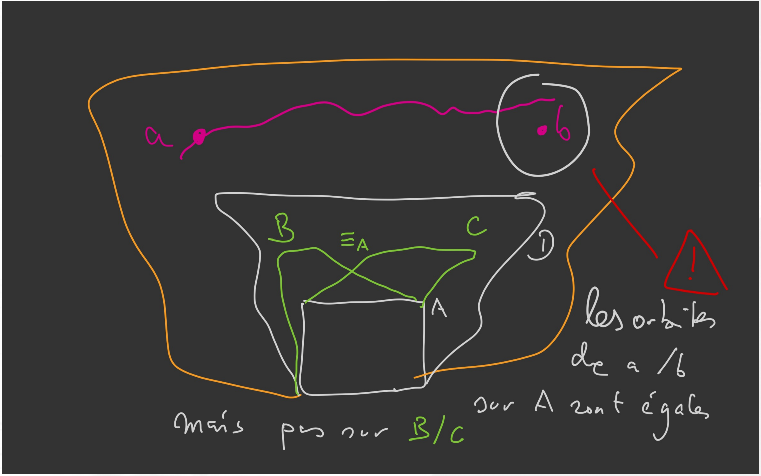
- (Shelah-V. 1999): un método para usar la categoricidad para extraer superestabilidad (en etapa inicial, con bastante teoría de conjuntos)
- (Shelah-V. 2016-2020): limitaciones absolutas al teorema de Morley en lógicas $\mathbb{L}_{\lambda^+,\omega}$: el contenido simplicial de los cardinales pequeños
- (V.-Zambrano 2012): clases elementales abstractas métricas (superestabilidad)
- (V. con Grossberg y VanDieren 2015): la unicidad de modelos límite - hilar fino dos cofinalidades distintas
- (V.-Shelah y V.-Nájar): desarrollo de AECs dependientes (NIP)

Y una pregunta de Xavier, ¡aún no resuelta realmente!

La pregunta de Xavier, desde mi regreso a Bogotá: ¿cómo comparar AECs?

R.: Hugo Mariano, Pedro Zambrano, Zaniar Ghadernezhad, Krzysztof Worytkiewicz . . .- homotopía en AECs

Nociones de independencia (splitting/splintering) en AECs



Con Berenstein y Hyttinen estudiamos un caso que abrió puertas a entender la frontera entre la simplicidad y la propiedad $NSOP_1$ en Lógica Continua (RCM 2019)

El rol de Shelah

Saharon Shelah (en 2016)

El rol de Shelah es sumamente interesante en esta historia:

- No tiene directamente motivaciones geométricas.
- Sin embargo, sus trabajos en Categoricidad, Estabilidad, etc. desde 1970 han cambiado no solo la faz de la teoría de modelos, sino que se proyectan como generalizaciones muy fuertes de las teorías de Galois más extremas. En la parte 4 veremos algo de lo que está pasando.
- Sus motivaciones parecen ser estructurales/combinatorias. Pero da en el corazón de problemáticas geométrico-aritméticas de maneras muy extrañas.

Lógicas con interpolación

- Xavier Caicedo, automorfismos no triviales en teoría de modelos abstracta
- L^1_κ: muy cercana a la lógica de una AEC
- Lógicas especiales (con Väänänen y Kivimäki) - variables aleatorias infinitarias
- Se puede aplicar el teorema de Caicedo para producir muchos automorfismos, ¡<u>casi</u> sin indiscernibles!

Veinte años no es nada

(Foto en los 60 años de Xavier Caicedo)

Etapa 4

Algunas interacciones recientes / teoría de modelos, geometría, física

Nuevo siglo / nuevas conexiones matemáticas

El nuevo siglo se abrió con conexiones nuevas y sorprendentes entre la teoría de modelos de las AEC y

- geometría aritmética/algebraica

Nuevo siglo / nuevas conexiones matemáticas

El nuevo siglo se abrió con conexiones nuevas y sorprendentes entre la teoría de modelos de las AEC y

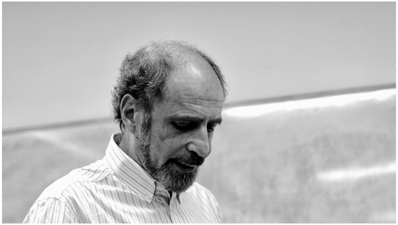
- geometría aritmética/algebraica
- módulos

Nuevo siglo / nuevas conexiones matemáticas

El nuevo siglo se abrió con conexiones nuevas y sorprendentes entre la teoría de modelos de las AEC y

- geometría aritmética/algebraica
- módulos
- posibles conexiones con la simetría espejo de la física y Langlands

Zilber, Harris (en la UNAL)



Visión de Zilber

Categoricidad/ Estabilidad en **primer orden**	Geometría *algebraica*
?	Teoría analítica (compleja)
Categoricidad/ Estabilidad en **AECs**	?
Categoricidad en lenguajes $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}(Q)$ o variantes	Teoría analítica *general*

Nuevas conexiones en el siglo XXI

- 2001 / la escuela de Zilber: geometría aritmética bajo el lente de las AECs (axiomatizadas en $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ y bajo hipótesis de «cuasiminimalidad»: **cubiertas** pseudo-exponenciales, funciones modulares (la más famosa es la función j

$$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C},$$

  que transfiere la estructura de acción de grupo $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ (de grupos fuchsianos, e.g. $\Gamma = SL_2(\mathbb{Q})$) sobre una estructura H (lógicamente equivalente) al semiplano superior $\mathbb{H}$, a la estructura de cuerpo de un modelo de ACF_0 como $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$),
- 2012-2023: La teoría de modelos de cubiertas analíticas...

Estos trabajos se han desarrollado en un contexto algebraico/combinatorio dado por

pregeometrías cuasiminimales.

Desde 2001: teoría de modelos de cubiertas

Estos trabajos se han desarrollado en un contexto algebraico/combinatorio dado por

pregeometrías cuasiminimales.

Una noción abstracta de clausura (que generaliza la acl modelo-teórica y algebraica) $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que satisface monotonía, intercambio, idempotencia y en general permite dar definiciones de dimensión, independencia, objetos generados.

Desde 2001: teoría de modelos de cubiertas

Estos trabajos se han desarrollado en un contexto algebraico/combinatorio dado por

pregeometrías cuasiminimales.

Una noción abstracta de clausura (que generaliza la acl modelo-teórica y algebraica) $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que satisface monotonía, intercambio, idempotencia y en general permite dar definiciones de dimensión, independencia, objetos generados.

Las pregeometrías son básicamente matroides. . .

El camino desde la pseudoexponencial y la j (ver [BV23])

	topic	paper	method/context	section
1	Complex exponentiation	[?]	quasiminimality	§1
2	cov mult group	[?]	quasiminimality	§1
3		[?]	quasiminimality	
4	j-function	[?]	background	§4.1
5	Modular/Shimura Curves	[?]	quasiminimality	§4
6	Modular/Shimura Curves	[?]	quasiminimality	
7	finite Morley rank groups	[?]	fmr & notop	§5.1
8	Abelian Varieties	[?]	fmr & notop / qm	§5.3
9	Shimura varieties	[?]	notop	§6
10	Smooth varieties	[?]	o-quasiminimality	§8

El ejemplo prototipo es

$$\mathbb{C}_{\mathsf{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, exp)$$

el lenguaje infinitario $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}(Q)$ permite codificar teoría de números transcendentes (conjetura del período).

La estrucura de cubiertas

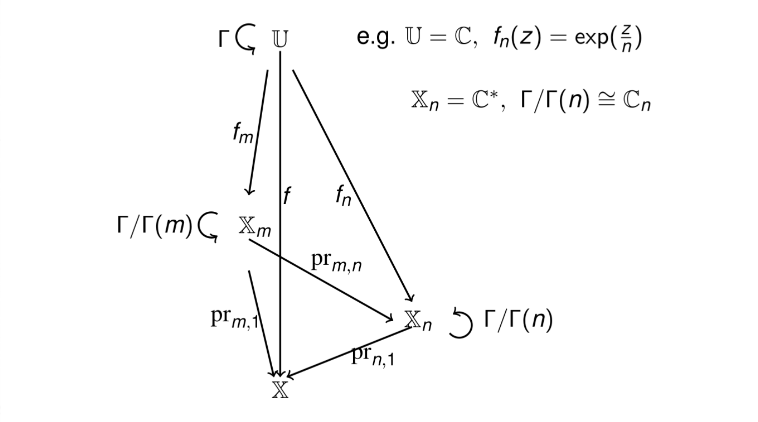
El ejemplo prototipo es

$$\mathbb{C}_{\mathrm{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, exp)$$

el lenguaje infinitario $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}(Q)$ permite codificar teoría de números transcendentes (conjetura del período).

Sin embargo, para estudiar **geometría algebraica compleja** de una variedad $\mathbb{X}$ hay que usar las cubiertas (más básicas, más generales) de subvariedades algebraicas de $\mathbb{X}^n$ (para todo n) que sean definibles

$$\mathbb{U} \to \mathbb{X}.$$



(Imagen tomada de conferencia de Zilber en Seminario Conexión de GALoiS en mayo de 2024)

La estructura de cubiertas (Zilber)

- Esta estructura tiene muchísima información sobre la **topología métrica** de $\mathbb{X}(\mathbb{C})$ y al mismo tiempo es **estable** (esto es, esencialmente, proviene de geometría algebraica),
- Sin la cubierta $\mathbb{U}$ solo tenemos la topología étale de $\mathbb{X}$; esto es, conocemos solo $\mathbb{X}$ módulo automorfismos abstractos de $\mathbb{C}$.

En ese sentido, postular la existencia de cubiertas no triviales es algo bastante fuerte (sobre $\mathbb{X}$).

Lógica y geometría, de nuevo

Teorema(s) de Zilber y su escuela (siglo XXI): la teoría en la lógica infinitaria $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ en muchos casos (*exp*, j, $\mathfrak{p}$) es categórica en cardinales no contables.

Demostrar esto mezcla la teoría de AECs con teoremas aritméticos: versiones (teoremas) de la Conjetura de Mumford-Tate, extensiones de teorías de Galois y Kummer.

Lógica y geometría, de nuevo

Teorema(s) de Zilber y su escuela (siglo XXI): la teoría en la lógica infinitaria $\mathbb{L}_{\omega_1\omega}$ en muchos casos (*exp*, j, $\mathfrak{p}$) es categórica en cardinales no contables.

Demostrar esto mezcla la teoría de AECs con teoremas aritméticos: versiones (teoremas) de la Conjetura de Mumford-Tate, extensiones de teorías de Galois y Kummer.

¡La **categoricidad** termina siendo equivalente a hechos profundos de geometría aritmética!

Se obtienen invariantes topológicos completos $\Sigma(\mathbb{X}_a)$ para variedades complejas (Shimura, abelianas) $\mathbb{X}_a$.

Nuevas posibilidades: el “Mirror Map program”

- Seminario **Conexión de GALoiS** (Universidad Nacional de Colombia, University of Illinois at Chicago)
- Alexander Cruz: observando analogías fuertes con otro enfoque modelo-teórico para las funciones tipo j (Freitag-Scanlon, Casale-Freitag-Nagloo y trabajos con Blázquez-Sanz (UNAL-Med)) que usan las **ecuaciones diferenciales** (Schwarzianas) y la regularidad de la acción de grupo asociada a $j\ldots$

En su artículo Does model theory have something to say about mirror symmetry?, Cruz propone un programa para la simetría espejo de la física (QFT).

Los mirror maps (con origen en las teorías de campos superconformes de la física) enlazan la geometría simpléctica con la geometría compleja, el **Lado A** con el **Lado B** de la geometría.

La simetría espejo predice que las variedades de Calabi-Yau están dadas siempre por pares $(V, \hat{V})$ entrelazadas por un **mirror map** que refleja simetrías tipo teoría de Hodge de V y de $\hat{V}$.

Más acerca del MM+MT-program

Observaciones (Cruz):

- La función j clásica <u>es</u> un mirror map (para curvas elípticas), que satisface la ecuación schwarziana clásica que fue central a un análisis modelo-teórico que usó la teoría DCF (teoría de Galois diferencial à la teoría de modelos).
- Las hipersuperficies en $\mathbb{CP}^3$ dadas por

  $$X_s = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + s x_0 x_1 x_2 x_3$$

  corresponden a simetría espejo para superficies K3. Un operador diferencial (que anula períodos) dado por

  $$\Theta^3 - 8z(1+2\Theta)(1+4\Theta)(3-4\Theta), \text{ con } \Theta = z\frac{d}{dz}$$

  termina dando un mirror map $z(q)$ con propiedades de modularidad.

Más acerca del MM+MT-program

- Cruz demostró que el mirror map $z(q)$ para superficies K3 tiene una teoría infinitaria $Th_{\omega_1,\omega}(z) + \mathrm{trdeg}(F) \geq \aleph_0$ con un <u>único</u> modelo módulo isomorfismo en cada cardinal.
- El rol de la modularidad parece mal entendido aún en muchas situaciones. Esto sugiere un enfoque modelo-teórico para **entender la modularidad.**
- Por último, conexiones con Langlands local (Harris) parecen sugerir la necesidad de entender cubiertas **meromorfas** modelo-teóricamente. Esto sugiere teorías de modelos distintas de las actuales (¿Lógica de haces y su teoría de modelos, à la Caicedo, mezclada con la teoría de Zilber y su escuela?)

SIMPLICIO: Aristóteles da cien pruebas de ***«el universo es finito, acotado y esférico»****.*

SALVIATI: Y todas éstas luego se redujeron a una sola, y luego a ninguna. Porque si no le concedo que el universo sea móvil, todas sus demostraciones se caen al suelo, puesto que él demuestra que el universo es finito y acotado solo si es movible. (. . .) Pero dime, Simplicio: si Aristóteles hubiera sido compelido por las experiencias más palpables a reordenar en parte este orden y disposición del universo, y a confesarse a sí mismo haber estado errado acerca de una de estas dos proposiciones—esto es, equivocado acerca de poner a la tierra en el centro, o en decir que las esferas celestes giran en torno a tal centro—¿cuál de las dos crees tú que él habría concedido?

Galileo Galilei - *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. . .*

¡Feliz celebración de su cumpleaños 80, y mil gracias por tantas ramas del gran árbol iniciadas, estimado Xavier!