MATEMÁTICAS CONDENSADAS Y FORCING: UNA PRIMERA LECTURA

ANDRÉS VILLAVECES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - BOGOTÁ

Resumen: En trabajos recientes los matemáticos Dustin Clausen y Peter Scholze han consolidado su propuesta inicial de cambio de categorías (por ejemplo de la categoría de Grupos Abelianos Topológicos a la de Grupos Abelianos Topológicos Condensados). Este cambio obedece a la búsqueda de mayor regularidad en el comportamiento matemático, con el precio de armar objetos en cierto sentido más complejos. En trabajos mucho más recientes, Jeffrey Bergfalk, Chris Lambie-Hanson y Jan Šaroch han acercado las construcciones de matemática condensada a la construcción de forcing. El punto de enlace ha sido la nueva respuesta al Problema de Whitehead (si todo grupo abeliano tal que Ext(A,Z)=0 debe ser libre): la respuesta clásica (que usaba forcing) de Shelah mostraba que esta implicación era independiente de la teoría de conjuntos. En el mundo «condensado» esto ya no es así: en cierto sentido, la condensación parecería «corregir» patologías matemáticas. Discutiré las ideas básicas (que veo yo en este momento) detrás de esas construcciones, y explicaré un poco por qué me interesa en este momento revisar la matemática condensada.

Introducción

Estas notas no contienen ningún trabajo original mío. Me interesa el tema por la conexión entre forcing y haces (y posibles trabajos futuros), y me baso principalmente en el artículo de Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch y en conferencias dadas por Lambie-Hanson en Toronto y en Helsinki. Registran una lectura que otras personas en Bogotá están iniciando, y que podrían llegar a convertirse en un verdadero tema de investigación.

1. Condensar la matemática: ¿Para qué? ¿Por qué?

Hacia 2017, Dustin Clausen y Peter Scholze inician un cambio de categorías, una *recategorización* que permite usar álgebra para estudiar mejor estructuras que combinan álgebra y topología.

¿Por qué lo hacen? Cierto «desbalance» se percibe al estudiar categorías clásicas de objetos que mezclan álgebra y topología. El ejemplo clave es el siguiente:

En la categoría TopAb, el mapa

$$\mathbb{R}_{\text{disc}} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

Date: 23 de mayo de 2025.

no es un isomorfismo; sin embargo, **ésto no es atestiguado** por kernel o cokernel no triviales. TopAb NO es una *categoría abeliana*.

NOTA: es como si el tener la topología sobre el álgebra «dañara» la categoría. La idea de Clausen y Scholze pasa por *separar* más cuidadosamente el álgebra de la topología: no superimponer la una a la otra en la misma estructura.

Pasamos entonces a categorías con mayor riqueza (mejor comportamiento), pagando el precio de objetos más complejos.

Un conjunto/grupo abeliano/... **condensado** es un funtor contravariante

$$T : CHaus \to Set/Ab/\ldots$$

tal que

- (1) $T(\emptyset) = \star$,
- (2) $T(S_0 \sqcup S_1) = T(S_0) \times T(S_1)$,
- (3) Para todo morfismo epi $S' \to S$ en CHaus con producto fibrado $S' \times_S S'$ y sus proyecciones π_0, π_1 en S', la función

  $$T(S) \to \{x \in T(S') : T(\pi_0)(x) = T(\pi_1)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

  es biyectiva.

De manera más rápida: un **[-] condensado** es un haz [-]-valuado sobre el sitio pre-étale de un punto.

1.1. Topología sobre objeto subyacente.

Dado un conjunto (grupo abeliano, ...) condensado T, el objeto $T(\star)$ se llama **objeto subyacente** de T, y tiene la topología cociente inducida por

$$\bigsqcup_{S \to T} S \to T(\star).$$

Dado $S \in$ CHaus, cada $x \in T(S)$ induce un mapa

$$g_x : S \to T(\star)$$

así: $s \in S$ induce primero la función $f_s : \star \to S$ que envía $\star$ a s. Luego definimos

$$g_x(s) := T(f_s)(x).$$

La topología de $T(\star)$ es la más fina que hace que las g_x sean continuas (compacto-generada).

1.2. ¿Cómo se sumergen las categorías clásicas en las nuevas? Dado X espacio topológico, definimos $\underline{X}(S) = Cont(S, X)$. Esto resulta ser un conjunto condensado. Si X es compactamente generado, $\underline{X}(\star) \approx X$ (en Top). Esta inmersión es plenamente fiel, si se restringe a estos espacios.

Si A es un grupo abeliano topológico, $\underline{A}$ dado por $\underline{A}(S) = Cont(S, A)$ resulta ser un grupo abeliano condensado.

Tenemos entonces maneras de **condensar** objetos. Luego veremos en qué sentido corrigen las patologías.

2. Forcing: el modelo de nombres

- Nombres - V, $V^{\mathbb{P}}$, $V[G]$.
- $\mathbb{P}$ se suele sumergir en su completación $\mathbb{B}$, álgebra de Boole. Así, los nombres se pueden ver como valores de morfismos en $\mathbb{B}$.
- El dual de Stone de $\mathbb{B}$ es un espacio topológico extremadamente disconexo (ED) (la clausura de todo abierto es abierto). Los espacios ED son los duales de Stone de las álgebras de Boole *completas*.
- Hecho (folclor): dado Y espacio compacto de Hausdorff, existe una **correspondencia**

  $$\mathbb{B}\text{−nombres de elts de } Y \quad \longleftrightarrow \quad \text{func. cont. de } St(\mathbb{B}) \text{ en } Y.$$

  Así, interpretar a Y en extensiones de forcing se logra intercambiando punto de Y por filtros maximales de cerrados no vacíos de Y.

3. El Problema de Whitehead

A grupo abeliano es *de Whitehead* si para todo morfismo de grupos sobreyectivo $\pi : B \to A$ tal que $\ker(\pi) \approx \mathbb{Z}$ existe un homomorfismo $\sigma : A \to B$ tal que $\pi \circ \sigma = 1_A$.

Es decir, toda sucesión exacta corta de la forma

$$0 \to \mathbb{Z} \to B \to A \to 0$$

se rompe (escinde). Equivalentemente, $Ext^1(A, \mathbb{Z}) = 0$.

Por otro lado, A es **libre** ssi $Ext^1(A, C) = 0$, para todo grupo C.

Obviamente, todo grupo libre es de Whitehead. En los años 1940/1950, Whitehead preguntó si vale el recíproco.

Problema de Whitehead: ¿Es todo grupo de Whitehead libre?

Aunque Stein demostró que cuando A es contable de Whitehead debe ser libre, en los años 1970 Shelah demostró que el Problema de Whitehead es independiente.

Teorema (Shelah):

- Si $V = L$, entonces todo grupo de Whitehead es libre.
- Si vale $MA_{\aleph_1}$, entonces existe un grupo de Whitehead que no es libre, de cardinal $\aleph_1$.

3.1. «Condensar» el problema de Whitehead: Clausen-Scholze. Dados $T_0, T_1 \in$ CondAb, $Hom(T_0, T_1)$ tiene estructura natural de grupo abeliano. Por otro lado, CondAb tiene un producto tensorial y un *funtor interno Hom*, $\underline{Hom}(\cdot,\cdot)$, con valores en CondAb. Este satisface

$$Hom(T_0, \underline{Hom}(T_1, T_2)) \approx Hom(T_0 \otimes T_1, T_2).$$

En el caso particular en que A y G son **grupos abelianos topológicos compactos**, tenemos que

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{G}) \approx \underline{Hom(A, G)},$$

donde $Hom(A, G)$ tiene la topología compacta-abierta. Así, dado $S \in$ CHaus,

$$\underline{Hom}(\underline{A}, \underline{G}) \approx Cont(S, Hom(A, G)).$$

Ya teniendo una descripción de $\underline{Hom}$, podemos tomar su funtor derivado, $\underline{Ext}^1(\cdot,\cdot)$. Dados $A, B \in$ Ab, $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{B})(\star) = Ext(A, B)$.

El Problema de Whitehead condensado (formulado para $\underline{Ext}^1$) NO es independiente de ZFC.

> Teorema (Clausen-Scholze): Dado A grupo abeliano, si $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ entonces A es libre.

La demostración original parece ser compleja (y estar basada en *grupos abelianos sólidos*, una sub-categoría de los grupos abelianos condensados). Además (dicen Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch), es altamente *inexplícita*: dado un grupo abeliano no libre A, no identifica un espacio S tal que $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}}) \neq 0$.

3.2. La estrategia de Shelah, y de B-LH-Š. Dado un grupo A, existe una sucesión exacta corta

$$0 \to K \to F \to A \to 0$$

con K un subgrupo de F, F libre. A resulta ser de Whitehead ssi el mapa inducido

$$Hom(F, \mathbb{Z}) \to Hom(K, \mathbb{Z})$$

es sobreyectivo (es decir, si todo elemento de $Hom(K, \mathbb{Z})$ se extiende a un elemento de $Hom(F, \mathbb{Z})$).

Parte de la estrategia de Shelah era ésta: dados suficientes diamantes $\diamondsuit$, si A no es libre existe un elemento de $Hom(K, \mathbb{Z})$ que no se extiende a un elemento de $Hom(F, \mathbb{Z})$.

Al condensar lo anterior, resulta que A es condensado-Whitehead ssi el mapa

$$\underline{Hom}(\underline{F}, \underline{\mathbb{Z}})(S) \to \underline{Hom}(\underline{K}, \underline{\mathbb{Z}})(S)$$

es sobreyectivo, para todo $S \in$ CHaus.

Pero $\underline{Hom}(\underline{F}, \underline{\mathbb{Z}})(S) = Cont(S, Hom(F, Z))$ (con la topología compacta-abierta).

Así, para ver que A no es condensado-Whitehead, basta encontrar un espacio $S \in$ CHaus y una función continua

$$\varphi : S \to Hom(K, \mathbb{Z})$$

tal que no existe función continua

$$\psi : S \to Hom(F, \mathbb{Z})$$

para la cual $\psi(s) \supset \varphi(s)$ para todo $s \in S$.

Los tres autores Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch encontraron que si A no es libre, existe una función φ como la anterior para $S = 2^\kappa$, donde κ es el mínimo cardinal de un subgrupo no libre de A (es decir, $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}})(2^\kappa) \neq 0$.

La construcción usa realmente un *diamante débil* (en ZFC)[1].

4. Espacios Extremadamente Disconexos

Un hecho técnico, muy interesante y relevante para la conexión con forcing, es el siguiente: se puede reformular la noción de **objeto condensado** así:

Un conjunto/grupo/... condensado es un funtor contravariante $T : ED \to Set/Ab/\dots$ tal que

- $T(\emptyset) = \star$,
- $T(S_0 \sqcup S_1) = T(S_0) \times T(S_1)$.

Es decir, la condición «de pegamento» sale *gratis* en la sub-categoría ED de CHaus, y no hay pérdida de información: todo elemento de CHaus es imagen sobreyectiva de un elemento de ED - y así, todo objeto condensado está determinado por su restricción a ED.

Los elementos de ED son los «objetos proyectivos» de CHaus; ejemplos típicos son compactificaciones de Stone-Čech βX, con X discreto.

Volviendo al tema de forcing, recordemos que un espacio topológico Y induce un conjunto condensado $\underline{(Y)}$ tal que $\underline{Y}(S) = Cont(S, Y)$, para $S \in$ ED. **Por lo tanto**, si $Y \in$ CHaus, $\underline{Y}$ resulta ser una **presentación organizada** de todos los nombres, en cualquier extensión de forcing, de elementos de Y. Así, los tres autores Bergfalk, Lambie-Hanson y Šaroch realmente demuestran que si A es un grupo abeliano no libre y κ es el mínimo cardinal de un subgrupo no libre de A, A no es de Whitehead en $V[Add(\omega, \kappa)]$ y $\underline{Ext}^1(\underline{A}, \underline{\mathbb{Z}})(S_\kappa) \neq 0$, donde S_κ es el espacio de Stone de la completación booleana de $Add(\omega, \kappa)$.

[1] Dado κ cardinal regular no contable, existe una función continua $\varphi : 2^\kappa \to \prod_{\alpha<\kappa} 2^\alpha$ tal que para toda función continua $\psi : 2^\kappa \to 2^\kappa$, existe $x \in 2^\kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa : \varphi(x)(\alpha) = \psi(x)|\alpha\}$ contiene un club.